

ISSN 0202—7488

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Том 24

Научный редактор
член-корр. АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1966 г.



МОСКВА 1986

1—1848

34. —, *Keane M.*, On the continuity of the percolations probability function. *Contemp. Math.*, 1984, 26, 61—65 (PЖMar, 1985, 6B300)
35. —, *Kesten H.*, Inequalities with applications to percolations and reliability. *J. Appl. Probab.*, 1985, 22, № 3, 556—569
36. *Campanino M., Russo L.*, An upper bound on the critical percolations probability for the three-dimensional cubic lattice. *Ann. Probab.*, 1985, 13, № 2, 478—491
37. *Chelidze T. L.*, Percolation and fracture. *Fears and Planet. Interiors*, 1982, 28, 93—101
38. *Durrett R.*, Some general results concerning the critical exponents of percolation processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor und verw. Geb.*, 1985, 69, 421—437 (PЖMar, 1985, 12B271)
39. —, *Nguen B.*, Thermodynamic inequalities for percolation. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 99, № 2, 253—269 (PЖMar, 1985, 12B270)
40. *Fortuin G. M., Kasteleyn P. W., Ginibre J.*, Correlation inequalities on some partially ordered sets. — *Commun. Math. Phys.*, 1971, 22, № 2, 89—103
41. *Hammersley J. M.*, Percolation processes: lower bounds for the critical probability. *Ann. Math. Statistics*, 1957, 28, № 3, 790—795 (PЖMar, 1959, 5066)
42. *Harris T. E.*, A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1960, 56, № 1, 13—20 (PЖMar, 1961, 1B211)
43. *Higuchi Y.*, Coexistence of the infinite (*) clusters. A remark on the square lattice site percolation. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1982, 61, № 1, 75—81
44. *Kesten H.*, The critical probability of bond percolation on the square lattice equal 1/2. *Commun. Math. Phys.*, 1980, 74, № 1, 41—54 (PЖMar, 1981, 2B431)
45. —, *Percolation theory for mathematicians*. Boston e. a.: Birkhäuser, 1982, 423 pp. ill. (*Progr. Probab. and Statist.*, Vol.) (PЖMar, 1985, 6B298K)
46. —, First-passage percolation and a higher dimensional generalization. *Contemp. Math.*, 1985, 41, 235—251
47. *Newman C. M., Schulman L. S.*, Number and density of percolating clusters. *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1981, 14, 1735—1743 (PЖMar, 1982, 2B237)
48. —, —, Infinite clusters in percolation models. *J. Stat. Phys.*, 1981, 26, № 3, 613—628
49. *Ord G., Whittington S. G.*, Lattice decorations and pseudo-continuum percolation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1980, 13, L307—L310
50. *Russo L.*, On the critical percolation probabilities. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1981, 56, 229—237
51. *Sykes M. F., Essam J. W.*, Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *J. Math. Phys.*, 1964, 5, 1117—1127
52. *Shante V. K., Kirkpatrick S.*, An introduction to percolation theory. *Adv. Phys.*, 1971, 20,
53. *Smythe R. T., Wierman J. C.*, First-passage percolation on the square lattice. *Lect. Notes Math.*, 1978, 671, VIII, 195 pp., ill. (PЖMar, 1979, 5B517)
54. *Toth B.*, A lower bound for the critical probability of the square lattice site percolation. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1985, 69, 19—22 (PЖMar, 1985, 8B162)
55. *Wierman J. C.*, Bond percolation on honeycomb and triangular lattices. *Adv. Appl. Probab.*, 1981, 13, 298—313 (PЖMar, 1981, 10B8)
56. —, Counterexample in percolation: the site percolation critical probabilities p_B and p_T are unequal for a class of fully triangulated graphs. *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1984, 17, 637—646 (PЖMar, 1984, 8B265)
57. —, A bond-percolation critical probability determination based on the star-triangle transformation. *J. Phys. A: Math. and Gen.*, 1984, 17, 1525—1530 (PЖMar, 1984, 11B242)
58. —, Duality for directed site percolations. — *Contemp. Math.*, 1985, 41, 363—380

УДК 519.248.22

УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ В ТЕОРИИ ПОЛЯ И МНОГОМАСШТАБНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

В. А. Мальшев

Настоящий обзор, предназначенный для быстрого введения и ознакомления с ситуацией, посвящен в основном методу многомасштабных кластерных разложений. Этот метод лежит в настоящий момент в центре современной математической физики и имеет уже большое число применений: ультрафиолетовые и инфракрасные проблемы в теории поля, фазовые переходы в системах с непрерывной симметрией, случайные блуждания без самопересечений и др. Владение этим методом предполагает изучение многих его простейших примеров, приемов и идей, часть из которых мы и поместили в настоящий обзор, выбрав из применений ультрафиолетовые (и частично инфракрасные) проблемы.

Основная линия развития этого метода в настоящее время представляется следующей. Возникновение его следует связывать с работой Глимма—Джаффе [2], которая, однако, использовала более ранние идеи Глимма. Эта работа была плохо понята из-за своей крайней технической сложности и развивалась несколькими сотрудниками Глимма и Джаффе.

Существенные идеи внес Галлаватти. Однако окончательное (или близкое к нему) оформление с полным использованием ренормгруппы и картины Вильсона метод получил в последних работах Гавендзкого—Купьянена (подробнее см. § 4, гл. 3).

С точки зрения классической теории вероятностей, рассматриваемый круг вопросов можно охарактеризовать так.

Рассмотрим трансляционно-инвариантное гауссово поле $\xi(x)$, $x \in R^V$, и будем изучать его гиббсовские перестройки с малым параметром λ при взаимодействии. Если $\langle \xi(x) \rangle = 0$ и $\int_{R^V} |\langle \xi(0) \xi(x) \rangle| dx < \infty$, то эта область доступна обычным кластерным разложениям. При этом, правда, надо предположить непрерывность $\xi(x)$ в каком-либо смысле или рассматривать поле $\xi(x)$ на решетке. Если условие абсолютной интегрируемости не выполнено, то контроль над предельной гиббсовской перестройкой называется инфракрасной проблемой. Если же $\xi(x)$ — обоб-

щенное поле с $\langle \xi(0) \xi(x) \rangle \sim \frac{C}{|x|^\alpha}$ при $|x| \rightarrow 0$, то трудности (зависящие от ν и α) возникают уже при контроле над гиббсовской перестройкой в конечном объеме — ультрафиолетовая проблема. При этом замечательно, что для применения техники многомасштабных разложений в конечном объеме не требуется малости λ . Далее, после построения гиббсовской перестройки в конечном объеме надо применять либо обычные, либо многомасштабные кластерные методы для термодинамического предельного перехода. Можно строить поле и сразу в бесконечном объеме.

Краткое содержание статьи следующее. В § 1 главы 1 дана сводка основных понятий из евклидовой квантовой теории поля, в § 2 — элементы диаграммной техники, § 3 — основы классической теории перенормировок. Простейшие применения метода многомасштабных разложений относятся к доказательству «наилучших» оценок диаграмм и БПХЦ-теоремы (см. § 4).

Глава 2, которая может читаться независимо от главы 1, посвящена введению в технику Гавендзкого—Купьянена, основанную на начальных идеях Вильсона. В §§ 1, 3 вводится ренорм-группа Вильсона и описывается стратегия Вильсона в нужном нам виде. В § 2 подробно рассматриваются нужные для дальнейшего одномасштабные кластерные разложения для ферми-полей на R^v . В § 4 рассматривается инфракрасно асимптотически свободная фермионная модель — аналог модели φ_v^4 , $v > 4$, при критическом значении массы и значении массы, большем критического. Случай $v=4$ не рассматривается, но он не требует особых усложнений. В § 5 строится ультрафиолетовая асимптотически свободная модель — фермионный аналог модели φ_3^4 . Мы применяем несколько другой метод пересуммирования, чем Гавендзкий—Купьянен.

Особое место во всей этой проблеме занимает трактовка «больших значений» поля, которая и отличает бозонный случай. Введение в эту проблему дается в § 5 главы 1, примерно соответствующем начальным идеям Галлаотти. Модель φ_3^4 построена в § 6 главы II. Мы не рассматриваем здесь во всей полноте технику Гавендзкого—Купьянена борьбы с большими значениями поля. Существует мнение, что этот вопрос может оказаться основным при построении четырехмерных моделей Янга—Миллса и в нем нет сейчас полной ясности.

В §§ 1, 2 главы 3 рассматриваются тесно связанные с данной проблематикой вопросы одномасштабных кластерных разложений: гиббсовские перестройки гауссовых полей на R^v , поля с дальнедействующим неограниченным потенциалом. В § 3 кратко обсуждаются две важные идеи Федербуша и Бэттла. В § 4 дан краткий библиографический обзор.

В основной части статьи свободно используются стандартные приемы и понятия из теории кластерных разложений. Многие куски работы можно читать независимо от других. Принята следующая система нумераций, где, например, ссылка (2.4.1) означает формулу (2) в § 4 главы 1.

Автор благодарит Джаффэ и Купьянена за полезные обсуждения.

Глава 1

ПЕРЕНОРМИРОВКИ И МНОГОМАСШТАБНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

§ 1. Основные определения

Здесь мы кратко напомним некоторые основные определения евклидовой квантовой теории поля в нужном нам виде (подробнее см. [3, 8]).

Алгебра \mathfrak{A} . Далее \mathcal{L} в зависимости от контекста будет означать пространство вещественных (иногда комплексных) функций $C_0^\infty(R^v)$, $S(R^v)$ или их пополнение по некоторому скалярному произведению. Мы будем рассматривать изоморфные \mathcal{L} пространства \mathcal{L}_B и \mathcal{L}_F : элементы \mathcal{L} обозначаются φ , элементы \mathcal{L}_B — $\xi(\varphi)$, элементы \mathcal{L}_F — $\psi(\varphi)$. Таким образом, например,

$$\xi(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 \xi(\varphi_1) + \lambda_2 \xi(\varphi_2), \quad \lambda_i \in R. \quad (1)$$

Пусть $P(\mathcal{L})$ — алгебра коммутативных многочленов от $\xi(\varphi)$. $G(\mathcal{L})$ — грассманова (супер)алгебра над \mathcal{L}_F . Можно ввести несколько экземпляров таких алгебр (индексы) и рассмотреть (супер)алгебру \mathfrak{A} с единицей, являющуюся их тензорным произведением. Образующими \mathfrak{A} являются $\xi_1(\varphi), \dots, \xi_m(\varphi), \psi_1(\varphi), \dots, \psi_n(\varphi), \varphi \in \mathcal{L}$.

Замечание 1. Далее число грассмановых образующих всегда четно $n=2k$, и обозначаются они $\psi_1(\varphi), \bar{\psi}_1(\varphi), i=1, \dots, k$. (Чтобы можно было определить OS-положительный фермиевский белый шум, см. ниже (10).)

Гауссовы функционалы. Мы будем изучать линейные функционалы $\langle \cdot \rangle$ на \mathfrak{A} со свойством $\langle 1 \rangle = 1$. Такой функционал называется гауссовым (с нулевыми средними), если для любых мономов

$$B = \xi^{(1)} \dots \xi^{(k)}, \quad F = \psi^{(1)} \dots \psi^{(n)},$$

где, например, $\xi^{(1)} = \xi_{i_1}(\varphi_{i_1})$ и т. д., имеет место

$$\langle BF \rangle = \langle B \rangle \langle F \rangle; \quad (2)$$

2)

$$\langle B \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ \sum \langle \xi^{(i_1)} \xi^{(j_1)} \rangle \dots \langle \xi^{(i_l)} \xi^{(j_l)} \rangle, & \text{если } k=2l, \end{cases} \quad (3)$$

и сумма берется по всем разбиениям множества $\{1, \dots, k\}$ на неупорядоченные пары $\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_l, j_l\}$;

$$\langle F \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \sum (-1)^{|\pi|} \langle \psi^{(i_1)} \psi^{(j_1)} \rangle \dots \langle \psi^{(i_m)} \psi^{(j_m)} \rangle, & \text{если } n=2m, \end{cases} \quad (4)$$

и сумма берется по всем подстановкам $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2m \\ i_1 & j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ таким, что $i_1 < j_1, \dots, i_m < j_m, i_1 < i_2 < \dots < i_m, |\pi|$ — четность π .

Положительность Нельсона — Симанзика. Мы говорим, что функционал $\langle \cdot \rangle$ на $P(\mathcal{L})$ удовлетворяет этому свойству, если существует вероятностное пространство (Ω, Σ, μ) , случайные величины $\xi_i(\varphi)$ на нем (т. е. обобщенное случайное поле), $\varphi \in \mathcal{L}$, что для любого монома B

$$\langle B \rangle = \int_{\Omega} B d\mu. \quad (5)$$

Физическая положительность (или OS -положительность) Введем инволюцию ϑ :

$$\text{в } R^v - \vartheta x = \vartheta(x^1, \dots, x^v) = (x^1, \dots, x^{v-1}, -x^v),$$

на функциях на $R^v - (\vartheta\varphi)(x) = \bar{\varphi}(\vartheta x)$, на $P(\mathcal{L})$ и $G(\mathcal{L}) - \vartheta\xi(\varphi) = \bar{\xi}(\vartheta\varphi)$,

$$\vartheta\psi_\alpha(\varphi) = \varepsilon_\alpha \bar{\psi}_{\pi(\alpha)}(\vartheta\varphi), \quad \vartheta\bar{\psi}_\alpha(\varphi) = \bar{\varepsilon}_\alpha \psi_{\pi(\alpha)}(\vartheta\varphi), \quad \vartheta^2 = 1, \quad (6)$$

где π — подстановка индексов ($\pi^2 = 1$) и $\varepsilon_\alpha, \bar{\varepsilon}_\alpha = \pm 1$. Конкретные значения π и знаков $\varepsilon_\alpha, \bar{\varepsilon}_\alpha$ удобно выбирать в зависимости от модели.

Инволюцию ϑ можно продолжить антилинейно на \mathfrak{A} , если потребовать, чтобы для всех $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$

$$\vartheta(A_1 A_2) = \vartheta(A_2) \vartheta(A_1). \quad (7)$$

Обозначим \mathfrak{A}_+ — подалгебру \mathfrak{A} , порожденную всеми $\xi(\varphi), \psi(\varphi), \bar{\psi}(\varphi)$ с $\text{supp } \varphi \subset \{x: x^v > 0\}$.

Функционал $\langle \cdot \rangle$ на \mathfrak{A} называется OS -положительным, если для всех $A \in \mathfrak{A}_+$

$$\langle (\vartheta A) A \rangle \geq 0. \quad (8)$$

Физическое гильбертово пространство. Введем в \mathfrak{A}_+ пред- скалярное произведение

$$(A_1, A_2) = \langle (\vartheta A_1) A_2 \rangle. \quad (9)$$

Обозначим I_0 — подпространство всех $A \in \mathfrak{A}_+$ с нулевой нормой.

Замыкание факторпространства \mathfrak{A}_+/I_0 по этому скалярному произведению называется физическим гильбертовым пространством $H_{\text{физ}}$.

Белый шум. Это есть гауссов функционал $\langle \cdot \rangle_{\sigma^2}$, определяемый посредством

$$\begin{aligned} \langle \xi_\alpha(\varphi) \xi_\beta(\varphi') \rangle_{\sigma^2} &= \delta_{\alpha\beta}(\varphi, \varphi') \sigma^2, \\ \langle \bar{\psi}_\alpha(\varphi) \psi_\beta(\varphi') \rangle_{\sigma^2} &= \delta_{\alpha\beta}(\varphi, \varphi') \sigma^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$(\varphi, \varphi') = \int_{R^v} \varphi(x) \overline{\varphi'(x)} dx. \quad (11)$$

Он обладает свойством физической положительности (тривиальным образом) и положительности Нельсона — Симанзика на $P(\mathcal{L})$.

Урезания. Если фиксирована функция $\kappa = \kappa(\cdot) \in \mathcal{L}$, то будем обозначать ее сдвиг на x через

$$\kappa_x = \kappa(\cdot - x),$$

и положим

$$\xi_\kappa(x) = \xi(\kappa_x).$$

Если κ есть δ -функция (и она принадлежит \mathcal{L}), то положим $\xi_\delta(x) \equiv \xi(x)$, $\psi(x) = \psi_\delta(x)$ и т. д. $\xi(x)$ называется полем в точке, а $\xi_\kappa(x)$ — урезанным полем в точке. Лагранжианом $L(x, \kappa)$ будем называть многочлен от $\xi_{\alpha, \kappa}(x)$, $\psi_{\alpha, \kappa}(x)$ и их производных. Положим $L(x) = L(x, \delta)$.

Евклидово действие. Так называется выражение

$$U_{\Lambda, \kappa} = \int_{R^v} \chi_\Lambda(x) L(x, \kappa) dx, \quad (12)$$

где $\chi_\Lambda(x)$ — индикатор куба Λ (возможно сглаженный).

Если имеет место положительность Нельсона — Симанзика, то интеграл в (12) понимается в каком-либо вероятностном смысле: в среднем квадратичном или с вероятностью 1. В остальных случаях удобно вводить норму в \mathfrak{A} так, чтобы $L(x, \kappa)$ был непрерывной функцией от x со значениями в банаховой алгебре \mathfrak{A} . На $G(\mathcal{L})$ это удобно сделать так: ввести антисимметрическое пространство Фока $F_a(\mathcal{L})$ над \mathcal{L} , отождествить $G(\mathcal{L})$ с алгеброй, порожденной операторами рождения $a^*(\varphi)$ в $\mathcal{F}_a(\mathcal{L})$, и положить, например, $\|\psi(\varphi)\| = \|a^*(\varphi)\|$. В действительности, однако, как выяснится далее, способ придания смысла интегралу (12) не очень существен.

