Математические заметки

т. 45, № 4 (1989)

ЭРГОДИЧНОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. А. Малышев, В. А. Подорольский, Т. С. Турова

Рассмотрим систему случайных величин ξ_z^t, занумерованных точками решетки $z \in \mathbf{Z}^\nu$, $t \in \mathbf{R}_+$, удовлетворяющих системе стохастических уравнений Ито:

$$d\xi_z^t = [b_0(\xi_z^t) + \varepsilon b_1(\xi_{z+D}^t)]\,dt + dW_z^t, \tag{1}$$

где $D = \{l_1 = 0, l_2, \ldots, l_N\} \subset \mathbf{Z}^\nu$, $\xi_{z+D}^t = (\xi_{z+l_1}^t, \ldots, \xi_{z+l_N}^t)$, а функции b_0: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и b_1: $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ удовлетворяют условиям:

а) существуют $\beta_0 > 0$, $Q > 0$ такие, что

$$b_0(u) > \beta_0, \text{ если } u < -Q, \qquad b_0(u) < -\beta_0, \text{ если } u > Q; \tag{2}$$

б) функция b_0 имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно, и для некоторого $B_0 > 0$

$$|b_0(u)|, \quad |b_0^{(n)}(u)| < B_0 \ (n = 1, 2, 3), \ u \in \mathbf{R}; \tag{3}$$

в) функция b_1 имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, и для некоторого $B_1 > 0$

$$|b_1(\bar u)|, \left|\frac{\partial}{\partial u_i} b_1(\bar u)\right|, \left|\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} b_1(\bar u)\right|, \left|\frac{\partial^3 b_1(\bar u)}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}\right| < B_1 \quad (1 \leqslant i, j, k \leqslant N). \tag{4}$$

Пусть, кроме того,

$$\xi_z^0 = \eta_z, \quad z \in \mathbf{Z}^\nu, \tag{1'}$$

где η_z — случайные величины такие, что для некоторых $a > 0$, $C > 0$

$$\mathsf{M} \exp\{a(|\eta_{z_1}| + \ldots + |\eta_{z_k}|)\} \leqslant C^k$$

для всех $k \in \mathbf{N}$; $z_1, \ldots, z_k \in \mathbf{Z}^\nu$; $z_i \neq z_j$, $i \neq j$.

Основной чертой этой системы является ее инвариантность относительно сдвигов решетки. Теоремы существования и единственности для таких систем рассматривались в [1, 2]. Однако, эргодичность исследовалась лишь для линейных систем [3], для систем со свойствами монотонности [4] или для подобных систем с дискретным временем [5, 6].

Здесь рассматривается случай малого возмущения системы без взаимодействия, т. е. системы процессов, занумерованных точками $z \in \mathbf{Z}^\nu$ и независимых для разных t при любой фиксированной реализации $\bar\eta = \{\eta_z\}$. Эта система (1) допускает полный контроль: явный ряд для предельных конечномерных распределений, экспоненциальная сходимость и т. д.

Основной результат настоящей статьи заключается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* ξ_z^t, $z \in \mathbf{Z}^\nu$, $t > 0$ — *процесс, заданный системой* (1), (1′), *причем выполнены условия* (2)—(4). *Тогда найдутся такие* $\varepsilon_0 > 0$, $\vartheta > 0$, $t_0 > 0$, *что для любого* X — *конечного подмножества* $\mathbf{Z}^\nu$, *любого* ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, *любых* $t \geqslant t_0$, $t' > 0$, $v_X \in \mathbf{R}^{|X|}$

$$|p^X(t + t', v_X) - p^X(t, v_X)| < \Theta(|X|)\,e^{-\vartheta t},$$

где $\Theta(|X|) > 0$, $p^X(t, v_X)$ — *плотность вероятности процесса* $(\xi_z^t, z \in X)$.

Заметим, что переходные вероятности $\mathsf{P}(\vec\xi, d\vec\xi', t)$ для бесконечной системы являются сингулярными мерами. Поэтому стандартные методы доказательства эргодичности здесь неприменимы. Наши методы объединяют метод функций Ляпунова для цепей с переходными плотностями, метод каплинга, метод параметрикса и метод кластерных разложений.

§ 1. Экспоненциальная сходимость плотности «невозмущенного» процесса.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$ — *одномерный однородный марковский процесс, для которого существуют плотности вероятностей переходов* p_{uv}^t *за время* t *из точки* u *в точку* v, *и пусть существуют такие* $0 < t_1 < t_2$, $Q > 0$, *что для некоторой неотрицательной монотонно возрастающей на* $[0, \infty)$ *функции* f *выполнены условия:*

А) *существуют* B, $\beta > 0$ *такие, что*

$$p_{uv}^\tau < Be^{\beta(f(|u|) - f(|v|))}, \quad p_{uv}^\tau < B, \ u, v \in \mathbf{R}, \ t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2; \tag{5}$$

В) *существуют* $E > 0$, $\varepsilon > 0$ *такие, что*

$$\mathsf{M}\{f(|\xi(t+\tau)|) - f(|\xi(t)|) \mid f(|\xi(t)|) = u\} < -\varepsilon, \tag{6}$$

$$\mathsf{M}\{[f(|\xi(t+\tau)|) - f(|\xi(t)|)]^2 \mid f(|\xi(t)|) = u\} < E \tag{7}$$

для любых $u > Q$, $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$.

Тогда найдутся такие $\Delta > 0,\ \delta > 0,\ 0 < h < \beta,\ t_0 > 0$, *что*

$$|p^{t+t'}_{uw} - p^{t}_{vw}| < \Delta e^{-\delta t} e^{h f(\max\{|u|,\,|v|\})}, \tag{8}$$

$$\int_{|x|>|w|} |p^{t+t'}_{ux} - p^{t}_{vx}|\, dx < \Delta e^{-\delta t} e^{h[f(\max\{|u|,\,|v|\}) - f(|w|)]} \tag{9}$$

для всех $u,\ v,\ w \in \mathbf{R},\ t' \geqslant 0,\ t \geqslant t_0$.

Доказательство теоремы 2 опирается на следующий результат, являющийся, по существу, аналогом леммы 1.1 работы [7]; приведем его без доказательства.

ЛЕММА 1. *Пусть* $\eta(t),\ t \in [0, \infty)$ — *однородный марковский процесс на прямой, для которого существуют плотности вероятностей переходов* π^{t}_{uv}, *и для некоторых* $0 < t_1 < t_2$ *выолняются условия:*

А) *существуют* $B > 0,\ \beta > 0$ *такие, что*

$$\pi^{\tau}_{uv} < B e^{\beta(u-v)},\quad u,\ v \in \mathbf{R},\quad t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2;$$

В) *существуют* $\mathrm{E} > 0,\ \varepsilon > 0$ *такие, что*

$$\mathsf{M}\{\eta(t+\tau) - \eta(t) \mid \eta(t) = u\} < -\varepsilon,$$

$$\mathsf{M}\{[\eta(t+\tau) - \eta(t)]^2 \mid \eta(t) = u\} < \mathrm{E}$$

для любых $u \in \mathbf{R},\ t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$.

Тогда найдутся такие $A > 0,\ \alpha > 0,\ 0 < h < \beta$, *что*

$$\mathsf{P}\{\eta(t) > v \mid \eta(0) = u\} < A e^{-\alpha t} e^{h(u-v)},\quad u,\ v \in \mathbf{R},\ t > 0.$$

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ на $\mathbf{R}^2$, $t = 0,\ t_1,\ 2t_1, \ldots$, заданный плотностями вероятностей переходов за время t_1 из точки (u, v) в точку (u', v'):

$$p(t_1; u, v; u', v') = \begin{cases} p^{t_1}_{uu'}\delta_{u'v'}, & \text{если } u = v, \\ p^{t_1}_{uu'} \cdot p^{t_1}_{vv'}, & \text{если } u \neq v,\ (u, v) \notin [-Q, Q]^2, \\ \chi(u, v; u', v') + \dfrac{1}{1 - \mathrm{X}(u, v)}(p^{t_1}_{uu'} - \chi(u, v; u', u')) \cdot & \\ \cdot (p^{t_1}_{vv'} - \chi(u, v; v', v')), & \text{если } u \neq v, \\ & (u, v) \in [-Q, Q]^2, \end{cases}$$

где

$$\chi(u, v; u', v') = \min\{p^{t_1}_{uu'}, p^{t_1}_{vv'}\},$$

$$\mathrm{X}(u, v) = \int_{\mathbf{R}} \chi(u, v; u', u')\, du',$$

δ_{uv} — δ-функция на $\mathbf{R}$, если одна из переменных (u, v) фиксирована ($\delta_{uv} = 0$, если $u \neq v$).