Полезным является решетчатое урезание, когда интеграл (12) заменяется римановой суммой в точках решетки Z_ε^v , а $\kappa(x)$ имеет носитель в окрестности $\left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)^v$.

$$U_{\Lambda, \kappa} = \sum_{x \in Z^v} \chi_{\Lambda}(x) \varepsilon^v L(x, \kappa). \quad (12')$$

При этом производные в лагранжиане заменяются разностями

$$\frac{\partial \xi}{\partial \kappa} \rightarrow \frac{\xi(x + \varepsilon) - \xi(x)}{\varepsilon}.$$

Аксиомы Остервальдера—Шредера. Аксиомы евклидовой квантовой теории поля для функционала $\langle \cdot \rangle$ таковы:

I. Функции Швингера для $\Phi_i \in \mathcal{S}(R^v)$, т. е.

$$\langle \xi_{i_1}(\Phi_1) \dots \xi_{i_n}(\Phi_n) \psi_{j_1}(\Phi_{n+1}) \dots \bar{\psi}_{j_m}(\Phi_{n+m}) \rangle,$$

являются умеренными распределениями (т. е. непрерывны в топологии пространства Шварца);

II. Физическая положительность $\langle \cdot \rangle$;

III (Евклидова ковариантность). Обозначим векторы

$$\begin{aligned} \xi(x) &= (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)), & \psi(x) &= \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_m(x) \end{pmatrix}, \\ \bar{\psi}(x) &= (\bar{\psi}_1(x), \dots, \bar{\psi}_m(x)), \end{aligned}$$

Пусть заданы n -мерное представление $C(g)$ и m -мерное представление $D(g)$ группы вращений евклидова пространства R^v .

Тогда преобразования

$$\xi(x) \rightarrow \xi(x+a), \quad \psi(x) \rightarrow \psi(x+a), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x+a),$$

$$\xi(x) \rightarrow \xi(g^{-1}x) C(g), \quad \psi(x) \rightarrow D(g) \psi(g^{-1}x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(g^{-1}x) D^{-1}(g)$$

порождают группу автоморфизмов алгебры \mathfrak{A} .

Требуется, чтобы

$$\langle \alpha A \rangle \equiv \langle A \rangle$$

для всех α из этой группы автоморфизмов.

По поводу интересных классов представлений мы отсылаем читателя к другим работам.

Сходимость функционалов. Для построения функционалов, удовлетворяющих всем перечисленным аксиомам, пользуются предельными переходами.

Мы скажем, что последовательность $\langle \cdot \rangle_n$ сходится к $\langle \cdot \rangle$, если имеется сходимость всех функций Швингера. Если имеет место положительность Нельсона—Симанзика, то мы будем требовать больше: слабую сходимость всех конечномерных распределений, т. е. чтобы для всех $\xi(\varphi)$

$$\langle e^{i\xi(\varphi)} \rangle_n \rightarrow \langle e^{i\xi(\varphi)} \rangle.$$

Замечание 2. При доказательстве того, чтобы последовательность мер μ_n сходилась к мере μ , удобно доказывать равномерную сходимость последовательности функций $f_n(\lambda) \equiv \langle \exp i\lambda \xi(\varphi) \rangle_{\mu_n}$ в некоторой окрестности нуля.

Гиббсовские перестройки. Функционал $\langle \cdot \rangle_{\Lambda, \kappa}$ называется гиббсовской перестановкой функционала $\langle \cdot \rangle_0$ (с помощью лагранжиана L), если для всех $A \in \mathfrak{A}$ существует

$$\langle A \rangle_{\Lambda, \kappa} = Z_{\Lambda, \kappa}^{-1} \langle A \exp(-U_{\Lambda, \kappa}) \rangle_0, \quad (13)$$

и если существует

$$Z_{\Lambda, \kappa} \equiv \langle \exp(-U_{\Lambda, \kappa}) \rangle_0 \neq 0, \infty. \quad (14)$$

Если выполнено условие положительности Нельсона—Симанзика, то мы требуем, иными словами, чтобы средние от случайных величин в правых частях (13) и (14) были конечны. Вопрос о том, что значит «продолжить $\langle \cdot \rangle$ на экспоненты» в присутствии фермионов (т. е. $\psi(\varphi)$) каждый раз без труда решается отдельно.

Функциональный интеграл и снятие урезаний. Каждому лагранжиану L соответствует некоторый функционал

$$\langle \cdot \rangle = \lim_{\Lambda \uparrow R^v} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \lim_{\sigma^2 \rightarrow \infty} Z_{\Lambda, \kappa, \sigma^2}^{-1} \langle \cdot \exp(-U_{\Lambda, \kappa}) \rangle_{\sigma^2}, \quad (15)$$

если все эти пределы существуют.

Обсудим эти пределы. Первый предел $\sigma^2 \rightarrow \infty$ соответствует нестрого вводимому в физической литературе функциональному интегралу (переход $\sigma^2 \rightarrow \infty$ соответствует переходу к «несуществующей» лебеговой мере на $(R^v)^{R^v}$).

Часто удобнее этот переход сделать на решетке (по лебеговой мере для бозонов или с помощью интеграла Березина для фермионов).

Если потребовать, чтобы лагранжиан $L(x)$ был инвариантен относительно \mathfrak{d} и всех α , и если, кроме того, χ_{Λ} инвариантна относительно \mathfrak{d} , то можно надеяться при снятии ультрафиолетового урезания $\kappa \rightarrow \delta$ получить OS-положительный функционал, а после снятия объемного урезания $\Lambda \uparrow R^v$ (термодинамический предельный переход) и функционал, удовлетворяющий всем аксиомам.

Квадратичные лагранжианы. Часто бывает так, что $L = L^{(0)} + L^{(1)}$, где $L^{(0)}$ — квадратичный лагранжиан. Тогда удобно воспользоваться следующим свойством транзитивности гиббсовских перестроек:

$$\langle A \rangle \equiv Z^{-1} \langle A \exp(-U^{(0)} - U^{(1)}) \rangle_0 = \frac{\langle A \exp(-U^{(1)}) \rangle_{U^{(0)}}}{\langle \exp(-U^{(1)}) \rangle_{U^{(0)}}},$$

где

$$\langle \cdot \rangle_{U^{(0)}} = \frac{\langle \cdot \exp(-U^{(0)}) \rangle_0}{\langle \exp(-U^{(0)}) \rangle_0},$$

если все знаменатели отличны от нуля. Это свойство транзитивности выполнено, если $\exp(-U^{(0)} - U^{(1)}) = \exp(-U^{(0)}) \exp(-U^{(1)})$.

Это справедливо, если каждый моном в лагранжиане четен относительно грасмановых переменных, что далее всегда предполагается.

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 1. Предел гауссовских функционалов может быть только гауссовым. Перестройка гауссова функционала с помощью квадратичного лагранжиана (без линейных членов) может быть только гауссовой, если она существует.

Опыт показывает, что удобно построить сначала гауссов функционал, удовлетворяющий аксиомам Остервальдера—Шредера, а затем его перестройку неквадратичным лагранжианом.

Важнейшими примерами гауссовых функционалов являются свободное скалярное поле и поле Дирака.

Свободное скалярное поле. Рассмотрим обобщенное гауссово поле $\xi(\varphi)$ на R^v с

$$\langle \xi(\varphi) \rangle = 0, \quad \langle \xi(\varphi) \xi(\varphi') \rangle = \int_{R^v} \frac{\tilde{\varphi}(k) \overline{\varphi'(k)} dk}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}, \quad (16)$$

где

$$\tilde{\varphi}(k) = (2\pi)^{-\frac{v}{2}} \int_{R^v} \exp(i(k, x)) \varphi(x) dx,$$

$$k = (k^1, \dots, k^v), \quad (k, x) = k^1 x^1 + \dots + k^v x^v, \quad k^2 = (k^1)^2 + \dots + (k^v)^2.$$

При $\varepsilon=0$ это поле удовлетворяет аксиомам Остервальдера—Шредера и называется свободным скалярным полем.

Оно соответствует лагранжиану $m^2 \xi^2(x) + (\nabla \xi(x))^2$.

Поле Дирака. Нам понадобятся двумерное и четырехмерное поле Дирака. Поле Дирака на R^v ($v=2, 4$), $x = (x^0, \dots, x^{v-1})$ состоит из $2v$ компонент (x^0 здесь играет роль x^v),

$$\bar{\psi}(x) = (\bar{\psi}^1(x), \dots, \bar{\psi}^v(x)), \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \vdots \\ \psi^v(x) \end{pmatrix}.$$

Его лагранжиан имеет вид

$$L(x) = m \bar{\psi}(x) \psi(x) + \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) - \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \quad (16')$$

или

$$\int L(x) dx = \int m \bar{\psi} \psi dx + \int \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi dx,$$

где $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, по $\mu=0, \dots, v-1$ ведется суммирование. Евклидовы матрицы Дирака самосопряжены и удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_{\mu'} + \gamma_{\mu'} \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\mu'}$$

и могут быть выбраны, например, в виде

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{при } v=2;$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_j = i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_j \\ -\sigma_j & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \text{при } v=4.$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Удобно определить поле Дирака как предел решетчатой аппроксимации с периодическими граничными условиями в конечном объеме Λ

$$\langle A \rangle = \lim_{\Lambda \uparrow R^v} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\Lambda^{-1} \langle A \exp \left(- \sum_{x \in \Lambda \cap Z_\varepsilon^v} \varepsilon^v L(x) \right) \rangle_B, \quad (16'')$$

где $\langle \cdot \rangle_B$ — интеграл Березина и A — моном по полям.

Преобразование Фурье матричного ядра квадратичной формы в экспоненте (16'') в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет вид

$$m - i \gamma_\mu p^\mu \stackrel{\text{def}}{=} m - i \not{p}.$$

Используя свойства интеграла Березина, а также равенство

$$(m + i \not{p})(m - i \not{p}) \equiv (m - i \not{p})(m + i \not{p}) = m^2 + \not{p}^2,$$

нетрудно доказать, что

$$\langle \psi^\alpha(x) \bar{\psi}^\beta(y) \rangle = \text{const} \int e^{-i p(x-y)} \frac{(m + i \not{p})^{\alpha\beta}}{m^2 + p^2} d^v p. \quad (16''')$$

Из вида (16') подбирается инволюция ϑ , чтобы обеспечить OS -положительность. Например, при $v=2$ $\vartheta \psi_1(x) = \bar{\psi}_2(x)$, $\vartheta \psi_2(x) = -\bar{\psi}_1(x)$ и т. д.

Мы не будем в настоящей статье заниматься вопросами евклидовой инвариантности.

Формальная теория возмущений. Пусть даны гауссов функционал $\langle \cdot \rangle_0$ и евклидово действие $U = U_{\Lambda, \kappa}$. Рассмотрим формальные ряды по λ

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\Lambda, \kappa} &= Z_{\Lambda, \kappa}^{-1} \langle A \exp(-\lambda U) \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \langle A, U^n \rangle_0 = \\ &= \sum c_n(A) \lambda^n, \end{aligned} \quad (17)$$

$$Z_{\Lambda, \kappa} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \langle U^n \rangle_0 = \sum a_n \lambda^n,$$

$$\ln Z_{\Lambda, \kappa} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \langle U^n \rangle_0 = \sum b_n \lambda^n.$$

Как правило, при $\kappa \rightarrow \delta$ предел каждого члена этих рядов бесконечен. Цель формальной теории перенормировок — дать рецепт переопределения (перенормировки) лагранжиана L так, чтобы каждый член формального ряда по λ становился конечным при замене L на $L^{ren}(\lambda)$ (многочлен или формальный ряд по λ). Его коэффициенты являются многочленами от $\xi_*(x)$, $\psi_*(x)$, но уже с коэффициентами, зависящими от x , Λ , κ .

Имеется формулировка аксиом евклидовой теории для таких формальных рядов [116]. Процедура перенормировки рассматривается в § 3.

Нам понадобится форма остаточных членов в (17). Например,

$$\ln Z_{\Lambda, \kappa} = \sum_{n=1}^N \frac{(-\lambda)^n}{n!} \langle U^{,n} \rangle_0 + \frac{(-\lambda)^{N+1}}{(N+1)!} \langle U^{,N+1} \rangle_{\lambda'}, \quad (18)$$

где

$$\langle \cdot \rangle_{\lambda'} = \frac{\langle \cdot \exp(-\lambda' U) \rangle_0}{\langle \exp(-\lambda' U) \rangle_0}, \quad 0 \leq \lambda' \leq \lambda.$$

§ 2. Элементы диаграмматики

Здесь собраны элементарные понятия во многом на примере скалярного поля, связанные с оценками диаграмм, многие из которых нелегко отыскать в литературе.

Сингулярности. Двухчастичная функция Швингера поля (16.1) может быть записана в виде

$$\langle \xi(\varphi_1) \xi(\varphi_2) \rangle = \int C(x_1 - x_2) \varphi(x_1) \varphi(x_2) dx_1 dx_2,$$

где

$$C(x) = (2\pi)^{-\nu} \int_{R^{\nu}} \frac{\exp[i(k, x_1 - x_2)] dk}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}. \quad (1)$$

Лемма 1. Обобщенная функция умеренного роста $C(x)$ имеет следующие свойства при $\varepsilon = 0$:

(i) $C(x)$ — изотропная положительная аналитическая функция при $x \neq 0$ [8];

(ii) (сингулярность в нуле) при $|x| \rightarrow 0$

$$C(x) \rightarrow \langle \xi^2(0) \rangle > \infty, \quad \text{если } \nu = 1,$$

$$C(x) + (2\pi)^{-1} \ln x \rightarrow \text{const}, \quad \text{если } \nu = 2.$$

При $\varepsilon \geq 0$ и $\nu - 2(1 + \varepsilon) > 0$

$$C(x) \sim \frac{c}{|x|^{\nu-2(1+\varepsilon)}}. \quad (2)$$

Нам в основном понадобится только (2), которое доказывается заменой (скейлингом) $k = k'/|x|$:

$$C(x) = (2\pi)^{-\nu} \frac{1}{|x|^{\nu-2(1+\varepsilon)}} \int \frac{\exp\left[i\left(k', \frac{x}{|x|}\right)\right] dk'}{((k')^2 + |x|^2 m^2)^{1+\varepsilon}}.$$

Последний интеграл по области $|k'| \leq 1$ абсолютно сходится, в остальной области в его существовании можно убедиться интегрированием по частям.

Диаграммы. Диаграммой G будем называть множество $V = \{1, \dots, n\}$ (занумерованных вершин) и набор L упорядоченных пар вершин (ребра). Каждой вершине i ставится в соответствие точка $x_i \in R^{\nu}$, каждому ребру $l = (i(l), j(l))$ — «пропатор» $C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)})$. Мы считаем C_l ограниченной вне произвольной окрестности нуля. В этой главе C_l всегда четна. Диаграмме G ставится в соответствие функция

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_l C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)}), \quad (3)$$

определенная при $x_i \neq x_j$.

Поддиаграммой диаграммы G будем называть произвольное множество ребер $L' \subset L$ вместе со всеми инцидентными им вершинами. Для подмножества вершин $V' \subset V$ определим поддиаграмму $G(V')$, состоящую из всех ребер с обоими концами в V' . Поддиаграмма называется собственной, если она имеет вид $G(V')$ для некоторого V' и является связной и одночастично неприводимой (1 чн), т. е. при откидывании любого ребра она остается связной. Если заданы пересекающиеся множества вершин V_1, \dots, V_k , то факторграф $G/\{V_1, \dots, V_k\}$ определяется «стягиванием» всех ребер и вершин каждой $G(V_i)$ в одну точку.

Теорема 1 (ультрафиолетовая теорема счета степеней). Пусть при $|x| \rightarrow 0$ и $|k| \rightarrow \infty$

$$C_l(x) \sim \frac{c}{|x|^{\nu-\alpha_l}}, \quad \tilde{C}_l(k) \sim \frac{c}{|k|^{\alpha_l}}, \quad 0 < \alpha_l < \nu \quad (4)$$

(при довольно слабых предположениях из одного этого условия следует другое).

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $G(x_1, \dots, x_n)$ локально интегрируема, т. е. для любых ограниченных $g_v(x_v)$ с компактными носителями интеграл

$$\int G(x_1, \dots, x_n) \prod_{v \in V} g_v(x_v) dx_v \quad (5)$$

конечен.

2) Для любого $V' \subset V$ ($G' = G(V')$)

$$\omega_{G'} \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{l \in L'} \alpha_l + \nu(|L'| - |V'| + 1) < 0 \quad (6)$$

где L' , V' — множества ребер и вершин G' .

3) Для любой собственной G' имеет место (6).

4) Для любой G' имеет место (6).

Доказательство. Доказательство 1→2 чрезвычайно просто и демонстрирует суть дела. Пусть $V = \{1, \dots, k\}$. Фиксируем точки x_1 и x_{k+1}, \dots, x_n и будем интегрировать по x_2, \dots, x_k в малой окрестности O точки x_1 . Пусть при этом каждая из переменных x_2, \dots, x_k независимо пробегает некоторый «сектор» так, что для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varepsilon}{2} < |x_1 - x_j| < \varepsilon, \quad C_2 \varepsilon > |x_i - x_j| \geq C_1 \varepsilon,$$

$i, j = 2, \dots, k$. Тогда для достаточно малого ε интеграл оценивается снизу величиной

$$\text{const } \varepsilon^{v(k-1)} \prod_{l \in L'}^{v - \sum (v - \alpha_l)}$$

откуда следует утверждение (счет степеней). Достаточность доказывается чуть сложнее (простейший способ см. в [6], см. также ниже). Остальное очевидно ввиду того, что $v - \alpha_l \geq 0$.

k -представление диаграмм. Если (3) является обобщенной функцией, то ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= \text{const} \int \prod_l \tilde{C}_l(k_l) e^{i(k_l, x_l(l) - x_j(l))} dk_l = \\ &= \text{const} \int \prod_l \tilde{C}_l(k_l) dk_l \prod_v e^{i(x_v, \sum_l r_{vl} k_l)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где в матрице инцидентности $r_{vl} = 1$, если ребро l входит в v , $r_{vl} = -1$, если выходит, и $r_{vl} = 0$, если v и l не инцидентны. При этом направления бозонных ребер выбираются произвольно, а «фермионных» условимся выбирать «от $\bar{\psi}$ к ψ ». Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{G}(q_1, \dots, q_n) &= \text{const} \int \prod_l \tilde{C}_l(k_l) dk_l \prod_v \delta\left(q_v + \sum_l r_{vl} k_l\right), \\ &\int G(x_1, \dots, x_n) \prod_v g_v(x_v) dx_v = \\ &= \text{const} \int \prod_l \tilde{C}_l(k_l) dk_l \prod_v \tilde{g}_v\left(\sum_l r_{vl} k_l\right). \end{aligned}$$

Назовем k_l импульсом ребра l , q_v импульсом вершины v . Обозначим через $M_v(q_v)$ плоскость $q_v + \sum_l r_{vl} k_l = 0$ в пространстве R^{vL} , пусть $M = \bigcap_v M_v$, $M_v = M_v(0)$. Тогда M есть группа циклов (или гомологий) на G со значениями в R^v , поэтому

$$\begin{aligned} \dim M &= \dim H_1(G, R^v) = v \dim H_1(G, Z_2) \equiv \\ &\equiv v|C| = v(|L| - |V| + |K|), \end{aligned}$$

где C — некоторое множество линейно независимых циклов по mod 2 (каждый такой цикл может быть отождествлен с соответствующим подмножеством — замкнутым путем в L), K — множество компонент связности G .

Каждому циклу $c \in C$ поставим в соответствие число λ_c ; пусть матрица δ_{lc} такова, что $\delta_{lc} = \pm 1$, если $l \in c$ и направления l и c совпадают (не совпадают), $\delta_{lc} = 0$, если $l \notin c$. При этом направления циклов выбираются произвольно. Тогда сходимость (5) эквивалентна сходимости интеграла

$$\int \prod_l \tilde{C}_l(k_l) dk_l = \text{const} \int \prod_l \tilde{C}_l\left(\sum_c \delta_{lc} \lambda_c\right) \prod_c d\lambda_c. \quad (7')$$

Пусть \mathcal{L} — система плоскостей, являющихся пересечением некоторого числа плоскостей $k_l = 0$ в $M = R^{vL}$. Пусть $L \subset \mathcal{L}$ и $L_\varepsilon \subset L$ — объединение множества лучей из 0 в ∞ в L , имеющих угол $> \varepsilon$ с каждой из плоскостей $L' \subset L$, $L' \neq L$, $L' \in \mathcal{L}$.

Двойственный метод оценки интеграла (7) по L_ε ведет к другому эквивалентному условию в теореме 1.

5) Для всех L

$$\omega_L \stackrel{\text{def}}{=} \dim L - \sum_{l: L \cap \{k_l=0\}} \alpha_l < 0. \quad (8)$$

Нетрудно доказать эквивалентность 5) остальным условиям теоремы 1.

Асимптотика по урезанию. Пусть каждая $\tilde{C}_l(k_l)$ заменена на $\tilde{C}_l(k_l) \chi_{l: |k_l| < \kappa}$.

Теорема 2. Асимптотика интеграла (5) при $\kappa \rightarrow \infty$ имеет вид

$$(5) \sim \text{const } \kappa^{\rho} \ln^m \kappa. \quad (9)$$

При этом пара (ρ, m) определяется следующим образом. Рассмотрим произвольные связанные поддиаграммы G_1, \dots, G_k с $\omega_{G_i} \geq 0$, не имеющие общих вершин. Для заданных G_1, \dots, G_k определим $\tilde{\rho} = \sum_i \omega_{G_i}$, \tilde{m} — число G_i таких, что $\omega_{G_i} = 0$. Тогда (ρ, m) есть максимум из $(0, 0)$ и всех таких $(\tilde{\rho}, \tilde{m})$ в смысле следующего частичного порядка $(\tilde{\rho}_1, \tilde{m}_1) < (\tilde{\rho}_2, \tilde{m}_2)$, если либо $\tilde{\rho}_1 < \tilde{\rho}_2$, либо $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2$ и $\tilde{m}_1 < \tilde{m}_2$. Есть простое доказательство, но ниже дается стандартное.

α -представление. Это представление диаграмм используется чрезвычайно широко, и мы его приводим для полноты.

Пусть $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$. Рассмотрим представление

$$\frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_0^\infty \alpha^\varepsilon e^{-\alpha(k^2 + m^2)} d\alpha. \quad (10)$$

Для $\varepsilon=0$ это очевидно, а в общем случае следует из определения Γ -функции. Полагая $x_{v_0}=0$ и $q_{v_0}=-q_{v_1}-\dots-q_{v_n}$, рассмотрим преобразование Фурье $G(0, x_1, \dots, x_n)$,

$$\bar{G}(q_1, \dots, q_n) = \text{const} \int \exp \left(i \sum_{v \neq v_0} (q_v, x_v) + i \sum_{v, l} r_{vl}(x_v, k_l) - \sum_l \alpha_l (k_l^2 + m^2) \right) \prod_l \chi(\alpha_l) d\vec{x} d\vec{k} d\vec{\alpha}, \quad (11)$$

где в нашем случае $\chi(\alpha) = \alpha^\varepsilon$. Проинтегрируем в (11) по $d\vec{x} d\vec{k}$, воспользовавшись формулой

$$\int \exp \left[i(t, y) - \frac{1}{2}(Qy, y) \right] dy = (2\pi)^{\frac{v}{2}(L+V)} (\det Q)^{-\frac{v}{2}} \times \exp \left(-\frac{1}{2}(Q^{-1}t, t) \right). \quad (12)$$

Для этого рассмотрим квадратичную форму

$$Q = -2i \sum_{v, l} r_{vl}(k_l, x_v) + 2 \sum_l \alpha_l k_l^2$$

и соответствующую симметрическую матрицу

$$Q = \left\| \begin{array}{cc|c} 2\alpha_l & 0 & -ir_{vl} \\ 0 & 2\alpha_l & \\ \hline -ir_{vl} & & 0 \end{array} \right\|.$$

Заметим, что определители вида $\left| \begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline B & 0 \end{array} \right| \neq 0$, если только A и B — квадратные матрицы. В этом случае они равны $(-1)^E \det A \times \det B$, где E — ранг A (или B). Но этот множитель сократится в нашем случае с i^{2E} . Поэтому

$$\det Q = \prod_{L' \subset L} \left(\prod_{i \in L'} 2\alpha_i \right) [\det (r_{vl})_{V', L'}]^2,$$

где V' — множество всех вершин без v_0 .

Лемма 1.

$$\det (r_{vl})_{V', L'} = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } L' \text{ есть 1-дерево;} \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т. е.

$$\det Q = \sum_{L'} \prod_{i \in L'} 2\alpha_i,$$

где сумма по всем 1-деревьям, т. е. по связным деревьям с $n+1$ вершиной.

Доказательство. Каждый член $\det Q$ определяется взаимнооднозначным отображением $\Phi: V' \leftrightarrow L'$. Именно

$$\det Q = \sum (-1)^n \prod_{v \in V'} r_{v, \Phi(v)}.$$

Если в L' нет циклов, то в этой сумме ровно один член: существует вершина v , инцидентная только одному l , полагаем $\Phi(v) = l$ и т. д. Если же есть циклы, то $\det = 0$. Действительно, рассмотрим некоторый цикл l_1, \dots, l_k . Пусть v_1, \dots, v_k — вершины этого цикла: v_1 и v_2 инцидентны l_1 , v_2 и v_3 — l_2 и т. д. Есть только два отображения $\Phi: \{v_1, \dots, v_k\} \rightarrow \{l_1, \dots, l_k\}$ при фиксированных остальных $\Phi(v)$. Именно $\Phi(v_1) = l_1$ или l_2 и т. д. Две подстановки $\begin{pmatrix} v_1 \dots v_k \\ l_1 \dots l_k \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} v_1 \dots v_k \\ l_k l_1 \dots l_{k-1} \end{pmatrix}$ отличаются знаком $(-1)^{k-1}$, а соответствующие члены $\det Q$ за счет замены $r_{vl} \rightarrow -r_{vl}$ отличаются знаком $(-1)^k$. Поэтому сумма их всегда 0. Отсюда следует лемма 1.

Рассмотрим теперь минор $Q_{vv'}$ с вычеркнутыми строкой v и столбцом v' . Тогда

$$\det Q_{vv'} = \sum_{i \in L'} 2\alpha_i,$$

где сумма берется по всем 2-деревьям L'' , т. е. деревьям, содержащим все вершины и состоящим из двух связанных компонент L_1'' , содержащей v_0 , и L_2'' , содержащей v и v' .

Доказательство совершенно аналогично предыдущему.

Обозначим $p_{L'} = \sum q_v$, где сумма по v , принадлежащим одной из компонент 2-дерева L'' (любой в силу того, что $q_{v_0} + \dots + q_{v_n} = 0$).

Лемма 2. Интеграл (11) равен

$$\text{const} \frac{1}{\left(\sum_{L'} \prod_{i \in L'} \alpha_i \right)^{v/2}} \exp \left(-\frac{\sum_{L'} p_{L'}^2 \sum_{i \in L'} \alpha_i}{\sum_{L'} \prod_{i \in L'} \alpha_i} \right). \quad (13)$$

Нетрудно доказать, что знаки алгебраических дополнений согласуются с формулой (13).

Секторы Хеша. Вся область интегрирования R^L по α_i разбивается на $L!$ секторов: $\alpha_{i_1} \leq \alpha_{i_2} \leq \dots \leq \alpha_{i_L}$. В каждом секторе, например, $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_L$ можно сделать замену переменных

$$t_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \dots, t_{L-1} = \frac{\alpha_{L-1}}{\alpha_L}, \quad t_L = \alpha_L,$$

$$0 \leq t_1 \leq 1, \dots, 0 \leq t_{L-1} \leq 1, \quad 0 \leq t_L < \infty. \quad (14)$$

Обратная замена имеет вид

$$\alpha_i = t_i t_{i+1} \dots t_L.$$

Якобиан является определителем треугольной матрицы и равен

$$J = \det \left\| \frac{\partial \alpha_i}{\partial t_j} \right\| = \prod_{i=1}^L t_i^{l_i-1}.$$

Поэтому $\prod_{i \in L'} \alpha_i = \prod_{i=1}^L t_i^{\beta_i}$, где $\beta_i = \beta_i(L') = |\{1, \dots, l\} \cap (L - L')| = |\{1, \dots, l\} \setminus L'|$.

Интеграл

$$\int G(0, x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \bar{G}(0, 0, \dots, 0) = \text{const} (\det Q)^{-v/2}. \quad (15)$$

Лемма 3. Для заданного сектора существует 1-дерево L'_0 такое, что $\beta_i(L'_0) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_i^0 \leq \beta_i = \beta_i(L')$ для всех l и для всех 1-деревьев L' . При этом для любого L' существует $l = l(L')$ такое, что $\beta_l^0 < \beta_l$.

Доказательство. Построим такое 1-дерево. Выберем $l_1 = 1$, l_2 — первое ребро из оставшихся ребер, не образующее цикла с l_1 и т. д., l_k — первое из оставшихся ребер, не образующее цикла с $\{l_1, \dots, l_{k-1}\}$. Из построения ясно, что $L_0 \cap \{1, \dots, l\}$ есть дерево с максимальным числом ребер, которое можно вложить в граф G_l , состоящий из ребер $\{1, \dots, l\}$ и всех инцидентных им вершин. Пусть число этих вершин есть V_l , а число компонент связности G_l равно K_l .

Тогда

$$\beta_l^0 = l - V_l + K_l.$$

Отсюда следует первая часть утверждения. Для доказательства последнего надо взять первое l такое, что

$$L' \cap \{1, \dots, l\} \neq L_0 \cap \{1, \dots, l\}.$$

Отсюда получаем

$$\det Q = \prod_l t_l^{\beta_l^0} (1 + P),$$

где P — полином с положительными коэффициентами от t_l . Интеграл тогда переписывается в виде

$$\text{const} \int (1 + P)^{-v/2} \prod_l t_l^{-\frac{v}{2} \beta_l^0 + l \epsilon + l - 1} \quad (16)$$

и мы получили факторизацию сингулярной части интеграла. Отсюда легко следует теорема счета степеней и асимптотика по

урезанию $\alpha_0 = \kappa^{-2}$, т. е. асимптотика интеграла $\prod_l \int_{\alpha_0}^{\infty} d\alpha_l$.

Виковские точки и петли в диаграммах. В случае полиномиального лагранжиана в разложении (17.1) каждого члена по диаграммам в некоторых диаграммах есть петли (т. е. ребра вида (x, x)), что дает множители $\langle \xi_x^2(x) \rangle$, т. е. дисперсии. Если, например, $\tilde{\kappa} = \chi(k: |k| \leq \kappa)$, то при $v - 2(1 + \epsilon) > 0$

$$\langle \xi_x^2(x) \rangle = \int_{|k| < \kappa} \frac{dk}{(k^2 + m^2)^{1+\epsilon}} \sim C \kappa^{v-2(1+\epsilon)}, \quad (17)$$

и нельзя надеяться на конечность членов при снятии ультрафиолетового обрезания.

Стандартный прием перенормировки лагранжиана, чтобы каждый член разлагался в сумму диаграмм без петель, состоит в замене каждого монома, например, $\xi_x^4(x)$ на виковский моном

$$:\xi_x^4(x): = \xi_x^4(x) - 6 \langle \xi_x^2(x) \rangle \xi_x^2(x) + 3 \langle \xi_x^2(x) \rangle^2. \quad (18)$$

Техника виковских мономов и разложение по диаграммам моментов и семиинвариантов см. в книге [7].

Для урезанного поля конечность гиббсовской перестройки следует из оценки Вика, например,

$$:\xi_x^4(x): = (\xi^2 - 3 \langle \xi^2 \rangle)^2 - 6 \langle \xi^2 \rangle^2 \geq -6 \langle \xi_x^2(x) \rangle^2.$$

Поэтому из-за ограниченности $U_\Lambda = \lambda \int_\Lambda :\xi_x^4(x): dx$ снизу $\langle \exp(-U_\Lambda) \rangle_0 < \infty$. Для фермионов определим виковские мономы по индукции относительно состояния $\langle \cdot \rangle$ на грассмановой алгебре

$$\psi_1 \dots \psi_n = \Sigma: \psi_T: \langle \psi_{i_1} \psi_{j_1} \rangle \dots \langle \psi_{i_p} \psi_{j_p} \rangle (-1)^\pi, \quad (19)$$

где $T = (k_1, \dots, k_s)$, $k_1 < \dots < k_s$, $\psi_T = \psi_{k_1} \dots \psi_{k_s}$, сумма берется по всем $T \subset (1, 2, \dots, n)$ и всем разбиениям $(1, 2, \dots, n) \setminus T$ на пары $i_r < j_r$; π — четность подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & j_1 & i_p & j_p & k_1 & \dots & k_s \end{pmatrix}.$$

Все свойства виковских мономов переносятся на этот случай с учетом правила знаков.

Классификация моделей. Рассмотрим диаграммы G , возникающие в рядах (17.1) для лагранжиана $:\Phi^n(x):$ и «пропатора» (16.1). В разложении (m и $|V|$ любые)

$$\langle \Phi(y_1), \dots, \Phi(y_m), :\Phi^n(x_1):, \dots, :\Phi^n(x_{|V|}): \rangle$$

рассмотрим всевозможные диаграммы G и их поддиаграммы G' . Ребро l назовем внешним для поддиаграммы G' , если оно не принадлежит G' , но инцидентно некоторой вершине G' . Тогда

$$L' = \frac{nV' - b}{2},$$

где L', V' — число «внутренних» ребер и вершин G' , b — число внешних ребер. Поэтому

$$\omega_{G'} = v(1 + L' - V') - 2(1 + \varepsilon)L' = v + V' \left(\frac{vn}{2} - v - n \right) + b \left(1 - \frac{v}{2} \right) - \varepsilon(V'n - b). \quad (20)$$

При $n=4$, $v=4$ (так называемая модель $\Phi^4_{4,\varepsilon}$)

$$\omega_{G'} = 4 - b - \varepsilon(4V' - b). \quad (21)$$

В формальной теории возмущений принята классификация: при $\varepsilon > 0$ модель сверхперенормируема (т. е. лишь конечное число поддиаграмм G' «примитивно расходится», т. е. $\omega_{G'} \geq 0$). При $\varepsilon = 0$ модель перенормируема (но не сверхперенормируема) (т. е. при $b > 4$ всегда $\omega_{G'} < 0$). Для всех собственных G' с $b=0, 2, 4$ $\omega_{G'} \geq 0$. При $\varepsilon < 0$ модель неперенормируема.

Инфракрасные расходимости. Пусть теперь

$$C_l(x) \sim \frac{C}{|x|^{v-\beta_l}}, \quad \bar{C}_l(k) \sim \frac{C}{|k|^{\beta_l}}, \quad 0 \leq \beta_l < v,$$

и эти функции ограничены в окрестности любой точки, кроме $k=0$. Будем считать $V = \{0, 1, \dots, n\}$ и точка $x_0 \equiv 0$ фиксирована.

Рассмотрим интеграл

$$\int \prod_l C_l(x_{l(i)} - x_{j(i)}) dx_1 \dots dx_n. \quad (22)$$

Теорема 3 (инфракрасная теорема счета степеней). Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) интеграл (22) абсолютно сходится;
- 2)

$$\omega_{G/\alpha} = - \sum_{l \in G/\alpha} \beta_l + v(L - V + 1) > 0. \quad (23)$$

для любого разбиения $\alpha = \{V_1, \dots, V_k\}$ множество вершин, определяющего связный факторграф $G/\alpha = G/\{G(V_1), \dots, G(V_k)\}$, L, V — число ребер и вершин в этом факторграфе.

3) связность в п. 2 можно заменить на 1 чн.

Доказательство. Из 1 следует 2 так же, как в теореме 1. Точнее: пусть $x_0 \in V_1$, тогда будем считать, что другие точки из V_1 принадлежат заданной окрестности начала координат, а точки V_2, \dots, V_k будем устремлять к ∞ так, что $\text{diam } V_i \leq \leq \text{const}$ и $C_1 R \leq \rho(V_i, V_j) \leq C_2 R$, $R \rightarrow \infty$.

Интегрируя далее по R , получим условие (23). Далее так же, как в теореме 1. Однако мы получим доказательство сведением к ультрафиолетовому случаю.