Отметим некоторые свойства процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$:

$$1)\ \int_{\mathbf{R}} p(t_1; u, v; u', v')\, dv' = p^{t_1}_{uu'},\qquad \int_{\mathbf{R}} p(t_1; u, v; u', v')\, du' = p^{t_1}_{vv'}; \tag{10}$$

2) если $(\xi_1(t), \xi_2(t)) = (u, v) \in [-Q, Q]^2$, то

$$\mathsf{P}\{\xi_1(t + t_1) = \xi_2(t + t_1) \mid (\xi_1(t), \xi_2(t)) = (u, v)\} = \int_{\mathbf{R}} p(t_1; u, v; u', u')\, du' = \mathrm{X}(u, v) > 0; \tag{11}$$

3) если $\xi_1(t) = \xi_2(t)$, то $\xi_1(t + t_1) = \xi_2(t + t_1)$.

ЛЕММА 2. *Пусть* λ — *момент первого попадания процесса* $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ *на множество* $q = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2\colon u = v\}$. *Тогда существуют такие* $\Gamma, \gamma, h > 0$, *что*

$$\mathsf{P}\{\lambda > t, |\xi_1(t)| > U, |\xi_2(t)| > V \mid (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v)\} \leqslant \Gamma e^{-\gamma t} e^{h[f(\max\{|u|,\,|v|\}) - f(\max\{U,\,V\})]},\quad \forall U, V \geqslant 0,\ u, v \in \mathbf{R}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $t = nt_1$. Положим

$$\bar{p}(t; u_0, v_0; u_n, v_n; T_1, \ldots, T_k) = \begin{cases} \int_{G_1} \cdots \int_{G_{n-1}} \left[\prod_{i=1}^{n} p(t_1; u_{i-1}, v_{i-1}; u_i, v_i)\right]\left[\prod_{j=1}^{n-1} du_j\, dv_j\right], & u_n \neq v_n; \\ 0, & u_n = v_n; \end{cases}$$

где

$$G_i = (\mathbf{R}^2 \setminus [-Q, Q]^2) \setminus q,\ \text{ если } it_1 \notin \{T_1, \ldots, T_k\},$$

$$G_i = [-Q, Q]^2 \setminus q,\ \text{ если } it_1 \in \{T_1, \ldots, T_k\};$$

$$\bar{p}(t; u_0, v_0; u_n, v_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{0 < T_1 < \ldots < T_k \leqslant t} \bar{p}(t; u_0, v_0, u_n, v_n; T_1, \ldots, T_k);$$

$$\bar{p}(t; u_0, v_0; G; T_1, \ldots, T_k) = \int_{G \setminus q} \bar{p}(t; u_0, v_0; u, v; T_1, \ldots, T_k)\, du\, dv; \tag{13}$$

$$\bar{p}(t; u_0, v_0; G) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{0 < T_1 < \ldots < T_k \leqslant t} \bar{p}(t, u_0, v_0; G; T_1, \ldots, T_k).$$

Покажем, что для

$$(u_0, v_0) \in [-Q, Q]^2,\ \tilde{Q} = [-Q, Q]^2,\ \bar{p}(t; u_0, v_0; \tilde{Q}) \leqslant \Gamma_1 e^{-\gamma_1 t},\quad \Gamma_1, \gamma_1 > 0. \tag{14}$$

Применяя лемму 1, нетрудно доказать следующее:

$$\mathsf{P}\{(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \notin \tilde{Q},\ \tau = t_1, 2t_1, \ldots, t,\ |\xi_1(t)| > U, |\xi_2(t)| > V \mid (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v)\} \leqslant A e^{-\alpha t} e^{h[f(\max\{|u|,\,|v|\}) - f(\max\{U,\,V\})]},\quad \forall u, v \in \mathbf{R};\ U, V > 0. \tag{15}$$

Откуда, в частности, следует: для некоторых $\tilde{A}, \tilde{\alpha} > 0$

$$\bar{p}(t; u_0, v_0; \tilde{Q}, t) \leqslant \tilde{A} e^{-\tilde{\alpha} t},\quad (u_0, v_0) \in \tilde{Q}. \tag{16}$$

Из положительной возвратности процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ и (11) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}(nt_1; u_0, v_0; \tilde{Q}; nt_1) \leqslant 1 - \varepsilon_1, \text{ где } \varepsilon_1 > 0. \quad (17)$$

Из (16) и (17) вытекает существование $z_0 > 1$, $\varepsilon_2 > 0$ таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_0^n \bar{p}(nt_1; u_0, v_0; \tilde{Q}; nt_1) < 1 - \varepsilon_2. \quad (18)$$

Учитывая (13) и используя (18), можно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_0^n \bar{p}(nt_1; u_0, v_0; \tilde{Q}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_2)^k < \infty,$$

что и доказывает (14).

Далее, из (14), (15) и (16) нетрудно вывести

$$\iint_{|x|>U,\ |y|>V} \bar{p}(t; u_0, v_0; x, y)\,dx\,dy \leqslant \Gamma_2 e^{-\gamma_2 t} e^{-hf(\max\{U, V\})} \quad (19)$$

для некоторых Γ_2, $\gamma_2 > 0$, $(u_0, v_0) \in \tilde{Q}$. Отсюда и из (15) получаем оценку (12).

Перейдем к доказательству теоремы 2. Из свойств процесса $(\xi_1(t), \xi_2(t))$

$$\int_{|x|>|w|} |p_{ux}^t - p_{vx}^t|\,dx \leqslant 2 \iint_{|x|>0,\ |y|>|w|} \bar{p}(t; u, v; x, y)\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant 2\Gamma e^{-\gamma t} e^{h[f(\max\{|u|, |v|\}) - f(|w|)]}.$$

Далее для $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$

$$\int_{|x|>|w|} |p_{ux}^{t+\tau} - p_{vx}^t|\,dx = \int_{|x|>|w|} \left| \int_{\mathbf{R}} p_{uy}^{\tau} p_{yx}^t\,dy - \int p_{uy}^{\tau} p_{vx}^t\,dy \right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathbf{R}} p_{uy}^{\tau} \cdot 2\Gamma e^{-\gamma t} \exp\{h[f(\max\{|y|, |v|\}) - f(|w|)]\}\,dy. \quad (20)$$

Используя условие (5), нетрудно вывести

$$\int_{|x|>|w|} |p_{ux}^{t+\tau} - p_{vx}^t|\,dx \leqslant \tilde{\Gamma} e^{-\gamma t} \exp\{h[f(\max\{|u|, |v|\}) - f(|w|)]\} \quad (21)$$

для $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$ и некоторой $\tilde{\Gamma} > 0$.

Если $t' > t_0$, где t_0 удовлетворяет: $t_1 \leqslant t_0 \left(\left[\frac{t_0}{t_2}\right] + 1\right)^{-1} < t_2$, $T = \left[\frac{t'}{t_2}\right] + 1$, то

$$\int_{|x|>|w|} |p_{ux}^{t+t'} - p_{vx}^t|\,dx \leqslant \int_{|x|>|w|} \sum_{k=1}^{T} |p_{ux}^{t+kt'/T} - p_{vx}^{t+(k-1)t'/T}|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \Delta_1 e^{-\gamma t} \exp\{h[f(\max\{|u|, |v|\}) - f(|w|)]\}, \text{ где } \Delta_1 > 0.$$

Аналогично получаем для $t', t'' > t_0$

$$\int_{|x|>|w|} |p_{ux}^{t+t''} - p_{vx}^{t+t'}|\,dx \leqslant \Delta_2 e^{-\gamma t} \exp\{h[f(\max\{|u|, |v|\}) - f(|w|)]\},$$

откуда и вытекает справедливость (9).

Утверждение (8) следует из ограниченности p_{uv}^{τ} при $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$ и неравенства

$$|p_{uw}^{t+t'} - p_{vw}^t| \leqslant \int_{\mathbf{R}} |p_{ux}^{t+t'-\tau} - p_{vx}^{t-\tau}|\, p_{xw}^{\tau}\,dx.$$

Теорема доказана.

§ 2. Свойства плотности переходной вероятности «невозмущенного» процесса. Рассмотрим уравнение

$$d\xi_t = b_0(\xi_t)\,dt + dW_t, \quad (22)$$

где функция $b_0(u)$, $u \in \mathbf{R}$ удовлетворяет условиям (2), (3). Известно (см., например, [8]), что при указанных ограничениях на b_0 процесс ξ_t обладает переходной плотностью $p_0(t, u, v)$, $t > 0$, $u, v \in \mathbf{R}$, такой, что существуют $(\partial/\partial t)p_0(t, u, v)$, $(\partial/\partial u)p_0(t, u, v)$, $(\partial^2/\partial u^2)p_0(t, u, v)$, $t > 0$, $u, v \in \mathbf{R}$, и $p_0(t, u, v)$ ограничена на любом отрезке $[t_1, t_2]$, $0 < t_1 < t_2 < \infty$.

ЛЕММА 3. *Существуют $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ такие, что*

$$p_0(t, u, v) < e^{\sigma_1 t} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-(u-v)^2/2t\cdot\sigma_2}, \quad (23)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} p_0(t, u, v) \right| < e^{\sigma_1 t} \frac{1}{t} e^{-(u-v)^2/2t\cdot\sigma_2} \quad (24)$$

для всех $t \geqslant 0$, $u, v \in \mathbf{R}$.

ЛЕММА 4. *Существуют $h > 0$, $\delta, \sigma_3 > 0$, $T > 0$ такие, что*
$p_0(t, u, v) < \sigma_3$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} p_0(t, u, v) \right| < \sigma_3 e^{-\delta t} e^{h|u|}$$

при $t > T$, $u, v \in \mathbf{R}$.

ЛЕММА 5. *Пусть T — величина, определенная леммой 4. Тогда существуют $\alpha, h, A > 0$ такие, что*

$$\int_{\mathbf{R}} p_0(t, u, v) e^{h|v|}\,dv < A e^{h|u|}, \quad t > 0; \quad (25)$$

$$\int_{\mathbf{R}} \left| \frac{\partial}{\partial u} p_0(t, u, v) \right| e^{h|v|}\,dv < A \frac{1}{\sqrt{t}} e^{h|u|}, \quad 0 < t \leqslant T; \quad (26)$$

$$\int_{\mathbf{R}} \left| \frac{\partial}{\partial u} p_0(t, u, v) \right| e^{h|v|}\,dv < A e^{-\alpha t} e^{h|u|}, \quad t > T. \quad (27)$$

Доказательства этих лемм носят чисто технический характер, и мы их опускаем.

§ 3. Существование плотностей переходных вероятностей для ξ_z^t, $z \in \mathbf{Z}^\nu$. Пусть Λ — ограниченное подмножество $\mathbf{Z}^\nu$, $D \subset \Lambda$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \xi_z^t = 0, & z \notin \Lambda; \\ d\xi_z^t = [b_0(\xi_z^t) + b_1(\xi_{z+D}^t)]\,dt + dW_z^t, & z \in \Lambda; \\ \xi_z^0 = u_z; \end{cases} \quad (28)$$

где $|u_z| < C$, $z \in \Lambda$. Эта система задает процесс на $\mathbf{R}^{|\Lambda|}$, переходная функция которого имеет плотность $p^\Lambda(t, u, v)$, $u = (u_z, z \in \Lambda)$, $v = (v_z, z \in \Lambda)$, удовлетворяющую обратному уравнению Колмогорова (доказательство этого факта при $|\Lambda| < \infty$ аналогично доказательству в одномерном случае (см., например, [8])). Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} p^\Lambda(t, u, v) = (H_0 + \varepsilon H_1)\, p^\Lambda(t, u, v), \tag{29}$$

где $H_0 = \sum_{z\in\Lambda} b_0(u_z)\frac{\partial}{\partial u_z} + \frac{1}{2}\sum_{z\in\Lambda}\frac{\partial^2}{\partial u_z^2}$, $H_1 = \sum_{z\in\Lambda} b_1(u_{z+D})\frac{\partial}{\partial u_z}$.

Плотность «невозмущенного» процесса, удовлетворяющую уравнению ($\varepsilon = 0$)

$$\frac{\partial}{\partial t} p^\Lambda(t, u, v) = H_0 p^\Lambda(t, u, v),$$

обозначим p_0^Λ. Поскольку всякое решение уравнения

$$p^\Lambda = p_0^\Lambda + \varepsilon \Phi p^\Lambda, \tag{30}$$

где $(\Phi p^\Lambda)(t, u, v) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^{|\Lambda|}} p_0^\Lambda(t - s, u, u^1)\, H_1 p^\Lambda(s, u^1, v)\, du^1 ds$, является решением уравнения (29), то решение (30) единственно (см., например, [9]). Ясно, что в случае сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \Phi^k p_0^\Lambda, \tag{31}$$

где $\Phi^0 p_0^\Lambda = p_0^\Lambda$, $\Phi^k p_0^\Lambda = \Phi\Phi^{k-1} p_0^\Lambda$ $(k = 1, 2, \ldots)$, это решение имеет вид

$$p^\Lambda = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \Phi^k p_0^\Lambda.$$

ЛЕММА 6. *Ряд* (31) *сходится абсолютно для любых* ε, $|\Lambda| < \infty$ *и равномерно по* $u, v \in \mathbf{R}^{|\Lambda|}$ *при всех* $t_0 > 0$, $t \geqslant t_0$.

Доказательство. По определению

$$\Phi^k p_0^\Lambda(t, u, v) = \sum_{\bar z = (z_1, \ldots, z_k) \in \Lambda^k} \int_0^{s_0} \cdots \int_0^{s_{k-1}} p_0^\Lambda(s_0 - s_1; u^0, u^1) \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=1}^k \left[b_1(u^i_{z_i+D}) \frac{\partial}{\partial u^i_{z_i}} p_0^\Lambda(s_i - s_{i+1}, u^i, u^{i+1}) \right] du^1 \ldots du^k\, d\bar s, \tag{32}$$

где $s_0 \equiv t$, $s_{k+1} \equiv 0$, $u^0 \equiv u$, $u^{k+1} \equiv v$, $d\bar s \equiv ds_k \ldots ds_1$.

Из (32) нетрудно получить

$$|\Phi^k p_0^\Lambda(t, u, v)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\bar z \in \Lambda^k} \int_0^{s_0} \cdots \int_0^{s_{k-1}} \Big(\prod_{y \in \{z_1, \ldots, z_k\}} \int_{\mathbf{R}^k} p_0(t - s_1, u_y, u_y^1) \cdot$$
$$\cdot \Big\{ \prod_{i:\, z_i = y} B_1 \Big| \frac{\partial}{\partial u_y^i} p_0(s_i - s_{i+1}, u_y^i, u_y^{i+1}) \Big| \Big\} \Big\{ \prod_{i:\, z_i \neq y} p_0(s_i - s_{i+1}, u_y^i, u_y^{i+1}) \Big\} \cdot$$
$$\cdot du_y^1 \ldots du_y^k \Big) d\bar s.$$

Отсюда и из (25)—(27) находим

$$|\Phi^k p_0^\Lambda(t, u, v)| \leqslant \sum_{\bar z \in \Lambda^k} \int_0^t \cdots \int_0^{s_{k-1}} A_1 \sigma_3^{|\Lambda| - |\{z_1, \ldots, z_k\}|} \cdot$$
$$\cdot \Big\{ \prod_{y \in \{z_1, \ldots, z_k\}} A e^{h|u_y|} \Big(\prod_{i:\, z_i = y} B_1 A F(s_i - s_{i+1})\, A \Big) \frac{e^{-\frac{(u_y - v_y)^2}{2t}\sigma_2}}{\sqrt{t}} \Big\} d\bar s, \tag{33}$$

где $A_1 > 0$,

$$F(\tau) = \begin{cases} 1/\sqrt{\tau}, & \tau < T; \\ e^{-\alpha\tau}, & \tau \geqslant T; \end{cases}$$

то есть

$$|\Phi^k p_0^\Lambda(t, u, v)| \leqslant |\Lambda|^k e^{khC} S^k \sigma_3^{|\Lambda|} \frac{t^{k/2}}{\left[\frac{k}{2}\right]!} \tag{34}$$

при некоторой $S = S(t_0) > 0$, откуда и вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть далее $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Рассмотрим

$$p^{\Lambda, X}(t, u_\Lambda, v_X) = \int_{\mathbf{R}^{|\Lambda| - m}} p^\Lambda(t, u, v) \prod_{z \in \Lambda \setminus X} dv_z,$$
$$v_X \in \mathbf{R}^{|X|}, \quad u_\Lambda \in \mathbf{R}^{|\Lambda|}.$$

ЛЕММА 7. *Существует*

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^\nu} p^{\Lambda, X}(t, u_\Lambda, v_X) \equiv p^X(t, u, v_X),$$
$$u = (u_z, z \in \mathbf{Z}^\nu), \quad |u_z| < C, \; z \in \mathbf{Z}^\nu. \tag{35}$$

Доказательство. В силу леммы 6

$$\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda| - m}} p^\Lambda(t, u, v) \prod_{z \in \Lambda \setminus X} dv_z = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \int_{\mathbf{R}^{|\Lambda| - m}} \Phi^k p_0^\Lambda(t, u, v) \cdot$$
$$\cdot \prod_{z \in \Lambda \setminus X} dv_z = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \sum_{\bar z \in \Lambda^k} \int_0^t \cdots \int_0^{s_{k-1}} \varphi(\bar s, \bar z, k, u, v) \cdot$$
$$\cdot \Big[\prod_{z \in \Lambda \setminus X} dv_z \Big] d\bar s, \tag{36}$$

где

$$\varphi(\bar s, \bar z, k, u, v) =$$
$$= \int_{\mathbf{R}^{|\Lambda| \cdot k}} p_0^\Lambda(t - s_1, u, u^1) \Big(\prod_{i=1}^k \Big[b_1(u^i_{z_i+D}) \frac{\partial}{\partial u^i_{z_i}} \cdot$$
$$\cdot p_0^\Lambda(s_i - s_{i+1}, u^i, u^{i+1}) \Big] \Big) du^1 \ldots du^k.$$

Определение. *Кластером мощности* k *с вершиной* X будем называть всякий вектор $\bar z = (z_1, \ldots, z_k)$ такой, что $\bar z \in \mathbf{Z}^{\nu \cdot k}$ и

1) $z_k \in X$,
2) $z_i \in \{\bigcup_{j=i+1}^k \{z_j + D\}\} \cup X$ $(i = 1, \ldots, k - 1)$.