Рассмотрим следующее инфракрасное урезание:

$$\bar{C}_\kappa(k) = \frac{C}{\left(\frac{m^2}{\kappa^2} + k^2\right)^{\beta_l/2}}, \quad \text{при } |k| \leq 1.$$

Делая замену $k_l = \frac{k'_l}{\kappa}$ в интервале (7), имеем

$$G(x_1, \dots, x_n) = \text{const } \kappa^{2\beta_l - vL} \times \times \int_0^\infty \prod_l \frac{1}{(m^2 + k'_l)^{\beta_l/2}} \exp \left[i \left(k'_l, \frac{x_{l(i)} - x_{j(i)}}{\kappa} \right) \right] dk'_l$$

и, делая замену $\frac{x}{\kappa} = y$, имеем

$$\int G(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \text{const } \kappa^{2\beta_l - vL + vn} \times \times \int_0^\infty \prod_l \frac{1}{(m^2 + k_l)^{\beta_l/2}} \exp [i(k_l, x_{l(i)} - x_{j(i)})] dk_l.$$

Асимптотика последнего интеграла нам известна из теоремы 2. Подставляя (9), получаем $\text{const } \kappa^{2\beta_l - vL + vn + \rho} \ln^m \kappa$.

Теорема 4. Для связных G асимптотика при $\kappa \rightarrow \infty$ интеграла (22) имеет вид $C \kappa^{\rho'} \ln^m \kappa$, где $\rho' = \max(-\omega_{G/\alpha}, 0)$, а число m определено выше.

Доказательство. Если $\rho \geq 0$, то

$$\begin{aligned} \rho' &= \Sigma \beta_l - vL + vn + \rho = \Sigma \beta_l - vC + \rho = \\ &= -\omega_G + \Sigma \omega_{G_l} = \Sigma \beta_l - \sum_{l \in G_l} \beta_l - vC + v \sum_l C(G_l) = \\ &= \sum_{l \in G/\alpha} \beta_l - vC(G/\alpha) = -\omega_{G/\alpha}. \end{aligned}$$

Если $\rho < 0$, то $\rho' = \Sigma \beta_l - vC = -\omega_G$. Отсюда, в частности, следует и теорема 3.

§ 3. Формальные перенормировки в ультрафиолетовой области

Здесь кратко изложена классическая теория формальных перенормировок в евклидовой области (см. [4]).

Диаграммы — случайные величины. Мы будем теперь рассматривать диаграммы более общего вида. Такая диаграмма G будет состоять из множества занумерованных вершин $\{1, \dots, n\}$, ребер L и «свободных» отростков E . Каждому отростку $r \in E$ сопоставлена вершина $i(r)$, из которой этот отросток выходит. Каждой вершине v сопоставляется точка $x_v \in R^v$, ребру — $C_l(x_{l(i)} - x_{j(i)})$, отростку r — случайная величина $\xi^{(r)}(x_{i(r)})$,

точнее случайное поле $\xi(x)$ в точке $x_{i(r)}$ с некоторым обрезанием, зависящим от r . Положим

$$G(x_1, \dots, x_n) = \left[\prod_l C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)}) \right] : \prod_r \xi^{(r)}(x_{i(r)}); \quad (1)$$

$$I_G = \int G(x_1, \dots, x_n) \prod_{v=1}^n g_v(x_v) dx_v$$

для некоторых g_v .

Алгебра диаграмм. Пусть \mathcal{L}_n — линейное пространство, натянутое на все такие случайные функции $G(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных при фиксированном n , \mathcal{L}_0 — константы. Рассмотрим прямую сумму $\mathcal{L} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$, т. е. бесконечные наборы (L_0, L_1, \dots) элементов $L_i \in \mathcal{L}_i$. Превратим \mathcal{L} в алгебру, вводя произведение

$$G_1 * G_2 = (G_1 * G_2)(x_1, \dots, x_{n+m}) \in \mathcal{L}_{n+m},$$

где $G(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}_n$, $G_2(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in \mathcal{L}_m$. Для этого рассмотрим случайную величину $G_1 G_2$ при фиксированных x_i и разложим ее по мономам Вика. При этом разложении мы используем известное правило [6]: произведение двух диаграмм (изображающих мономы Вика) есть сумма диаграмм, полученных из несвязного объединения этих двух диаграмм всевозможными спариваниями некоторого числа (возможно пустого) отростков из разных диаграмм. Тогда для любого $S \in Z$ имеет смысл

$$e^S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^* \dots^* S}{n!} \in Z.$$

Замечание 1. Удобно не фиксировать класс «пропаторов» и полей в определении алгебры Z . Как правило, он будет ясен из контекста.

Алгебра операций над диаграммами. M -операция. Рассмотрим сначала связную диаграмму G с $E = \emptyset$. Пусть $V = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, $i_1 < \dots < i_k$. Тогда можно записать

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_l' C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)}) \prod_l'' C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)}), \quad (2)$$

где в \prod_l' произведение по всем ребрам l таким, что одна из вершин l (например, $j(l)$) не принадлежит V , а вторая ($i(l)$) совпадает с одной из вершин i_2, \dots, i_k ; в \prod_l'' — по остальным ребрам.

Определим операцию $M(V)$. Положим

$$M(V)G = 0,$$

если

либо 1) $\omega(V) < 0$,

либо 2) $|V| = 1$, (3)

либо 3) $G(V)$ не является 1 чл (в частности, если $G(V)$ несвязна).

Если $V = \{1, \dots, n\}$, то положим $M(V)G = G$, если $n \geq 2$ и $\omega_G \geq 0$.

В остальных случаях положим

$$M(V)G(x_1, \dots, x_n) = T(x_1, \dots, x_n) \prod_l'' C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)}), \quad (4)$$

где T — отрезок ряда Тейлора до порядка $\omega(V)$ включительно разложения \prod_l' в (2) как функции от x_{i_2}, \dots, x_{i_k} в точке $x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = x_{i_1}$ (т. е. по $(x_{i_2} - x_{i_1}), \dots, (x_{i_k} - x_{i_1})$). Мы будем представлять $M(V)G$ как элемент \mathcal{L}_n , т. е.

$$M(V)G = \Sigma G'(x_1, \dots, x_n),$$

где сумма по нескольким диаграммам G' , которые получаются из G следующим образом:

1. Каждое ребро l из вершины $v \in V$ в некоторую вершину i_m , $m = 2, \dots, k$, становится ребром из v в i_1 . При этом пропатором этого ребра является производная от C_l некоторого порядка α_l .

2. Появляются новые ребра из i_1 в i_m , $m = 2, \dots, k$, с пропаторами вида

$$\frac{1}{\beta_m!} (x_{i_m} - x_{i_1})^{\beta_m} \text{ (векторные обозначения см. [7]).}$$

Это означает замену поддиаграммы $G(V)$ «головастиком» (т. е. диаграммой, внешние ребра которой могут исходить из единственной вершины, т. е. из x_{i_1}).

Действие M на диаграммы с $E \neq \emptyset$ определяется аналогично: любой «свободный» отросток из вершин i_2, \dots, i_m или соответствующая ему случайная величина $\xi_{i_2}^{(L)}, \dots, \xi_{i_m}^{(L)}$ «входят в \prod_l' » и подлежат разложению в ряд Тейлора. Вообще можно сказать, что мы выделяем диаграмму $G(V)$, а произведение всех ее внешних отростков — случайных величин (как свободных, так и входящих в пропаторы $C_l(x_{i(l)} - x_{j(l)})$) из \prod_l' разлагаются в ряд Тейлора в точке x_{i_1} .

Очевидным образом можно определить операции $M(V_1) + M(V_2)$ и $M(V_1)M(V_2)$. Иначе говоря, для фиксированного π $M(V)$ порождают алгебру, действующую в \mathcal{L}_n . Заметим, что $M(V_1)$ и $M(V_2)$ коммутируют, если $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Λ -операция и R -операция. Во введенной выше алгебре M -операций с 1 (тождественное преобразование) положим

$$\Lambda(V) = 1, \text{ если } |V| = 1,$$

$$\Lambda(V) = -M(V) \sum_{\alpha} \Lambda(V_1) \dots \Lambda(V_m), \text{ если } |V| \geq 2, \quad (5)$$

где сумма по всем разбиениям $\alpha = \{V_1, \dots, V_m\}$ с $m > 1$ множества V .

Лемма—определение 1. При фиксированном n следующие определения операции $R: Z_n \rightarrow Z_n$ эквивалентны:

$$1) R = \sum_{\alpha} \Lambda(V_1) \dots \Lambda(V_m), \quad (6)$$

где сумма по всем разбиениям $\alpha = \{V_1, \dots, V_m\}$ множества $\{1, \dots, n\}$;

$$2) R = 1 + \sum (-1)^k M(V_1) \dots M(V_k), \quad (7)$$

где сумма по всем лесам, т. е. наборам $\{V_1, \dots, V_k\}$ таким, что в них отсутствуют частично-пересекающиеся пары (т. е. пары V_i, V_j такие, что $V_i \cap V_j, V_i \setminus V_j, V_j \setminus V_i$ непусты). При этом порядок умножения таков: если $V_i \supset V_j$, то $M(V_i)$ стоит левее $M(V_j)$, а в остальном порядок безразличен.

Для фиксированного n определим $\Lambda = \Lambda(\{1, \dots, n\})$. По линейности Λ и R определены на всем \mathcal{L} .

Условимся считать операции R и Λ перестановочными с интегрированием, т. е., например,

$$\begin{aligned} R \int G(x_1, \dots, x_n) \prod g_v(x_v) dx_v &= \\ = \int (RG)(x_1, \dots, x_n) \prod q_v(x_v) dx_v & \end{aligned} \quad (8)$$

или

$$\Lambda \int \xi_x^4(x) dx = \int_A (\Lambda: \xi_x^4(x):) dx = \int_A \xi_x^4(x) dx.$$

Перенормированное взаимодействие определим формулой

$$-U^{\text{ren}} = \Lambda(e^{-\lambda U} - 1), \quad U = U_x. \quad (9)$$

Таким образом, U^{ren} в общем случае есть формальный ряд по λ (Напомним, что каждое произведение полиномов Вика должно быть разложено по полиномам Вика и после к каждому члену применена Λ .) Слагаемые в $U^{\text{ren}} + \lambda U$ называются контрчленами.

Рассмотрим теперь аналоги рядов (17.1) для перенормированного взаимодействия с коэффициентами $a_n^{\text{ren}}, b_n^{\text{ren}}, c_n^{\text{ren}}(A)$, где например,

$$Z^{\text{ren}} \equiv \langle e^{-U^{\text{ren}}} \rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\text{ren}} \lambda^n. \quad (10)$$

Заметим, что a_n^{ren} и т. д. зависят от урезания λ .

В теории формальных перенормировок есть две основные теоремы. Одна из них доказывается просто.

Теорема 1. Коэффициенты рядов (10) получаются применением R -операции к соответствующим коэффициентам рядов (17.1), т. е.

$$a_n^{\text{ren}} = Ra_n, \quad b_n^{\text{ren}} = Rb_n, \quad c_n^{\text{ren}}(A) = Rc_n(A). \quad (11)$$

Иначе говоря, специальное введение контрчленов (9) эквивалентно применению R -операции к каждому члену ряда теории возмущений.

Доказательство. Докажем сначала первую формулу, т. е.

$$\langle \exp(-U^{\text{ren}}) \rangle_0 = R \langle \exp(-\lambda U) \rangle_0. \quad (12)$$

Перепишем левую часть

$$\begin{aligned} \langle \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \Lambda(U^k) \right) \rangle_0 &= \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_s): \\ k_1 + \dots + k_s = m}} \frac{1}{k_1! \dots k_s!} \langle \Lambda(U^{k_1}) \dots \Lambda(U^{k_s}) \rangle_0 &= \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \sum_{\alpha} \langle \Lambda(U^{k_1}) \dots \Lambda(U^{k_s}) \rangle_0 &= \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} R(\langle U^m \rangle_0). & \end{aligned} \quad (13)$$

Для доказательства остальных формул (11) достаточно заметить, что R мультипликативна в следующем смысле

$$R(\langle U^m \rangle_0 \langle U^n \rangle_0) = R(\langle U^n \rangle_0) R(\langle U^m \rangle_0) \quad (14)$$

и, следовательно, перестановочна с операцией взятия логарифма $R \circ \ln = \ln \circ R$. Отсюда следует вторая формула (11), если взять \ln от обеих частей (12). Аналогично доказывается и третья формула.

Теорема 2 (Боголюбова—Парасюка, называемая также БПХЦ-теоремой). Для любой диаграммы G функция $RG(x_1, \dots, x_n)$ локально интегрируема.

Доказательство этой теоремы для сверхперенормируемых теорий будет следовать из более сильных оценок, доказываемых в следующем параграфе. Мы также объясним основную идею ее доказательства для перенормируемых теорий там же. Наиболее общее доказательство этой теоремы см. в [4].

Пример. Разберем теперь, как выглядит U^{ren} в модели $\varphi^4_{4,\epsilon}$. Имеем

$$U^{\text{ren}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \Lambda \left(\int \xi^4(x_1) \dots \xi^4(x_k) dx_1 \dots dx_k \right),$$

$$\underline{k=1}, U_1^{\text{ren}} = \lambda \Lambda \left(\int : \xi^4(x) : dx \right) = \lambda \int : \xi^4(x) : dx, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \underline{k=2}, U_2^{\text{ren}} &= -\frac{\lambda^2}{2} \Lambda \left(\int : \xi^4(x_1) \xi^4(x_2) : dx_1 dx_2 \right) = \\ &= -\frac{\lambda^2}{2} \left[\iint \langle : \xi^4(x_1) : : \xi^4(x_2) : dx_1 dx_2 + \right. \\ &+ 4^2 \cdot 3! \int : \xi(x_1) \xi(x_2) : C^3(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 + \\ &\left. + 6^2 \cdot 2 \int : \xi^2(x_1) \xi^2(x_2) : C^2(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \right] \quad (16) \end{aligned}$$

(от остальных членов Λ -операция при $k=2$ равна нулю; на первый член она действует тождественно, давая вакуумный контрчлен, т. е. константу, $E = \emptyset$):

$$-\frac{\lambda^2}{2} 4! \ominus \quad (17)$$

Действие Λ на третий член дает ненулевой зарядовый контрчлен лишь при $\varepsilon=0$

$$-\frac{\lambda^2}{2} 6^2 \cdot 2 \int : \xi^4(x_1) : C^2(x_1 - x_2) dx_1 dx_2. \quad (18)$$

Массовый контрчлен получается при действии Λ на второй член при $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon > \frac{1}{3}$ он равен нулю. При $\frac{1}{6} < \varepsilon \leq \frac{1}{3}$ он равен

$$-\frac{\lambda^2}{2} 4^2 \cdot 3! \int : \xi^2(x_1) : C^3(x_1 - x_2) dx_1 dx_2. \quad (19)$$

При $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{6}$ к нему должен был бы быть добавлен член

$$-\frac{\lambda^2}{2} 4^2 \cdot 3! \left[\int : \xi(x_1) \nabla \xi(x_1) : (x_2 - x_1) C^3(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \right], \quad (19')$$

но он фактически конечен, так как $\int x \mathcal{G}^3(x) = 0$ в симметрической окрестности нуля, и обычно не рассматривается.

При $\varepsilon=0$ есть еще контрчлен перенормировки волновой функции (в этой терминологии нет четких определений)

$$\begin{aligned} &-\frac{\lambda^2}{2} 4^2 \cdot 3! \left[\int : \xi(x_1) \nabla^2 \xi(x_1) : \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} C^3(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \right] = \\ &= -\frac{\lambda^2}{2} 4^2 \cdot 3! \left[\left(\int \frac{x_2^2}{2} C^3(x_2) dx_2 \right) \int : \xi(x_1) \nabla^2 \xi(x_1) : dx_1 \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Последний интеграл равен

$$\int : (\nabla \xi(x_1))^2 : dx_1,$$

например, при периодических граничных условиях.

Общий вид вакуумного и массового контрчлена при $\varepsilon > 0$ таков

$$\begin{aligned} -U_{\text{вак}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \Lambda(\langle U^n \rangle) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} (-M(V)) \prod_{V_k \neq V = \{1, \dots, n\}} (1 - M(V_k)) (\langle U^n \rangle), \\ -U_{\text{масс}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} (-M(V)) \prod_{V_k \neq V} (1 - M(V_k)) \times \\ &\times \left[\int dx_1 \dots dx_n 4^2 \sum_{i < j} : \xi(x_i) \xi(x_j) : \langle : \xi^4(x_1) : \dots \right. \\ &\left. \dots : \xi^3(x_i) : \dots : \xi^3(x_j) : \dots : \xi^4(x_n) : \rangle \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

§ 4. Оценки перенормированных диаграмм

При выводе этих оценок [74, 77] мы используем основы метода многомасштабных кластерных разложений.

Моды. Исходное гауссово поле $\xi(x)$ разлагается в сумму взаимно независимых гауссовых случайных полей, называемых модами, каждая из которых имеет характерный масштаб убывания корреляций

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(x). \quad (1)$$

Возможностей подходящих разбиений на моды чрезвычайно много. Мы перечислим лишь малую долю. Выберем последовательность чисел

$$0 = M_0 < M_1 = 1 < M_2 < M_3 < \dots$$

и положим

$$\langle \xi_i(x) \xi_j(y) \rangle = \delta_{ij} (2\pi)^{-\nu} \int \eta_j(k) \exp(i(k, x - y)) dk, \quad (2)$$

где

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(k) = \tilde{\varphi}(k) = (2\pi)^{-\nu} \int \langle \xi(x) \xi(y) \rangle \exp(i(k, x - y)) dk. \quad (3)$$

Далее везде

$$M_k = M^{k-1}, \quad k \geq 2, \quad (4)$$

где M выбирается достаточно большим. Глимм и Джаффе [2] используют «двойной экспоненциальный» выбор $M_k = M^{(1+\tau)k-1}$, $\tau > 0$.