Ясно, что суммирование в (36) производится фактически лишь по тем $\bar{z}$, которые являются кластерами, число которых не превосходит M^k, M — константа, зависящая от m, ν, N (см. [10]).

Таким образом, учитывая (34), получаем

$$\left|\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda|-m}} \Phi^k p_0^{\Lambda}(t, u, v) \prod_{z\in\Lambda\setminus X} \mathrm{d}v_z\right| \leqslant M^k S_1^k \sigma_3^m e^{hCk} \frac{t^{k-1/2}}{\left[\frac{k}{2}\right]!} \tag{37}$$

при некоторой $S_1 > 0$, т. е. ряд (36) равномерно по $|\Lambda| > 0$ сходится. Отсюда следует возможность перехода к пределу $\lim\limits_{|\Lambda|\to\infty}$ под знаком суммы ряда (36); и далее, из того, что

$$\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda|-m}} \Phi^k p_0^{\Lambda}(t, u, v) \prod_{z\in\Lambda\setminus X} \mathrm{d}v_z =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^{|\tilde{\Lambda}|-m}} \Phi^k p_0^{\tilde{\Lambda}}(t, u, v) \prod_{z\in\tilde{\Lambda}\setminus X} \mathrm{d}v_z, \tag{38}$$

для всех достаточно больших $|\Lambda|$, $|\tilde{\Lambda}|$ вытекает утверждение леммы.

§ 4. Экспоненциальная сходимость $p^X(t, u, v_X)$ при $t \to \infty$.

ТЕОРЕМА 3. *Существуют такие* $\varepsilon_0 > 0$, $\vartheta > 0$, *что для любого* X — *конечного подмножества* $\mathbf{Z}^\nu$ *и любого* ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, *найдутся такие* $t_0 > 0$, $\Theta = \Theta(|X|) > 0$, *что*

$$|p^X(t + t', u, v_X) - p^X(t, u, v_X)| \leqslant \Theta e^{-\vartheta t},$$

где $p^X(t, u, v_X)$ — *плотность конечномерного распределения процесса* ξ_z^t, $z \in X$, *удовлетворяющего системе уравнений* (1) *с начальными условиями* $\xi_z^0 = u_z$, $|u_z| < C$, $z \in \mathbf{Z}^\nu$.

Доказательство. В силу абсолютной сходимости ряда (36) и равенства (38)

$$|p^X(t + t', u, v_X) - p^X(t, u, v_X)| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\prod_{z\in X} p_0(t + t', u_z, v_z) - \prod_{z\in X} p_0(t, u_z, v_z)\right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left|\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda_k|-m}} (\Phi^k p_0^{\Lambda_k}(t + t', u, v) - \Phi^k p_0^{\Lambda_k}(t, u, v)) \prod_{z\in\Lambda_k\setminus X} \mathrm{d}v_z\right|,$$

где $\Lambda_k = \bigcup_{\bar{z}} \left(\bigcup_{i=1}^k \{z_i + D\}\right)$, а $\bar{z}$ — кластер мощности k с вершиной X. Оценим теперь разность

$$\left|\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda_k|-m}} (\Phi^k p_0^{\Lambda_k}(t + t', u, v) - \Phi^k p_0^{\Lambda_k}(t, u, v)) \prod_{z\in\Lambda_k\setminus X} \mathrm{d}v_z\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\bar{z}-\text{кластер}} (2\sigma_3)^{k-1} \int_{\mathbf{R}} \cdots \int_{\mathbf{R}} \left[\int_0^t \cdots \int_0^{s_{k-1}} \Bigl(\prod_{y\in\{z_1, \dots, z_k\}\cup X} \cdot\right.$$

$$\cdot \Bigl(\int_{\mathbf{R}^k} |p_0(t + t' - s_1, u_y, u_y^1) - p_0(t - s_1, u_y, u_y^1)| \cdot$$

$$\cdot \left\{\prod_{i:\, z_i=y} B_1 \left|\frac{\partial}{\partial u_y^i} p_0(s_i - s_{i+1}, u_y^i, u_y^{i+1})\right|\right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{\prod_{i:\, z_i\neq y} p_0(s_i - s_{i+1}, u_y^i, u_y^{i+1})\right\} \mathrm{d}u_y^1 \dots \mathrm{d}u_y^k\Bigr) \mathrm{d}\bar{s} +$$

$$+ \int_t^{t+t'} \cdots \int_0^{s_{k-1}} \Bigl[\prod_{y\in\Lambda_k} \int_{\mathbf{R}^{|\Lambda_k|-m}} p_0(t + t' - s_1, u_y, u_y^1) \cdot$$

$$\cdot \left[\prod_{i:\, z_i=y} B_1 \left|\frac{\partial}{\partial u_y^i} p_0(s_i - s_{i+1}, u_y^i, u_y^{i+1})\right|\right] \cdot$$

$$\left.\cdot \left\{\prod_{i:\, z_i\neq y} p_0(s_i - s_{i+1}, u_y^i, u_y^{i+1})\right\} \mathrm{d}u_y^k \dots \mathrm{d}u_y^1\Bigr] \mathrm{d}\bar{s}\right] \prod_{y\in\Lambda_k\setminus X} \mathrm{d}v_y.$$

С использованием предыдущих оценок получаем

$$\left|\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda_k|-m}} (\Phi^k p_0^{\Lambda_k}(t + t', u, v) - \Phi^k p_0^{\Lambda_k}(t, u, v)) \prod_{z\in\Lambda_k\setminus X} \mathrm{d}v_z\right| \leqslant$$

$$\leqslant M^k e^{hCk} \sigma_3^m S_2^k \left\{\int_0^t \cdots \int_0^{s_{k-1}} \Bigl(\prod_{i=0}^k F(s_i - s_{i+1})\Bigr) \mathrm{d}\bar{s} +\right.$$

$$\left. + \int_t^{t+t'} \cdots \int_0^{s_{k-1}} \Bigl(\prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1})\Bigr) \mathrm{d}\bar{s}\right\}, \tag{39}$$

где $S_2 > 0$ — некоторая постоянная, что в свою очередь не превосходит

$$M^k (\exp\{hCk\}) \sigma_3^m S_3^k \left(e^{-\vartheta_1 t} + \frac{(k+1)^{3/2}}{\sqrt{t}} T^{k/2}\right) \text{ при } k \geqslant \frac{t}{T}$$

и $\qquad S_3 > 0, \quad \vartheta_1 > 0,$

$$M^k e^{hCk} \sigma_3^m S_3^k e^{-\vartheta_1 t} \text{ при } k < \frac{t}{T},$$

где T из леммы 4.

Откуда

$$|p^X(t + t', u, v_X) - p^X(t, u, v_X)| \leqslant \Delta m \sigma_3^{m-1} e^{-\delta t} e^{hC} + \sigma_3^m A' e^{-\vartheta' t},$$

$$\Delta,\ A',\ \vartheta' > 0,$$

что и завершает доказательство теоремы 3.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что

$$p^X(t, v_X) = \mathsf{M}_{\bar{\eta}} p^X(t, \xi^0, v_X).$$

Далее, из утверждения леммы 1 находим, что постоянную h можно выбрать так, чтобы $0 < h < a$. Теперь нетрудно получить утверждение теоремы: для этого достаточно рассмотреть систему (1) с произвольным фиксированным начальным условием $\bar{\eta}'$ и затем повторить доказательство теоремы 3, используя вместо оценок

$$\prod_{z=z_1, \dots, z_k} e^{h|u_z|} \leqslant e^{hCk}$$

в формулах (33), (34) и (37) оценки

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{z=z_1, \ldots, z_k} e^{h|u_z|}\right\} \leqslant \mathsf{M}\left\{\prod_{z=z_1, \ldots, z_k} e^{a|u_z|}\right\} \leqslant C^k.$$

Теорема доказана.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
26.12.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Д а л е ц к и й Ю. В., Ф о м и н С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.
[2] H o l l e y R., S t r o o c k D. Diffusions on an infinite dimensional // J. Functional. Analysis. 1981. V. 42. P. 26—63.
[3] Т у р о в а Т. С. Линейные системы стохастических дифференциальных уравнений с взаимодействием и их возмущения // Численный анализ, математическое моделирование и их применение в механике / М.: МГУ, 1988. С. 117—120.
[4] Г и р я Т. В. Статистические решения нелинейных стохастических параболических и гиперболических уравнений. Дис .... канд. физ.-мат. наук. М., 1981.
[5] М а л ы ш е в В. А., И г н а т ю к И. А. Локально взаимодействующие процессы с некомпактным множеством значений // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1987. № 2. С. 3—6.
[6] И г н а т ю к И. А., М а л ы ш е в В. А. Кластерное разложение для локально взаимодействующих цепей Маркова//Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1988. № 5. С. 3—7.
[7] М а л ы ш е в В. А., М е н ь ш и к о в М. В. Эргодичность, непрерывность и аналитичность счетных цепей Маркова // Тр. ММО, 1979. Т. 39. С. 3—48.
[8] Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка. 1968.
[9] Ф р и д м а н А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
[10] М а л ы ш е в В. А., М и н л о с Р. А. Гиббсовские случайные поля. М.: Наука, 1985.