Здесь мы будем заниматься случаем, когда

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}, \quad m > 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (5)$$

Полезные выборы η_j таковы

1)

$$\eta_j(k) = \chi_{|M_{j-1}, M_j|}(|k|) \frac{1}{(k^2 + m^2)^{1+\varepsilon}}. \quad (6)$$

2) (Паули—Вилларс, Галлаветти и др.)

$$\eta_j(k) = \frac{1}{(M_j^2 + k^2)^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(M_{j+1}^2 + k^2)^{1+\varepsilon}} \quad (7)$$

(считается, что $m^2 = 1$).

3) (α -представление), его то мы и будем использовать

$$\eta_j(k) = \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j-1}} \frac{1}{\Gamma(1+\varepsilon)} \alpha^\varepsilon e^{-\alpha(k^2+m^2)} d\alpha, \quad (8)$$

где $\alpha_j = M_j^{-2}$ (см. (10.2)).

«Пропагатор» k -й моды имеет вид

$$C_k(x-y) \equiv \langle \xi_k(x) \xi_k(y) \rangle = \frac{(2\pi)^{-\nu}}{\Gamma(1+\varepsilon)} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k-1}} \int e^{i(p \cdot x - y)} \times \\ \times \alpha^\varepsilon e^{-\alpha(p^2+m^2)} d\alpha dp = \text{const} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k-1}} \frac{\alpha^\varepsilon}{\alpha^{\nu/2}} \exp\left(-\alpha m^2 - \frac{(x-y)^2}{4\alpha}\right) d\alpha. \quad (9)$$

Масштаб и локализация мод. Дисперсия k -й моды имеет порядок

$$\langle \xi_k^2(x) \rangle \sim C M_k^{\nu-2(1+\varepsilon)} \quad (10)$$

и оценка ковариации имеет вид

$$|\langle \xi_k(x) \xi_k(y) \rangle| \leq \text{const} M_k^{2\left(\frac{\nu}{2}-\varepsilon\right)} \frac{1}{M_{k-1}^2} \exp\left(\frac{(x-y)^2 M_{k-1}^2}{4}\right) \leq \\ \leq \text{const} M_{k-1}^{\nu-2(1+\varepsilon)} \exp\left(-\frac{1}{2}|x-y| M_{k-1}\right). \quad (11)$$

Это значит, что корреляция становится исчезающе малой при $|x-y| > M_{k-1}^{-1-\tau}$, $\tau > 0$ произвольно. Если ввести перенормированное расстояние (масштаб)

$$\rho_k(x, y) = \text{const} \frac{\rho(x, y)}{M_k} \quad (12)$$

(const не влияет на дальнейшие оценки и ее удобно выбирать из удобства обозначений), то это и будет «естественный масштаб» k -й моды.

Рассмотрим последовательность разбиений R^ν на конгруэнтные кубы $\{\Delta_{1i}\}, \{\Delta_{2i}\}, \dots$. При этом объем

$$|\Delta_{ki}| = M_k^{-\nu}. \quad (13)$$

Все кубы Δ_{ki} для заданного k (ранга k) конгруэнтны и каждый куб Δ_{ki} является точным объединением некоторых кубов $\Delta_{k+1,i}$. Можно записать для любых N и k

$$\xi_N(x) = \sum_i \xi_N(x) \chi_{\Delta_{ki}}(x).$$

Мы будем говорить, что при $k \geq N$ моды $\xi_N(x)$ хорошо локализованы в кубах Δ_{ki} .

Замечание 1. Для «двойного экспоненциального выбора» удобно считать $k \geq N-2$ условием локализации, так как при этом уже в кубах «через один» значения $\xi_N(x)$ почти независимы.

Шкала (12) является в некотором смысле шкалой «гладкости» для моды ξ_k (см. следующий параграф).

C^L -оценки.

Теорема 1. Если G — сходящаяся диаграмма с множеством вершин $V = \{0, 1, \dots, n\}$ в модели Φ^4_{ε} , $\varepsilon \geq 0$, или перенормированная диаграмма в этой же теории с $\varepsilon > 0$, то интеграл

$$I_G = \int (RG)(x_0, x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (14)$$

(мы фиксировали $x_0 = 0$) допускает оценку (L — число ребер)

$$|I_G| \leq C^L, \quad (15)$$

где C не зависит от G и L .

Мы начнем со случая сходящейся диаграммы, ограничась для простоты обозначений случаем $\varepsilon = 0$. Тогда

$$I_G = \sum_{\mu} \int \prod_l C_{\mu_l}(x_{i(l)} - x_{j(l)}) \prod_{v \neq 0} dx_v, \quad (16)$$

где $\mu = \{\mu_l\}$ — набор номеров мод, $l \in L$. Иначе говоря, мы разложили каждый пропагатор по модам

$$C(x-y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x-y)$$

и сделали подстановку в интеграл. Нам понадобятся вспомогательные конструкции.

Построение дерева $\mathcal{T}(\mu)$. Пусть задан набор $\mu = \{\mu_l\}$ и пусть $i_1 > i_2 > \dots > i_k$ — всевозможные значения μ_l из этого набора. Обозначим $L_i = \{l: \mu_l = i\} \subset L$. В L_{i_1} выберем как-нибудь макси-

мальное дерево (которое может не быть связным) \mathcal{T}_1 . Далее выберем максимальное дерево \mathcal{T}_2 такое, что $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset L_{i_1} \cup L_{i_2}$

и т. д., выберем максимальные деревья $\mathcal{T}_3, \dots, \mathcal{T}_k = \mathcal{T}(\mu)$. Это построение можно сделать однозначным, если предварительно упорядочить ребра и выбирать первое в лексикографическом порядке дерево \mathcal{T}_1 , первое \mathcal{T}_2 такое, что $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ и т. д.

Лес $\mathcal{F}(\mu)$ и выделенные вершины. Пусть \mathcal{T}_{jp} — максимальные связные компоненты \mathcal{T}_j , G_{jp} — граф, натянутый на \mathcal{T}_{jp} (т. е. к \mathcal{T}_{jp} присоединены все ребра G с вершинами в \mathcal{T}_{jp}). Набор всех G_{jp} , $j=1, \dots, k$, образует лес $\mathcal{F}(\mu)$.

Дерево $\mathcal{T}(\mu)$ определяет частичный порядок в V , при котором вершина $v_0=0$ является наименьшей. Каждая \mathcal{T}_{jp} содержит наименьшую вершину v_{jp} (назовем ее выделенной).

Частичный порядок (такой же) определен тогда и на ребрах $\mathcal{T}(\mu)$, определено также их направление «от v_0 ».

Положим для всех $v \neq v_0$

$$\tilde{\mu}_v = \mu_{l(v)}$$

для (единственного) ребра $l(v) \in \mathcal{T}(\mu)$, входящего в v . Для заданного μ рассмотрим произвольный набор $\{\Delta_v\}_{v \neq v_0}$ кубов $\Delta_v = \Delta_{\tilde{\mu}_v, i_v}$. Эти наборы (для данного μ) различаются только номерами i_v . Тогда (16) переписывается в виде

$$\sum_{\mu} \sum_{\{\Delta_v\}} \prod_{v \neq v_0} \int_{\Delta_v} dx_v \left[\prod_l C_{\mu_l} (x_{l(l)} - x_{l(l')}) \right]. \quad (17)$$

Пусть y_v — центр куба Δ_v , v' — вторая вершина ребра $l(v)$. Тогда интеграл (17) мажорируется выражением

$$C^{|\Lambda|} \sum_{\mu} \sum_{\{\Delta_v\}} \prod_{v \neq v_0} \exp(-\rho_{\tilde{\mu}_v}(y_v, y_{v'})) \prod_{v \neq v_0} M^{-4\tilde{\mu}_v} \prod_{l \in L} M^{2\mu_l}. \quad (18)$$

При этом мы использовали (11) и «суммирование по деревьям» $\mathcal{T}(\mu)$ (см. [7]), т. е. интегрировали, начиная с наибольших вершин. (15) допускает оценку

$$C^{|\Lambda|} \left(\sum_{x \in Z^d} e^{-\rho(0,x)} \right)^{|\Lambda|-1} \sum_{\mu} \prod_{v \neq v_0} M^{-4\tilde{\mu}_v} \prod_{l \in L} M^{2\mu_l} \leq C^{|\Lambda|} \sum_{\mu} \prod_{v \neq v_0} M^{-4\tilde{\mu}_v} \prod_{l \in L} M^{2\mu_l}. \quad (19)$$

Рассмотрим граф \hat{G} , вершинами которого являются ребра G . Ребрами \hat{G} являются любые пары (l, l') ребер G , инцидентных одной вершине. Наша цель — преобразовать последнюю сумму по μ в сумму по связным деревьям $\hat{\mathcal{T}} \subset \hat{G}$.

Лемма 1. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого μ

$$M^{-4 \sum_{v \neq v_0} \tilde{\mu}_v + 2 \sum_{l \in L} \mu_l} \leq \prod_{(l, l')} M^{-\varepsilon |\mu_l - \mu_{l'}|} M^{-\varepsilon i_l}, \quad (20)$$

где произведение по всем парам ребер $l, l' \in \mathcal{T}(\mu)$, инцидентных одной вершине.

Если теперь заметить, что каждой вершине \hat{G} инцидентно не более 8 ребер \hat{G} , и использовать неравенство

$$\sum_{\mu} \leq \sum_{\hat{\mathcal{T}}} \sum_{\mu: \mathcal{T}_{\mu} = \hat{\mathcal{T}}}$$

то из леммы 1 «суммированием по деревьям» следует теорема 1.

Доказательство леммы. Рассмотрим произвольный граф G_{1p} . Пусть V_{1p} — число его вершин, L_{1p} — число его ребер, $\hat{\mu}_l = \min(\mu_l, i_2)$, $\delta\mu_l = \mu_l - \hat{\mu}_l$. Тогда

$$\begin{aligned} & -4 \sum_{v \neq v_{1p}, v \in G_{1p}} \mu_v + 2 \sum_{l \in G_{1p}} \mu_l \equiv -4i_1(V_{1p} - 1) + 2 \sum_l \hat{\mu}_l + \\ & + 2 \sum_l \mu_l = -4i_1(V_{1p} - 1) + 2 \sum_l \hat{\mu}_l + 2 \sum_l (\delta\mu_l - (i_1 - i_2)) + \\ & + 2L_{1p}(i_1 - i_2) = -4i_2(V_{1p} - 1) - 4(i_1 - i_2)(V_{1p} - 1) + \\ & + 2L_{1p}(i_1 - i_2) + 2 \sum_l \hat{\mu}_l + 2 \sum_l (\delta\mu_l - (i_1 - i_2)) = \\ & = -4i_2(V_{1p} - 1) + 2 \sum_l \hat{\mu}_l + (i_1 - i_2) \omega_{G_{1p}} + 2 \sum_l (\delta\mu_l - (i_1 - i_2)). \end{aligned}$$

Проведем такие выкладки для всех G_{1p} и из левой части (17) вынесем множитель

$$M^{2 \sum_l (\delta\mu_l - (i_1 - i_2)) + \sum_p (i_1 - i_2) \omega_{G_{1p}}} \quad (21)$$

То, что остается, есть другая система μ (с $\hat{\mu}_l$ вместо μ_l). Далее применяем ту же процедуру для G_{2p} и т. д.

На последнем шаге, когда все $\mu_l \equiv i_k$, $\tilde{\mu}_v \equiv i_k$, получим множитель

$$M^{i_k \omega_G}. \quad (22)$$

Так как все $\omega(G_{1p}) \leq -1$, то можно выделить из множителей (21) — (22) множитель $M^{-i_1/2}$. Оценка (20) получается так. Заметим, что $\omega_{G_{1p}} = 4 - |b_{1p}|$, где b_{1p} — множество внешних ребер G_{1p} .

По условию $b_{1p} \geq 5$, и мы от множителя $M^{\frac{1}{2} \omega_{G_{1p}}}$ отнесем каждому

внешнему ребру из $b_{1p} \cap \mathcal{F}(\mu)$ множитель

$$M^{\frac{1}{2b_{1p}} \omega_{G_{1p}}}$$

Множитель $M^{2(\delta\mu_l - (i_1 - i_2))}$ отнесем ребру l .

Далее поступаем так же для графов G_{2p}, G_{3p}, \dots . Отсюда и следует (20).

Перенормированные диаграммы в сверхперенормируемых теориях. Докажем, что C в теореме 1 может зависеть лишь от ε . При $\varepsilon > 0$ примитивно расходящиеся могут лишь массовые поддиаграммы. Пусть $\mathcal{F} = \{V_k\}$ — лес примитивно расходящихся диаграмм в G . Так как нет частично пересекающихся расхождений, то из (7.3) следует, что

$$RG = \prod_k (1 - M(V_k)) G. \quad (23)$$

Определим множество «опасных» и «безопасных» поддиаграмм

$$\mathcal{D}(\mu) = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}(\mu), \quad \mathcal{F}'(\mu) = \mathcal{F} \setminus \mathcal{D}(\mu).$$

Рассмотрим сначала случай, когда все «вычитания» $M(V_k)$ используют только «нулевой» член ряда Тейлора. Иначе говоря, пусть $\varepsilon > \frac{1}{6}$.

Замечание. В нашем случае массовых диаграмм

$$\omega_G = -4(V-1) + 2(1-\varepsilon)L = 2 + 2\varepsilon - 4\varepsilon V.$$

Отсюда при $V=2$ получаем $\varepsilon = \frac{1}{6}$ при $\omega_G = 1$. Перепишем (23)

$$RG = \sum_{\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}(\mu)} \prod_{V_k \in \mathcal{F}'(\mu)} M(V_k) (-1)^{|\mathcal{F}'|} \left[\prod_{V_k \in \mathcal{D}(\mu)} (1 - M(V_k)) \right] \quad (24)$$

и рассмотрим член суммы, соответствующий \mathcal{F}' .

Удобно следующее наглядное представление; $1 - M(V)$ создает две диаграммы: член 1 оставляет диаграмму прежней, а $M(V)$ образует в ней «головастик». Для опасных диаграмм $V_k \in \mathcal{D}(\mu)$ мы заменим разность двух этих диаграмм одной. Именно, разность двух ребер-пропагаторов

$$C_\mu(y-x_2) - C_\mu(y-x_1) = (x_2-x_1) \nabla_x C_\mu(y-x) \quad (25)$$

добавляет множитель (x_2-x_1) к прежней диаграмме и меняет $C_\mu(y-x_2)$ на $\nabla_x C_\mu(y-x)$.

Для $V_k \in \mathcal{F}'(\mu)$ будем представлять, что множитель $M(V_k)$ просто меняет ребро l от y к x_2 на ребро от y к x_1 . При этом индекс l ребра и $\mu(l)$ сохраняются.

Будем теперь проводить оценки так же, как в предыдущем доказательстве. Изменения состоят в следующем.

Каждый $\nabla_x C_\mu(y-x)$ дает дополнительный множитель, не превосходящий M^μ . В то же время, если $V = G_{jp} \in \mathcal{D}(\mu)$, то

дерево \mathcal{F}_{ip} дает множитель $\exp\left(-M^i |x_2 - x_1| \frac{1}{2}\right)$. Выделим отдельно множитель

$$|x_2 - x_1| M^\mu e^{-M^i \frac{|x_2 - x_1|}{4}} \leq CM^{\mu-i} \leq CM^{i+1-i}. \quad (26)$$

Лес $\mathcal{F}(\mu)$ для G перейдет в лес $\mathcal{F}(\mu, \mathcal{F}')$ для диаграммы, соответствующей члену \mathcal{F}' в сумме (24). Все оценки делаются для леса $\mathcal{F}(\mu, \mathcal{F}')$ так же, как и раньше: единственная неприятность состоит в том, что для графов G_{jp} , например, G_{1p} состоит в том, что

$$1 - \delta = \omega_{G_{1p}} \geq 0, \quad \delta > 0.$$

Но учитывая множитель (26) мы получим нужную оценку

$$(i_1 - i_2) \omega_{G_{1p}} - (i_1 - i_2) \leq -\delta(i_1 - i_2). \quad (27)$$

При $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{6}$ вместо (25) можно написать

$$(x_2^{(m)} - x_1^{(m)}) (x_2^{(n)} - x_1^{(n)}) \frac{\partial^2}{\partial x^{(m)} \partial x^{(n)}} C_\mu(y-x). \quad (28)$$

Далее все аналогично. В силу (19'.3) случай (28) не нужен. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть G — произвольная диаграмма теории $:\Phi^4:_4$. Тогда имеет место оценка

$$|RG| \leq C^L (\max_{\mathcal{F}} |\mathcal{F}|)$$

где максимум берется по всем лесам расходящихся замкнутых поддиаграмм G .

Мы дадим доказательство теоремы 2 только для случая, когда G не содержит массовых поддиаграмм. В этом случае все собственные поддиаграммы замкнуты и замкнутость в ее формулировке можно опустить, при этом отчетливо видна основная идея доказательства теоремы БПХЦ и C^L -оценок для случая существования частично-пересекающихся диаграмм. Эта идея заключается в формуле (28) (см. ниже.)

Мы используем формулу (3.6)

$$RG = \sum_F \prod_{v \in F} (-M(V)), \quad (29)$$

где сумма по всем лесам собственных примитивно расходящихся поддиаграмм. Для любого такого F обозначим

$$\mathcal{D}_\mu(F) = F \cap \mathcal{F}(\mu), \quad \mathcal{F}_\mu(F) = F - \mathcal{D}_\mu(F),$$

$\mathcal{H}_\mu(F)$ — множество всех примитивно расходящихся поддиаграмм $g \in \mathcal{F}(\mu)$, совместимых с лесом F , т. е. такое, что $F \cup \{g\}$ — лес.

Очевидно, что $\mathcal{H}_\mu(F)$ есть лес, так как $\mathcal{H}_\mu(F) \subset \mathcal{F}(\mu)$. Тогда

$$RG(\mu) = \sum_F \prod_{V \in F} (-M(V)) G(\mu) = \\ = \sum_{F: F' \cap \mathcal{F}(\mu) = \emptyset} \prod_{V \in F'} (-M(V)) \prod_{V \in \mathcal{H}_\mu(F')} (1 - M(V)) G(\mu) \quad (30)$$

или

$$RG = \sum_F \sum_{\mu: \mathcal{F}(\mu) = F} \prod_{V \in F} (-M(V)) \prod_{V \in \mathcal{H}_\mu(F)} (1 - M(V)) G(\mu). \quad (31)$$

Заметим сначала (это довольно просто проверяется), что число лесов собственных примитивно расходящихся диаграмм G не превосходит $C^{|V|}$ (см. [61], лемма A2, где $C=8$). Поэтому в (31) можно ограничиться одним членом.

Пусть сначала $\mathcal{H}_\mu(F) = \emptyset$. Операции $M(V)$ делают тогда из поддиаграмм $V \in F$ головастики. Рассмотрим результирующую диаграмму с теми же l, μ_l . Мы факторизуем G по этим головастикам, начиная с меньших. Поступая так же, как при доказательстве теоремы 3.1, т. е. леммы 1, мы от каждого головкика получим логарифмически расходящийся множитель (т. е. растущий не быстрее μ_l для некоторого ребра l , инцидентного этому головастика).

Эти множители не могут повлиять на сходимость диаграммы. Этим получено доказательство БПХЦ-теоремы для данной диаграммы. Однако может возникнуть факториальный множитель (как в интеграле $\int_0^\infty \mu^n e^{-\mu} d\mu$). Если $\mathcal{H}_\mu(F) \neq \emptyset$, то предварительно в последнем произведении правой части (31) применяем $1 - M(V)$, как в теореме 1. Далее все аналогично.

§ 5. Упрощенные модели

Рассмотрим систему взаимно независимых гауссовых случайных величин $\{\eta_\Delta\}$, где $\Delta \subset R^4$ пробегает всевозможные кубы $\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \dots$, причем

$$\langle \eta_\Delta \rangle_0 = 0, \quad \langle \eta_\Delta^2 \rangle_0 = \Delta^{-\frac{1}{4}(2-2\epsilon)}. \quad (1)$$

Заметим, что последнее выражение совпадает с дисперсией $\langle \xi_{\Delta}^2(x) \rangle$, если $\Delta = \Delta_{ki}$ (см. 10.4). Положим вместо (1.4)

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x), \quad \eta_n(x) \equiv \eta_{\Delta_{ni}} \text{ для } x \in \Delta_{ni}. \quad (2)$$

Меру, соответствующую гауссову полю $\xi(x)$, обозначим μ_0 и будем изучать слабые пределы мер μ_N , определяемых плотностью

$$\frac{d\mu_N}{d\mu_0} = Z_N^{-1} \exp(-U_N^{ren}), \quad (3)$$

$$U_N \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \int_{\Delta_1} \eta_{<N}^4(x) : dx, \quad \eta_{<N} = \sum_{n=1}^N \eta_n. \quad (4)$$

Замечание 1. Иначе говоря, мы сделали два упрощения: а) ввели более строгую локализацию мод, чем обсуждалось в § 4, т. е. независимость вместо слабой зависимости в разных кубах локализации; б) считает моды постоянной в кубе, в котором она хорошо локализована.

Замечание 2. У $\xi(x)$ в (2) ковариации разрывны. При определении R -операции это не сказывается на контрчленах без производных. Контрчлены с производными мы полагаем равными нулю по определению.

Модель (3) называется иерархической бернуллиевой [80, 81]. Начнем же мы с еще более простой модели.

Простейшая модель без взаимодействия мод. В дополнение к предположениям а) и б) замечания 1 мы изменим и взаимодействие, а именно положим

$$U_N = \lambda \sum_{n < N} \int : \eta_n^4(x) : dx = \lambda \sum_{\Delta = \Delta_{ni}, n < N} \Delta : \eta_\Delta^4 : \quad (5)$$

Замечание 3. Иначе говоря, мы исключили «перекрестные члены» — взаимодействие мод. На этой модели мы разберем идею преодоления первой трудности в неформальном построении сверхперенормируемых теорий. Эта трудность состоит в следующем. Теория формальных перенормировок обеспечивает сокращение расходимостей в каждом порядке по λ . Однако, полный ряд расходится и надо применять разложения с остаточным членом. В остаточном же члене нет сокращения расходимостей. Оказывается, однако, что, начиная с некоторого порядка, остаточные члены хорошо оцениваются, благодаря свойству локализации мод, что связано со сверхперенормируемостью или (и) сильной версией свойства асимптотической свободы.

В данном случае статистическая сумма факторизуется

$$Z_N = \prod_{\Delta = \Delta_{ki}: k < N} \langle \exp(-U_\Delta^{ren}) \rangle_0, \quad (6)$$

где $U_\Delta = \lambda \Delta : \eta_\Delta^4 :$, и для доказательства устойчивости ($Z_N \leq \text{const}$ равномерно по N) достаточно оценки

$$\exp(-U_\Delta^{ren}) \leq 1 + C \Delta^{1+\delta}, \quad (7)$$

где C, δ не зависят от Δ .

Имеем

$$U_{\Delta}^{\text{ген}} = \lambda \Delta : \eta_{\Delta}^4 : + U_{\Delta}^{\text{вак}} + U_{\Delta}^{\text{масс}}, \quad (8)$$

где

$$U_{\Delta}^{\text{вак}} = \sum_{p=2}^{p_0} \frac{(-\lambda)^p}{p!} C_p \Delta^p \Delta^{-\frac{1}{4}(2-2\varepsilon)2p}, \quad (9)$$

$$U_{\Delta}^{\text{масс}} = : \eta_{\Delta}^2 : \sum_{p=2}^{p_1} \frac{(-\lambda)^p}{p!} C'_p \Delta^p \Delta^{-\frac{1}{4}(2-2\varepsilon)(2p-1)}, \quad (9')$$

где целые неотрицательные числа C_p и C'_p определяются из (21.3) и (22.3) соответственно. Для доказательства (9)–(9') заметим, что, например, вклад каждой вакуумной диаграммы с p вершинами одинаков и равен Δ^{ep} , так как $M(V)$ не меняет числа вершин и ребер, а массовой диаграммы — $\Delta^{\frac{1}{2}+ep}$. p_0 определяется как наименьшее число $p_0 \geq \frac{1+\delta}{\varepsilon}$, для некоторого $\delta > 0$, а p_1 соответственно из неравенства $p_1 \geq \frac{1+\varepsilon+\delta}{2\varepsilon}$. Заметим, что для вакуумных диаграмм G условие $\omega_G = 4 - 4\varepsilon V < 0$ согласуется с нашим выбором p_0 . Для массовых то же самое: условие $\omega_G < 0$ эквивалентно $V > \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$.

Сделаем теперь разложение Тейлора по λ «в ячейке Δ » до порядка $p_0 - 1$ включительно

$$\langle \exp(-U_{\Delta}^{\text{ген}}(\lambda)) \rangle_0 = \left\langle \sum_{k=0}^{p_0-1} Q_k \frac{\lambda^k}{k!} + \dot{Q}_{p_0} \frac{\lambda^{p_0}}{p_0!} \right\rangle_0, \quad (10)$$

$$Q_k = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \exp(-U_{\Delta}^{\text{ген}}) \Big|_{\lambda=0},$$

$$\dot{Q}_{p_0} = \frac{\partial^{p_0}}{\partial \lambda^{p_0}} \exp(-U_{\Delta}^{\text{ген}}) \Big|_{\lambda=\lambda'}, \quad 0 \leq \lambda' \leq \lambda.$$

Нетрудно видеть, что в нашей модели все $Q_k \equiv 0$ при $k=1, \dots, \dots, p_0-1$, а остаточный член можно оценить так

$$\langle \dot{Q}_{p_0} \exp(-U_{\Delta}^{\text{ген}}(\lambda')) \rangle_0 \leq \langle \dot{Q}_{p_0}^2 \rangle_0^{1/2} \langle \exp(-2U_{\Delta}^{\text{ген}}(\lambda')) \rangle_0^{1/2}. \quad (11)$$

Мы докажем, что

$$\langle \dot{Q}_{p_0}^2 \rangle_0 = O(\Delta^{2(1+\delta)}), \quad (12)$$

$$\langle \exp(-2U_{\Delta}^{\text{ген}}(\lambda')) \rangle_0 = O(1). \quad (12')$$

Удобно приписать члену Δ размерность 1, члену $: \eta_{\Delta}^k :$ — размерность $\left(-\frac{k}{4}(1-\varepsilon)\right)$, $\langle \eta_{\Delta}^2 \rangle_0$ — размерность $\left(-\frac{2k}{4}(1-\varepsilon)\right)$, а произведению таких членов — сумму их размерностей. При применении $\langle \cdot \rangle_0$ размерность сохраняется. Тогда U_{Δ} имеет размерность ε , в $U_{\Delta}^{\text{вак}}$ ($U_{\Delta}^{\text{масс}}$) каждый член имеет размерность $p - \frac{4p}{4}(1-\varepsilon) = \varepsilon p$ $\left(\frac{1}{2} + \varepsilon p\right)$ соответственно с минимумом при $p=2$. В \dot{Q}_{p_0} каждый член имеет размерность $\geq \varepsilon p_0 \geq 1 + \delta$. Отсюда и следует (12). Оценка Вика типа (19'.2) легко дает и (12'):

$$\Delta : \eta_{\Delta}^4 : + C \Delta^{\frac{1}{2}+2\varepsilon} : \eta_{\Delta}^2 : \geq C \Delta^{\delta_1} \quad (12'')$$

для некоторого $\delta_1 > 0$.

Замечание 4. Можно сделать оценку Вика отдельно для $: \eta_{\Delta}^4 :$ и $: \eta_{\Delta}^2 :$, если заметить, что первый член ряда (9') равен $C \Delta^{2\varepsilon}$, где C положительна, остальные члены равны $O(\Delta^{3\varepsilon})$. Поэтому весь коэффициент при $: \eta_{\Delta}^2 :$ положителен при достаточно малых Δ .

Замечание 5. Более непосредственное использование ренормгруппы позволяет снизить количество вычитаний и сделать их число независимым от ε (см. главу 2). Важную роль здесь играет отказ от рассмотрения вакуумных перенормировок и рассмотрение эффективных взаимодействий вместо статсуммы. В этом смысле техника, описанная в главе 1, кажется лишней. Однако она более непосредственно связана с рядом теории возмущений и пока преждевременно от нее отказываться.

Мы доказали равномерную ограниченность (6)

$$Z_N \leq \prod_{\Delta} (1 + C \Delta^{1+\delta}) \leq \text{const}. \quad (13)$$

Аналогично можно получить необходимые оценки производящего функционала $\langle \exp(i\xi_{\varphi} - U_N^{\text{ген}}) \rangle_0$ и построить предельное поле.

Общая модель без взаимодействия мод. Положим теперь $(\xi_k(x))$ — моды, определенные в § 4)

$$Z = \prod_N \langle \exp(-U_N^{\text{ген}}) \rangle_0, \quad (14)$$

$$U_N = \int_{\Delta_1} : \xi_N^{\dagger}(x) : dx.$$

Сделаем разложение Тейлора для каждой моды по семинвариантам с остаточным членом (18.1)

$$\langle \exp(-U_N^{\text{ген}}) \rangle_0 = \exp\left(\sum_{k=1}^{p_0-1} \frac{1}{k!} \langle U_N^{\text{ген},k} \rangle_0 + \frac{1}{p_0!} \langle -U_N^{\text{ген},p_0} \rangle_0\right),$$

$$\langle \cdot \rangle_t = \frac{\langle \cdot \exp(-tU_N^{ren}) \rangle_0}{\langle \exp(-tU_N^{ren}) \rangle_0}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (15)$$

Выделим в правой части (15) под экспонентой члены с коэффициентами λ^k , $k \leq p_0 - 1$. Это будет сумма

$$\sum_{k=2}^{p_0-1} \frac{(-\lambda)^k}{k!} R \langle U_N^k \rangle_0. \quad (16)$$

Мы докажем, что сумма (16) имеет оценку $CM^{-\delta N}$, $C > 0$, $\delta > 0$. Для этого воспользуемся C^L -оценками перенормированных диаграмм, а точнее доказательством теоремы 1 (§ 4). Как видно из этого доказательства (а оно в случае фиксированной моды гораздо проще), дополнительно появляется искомым множитель. При этом C зависит только от p_0 , но не от N .

Остальные члены (15) мы оценим, используя так называемый скейлинг и одномасштабное кластерное разложение.

При преобразовании $x \rightarrow y = M^N x$ куб Δ_N перейдет в единичный куб, куб Δ_1 — в куб Λ со стороной M^N . Кроме того, подставим $\xi_N = d \hat{\xi}_N$, $d = \langle \xi_N^2 \rangle^{1/2}$, а перенормированное поле $\hat{\xi}_N$, т. е. $\hat{\xi}_N = \frac{\xi_N}{d}$ имеет единичную дисперсию и экспоненциальное убывание корреляций в Λ («в единичном масштабе») (при этом мера μ_0 на (Ω, Σ) остается той же, а меняются только случайные величины).

Проверим теперь как будет выглядеть взаимодействие и корреляционные функции для $\hat{\xi}_N(y)$ после этих преобразований. Например,

$$\lambda \int_{\Delta_1} : \xi_N^4(x) : dx = \lambda \Delta d^4 \int_{\Lambda} : \hat{\xi}_N^4(y) : dy. \quad (17)$$

Аналогично в $\langle U_N^{ren, k} \rangle_0$ в членах при λ степени $s \geq p_0$ появится множитель $(\lambda_{ren})^s$, $\lambda_{ren} = \lambda \Delta d^4$, при «перенормированных» семиинвариантах и диаграммах в единичном масштабе. Все эти величины в единичном масштабе допускают оценку $O(\Lambda)$ (например, с помощью «суммирования по деревьям» [6]). Но

$$O(\Lambda) \lambda_{ren}^s = O(\Lambda) O(\Lambda^{1+\delta}) = O(\Lambda^\delta). \quad (18)$$

Для оценки $\langle \cdot \rangle_t$ в (15) надо использовать дополнительно одномасштабное кластерное разложение и кластерную оценку для него. Тогда снова возникает оценка (18), которая дает оценку $1 + O(\Lambda^\delta)$ для (15).

Иерархическая бернуллиевская модель. В этой модели уже есть взаимодействие мод, причем в ситуации довольно хорошо моделирующей общую, и на ее примере удобно продемонстрировать метод, обобщающийся на неиерархический случай.

Пусть Q_k — множество всех кубов $\Delta_{ki} \subset \Delta_1$, где Δ_1 — выделенный куб размера 1, $Q = Q_{\leq N} = \bigcup_{k=1}^N Q_k$.

Для любого $\Delta \in Q$ обозначим

$$S_\Delta = \sum_{\Delta' \in Q: \Delta \subset \Delta'} \eta_{\Delta'}, \quad \hat{S}_\Delta = S_\Delta / \langle S_\Delta^2 \rangle^{1/2}.$$

Заметим, что если $\Delta = \Delta_{ki}$, то

$$\langle \eta_\Delta^2 \rangle = M^{k(2-2\epsilon)}, \quad d_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle S_\Delta^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{c_1 M^{k(2-2\epsilon)}}, \quad \frac{1}{2} \leq c_1 \leq 1. \quad (19)$$

Фиксируем значения всех η_Δ , $\Delta \in Q_{\leq N-1}$, и будем вычислять среднее $\langle \exp(-U_N^{ren}) \rangle_N$ по распределению всех η_Δ , $\Delta \in Q_N$. Пусть множество $E \subset Q_N$ таково, что

$$\begin{aligned} |\hat{S}_\Delta| &> (N-1)^q \text{ при } \Delta \in E, \\ |\hat{S}_\Delta| &< (N-1)^q \text{ при } \Delta \in \bar{E}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для данного множества кубов E будем обозначать $\tilde{E} = \bigcup_{\Delta \in E} \Delta$.

Пусть B — некоторое множество кубов $\Delta \in Q_N$ таких, что $\Delta \subset \tilde{E}$. Пусть \hat{B} — событие, состоящее в том, что

$$|\eta_\Delta| > \frac{1}{2} (N-1)^q d_{N-1}, \quad \Delta \in B, \quad (21)$$

$$|\eta_\Delta| < \frac{1}{2} (N-1)^q d_{N-1}, \quad \Delta \in \bar{B}, \quad \Delta \subset \tilde{E}.$$

Наконец для $D \subset Q_N$ пусть \hat{D} — событие, состоящее в том, что

$$|S_\Delta| > \frac{1}{2} (N-1)^q d_{N-1}, \quad \Delta \in D, \quad (22)$$

$$|S_\Delta| < \frac{1}{2} (N-1)^q d_{N-1}, \quad \Delta \in Q_N \setminus D.$$

Ниже доказывается

Лемма 1.

$$\begin{aligned} \langle \exp(-U_N^{ren}) \rangle_N &\leq \sum_{B, D} C^{|B|} p(\hat{B} \cap \hat{D}) \langle \exp(-U_\Lambda^{ren}) \rangle_N \leq \\ &\leq \sup_{\Lambda \subset \Delta_1 \setminus \tilde{E}} \exp(-U_{N-1, \Lambda}) \left[\prod_{\Delta \in Q_N} (1 + C \Delta^{1+\delta}) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где $\Lambda = \Delta_1 \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{D})$, а определяемое ниже $U_{N-1, \Lambda}$ не зависит от η_Δ , $\Delta \in Q_N$, и в нем все моды в точках $x \in \Delta_1 \setminus \Lambda$ равны нулю.

Заметим сначала, что

$$P(\hat{B}) \leq (\exp(-CN^{2q}))^{|\hat{B}|} \leq (C \Delta^{1+\delta})^{|\hat{B}|}. \quad (24)$$

Теперь в $\langle \cdot \rangle_N$ мы будем интегрировать по $B \cap \hat{D}$. При этом будем постепенно избавляться от переменных η_Δ , $\Delta \in Q_N$, с помощью следующих процедур:

1. для $\Delta \in D$ мы используем доминирование членом S_Δ^4 ;
2. на $B \setminus D$ мы используем оценку Вика;
3. в остальных кубах Δ (т. е. в Λ) мы используем кластерное разложение по N -й моде.