Салтыкову

ERGODICITY OF INFINITE SYSTEMS OF STOCHASTIC EQUATIONS

V. A. Malyshev, V. A. Podorol'skii, and T. S. Turova

We consider the system of random variables ξ_z^t, indexed by the lattice points $z \in \mathbf{Z}^\nu$, $t \in \mathbf{R}_+$, satisfying the system of Ito stochastic equations:

$$d\xi_z^t = [b_0(\xi_z^t) + \varepsilon b_1(\xi_{z+D}^t)]\, dt + dW_z^t, \tag{1}$$

where $D = \{l_1 = 0, l_2, \ldots, l_N\} \subset \mathbf{Z}^\nu$, $\xi_{z+D}^t = (\xi_{z+l_1}^t, \ldots, \xi_{z+l_N}^t)$, while the functions b_0: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ and b_1: $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ satisfy the conditions:

a) there exist $\beta_0 > 0$, $Q > 0$ such that

$$b_0(u) > \beta_0, \text{ if } u < -Q, \qquad b_0(u) < -\beta_0, \text{ if } u > Q; \tag{2}$$

b) the function b_0 has continuous derivatives up to and including the third order and for some $B_0 > 0$ one has

$$|b_0(u)|, \quad |b_0^{(n)}(u)| < B_0 \ (n = 1, 2, 3), \ u \in \mathbf{R}; \tag{3}$$

c) the function b_1 has continuous partial derivatives up to and inlcuding the third order and for some $B_1 > 0$ one has

$$|b_1(\bar{u})|, \left|\frac{\partial}{\partial u_i} b_1(\bar{u})\right|, \left|\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} b_1(\bar{u})\right|, \left|\frac{\partial^3 b_1(\bar{u})}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}\right| < B_1 \quad (1 \leqslant i, j, k \leqslant N). \tag{4}$$

Assume, in addition, that

$$\xi_z^0 = \eta_z, \quad z \in \mathbf{Z}^\nu, \tag{1'}$$

where η_z are random variables such that for some $a > 0$, $C > 0$ we have

$$\mathsf{M} \exp\{a(|\eta_{z_1}| + \ldots + |\eta_{z_k}|)\} \leqslant C^k$$

for all $k \in \mathbf{N}$; $z_1, \ldots, z_k \in \mathbf{Z}^\nu$; $z_i \neq z_j$, $i \neq j$.

The fundamental feature of this system is its invariance with respect to the lattice shifts. Existence and uniqueness theorems for such systems have been considered in [1, 2]. However, ergodicity has been investigated only for linear systems [3], for systems with monotonicity properties [4], or for similar systems with discrete time [5, 6].

Here we consider the case of a small perturbation of a system without interaction, i.e. a system of processes, indexed by the points $z \in \mathbf{Z}^\nu$ and independent for various t for any fixed realization $\eta = \{\eta_z\}$. This system (1) admits complete control: an explicit series for finite-dimensional limit distributions, exponential convergence, etc.

The fundamental result of this paper consists in the following theorem.

THEOREM 1. Let ξ_z^t, $z \in \mathbf{Z}^\nu$, $t > 0$, be the process defined by the system (1), (1') and assume that the conditions (2)-(4) are satisfied. Then there exist $\varepsilon_0 > 0$, $\vartheta > 0$, $t_0 > 0$, such that for any finite subset X of $\mathbf{Z}^\nu$, any ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, any $t \geqslant t_0$, $t' > 0$, $v_X \in \mathbf{R}^{|X|}$ we have

$$|p^X(t + t', v_X) - p^X(t, v_X)| < \Theta(|X|) e^{-\vartheta t},$$

where $\Theta(|X|) > 0$, $p^X(t, v_X)$ is the probability density of the process $(\xi_z^t, z \in X)$.

M. V. Lomonosov Moscow State University. Translated from Matematicheskie Zametki, Vol. 45, No. 4, pp. 78-88, April, 1989. Original article submitted December 26, 1988.

 0001-4346/89/4534-0318$12.50

We note that for an infinite system the transition probabilities $P(\vec{\xi}, d\vec{\xi}', t)$ are singular measures. Therefore, the standard methods for proving ergodicity cannot be applied here. Our methods combine the methods of Lyapunov functions for chains with transition densities, coupling methods, the parametric method, and the method of cluster expansions.

1. The Exponential Convergence of the Density of an "Unperturbed" Process. THEOREM 2. Let $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$ be a one-dimensional homogeneous Markov process, for which there exist densities p_{uv}^t of the probabilities of the transition in time t from the point u to the point v, and assume that there exist $0 < t_1 < t_2$, $Q > 0$ such that for some nonnegative function f, monotonically increasing on $[0, \infty)$, the following conditions hold:

A) there exist B, $\beta > 0$ such that

$$p_{uv}^\tau < B e^{\beta(f(|u|)-f(|v|))}, \quad p_{uv}^\tau < B, \; u, v \in \mathbf{R}, \; t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2; \tag{5}$$

B) there exist $E > 0$, $\varepsilon > 0$ such that

$$M\{f(|\xi(t+\tau)|) - f(|\xi(t)|) \mid f(|\xi(t)|) = u\} < -\varepsilon, \tag{6}$$

$$M\{[f(|\xi(t+\tau)|) - f(|\xi(t)|)]^2 \mid f(|\xi(t)|) = u\} < E \tag{7}$$

for any $u > Q$, $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$.

Then there exist $\Delta > 0$, $\delta > 0$, $0 < h < \beta$, $t_0 > 0$ such that

$$|p_{uw}^{t+t'} - p_{vw}^t| < \Delta e^{-\delta t} e^{h f(\max(|u|, |v|))}, \tag{8}$$

$$\int_{|x|>|w|} |p_{ux}^{t+t'} - p_{vx}^t| \, dx < \Delta e^{-\delta t} e^{h[f(\max(|u|, |v|)) - f(|w|)]} \tag{9}$$

for all $u, v, w \in \mathbf{R}$, $t' \geqslant 0$, $t \geqslant t_0$.

The proof of Theorem 2 is based on the following result which is, basically, an analogue of Lemma 1.1 of [7]; we give it without proof.

LEMMA 1. Let $\eta(t)$, $t \in [0, \infty)$ be a homogeneous Markov process on a line, for which there exist transition probability densities π_{uv}^t and such that for some $0 < t_1 < t_2$ one has:

A) there exist $B > 0$, $\beta > 0$ such that

$$\pi_{uv}^\tau < B e^{\beta(u-v)}, \; u, v \in \mathbf{R}, \quad t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2;$$

B) there exist $E > 0$, $\varepsilon > 0$ such that

$$M\{\eta(t+\tau) - \eta(t) \mid \eta(t) = u\} < -\varepsilon,$$

$$M\{[\eta(t+\tau) - \eta(t)]^2 \mid \eta(t) = u\} < E$$

for any $u \in \mathbf{R}$, $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$.

Then there exist $A > 0$, $\alpha > 0$, $0 < h < \beta$ such that

$$P\{\eta(t) > v \mid \eta(0) = u\} < A e^{-\alpha t} e^{h(u-v)}, \quad u, v \in \mathbf{R}, \; t > 0.$$

For the proof of Theorem 2 we consider the process $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ on $\mathbf{R}^2$, $t = 0, t_1, 2t_1, \ldots$, defined by the densities of the probabilities of transition in time t_1 from the point (u, v) into the point (u', v'):

$$p(t_1; u, v; u', v') = \begin{cases} p_{uu'}^{t_1} \delta_{u'v'}, & \text{if } u = v, \\ p_{uu'}^{t_1} \cdot p_{vv'}^{t_1}, & \text{if } u \neq v, \; (u, v) \notin [-Q, Q]^2, \\ \chi(u, v; u', v') + \dfrac{1}{1 - X(u, v)} (p_{uu'}^{t_1} - \chi(u, v; u', u')) \cdot \\ \cdot (p_{vv'}^{t_1} - \chi(u, v; v', v')), & \text{if } u \neq v, \\ & (u, v) \in [-Q, Q]^2, \end{cases}$$

where

$$\chi(u, v; u', v') = \min\{p_{uu'}^{t_1}, p_{vv'}^{t_1}\},$$

$$X(u, v) = \int_{\mathbf{R}} \chi(u, v; u', u') \, du',$$

δ_{uv} is the δ-function on $\mathbf{R}$ if one of the variables (u, v) is fixed ($\delta_{uv} = 0$ if $u \neq v$).

We mention some properties of the process $(\xi_1(t), \xi_2(t))$:

1) $\int_{\mathbf{R}} p(t_1; u, v; u', v')\,dv' = p^{t_1}_{uu'}, \qquad \int_{\mathbf{R}} p(t_1; u, v; u', v')\,du' = p^{t_1}_{vv'};$ (10)

2) if $(\xi_1(t), \xi_2(t)) = (u, v) \in [-Q, Q]^2$, then

$$\mathsf{P}\{\xi_1(t+t_1) = \xi_2(t+t_1) \mid (\xi_1(t), \xi_2(t)) = (u, v)\} = \int_{\mathbf{R}} p(t_1; u, v; u', u')\,du' = \mathrm{X}(u, v) > 0; \tag{11}$$

3) if $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ then $\xi_1(t+t_1) = \xi_2(t+t_1)$.