Переходим к подробным объяснениям. Для этого запишем сначала взаимодействие в следующем виде

$$U_{\kappa}^{ren} = \sum_{\Delta \in Q_N} \lambda \Delta : S_\Delta^4 : + \sum_{\Delta \in Q_N} \Delta : S_\Delta^2 : A_\Delta + U^{vak}, \quad (25)$$

где A_Δ — сумма соответствующих массовых диаграмм, в которых (произвольная) точка $x \in \Delta$ фиксирована, а по остальным ведется интегрирование по Δ .

Определим операцию $\tilde{\Gamma}_\Delta$, $\Delta \in Q$, действующую на произвольную диаграмму следующим образом: все поля в точках $x \in \Delta$, входящие в подинтегральное выражение диаграммы, полагаются равными нулю, т. е. уничтожаются все интегрирования по Δ .

Положим $\Gamma_\Delta = 1 - \tilde{\Gamma}_\Delta$ (1 — тождественное преобразование). Докажем, что

$$\exp(-U_{\kappa, \Delta_1}^{ren}) \leq \exp(-U_{\kappa, \Delta_1 \setminus D}^{ren}). \quad (26)$$

Для этого упорядочим все $\Delta \in D$ в порядке возрастания S_Δ : первый — $\Delta^{(1)}$, где $S_{\Delta^{(1)}}$ максимально и т. д., $\Delta^{(2)}$, ... Начнем с $\Delta^{(1)}$ и докажем, что

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\Delta^{(1)}} &\equiv \lambda \Delta : S_{\Delta^{(1)}}^4 : + \Delta : S_{\Delta^{(1)}}^2 : A_\Delta + \Gamma_{\Delta^{(1)}}(U^{vak}) + \\ &+ \sum_{\substack{\tilde{\Delta} \neq \Delta^{(1)}, \\ \tilde{\Delta} \in Q_N}} \Delta : S_{\tilde{\Delta}}^2 : \Gamma_{\Delta^{(1)}}(A_{\tilde{\Delta}}) > 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Для этого достаточно доказать, что $\lambda \Delta S_{\Delta^{(1)}}^4$ превосходит сумму всех остальных членов. Действительно, он отличается от членов $6S_{\Delta^{(1)}}^2 \langle S_{\Delta^{(1)}}^2 \rangle$ и $3 \langle S_{\Delta^{(1)}}^2 \rangle^2$, по меньшей мере, множителем CN^{2q} .

Заметим далее, что асимптотика вакуумных диаграмм (с одной фиксированной точкой) не превосходит асимптотики диаграммы $G = \ominus$, равной

$$M^{N \omega_G} = M^{N(-8-8e+4(4-2+1))} = M^{4N-8eN}.$$

Поэтому

$$\Gamma_{\Delta^{(1)}}(U^{vak}) \leq C \Delta M^{4N-8eN} = o(\Delta S_\Delta^4). \quad (28)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \Delta : S_\Delta^2 : \Gamma_{\Delta^{(1)}}(A_{\tilde{\Delta}}) &= O\left(\Delta^2 \sup_{\tilde{\Delta}} | : S_\Delta^2 : | \ominus \right) = \\ &= O\left(\Delta^2 \sup_{\tilde{\Delta}} S_\Delta^2 M^{N(-6-6e+4(3-2+1))}\right) = o(\Delta^2 S_\Delta^4). \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда и следует (27) и по индукции $U_{\Delta_1} > U_{\Delta_1 \setminus D}$, т. е. (26).

Перейдем теперь к множеству $B \setminus D$. Ввиду (24) нам достаточно оценки

$$\exp(-(U_{\Delta_1 \setminus D} - U_{\Delta_1 \setminus (B \setminus D)})) \leq C^{|\Lambda|}, \quad (30)$$

т. е. вместо (29) достаточно оценки Вика

$$\tilde{U}_\Delta \geq \text{const} \quad (31)$$

для всех $\Delta \in B \setminus D$.

Обозначим

$$\dot{U}_\Delta = \lambda \Delta : S_\Delta^4 : + \Delta : S_\Delta^2 : A_\Delta \quad (32)$$

и применим оценку Вика для \dot{U}_Δ , воспользовавшись тем, что как и в (29)

$$|A_\Delta| = O\left(\Delta^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e}\right). \quad (33)$$

Третий член в (27) оценивается так же, как в (28) и ввиду того, что $\Delta \in Q_N \setminus D$, имеем

$$\Gamma_\Delta(U^{vak}) = o(\Delta^\delta) \quad (34)$$

для некоторого $\delta > 0$.

Замечание 6. Здесь и в дальнейшем важную роль играет выбор оценок (20) — (22), впервые имеющихся у Галлаотти [80] с одной стороны,

$$k^q = (-\log \Delta_k)^q = o(\Delta_k^{-\delta'}) \quad (35)$$

для сколь угодно малого $\delta' > 0$ и поэтому возможны оценки типа (34). С другой стороны,

$$\exp(-k^{2q}) = o(\Delta_k^{1+\delta}) \quad (36)$$

и поэтому допустимы оценки типа (24).

Четвертый член в (27) оценивается аналогично, используя (33) и неравенство

$$\sup_{\tilde{\Delta}} |S_{\tilde{\Delta}}^2| = O(N^{2q} \langle S_{\tilde{\Delta}}^2 \rangle). \quad (37)$$

Отсюда следует первое неравенство (23). Для $\Delta \in Q_N \setminus (DUB)$ разложим

$$\begin{aligned} \exp(-\hat{U}_\Delta) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{p_0-1} \frac{(-1)^k}{k!} \langle \hat{U}_\Delta^k \rangle_{\eta_\Delta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{p_0!} \langle \hat{U}_\Delta^{p_0} \rangle_{\eta_{\Delta,t}}\right), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (38) \\ \langle \cdot \rangle_{\eta_{\Delta,t}} &= \frac{\langle \cdot \exp(-t\hat{U}_\Delta) \rangle_{\eta_\Delta}}{\langle \exp(-t\hat{U}_\Delta) \rangle_{\eta_\Delta}}. \end{aligned}$$

Многие члены под экспонентой в правой части (38) можно оценить как $O(\Delta^{1+\delta})$ счетом размерностей, как и выше. Среди них последний семиинвариант $\langle \cdot \rangle_{\eta_{\Delta,t}}$. Действительно, если разложить его по моментам, экспоненты внутри каждого момента оценить как

$$c_1 \leq \exp(-t\hat{U}_\Delta) \leq c_2,$$

для получившегося момента посчитать размерности, то и получится искомая оценка.

Из оставшихся членов выделим теперь члены степени не большей p_0-1 по λ (остальные члены дадут $O(\Delta^{1+\delta})$) и добавим к ним соответствующие члены из $U^{\text{бак}}$. Положим

$$\begin{aligned} U_{N-1,\Delta} &= \sum_{\Delta \in Q_N \setminus (D \cup B)} \sum_{k=1}^{p_0-1} \frac{(-\lambda)^k}{k!} R_\Delta \langle U_\Delta^k \rangle_{\eta_\Delta}^{\text{def}} \\ &= U_\Delta^{\text{бак}} + \sum_{r=1}^{p_0-1} \frac{(-\lambda)^r}{r!} \sum_{k,l:k+2l=r} \langle U_\Delta^k, U_\Delta^{\text{макс},l} \rangle_{\eta_\Delta}. \quad (39) \end{aligned}$$

Последняя сумма может быть разбита в сумму членов вида

$$\Delta^r \langle :S_{\Delta_1}^4, \dots, :S_{\Delta_k}^4, :S_{\Delta_{k+1}}^2, :A_{\Delta_{k+1}}, \dots, :S_{\Delta_{k+l}}^2, :A_{\Delta_{k+l}} \rangle_{\eta_\Delta}. \quad (40)$$

В данной иерархической модели $\Delta_1 = \dots = \Delta_{k+l}$ (сохранение локальности в иерархической модели). Из леммы 1 следует тогда

$$\langle \exp(-U_\Delta^{\text{гэн}}) \rangle \leq \left[\prod_{\Delta \in Q_N} (1 + C\Delta^{1+\delta}) \right] \sup_{\Delta} \langle e^{-U_{N-1,\Delta}} \rangle. \quad (41)$$

Дальнейшая оценка протекает по индукции. Однако $U_{N-1,\Delta}$ имеет теперь несколько другой вид (39)–(40) и необходимы некоторые изменения в рассуждениях.

Фиксируем теперь S_Δ , $\Delta \in Q_{N-2}$, и пусть $E_{N-2} \subset Q_{N-2}$, $\bar{E} \subset \Lambda$, таково, что

$$\begin{aligned} |\hat{S}_\Delta| &> (N-2)^q, \quad \Delta \in E_{N-2}, \\ |\hat{S}_\Delta| &< (N-2)^q, \quad \Delta \in \bar{E}_{N-2}, \quad \Delta \subset \Lambda. \quad (42) \end{aligned}$$

Соответственно вводятся $B = B_{N-2}$ и $D = D_{N-2}$, $\bar{B}_{N-2} \subset \bar{E}_{N-2}$, $\bar{D}_{N-2} \subset \Lambda$. При устранении взаимодействия на D_{N-2} , т. е. при доказательстве доминирования члена S_Δ^4 достаточно заметить, что для всех оставшихся $\Delta \in Q_{N-2}$ после первого шага (в силу определения к E) и, в частности, для $\Delta \in D_{N-2}$

$$|\hat{S}_\Delta| < (N-1)^q. \quad (43)$$

Поэтому достаточно, в дополнение к изложенной процедуре, использовать счет размерностей при доказательстве доминирования S_Δ^4 . Остальное также аналогично. Перед разложением (38) будем считать, что поля принимают произвольные значения, завышая оценку.

Мы получаем таким образом последовательность взаимодействий U_{N-1}, U_{N-2}, \dots . Возможная трудность при этом состоит в том, что число различных членов в U_k может расти с уменьшением k . Заметим, однако, что если степень данного члена по λ более p_0-1 , то он оценивается счетом размерностей, как объяснено выше, и исчезает на следующем шаге. Поэтому в действительности число различных (неэквивалентных) диаграмм в U_k ограничено равномерно по k .

Отсюда следует оценка (13) для иерархической бернуллиевской модели.

Глава 2

РЕНОРМГРУППА И МНОГОМАСШТАБНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

§ 1. Ренормгруппа Вильсона

Здесь описывается общая стратегия построения моделей евклидовой теории поля, несколько отличная от применявшейся в главе 1. Основной процедурой, которой мы пользовались в § 5 главы 1, было последовательное интегрирование мод. При этом осуществлялся переход к более крупному масштабу. Удобно действовать в одном масштабе, этот переход к единому масштабу и приводит к использованию ренормгруппы.

В действительности конечная частично уже достигнутая цель приводимых ниже рассмотрений: полный контроль над гиббсовскими полями в окрестности гауссовой неподвижной точки или даже в окрестности любого гауссова поля.

Ренормгруппой (скейлингом) называется группа $R_s^{(a)} = R_s$ (a — вещественный параметр) автоморфизмов алгебры \mathfrak{A} в себя, порождаемая преобразованиями

$$(R_s^{(a)} \xi)(x) = s^a \xi(sx) \quad (1)$$

или, точнее,

$$(R_s^{(a)} \xi)(\varphi) = \xi(R_s^{(a)} \varphi), \quad (R_s^{(a)} \varphi)(x) = s^{a-\nu} \varphi(s^{-1}x). \quad (1')$$

Аналогично предыдущей главе, рассмотрим разбиение

$$\xi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(x) \quad (6)$$

на независимые моды $\xi_k(x)$ с ковариациями

$$\tilde{C}_k = \tilde{C}(p; M_k^{-2}, M_{k-1}^{-2}; 0), \quad M_k \equiv M^{k-1}, \quad (7)$$

где k меняется от $-\infty$ до ∞ (в отличие от предыдущей главы). Заметим при этом, что распределения гауссовых полей $M^{-a}\xi_k(M^{-1}x)$ и $\xi_{k-1}(x)$ совпадают.

Удобно рассматривать расширенную алгебру $\bar{\mathfrak{A}}$, натянутую на все $\xi_k(x)$ (счетное множество индексов), и состояния на $\bar{\mathfrak{A}}$. При этом скейлинг действует на каждую $\xi_k(x)$ по формуле (1).

Пусть \mathfrak{A}_N — подалгебра алгебры $\bar{\mathfrak{A}}$, порожденная всеми $\xi_k(x)$ с $k \leq N$. Скейлинг R_s и R_s^* определяются аналогично на $\bar{\mathfrak{A}}$, \mathfrak{A}_N и $\bar{\mathfrak{A}}^*$, \mathfrak{A}_N^* .

Для любого состояния μ на $\bar{\mathfrak{A}}$ обозначим $P_{n,\mu}$ его ограничение на \mathfrak{A}_N . Пусть ν — гауссова мера с ковариацией (3) и $\nu^N = P_{N,\nu}$.

В предыдущей главе мы рассматривали урезанные («затравочные» или «голые») состояния на \mathfrak{A}_N вида

$$d\mu^{N,N} = \exp(-U^{N,N}) d\nu^N,$$

являющиеся гиббсовскими перестройками меры ν^N в конечном (или бесконечном) объеме. Все взаимодействия далее определены с точностью до аддитивной константы.

Последовательным интегрированием мод мы получали меры на \mathfrak{A}_n

$$d\mu^{N,n} = \exp(-U^{N,n}) d\nu^n, \quad n = N-1, N-2, \dots$$

(эффективные меры в масштабе M_n при начальном урезании M_N). Наша цель в § 5 главы 1 была — доказать существование предела на \mathfrak{A}

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu^{N,N}$$

или пределов на \mathfrak{A}_n

$$\mu^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu^{N,n}.$$

Удобно работать в одном масштабе, т. е. в одной алгебре, например, в \mathfrak{A}_1 , рассматривая не перестройки различных мер ν^n , а одной меры ν^1 . Обозначим через S автоморфизм $\bar{\mathfrak{A}}$, порожденный $S\xi_k(x) = \xi_{k+1}(x)$. Тогда $S\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_{n+1}$. Для любой меры μ^n на \mathfrak{A}_n определим меру

$$\tilde{\mu}^n \stackrel{\text{def}}{=} (S^*)^{n-1} (R_{M^{-1}}^*)^{n-1} \mu^n$$

Аналогично для $\psi, \bar{\psi}$. Это преобразование заключается, таким образом, в изменении масштаба на R^v и на множестве значений поля.

Если $s \geq 1$ ($s \leq 1$), то соответствующая полугруппа называется инфракрасным (ультрафиолетовым) скейлингом.

Двойственная группа R_s^* (параметр a фиксирован) действует на состояния μ на \mathfrak{A} по формуле

$$\langle A \rangle_{R_s^* \mu} = \langle R_s A \rangle_{\mu}.$$

Неподвижные точки R_s^* называются автомодельными состояниями (полями).

В случае гауссова состояния с нулевыми средними изменение меры $\mu \rightarrow R_s^* \mu$ эквивалентно изменению ковариации

$$C(x) \rightarrow s^{2a} C(sx) \quad \text{или} \quad \tilde{C}(p) \rightarrow s^{2a-v} \tilde{C}\left(\frac{p}{s}\right). \quad (2)$$

Мы будем рассматривать случай, когда

$$\tilde{C}(p) = \frac{D(p)}{p^{2(1+\varepsilon)}} = \text{const} \int_0^{\infty} D(p) \alpha^\varepsilon e^{-\alpha p^2} d\alpha, \quad (3)$$

где $D(p)$ — однородный по p многочлен степени d , если данное гауссово поле существует.

Если обозначить

$$\tilde{C}(p; \alpha_1, \alpha_2; m) = \text{const} D(p) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha^\varepsilon e^{-\alpha(p^2+m^2)} d\alpha,$$

то

$$R_s^* \tilde{C}(p; \alpha_1, \alpha_2; m) = s^{2a-v+2(1+\varepsilon)-d} \tilde{C}(p; s^{-2}\alpha_1, s^{-2}\alpha_2; sm). \quad (4)$$

Преобразование (4) особенно просто для значения

$$a = \frac{v+d-2(1+\varepsilon)}{2}, \quad (5)$$

называемого каноническим. Для этого значения гауссово поле с ковариацией (3) является автомодельным.

Состояние на \mathfrak{A} называется ультрафиолетово (инфракрасно) асимптотически свободным (УАС или ИАС), если его предел при действии ультрафиолетового (инфракрасного) скейлинга, т. е. при $s \rightarrow 0$ ($s \rightarrow \infty$), является автомодельным гауссовым полем (далее везде имеется в виду каноническое значение параметра). Асимптотическая свобода проверяется a posteriori, т. е. после построения этого поля. Однако факт асимптотической свободы, наблюдаемый уже по теории возмущений, играет роль при построении этого поля.

на \mathfrak{A}_1 . Тогда $\tilde{\mu}^n$ является гиббсовской перестройкой ν^1 ввиду (пусть $F \in \mathfrak{A}_{n-m+1}$)

$$\begin{aligned} \langle F \rangle_{\tilde{\mu}^n} &= \langle S^{m-1} R_{M_m^{-1}} F \rangle_{\mu^n} = \langle (S^{m-1} R_{M_m^{-1}} F) \exp(-U^n) \rangle_{\nu^n} = \\ &= \langle F \exp(-S^{-m+1} R_{M_m} U^n) \rangle_{(S^*)^{m-1} R_{M_m}^{-1} \nu^n} = \\ &= \langle F \exp(-S^{-m+1} R_{M_m} U^n) \rangle_{\nu^{n-m+1}} \end{aligned} \quad (8)$$

и, значит,

$$\langle F \rangle_{\tilde{\mu}^n} = \langle F \exp(-\tilde{U}^n) \rangle_{\nu^1}, \quad (9)$$

где

$$\tilde{U}^n = S^{-n+1} R_{M_n} U^n. \quad (10)$$

Чтобы перевести интегрирование мод в один масштаб, рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mu^{N,n} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{\mu}^{N,n} \\ P_{n-1} \downarrow & (S^*)^{n-1} R_{M_n}^* \downarrow W & \downarrow W \\ \mu^{N,n-1} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{\mu}^{N,n-1} \\ & (S^*)^{n-2} R_{M_{n-1}}^* & \end{array}$$

где

$$\begin{aligned} W &= (S^*)^{n-2} R_{M_{n-1}}^* P_{n-1} (S^*)^{-(n-1)} R_{M_n}^* = \\ &= P_1 (S^*)^{-1} R_M^* = (S^*)^{-1} R_M^* P_0 \end{aligned} \quad (11)$$

является отображением \mathfrak{A}_1^* в себя.