LEMMA 2. Let λ be the moment when the process $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ hits for the first time the set $q = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2\colon u = v\}$. Then there exist Γ, γ, $h > 0$ such that

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\{\lambda > t, |\xi_1(t)| > U, |\xi_2(t)| > V \mid (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v)\} \\ &\leqslant \Gamma e^{-\gamma t} e^{h[f(\max\{|u|, |v|\}) - f(\max\{U, V\})]}, \quad \forall U, V \geqslant 0, \; u, v \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{12}$$

Proof. Let $t = nt_1$. We set

$$\begin{aligned} &\bar{p}(t; u_0, v_0; u_n, v_n; T_1, \ldots, T_k) \\ &= \begin{cases} \int_{G_1} \cdots \int_{G_{n-1}} \left[\prod_{i=1}^{n} p(t_1; u_{i-1}, v_{i-1}; u_i, v_i)\right]\left[\prod_{j=1}^{n-1} du_j\, dv_j\right], & u_n \neq v_n; \\ 0, \quad u_n = v_n; \end{cases} \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} &G_i = (\mathbf{R}^2 \setminus [-Q, Q]^2) \setminus q, \quad \text{if} \quad it_1 \notin \{T_1, \ldots, T_k\}, \\ &G_i = [-Q, Q]^2 \setminus q, \quad \text{if} \quad it_1 \in \{T_1, \ldots, T_k\}; \\ &\bar{p}(t; u_0, v_0; u_n, v_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{0<T_1<\ldots<T_k\leqslant t} \bar{p}(t; u_0, v_0, u_n, v_n; \\ &\qquad\qquad T_1, \ldots, T_k); \\ &\bar{p}(t; u_0, v_0; G; T_1, \ldots, T_k) = \int_{G\setminus q} \bar{p}(t; u_0, v_0; u, v; T_1, \ldots, T_k)\,du\,dv; \\ &\bar{p}(t; u_0, v_0; G) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{0<T_1<\ldots<T_k\leqslant t} \bar{p}(t, u_0, v_0; G; T_1, \ldots, T_k). \end{aligned} \tag{13}$$

We show that for

$$(u_0, v_0) \in [-Q, Q]^2, \; \bar{Q} = [-Q, Q]^2, \; \bar{p}(t; u_0, v_0; \bar{Q}) \leqslant \Gamma_1 e^{-\gamma_1 t}, \quad \Gamma_1, \gamma_1 > 0. \tag{14}$$

Applying Lemma 1, it is easy to show that

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\{(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \notin \bar{Q}, \tau = t_1, 2t_1, \ldots, t, \\ &|\xi_1(t)| > U, |\xi_2(t)| > V \mid (\xi_1(0), \xi_2(0)) = (u, v)\} \leqslant A e^{-\alpha t} e^{h[f(\max\{|u|, |v|\}) - f(\max\{U, V\})]}, \\ &\forall u, v \in \mathbf{R}; \quad U, V > 0. \end{aligned} \tag{15}$$

From here, in particular, we obtain: for some $\tilde{A}$, $\tilde{\alpha} > 0$ we have

$$\bar{p}(t; u_0, v_0; \bar{Q}, t) \leqslant \tilde{A} e^{-\tilde{\alpha} t}, \quad (u_0, v_0) \in \bar{Q}. \tag{16}$$

From the positive recurrence of the process $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ and (11) there follows

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}(nt_1; u_0, v_0; \bar{Q}; nt_1) \leqslant 1 - \varepsilon_1, \text{where } \varepsilon_1 > 0. \tag{17}$$

From (16) and (17) there follows the existence $z_0 > 1$, $\varepsilon_2 > 0$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_0^n \bar{p}(nt_1; u_0, v_0; \bar{Q}; nt_1) < 1 - \varepsilon_2. \tag{18}$$

Taking into account (13) and making use of (18) one can show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_0^n \bar{p}(nt_1; u_0, v_0; \bar{Q}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_2)^k < \infty,$$

which proves (14).

Now, from (14), (15), and (16) it is easy to derive

$$\iint_{|x|>U,\ |y|>V} \bar{p}(t: u_0, v_0: x, y)\,dx\,dy \leqslant \Gamma_2 e^{-\gamma_2 t} e^{-hf(\max\{U, V\})} \tag{19}$$

for some $\Gamma_2, \gamma_2 > 0$, $(u_0, v_0) \in \tilde{Q}$. From here and from (15) we obtain the estimate (12).

We proceed to the proof of Theorem 2. From the properties of the process $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ we have

$$\int_{|x|>|w|} | p^t_{ux} - p^t_{vx} |\,dx \leqslant 2 \iint_{|x|>0,\ |y|>|w|} \bar{p}(t: u, v; x, y)\,dx\,dy \leqslant 2\Gamma e^{-\gamma t} e^{h[f(\max\{|u|, |v|\}) - f(|w|)]}.$$

Then, for $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$ we have

$$\int_{|x|>|w|} | p^{t+\tau}_{ux} - p^t_{vx} |\,dx = \int_{|x|>|w|} \left| \int_{\mathbf{R}} p^\tau_{uy} p^t_{yx}\,dy - \int p^\tau_{uy} p^t_{vx}\,dy \right| dx$$
$$\leqslant \int_{\mathbf{R}} p^\tau_{uy} \cdot 2\Gamma e^{-\gamma t} \exp\{h [f(\max\{|y|, |v|\}) - f(|w|)]\}\,dy. \tag{20}$$

Making use of condition (5), it is easy to derive

$$\int_{|x|>|w|} | p^{t+\tau}_{ux} - p^t_{vx} |\,dx \leqslant \tilde{\Gamma} e^{-\gamma t} \exp\{h [f(\max\{|u|, |v|\}) - f(|w|)]\} \tag{21}$$

for $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$ and for some $\tilde{\Gamma} > 0$.

If $t' > t_0$, where t_0 satisfies : $t_1 \leqslant t_0 \left(\left[\frac{t_0}{t_2}\right] + 1\right)^{-1} < t_2$, $T = \left[\frac{t'}{t_2}\right] + 1$, then

$$\int_{|x|>|w|} | p^{t+t'}_{ux} - p^t_{vx} |\,dx \leqslant \int_{|x|>|w|} \sum_{k=1}^{T} | p^{t+kt'/T}_{ux} - p^{t+(k-1)t'/T}_{vx} |\,dx$$
$$\leqslant \Delta_1 e^{-\gamma t} \exp\{h [f(\max\{|u|, |v|\}) - f(|w|)]\}, \text{where } \Delta_1 > 0.$$

In a similar manner, for t', $t'' > t_0$ we obtain

$$\int_{|x|>|w|} | p^{t+t''}_{ux} - p^{t+t'}_{vx} |\,dx \leqslant \Delta_2 e^{-\gamma t} \exp\{h [f(\max\{|u|, |v|\}) - f(|w|)]\},$$

from where there follows the validity of (9).

Statement (8) follows from the boundedness of p^τ_{uv} for $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$ and from the inequality

$$| p^{t+t'}_{uw} - p^t_{vw} | \leqslant \int_{\mathbf{R}} | p^{t+t'-\tau}_{ux} - p^{t-\tau}_{vx} |\, p^\tau_{xw}\,dx.$$

The theorem is proved.

2. Properties of the Density of the Transition Probability of the "Unperturbed" Process. We consider the equation

$$d\xi_t = b_0(\xi_t)\,dt + dW_t, \tag{22}$$

where the function $b_0(u)$, $u \in \mathbf{R}$ satisfies the conditions (2), (3). It is known (see, for example, [8]) that under the indicated restrictions on b_0 the process ξ_t has transition density $p_0(t, u, v)$, $t > 0$, $u, v \in \mathbf{R}$ such that there exist $(\partial/\partial t)p_0(t, u, v)$, $(\partial/\partial u)p_0(t, u, v)$, $(\partial^2/\partial u^2)p_0(t, u, v)$, $t>0$, $u, v \in \mathbf{R}$, and $p_0(t, u, v)$ is bounded on any segment $[t_1, t_2]$, $0 < t_1 < t_2 < \infty$.

LEMMA 3. There exist σ_1, $\sigma_2 > 0$ such that

$$p_0(t, u, v) < e^{\sigma_1 t} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-(u-v)^2/2t \cdot \sigma_2}, \tag{23}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} p_0(t, u, v) \right| < e^{\sigma_1 t} \frac{1}{t} e^{-(u-v)^2/2t \cdot \sigma_2} \tag{24}$$

for all $t \geqslant 0$, $u, v \in \mathbf{R}$.

LEMMA 4. There exist $h > 0$, δ, $\sigma_3 > 0$, $T > 0$ such that

$$p_0(t,u,v)<\sigma_3,$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial u}p_0(t,u,v)\right|<\sigma_3 e^{-\delta t}e^{h|u|}$$

for $t>T$, $u,v\in\mathbf{R}$.

LEMMA 5. Let T be the quantity defined by Lemma 4. Then there exist α, h, A > 0 such that

$$\int_{\mathbf{R}} p_0(t,u,v)e^{h|v|}dv<Ae^{h|u|},\quad t>0; \tag{25}$$
$$\int_{\mathbf{R}}\left|\frac{\partial}{\partial u}p_0(t,u,v)\right|e^{h|v|}dv<A\frac{1}{\sqrt{t}}e^{h|u|},\quad 0<t\leqslant T; \tag{26}$$
$$\int_{\mathbf{R}}\left|\frac{\partial}{\partial u}p_0(t,u,v)\right|e^{h|v|}dv<Ae^{-\alpha t}e^{h|u|},\quad t>T. \tag{27}$$

The proofs of these lemmas carry a purely technical character and we omit them.

3. Existence of the Densities of the Transition Probabilities for ξ_z^t, $z\in\mathbf{Z}^\nu$. Let Λ be a bounded subset of $\mathbf{Z}^\nu$, and let $D\subset\Lambda$. We consider the system

$$\begin{cases}\xi_z^t=0, & z\notin\Lambda;\\ d\xi_z^t=[b_0(\xi_z^t)+b_1(\xi_{z+D}^t)]\,dt+dW_z^t, & z\in\Lambda;\\ \xi_z^0=u_z;\end{cases} \tag{28}$$

where $|u_z|<C$, $z\in\Lambda$. This system defines a process on $\mathbf{R}^{|\Lambda|}$, whose transition function has density $p^\Lambda(t,u,v)$, $u=(u_z,z\in\Lambda)$, $v=(v_z,z\in\Lambda)$, satisfying the inverse Kolmogorov equation (the proof of this fact for $|\Lambda|<\infty$ is similar to the proof in the one-dimensional case (see, for example, [8]). Thus,

$$\frac{\partial}{\partial t}p^\Lambda(t,u,v)=(H_0+\varepsilon H_1)p^\Lambda(t,u,v), \tag{29}$$

where $H_0=\sum_{z\in\Lambda}b_0(u_z)\frac{\partial}{\partial u_z}+\frac{1}{2}\sum_{z\in\Lambda}\frac{\partial^2}{\partial u_z^2}$, $H_1=\sum_{z\in\Lambda}b_1(u_{z+D})\frac{\partial}{\partial u_z}$. The density of the "unperturbed" process, satisfying the equation (ε = 0)

$$\frac{\partial}{\partial t}p^\Lambda(t,u,v)=H_0p^\Lambda(t,u,v),$$

will be denoted by p_0^Λ. Since each solution of the equation

$$p^\Lambda=p_0^\Lambda+\varepsilon\Phi p^\Lambda, \tag{30}$$

where $(\Phi p^\Lambda)(t,u,v)=\int_0^t\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda|}}p_0^\Lambda(t-s,u,u^1)H_1p^\Lambda(s,u^1,v)\,du^1ds$, is a solution of equation (29), it follows that the solution of (30) is unique (see, for example, [9]). It is clear that in the case of the convergence of the series

$$\sum_{k=0}^\infty\varepsilon^k\Phi^kp_0^\Lambda, \tag{31}$$

where $\Phi^0p_0^\Lambda=p_0^\Lambda$, $\Phi^kp_0^\Lambda=\Phi\Phi^{k-1}p_0^\Lambda$ $(k=1,2,\ldots)$, this solution has the form

$$p^\Lambda=\sum_{k=0}^\infty\varepsilon^k\Phi^kp_0^\Lambda.$$

LEMMA 6. The series (31) converges absolutely for each ε, $|\Lambda|<\infty$ and uniformly with respect to $u,v\in\mathbf{R}^{|\Lambda|}$ for all $t_0>0$, $t\geqslant t_0$.

Proof. By definition,

$$\Phi^kp_0^\Lambda(t,u,v)=\sum_{\bar z=(z_1,\ldots,z_k)\in\Lambda^k}\int_0^{s_0}\cdots\int_0^{s_{k-1}}p_0^\Lambda(s_0-s_1;u^0,u^1)\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^k\left[b_1(u_{z_i+D}^i)\frac{\partial}{\partial u_{z_i}^i}p_0^\Lambda(s_i-s_{i+1},u^i,u^{i+1})\right]du^1\ldots du^k\,d\bar s, \tag{32}$$

where $s_0 \equiv t$, $s_{k+1} \equiv 0$, $u^0 \equiv u$, $u^{k+1} \equiv v$, $d\bar{s} \equiv ds_k \dots ds_1$.

From (32) it is easy to obtain

$$|\Phi^k p_0^\Lambda(t, u, v)| \leqslant \sum_{\bar{z}\in\Lambda^k} \int_0^{s_0} \dots \int_0^{s_{k-1}} \Big(\prod_{y\in\{z_1, \dots, z_k\}} \int_{\mathbf{R}^k} p_0(t - s_1, u_y, u_y^1) \cdot$$
$$\cdot \Big\{ \prod_{i:\, z_i = y} B_1 \Big| \frac{\partial}{\partial u_y^i} p_0(s_i - s_{i+1}, u_y^i, u_y^{i+1}) \Big| \Big\} \Big\{ \prod_{i:\, z_i \neq y} p_0(s_i - s_{i+1}, u_y^i, u_y^{i+1}) \Big\} \cdot du_y^1 \dots du_y^k \Big) d\bar{s}.$$

From here and from (25)-(27) we find

$$|\Phi^k p_0^\Lambda(t, u, v)| \leqslant \sum_{\bar{z}\in\Lambda^k} \int_0^t \dots \int_0^{s_{k-1}} A_1 \sigma_3^{|\Lambda| - |\{z_1, \dots, z_k\}|} \cdot$$
$$\cdot \Big\{ \prod_{y\in\{z_1, \dots, z_k\}} A e^{h|u_y|} \Big(\prod_{i:\, z_i = y} B_1 A F(s_i - s_{i+1}) A \Big) \frac{e^{-\frac{(u_y - v_y)^2}{2t}\sigma_2}}{\sqrt{t}} \Big\} d\bar{s}, \tag{33}$$

where $A_1 > 0$,

$$F(\tau) = \begin{cases} 1/\sqrt{\tau}, & \tau < T; \\ e^{-\alpha\tau}, & \tau \geqslant T; \end{cases}$$

therefore,

$$|\Phi^k p_0^\Lambda(t, u, v)| \leqslant |\Lambda|^k e^{khC} S^k \sigma_3^{|\Lambda|} \frac{t^{k/2}}{\left[\frac{k}{2}\right]!} \tag{34}$$

for some $S = S(t_0) > 0$, from where we obtain the assertion of the lemma. The lemma is proved.

Assume further that $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. We consider

$$p^{\Lambda, X}(t, u_\Lambda, v_X) = \int_{\mathbf{R}^{|\Lambda| - m}} p^\Lambda(t, u, v) \prod_{z\in\Lambda\setminus X} dv_z,$$
$$v_X \in \mathbf{R}^{|X|}, \quad u_\Lambda \in \mathbf{R}^{|\Lambda|}.$$

<u>LEMMA 7</u>. There exists

$$\lim_{\Lambda\uparrow \mathbf{Z}^\nu} p^{\Lambda, X}(t, u_\Lambda, v_X) \equiv p^X(t, u, v_X),$$
$$u = (u_z, z \in \mathbf{Z}^\nu), \quad |u_z| < C, \ z \in \mathbf{Z}^\nu. \tag{35}$$

<u>Proof</u>. By virtue of Lemma 6 we have

$$\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda| - m}} p^\Lambda(t, u, v) \prod_{z\in\Lambda\setminus X} dv_z = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \int_{\mathbf{R}^{|\Lambda| - m}} \Phi^k p_0^\Lambda(t, u, v) \cdot$$
$$\cdot \prod_{z\in\Lambda\setminus X} dv_z = \sum_{k=0}^\infty \varepsilon^k \sum_{\bar{z}\in\Lambda^k} \int_0^t \dots \int_0^{s_{k-1}} \varphi(\bar{s}, \bar{z}, k, u, v) \cdot \Big[\prod_{z\in\Lambda\setminus X} dv_z\Big] d\bar{s}, \tag{36}$$

where

$$\varphi(\bar{s}, \bar{z}, k, u, v) = \int_{\mathbf{R}^{|\Lambda|\cdot k}} p_0^\Lambda(t - s_1, u, u^1) \Big(\prod_{i=1}^k \Big[b_1(u^i_{z_i + D}) \frac{\partial}{\partial u^i_{z_i}} \cdot p_0^\Lambda(s_i - s_{i+1}, u^i, u^{i+1}) \Big] \Big) du^1 \dots du^k.$$

<u>Definition</u>. By a cluster of power k with vertex X we shall mean any vector $\bar{z} = (z_1, \dots, z_k)$ such that $\bar{z} \in \mathbf{Z}^{\nu\cdot k}$ and

1) $z_k \in X$,

2) $z_i \in \{\bigcup_{j=i+1}^k \{z_j + D\}\} \cup X \quad (i = 1, \dots, k-1)$.

Clearly, the summation in (36) is carried out in fact only over those $\bar{z}$ which are clusters, the number of which does not exceed M^k, M being a constant that depends on m, ν, N (see [10]).

Thus, taking into account (34), we obtain

$$\left|\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda|-m}} \Phi^k p_0^{\Lambda}(t, u, v)\prod_{z\in\Lambda\setminus X} dv_z\right| \leqslant M^k S_1^k \sigma_3^m e^{hCk}\frac{t^{k-1/2}}{\left[\frac{k}{2}\right]!} \tag{37}$$

for some $S_1 > 0$, i.e., the series (36) converges uniformly with respect to $|\Lambda| > 0$. From here there follows the possibility of taking the limit $\lim\limits_{|\Lambda|\to\infty}$ under the summation sign of the series (36); further, from the fact that

$$\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda|-m}} \Phi^k p_0^{\Lambda}(t, u, v)\prod_{z\in\Lambda\setminus X} dv_z = \int_{\mathbf{R}^{|\tilde\Lambda|-m}} \Phi^k p_0^{\tilde\Lambda}(t, u, v)\prod_{z\in\tilde\Lambda\setminus X} dv_z, \tag{38}$$

for all sufficiently large $|\Lambda|$, $|\tilde\Lambda|$, we obtain the assertion of the lemma.

4. The Exponential Convergence of $p^X(t, u, v_X)$ for $t \to \infty$.

THEOREM 3. There exist $\varepsilon_0 > 0$, $\vartheta > 0$, such that for any finite subset X of Z^ν and any ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, there exist $t_0 > 0$, $\Theta = \Theta(|X|) > 0$, such that

$$|p^X(t+t', u, v_X) - p^X(t, u, v_X)| \leqslant \Theta e^{-\vartheta t},$$

where $p^X(t, u, v_X)$ is the density of the finite-dimensional distribution of the process ξ_z^t, $z \in X$, satisfying the system of equations (1) with initial conditions $\xi_z^0 = u_z$, $|u_z| < C$, $z \in \mathbf{Z}^\nu$.

Proof. By virtue of the absolute convergence of the series (36) and the equality (38), we have

$$|p^X(t+t', u, v_X) - p^X(t, u, v_X)| \leqslant \left|\prod_{z\in X} p_0(t+t', u_z, v_z) - \prod_{z\in X} p_0(t, u_z, v_z)\right|$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left|\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda_k|-m}} (\Phi^k p_0^{\Lambda_k}(t+t', u, v) - \Phi^k p_0^{\Lambda_k}(t, u, v))\prod_{z\in\Lambda_k\setminus X} dv_z\right|,$$

where $\Lambda_k = \bigcup_{\bar z}(\bigcup_{i=1}^k \{z_i + D\})$, while $\bar z$ is a cluster of power k with vertex X. Now we estimate the difference

$$\left|\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda_k|-m}} (\Phi^k p_0^{\Lambda_k}(t+t', u, v) - \Phi^k p_0^{\Lambda_k}(t, u, v))\prod_{z\in\Lambda_k\setminus X} dv_z\right| \leqslant \sum_{\bar z\text{-cluster}} (2\sigma_3)^{k-1}\int_{\mathbf{R}}\cdots\int_{\mathbf{R}}\left[\int_0^t\cdots\int_0^{s_{k-1}}\Big(\prod_{y\in\{z_1,\ldots,z_k\}\cup X}\cdot\right.$$
$$\cdot\Big(\int_{\mathbf{R}^k} |p_0(t+t'-s_1, u_y, u_y^1) - p_0(t-s_1, u_y, u_y^1)|\cdot\Big\{\prod_{i:\, z_i=y} B_1\left|\frac{\partial}{\partial u_y^i} p_0(s_i - s_{i+1}, u_y^i, u_y^{i+1})\right|\Big\}\cdot$$
$$\cdot\Big\{\prod_{i:\, z_i\neq y} p_0(s_i - s_{i+1}, u_y^i, u_y^{i+1})\Big\} du_y^1\ldots du_y^k\Big) d\bar s + \int_t^{t+t'}\cdots\int_0^{s_{k-1}}\Big[\prod_{y\in\Lambda_k}\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda_k|-m}} p_0(t+t'-s_1, u_y, u_y^1)\cdot$$
$$\cdot\Big[\prod_{i:\, z_i=y} B_1\left|\frac{\partial}{\partial u_y^i} p_0(s_i - s_{i+1}, u_y^i, u_y^{i+1})\right|\Big]$$
$$\left.\cdot\Big\{\prod_{i:\, z_i\neq y} p_0(s_i - s_{i+1}, u_y^i, u_y^{i+1})\Big\} du_y^k\ldots du_y^1\Big] d\bar s\right]\prod_{y\in\Lambda_k\setminus X} dv_y.$$

With the use of the previous estimates we obtain

$$\left|\int_{\mathbf{R}^{|\Lambda_k|-m}} (\Phi^k p_0^{\Lambda_k}(t+t', u, v) - \Phi^k p_0^{\Lambda_k}(t, u, v))\prod_{z\in\Lambda_k\setminus X} dv_z\right|$$
$$\leqslant M^k e^{hCk}\sigma_3^m S_2^k\left\{\int_0^t\cdots\int_0^{s_{k-1}}\Big(\prod_{i=0}^k F(s_i - s_{i+1})\Big) d\bar s + \int_t^{t+t'}\cdots\int_0^{s_{k-1}}\Big(\prod_{i=1}^k F(s_i - s_{i+1})\Big) d\bar s\right\}, \tag{39}$$

where $S_2 > 0$ is some constant, which, in turn, does not exceed

$$M^k(\exp\{hCk\})\sigma_3^m S_3^k\left(e^{-\vartheta_1 t} + \frac{(k+1)^{3/2}}{\sqrt{t}} T^{k/2}\right) \text{ for } k \geqslant \frac{t}{T}\quad S_3 > 0,\quad \vartheta_1 > 0,$$

and

$$M^k e^{hCk}\sigma_3^m S_3^k e^{-\vartheta_1 t} \text{ for } k < \frac{t}{T},$$

where T is defined in Lemma 4.

From here

$$|p^{\lambda}(t+t', u, v_X) - p^{X}(t, u, v_X)| \leqslant \Delta m \sigma_3^{m-1} e^{-\delta t} e^{hC} + \sigma_3^{m} A' e^{-\vartheta' t},$$

$$\Delta, A', \vartheta' > 0,$$

which concludes the proof of Theorem 3.

Proof of Theorem 1. We note that

$$p^{X}(t, v_X) = \mathsf{M}_{\bar{\eta}} p^{\mathbf{X}}(t, \xi^0, v_X).$$

Further, from the assertion of Lemma 1 we find that the constant h can be selected so that $0 < h < a$. Now it is easy to obtain the assertion of the theorem: for this it is sufficient to consider the system (1) with an arbitrary fixed initial condition $\bar{\eta}'$ and then to repeat the proof of Theorem 3, making use, instead of the estimates

$$\prod_{z=z_1, \dots, z_k} e^{h|u_z|} \leqslant e^{hCk}$$

in the formulas (33), (34), and (37), the estimates

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{z=z_1, \dots, z_k} e^{h|u_z|}\right\} \leqslant \mathsf{M}\left\{\prod_{z=z_1, \dots, z_k} e^{a|u_z|}\right\} \leqslant C^k.$$

The theorem is proved.

LITERATURE CITED

1. Yu. L. Daletskii and S. V. Fomin, Measures and Differential Equations in Infinite-Dimensional Spaces [in Russian], Nauka, Moscow (1983).
2. R. Holley and D. Stroock, "Diffusions on an infinite dimensional torus," J. Funct. Anal., 42, No. 1, 29-63 (1981).
3. T. S. Turova, "Linear systems of stochastic differential equations with interaction and their perturbations," in: Numerical Analysis, Mathematical Modeling and Their Application in Mechanics [in Russian], Moscow State Univ. (1988), pp. 117-120.
4. T. V. Girya, "The statistical solution of nonlinear stochastic patrabolic and hyperbolic equations," Candidate's Dissertation, Moscow (1981).
5. V. A. Malyshev and I. A. Ignatyuk, "Locally interacting processes with a noncompact set of values," Vestn. Mosk. Univ., Ser. Mat. Mekh., No. 2, 3-6 (1987).
6. I. A. Ignatyuk and V. A. Malyshev, "Cluster expansion for locally interacting Markov chains," Vestn. Mosk. Univ., Ser. Mat. Mekh., No. 5, 3-7 (1988).
7. V. A. Malyshev and M. V. Men'shikov, "Ergodicity, continuity, and analyticity of countable Markov chains," Trudy Mosk. Mat. Obshch., 39, 3-48 (1979).
8. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, Stochastic Differential Equations [in Russian], Naukova Dumka, Kiev (1968).
9. A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1964).
10. V. A. Malyshev and R. A. Minlos, Gibbs Random Fields [in Russian], Nauka, Moscow (1985).