Заметим, что мы снабжаем таким образом меры и взаимодействия, переведенные в единичный масштаб, волной. Например, $\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu^{N,N}$ и т. д. Полугруппа W^k называется ренормгруппой Вильсона.

Заметим, что определение ренормгруппы Вильсона зависит от выбора разбиения на моды, а этот последний определяется соображениями удобства (важна гладкость пропагаторов и т. д.).

Ренормгруппа Вильсона соответствует инфракрасному скейлингу. Можно определить двойственный вариант ренормгруппы Вильсона, соответствующий ультрафиолетовому скейлингу. Однако

он не удобен для вычислений, так как дисперсия $\xi(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} \xi_k(x)$

бесконечна, в отличие от конечности дисперсии $\xi(x) = \sum_{k=-\infty}^1 \xi_k(x)$.

Формальное разложение для ренормгруппы Вильсона. Пусть дана некоторая мера $\tilde{\mu}$

$$d\tilde{\mu} = \exp(-\lambda \tilde{U}(\xi(x))) d\nu^1,$$

где через $\xi(x)$ обозначено гауссово поле с ковариацией $\sum_{k=-\infty}^1 C_k$, которая совпадает с ковариацией суммы двух независимых гауссовых полей

$$\eta(x) + M^{-a} \xi(M^{-1}x),$$

где $\eta(x)$ имеет ковариацию C_1 . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d(W\tilde{\mu})}{d\nu^1} &= \langle \exp(-\lambda \tilde{U}(M^{-a} \xi(M^{-1}x) + \eta(x))) \rangle_{\eta} = \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \langle \tilde{U}^k(M^{-a} \xi(M^{-1}x) + \eta(x)) \rangle_{\eta}\right) = \\ &\stackrel{\text{де}}{=} \exp(-\tilde{U}_{\text{эфф}}(\xi(x))), \end{aligned} \quad (12)$$

где средние и семинварианты берутся по распределению η . В общем случае ряд по семинвариантам формальный, однако в случае фермионных полей и полиномиального взаимодействия U вида (13) он сходится для достаточно малых λ .

Здесь и далее U является конечной суммой членов вида

$$a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \int: \prod_{i=1}^n \xi^{(\alpha_i)}(x): dx, \quad (13)$$

$\alpha_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^v)$, а $\xi^{(\alpha_i)}$ — производная по x^1 порядка α_i^1, \dots , по x^v — порядка α_i^v .

Прежде чем идти дальше, докажем сходимость ряда по семинвариантам в (12) для достаточно малых $|\lambda|$ по норме в \mathfrak{A} такой, что $\|\xi(x)\| = \text{const} < \infty$ не зависит от x . Для этого нужны хорошие оценки семинвариантов функционалов от $\eta(x)$, чем мы и займемся в следующем параграфе.

§ 2. Одномасштабные кластерные оценки для ферми-полей

Здесь приводится комбинаторный метод оценки семинвариантов, принадлежащий Гавендзкому—Купьяйнену [100]. Он основан фактически на комбинаторной технике [123], упрощенной Зайлером [5].

Рассмотрим гауссово поле $\eta = \{\eta_i(x), \bar{\eta}_i(x), i = 1, \dots, s\}$, с мерой ν^1 . Получить оценки семинвариантов на решетке — довольно стандартная задача. Основная идея, как сделать это на R^v , состоит в том, что поле η в единичном кубе «почти

конечномерно», что фактически сводит R^v к решетке. Иначе говоря, R^v разбивается на единичные кубы Δ_i и в каждом кубе Δ выбирается хорошее конечномерное приближение для $\eta(x)$, $x \in \Delta$.

Лемма 1. Для любых Δ_1 и Δ_2 пусть $x_1, \dots, x_n \in \Delta_1$, $y_1, \dots, y_n \in \Delta_2$. Тогда для любого $\alpha > 0$ существует $C(M, \alpha)$, что

$$|\Gamma_n| \equiv \left| \left\langle \prod_{i=1}^n \eta_{\alpha_i}(x_i) \bar{\eta}_{\beta_i}(y_i) \right\rangle \right| \leq \frac{1}{(n!)^{2\alpha}} (C(M, \alpha))^n \exp(-4n \operatorname{dist}(\Delta_1, \Delta_2)). \quad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим два случая

A) $\operatorname{dist}(\Delta_1, \Delta_2) \leq a \ln n$;

B) $\operatorname{dist}(\Delta_1, \Delta_2) > a \ln n$, $a = 1 + 2\alpha$.

Заметим, что из первого неравенства (11.4.1) следует, что для всех A $|C(x-y)| \leq C(A, M) e^{-A|x-y|}$ и, значит, в случае B)

$$|\Gamma_n| \leq n! (C(M))^n e^{-5n \operatorname{dist}(\Delta_1, \Delta_2)} \leq n! (C(M))^n e^{-n a \ln n} e^{-4n \operatorname{dist}(\Delta_1, \Delta_2)},$$

что и дает (1).

В случае (A) положим $R = 2a \ln n$,

$$C(x-y) = C^0(x-y) + C^1(x-y),$$

где

$$C^0(x-y) = \sum_{r \in Z^v} C(x-y+rR) = \sum_{p \in \frac{2\pi}{R}Z^v} R^{-v} e^{ip(x-y)} \hat{C}(p).$$

Тогда

$$|\Gamma_n| \leq \sum_{I, J, m} \left| \left\langle \prod_{i \in I} \tilde{\eta}_{\alpha_i}(x_i) \prod_{j \in J} \tilde{\eta}_{\beta_j}(y_j) \right\rangle \right|_{C^0} \left| \left\langle \prod_{i \in I^c} \prod_{j \in J^c} \right\rangle_{C^1} \right|, \quad (2)$$

где сумма по всем $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, $|I| = |J| = m$.

Разлагая в первых скобках

$$\tilde{\eta}_j(x) = \sum_p R^{-v} e^{ipx} \tilde{\eta}_j(p), \quad \tilde{\eta}_j^2(p) = 0, \quad (3)$$

$$\langle \tilde{\eta}_j(p) \tilde{\eta}_j(q) \rangle = R^v \hat{C}(p) \delta_{p, -q};$$

$$|\Gamma_n| \leq \sum_m C^n m! \sum_{\{p_i\}} R^{-vm} \prod_{i=1}^m \hat{C}(p_i) (n-m)! (C(M))^{n-m} e^{-3R(n-m)},$$

где сумма по всем наборам индексов $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_m$, причем для любого $p \in \frac{2\pi}{R}Z^v$ не более $2s$ индексов i таких, что $p_i = p$.

Поэтому $\sum p_i^2 \geq Cm^2$, и так как

$$\hat{C}(p) = \operatorname{const} \frac{1}{p^2} (e^{-p^2} - e^{-M^2 p^2}),$$

то

$$|\Gamma_n| \leq \sum_m C^n m! C(M)^m e^{-\frac{Cm^2}{R^2}} (n-m)! (C(M))^{n-m} e^{-3R(n-m)}.$$

Откуда легко следует (1).

Для семиинвариантов, однако, верны только следующие оценки. Через F с различными индексами будем обозначать мономы вида

$$F = \prod \eta_{\alpha_j}(x_j) \prod \bar{\eta}_{\beta_i}(y_i). \quad (4)$$

Носителем F назовем множество x_j и y_i .

Лемма 2. Если степени мономов F_i равномерно ограничены и носители всех F_i принадлежат одному единичному кубу Δ , то

$$|\langle F_1, \dots, F_N \rangle| \leq C^N N! \quad (5)$$

Доказательство легко следует из выражения семиинвариантов через моменты и из леммы 1.

Разобьем R^v на единичные кубы Δ_i и пусть снова степени F_i равномерно ограничены. Носитель F_k принадлежит какому-либо из кубов Δ_j (возможно разным для разных i). Тогда имеет место Лемма 3.

$$|\langle F_1, \dots, F_N \rangle| \leq \left[\prod N_{\Delta}! \right] C^N \exp(-d_{\tau}), \quad (6)$$

где τ — множество всех кубов, содержащих носитель хотя бы одного из F_i , N_{Δ} — число F_i с носителем в Δ , d_{τ} — длина наименьшего дерева с вершинами в центрах кубов $\Delta \in \tau$.

Для доказательства нам понадобится

Лемма 4. Существуют такие α и $C(\alpha)$, что для любого набора τ попарно различных Δ и любых мономов F_{Δ} степени N_{Δ} с носителем в Δ

$$|\langle F_{\Delta}^{\tau} \rangle| \leq \frac{1}{\left(\prod_{\Delta} N_{\Delta}! \right)^{\alpha}} C(\alpha)^{\sum N_{\Delta}} e^{-d_{\tau}}. \quad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим всевозможные разбиения F_{Δ} на множители, нумеруемые кубами $\Delta' \in \tau$

$$F_{\Delta} = \prod_{\Delta'} F_{\Delta}^{\Delta'} \bar{F}_{\Delta}^{\Delta'}, \quad (7')$$

где в $F_{\Delta}^{\Delta'}$ есть только поля η , а в $\bar{F}_{\Delta}^{\Delta'}$ — только $\bar{\eta}$. Только

$$\langle F_{\Delta}^{\tau} \rangle = \sum \prod \langle F_{\Delta}^{\Delta'} \bar{F}_{\Delta}^{\Delta'} \rangle \langle \bar{F}_{\Delta}^{\Delta'} F_{\Delta}^{\Delta'} \rangle, \quad (8)$$

где сумма по всем связным графам G с множеством вершин τ , а произведение — по всем ребрам (Δ, Δ') графа G .

Вместо каждого множителя в правой части (8) подставим его оценку из леммы 1

$$|F_{\Delta}^{\alpha}| \leq \sum \prod_{i=1}^2 \prod \frac{1}{(n_i(\Delta, \Delta')!)^{2\alpha}} C(\alpha)^{n_i(\Delta, \Delta')} e^{-4n_i(\Delta, \Delta') \text{dist}(\Delta, \Delta')}, \quad (9)$$

где $n_1(n_2)$ — число множителей в $F_{\Delta}^{\Delta'}$ (F_{Δ}^{Δ}).

Мы покажем, что правая часть (9) не превосходит выражения

$$\frac{1}{(\prod_{\Delta} N(\Delta))^\alpha} \sum \prod_{i=1}^2 \prod C(\alpha)^{n_i(\Delta, \Delta')} e^{-3n_i(\Delta, \Delta') \text{dist}(\Delta, \Delta')}. \quad (10)$$

Действительно, если в произведении \prod хотя бы одно $n(\Delta, \Delta') \geq \sqrt{N(\Delta)}$, то за счет выбора α можно вынести $\frac{1}{(N(\Delta))^\alpha}$ за скобку. Если же все $n(\Delta, \Delta') < \sqrt{N(\Delta)}$, то число множителей в \prod больше $\sqrt{N(\Delta)}$, и для любого Δ

$$\prod_{\Delta'} \prod_{i=1}^2 e^{-\frac{1}{2} n_i(\Delta, \Delta') \text{dist}(\Delta, \Delta')} \leq C(\alpha)^{N(\Delta)} \frac{1}{(N(\Delta))^\alpha}.$$

Далее обычное суммирование по графам [7] даст нужную оценку.

Для доказательства леммы 3 воспользуемся следующей формулой [100]. Пусть $\{K_a\}$ — разбиение множества $\{1, \dots, N\}$. Пусть носитель $\text{supp } F_i$ каждого F_i принадлежит некоторому единичному кубу. Обозначим для данного $K \subset \{1, \dots, N\}$

$$F_{K, \Delta} = \prod_{i: \text{supp } F_i \in \Delta, i \in K} F_i.$$

Для заданного K обозначим

$$\rho(K) = \langle F_{\tilde{K}, \Delta} \rangle,$$

где \tilde{K} — множество кубов Δ , для которых существует $i \in K$ такое, что $\text{supp } F_i \subset \Delta$. Тогда если F_i все четны, то

$$\langle F_1, \dots, F_N \rangle = \sum_{\{K_a\}} \mu(G(\{K_a\})) \prod_a \rho(K_a), \quad (11)$$

где сумма по всем разбиениям таким, что граф $G = G(\{K_a\})$ связан. Вершинами G являются блоки K_a , между K_a и $K_{a'}$ есть ребро тогда и только тогда, когда $K_a \cap K_{a'} \neq \emptyset$. При этом

$$\mu(G) = \sum_{\Gamma} (-1)^{|\Gamma|}, \quad (12)$$

где сумма по всем связным подграфам G с тем же множеством вершин, что и G , $|\Gamma|$ — число ребер Γ .

Для доказательства (11) заметим, что

$$\langle \prod_{i=1}^N F_i \rangle = \sum_{\{K_a\}} \left[\prod_a \rho(K_a) \right] \left[\prod_{\{a, a'\}} A(K_a, K_{a'}) \right], \quad (13)$$

где произведение по всем неупорядоченным парам $a \neq a'$ и $A(K_a, K_{a'}) = 1$, если $K_a \cap K_{a'} = \emptyset$ и 0 в противном случае. Разлагая в (13) $\prod A = \prod (1 + (A - 1))$, мы получаем (11), например, сравнивая диаграммы в левой и правой частях (11) (таким же сравнением доказывается и (13)).

Доказательство леммы 3. Воспользуемся тем, что $|\mu(G)|$ не превосходит числа связных поддеревьев G с тем же множеством вершин [5]. Для каждого Δ упорядочим множество A_{Δ} всех F_i с $\text{supp } F_i \subset \Delta$ и разобьем A_{Δ} на отрезки-блоки. Это даст $\prod 2^{N_{\Delta}} N_{\Delta}!$ способов. Мы рассмотрим теперь множество \mathfrak{A} всех связных деревьев, множеством V вершин которых являются блоки разбиений всех A_{Δ} . Каждому дереву из \mathfrak{A} поставим в соответствие пару $\{K_a\}$, Γ следующим образом. Упорядочим V следующим образом: упорядочим $\{\Delta\}$ хронологически, а внутри Δ уже есть порядок. Возьмем первую вершину $v \in V$ и некоторое дерево, содержащее v и такое, что все его вершины принадлежат разным Δ . Ему отвечает некоторое множество K_1 . Далее из первой вершины K_1 (а именно из v) решаем вести или не вести ребро во вторую вершину v_2 из Δ . Если ведем, то объявляем это ребро ζ_1 ребром из Γ и строим из v_2 аналогично множество K_2 . Если не ведем, то переходим к следующей по порядку вершине K_1 и с ней повторяем то же самое.

Таким образом мы получим последовательность $K_1, \zeta_1, K_2, \zeta_2, \dots$, т. е. пару $\{K_a\}, \Gamma = \{\zeta_i\}$.

Произвол в выборе K_i учитывается стандартным суммированием по деревьям, произвол в выборе ζ_i дает множитель $2^{|\zeta_i|}$. Если мы уже построили K_1, K_2, \dots, K_n , то построение ζ_n начинаем с первой из уже построенных вершин такой, что мы еще не решали раньше, строить ли из нее ζ_i .

§ 3. Итерация ренормгруппы Вильсона в окрестности гауссовой неподвижной точки

Линеаризация или линейная ренормгруппа. Напомним, что v_1 неподвижна относительно W . В приближении первого порядка по λ $\tilde{U}_{\text{эфф}}$ равно

$$\lambda W_1(U) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \lambda \tilde{U}(M^{-a} \xi(M^{-1}x) + \eta(x)) \rangle_n, \quad (1)$$

что очевидно из (12.1), т. е. на взаимодействие действует ультрафиолетовый скейлинг.

При всех k члены ряда для $\tilde{U}_{\text{эфф}}$ имеют вид

$$\text{const} \int G(x_1, \dots, x_k) A_1(x_1) \dots A_k(x_k) dx_1 \dots dx_k, \quad (2)$$

где

$$A_p(x_p) = M^{-an_p} : \prod_{i=1}^{n_p} \xi^{(\alpha_i^p)} (M^{-1}x_p) :.$$

При этом n_p может равняться нулю, тогда $A_p \equiv 1$. В (2) G — некоторая связанная диаграмма без свободных отростков с пропагаторами $\langle \eta_{\beta_i}^{(\alpha_i)}(x_i) \eta_{\beta_j}^{(\alpha_j)}(x_j) \rangle$, а интегрирование ведется по x_2, \dots, x_n — по всему R^v , а по x_1 — по конечному объему Λ , или формально по R^v . Если учесть, что $G(x_1, \dots, x_k) = \hat{G}(x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1)$, то (2) можно переписать в виде

$$\text{const} M^{-\sum_p \left(an_p + \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i^p \right)} \int_{M^{-1}\Lambda} dy_1 d(M(y_2 - y_1)) \dots d(M(y_k - y_1)) \times \\ \times \hat{G}(M(y_2 - y_1), \dots, M(y_k - y_1)) \prod_{p=1}^k : \prod_{i=1}^{n_p} \xi^{(\alpha_i^p)}(y_p) :. \quad (3)$$

Особую роль играют локальные члены, т. е. $k=1$. Они являются «собственными векторами» линейной ренормгруппы (1). Их «собственные значения» (спектр линейной ренормгруппы) равны

$$M^{-an - \sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad \text{где } n = n_1. \quad (4)$$

Это определение является формальным, так как интегрирование по x_1 формально по R^v . Если же интегрировать по конечному объему, то надо учитывать изменение объема при замене переменной.

Удобно считать, что ренормгруппа действует на пространстве дифференциальных форм

$$: \prod \xi^{(\alpha_i)}(x) : dx, \\ G(x_1, \dots, x_k) A(x_1) \dots A(x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Если собственное значение (4) больше 1, то вектор $: \prod_{i=1}^n \xi^{(\alpha_i)}(x) : dx$ или соответствующее переменное $a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ называется существенным; если меньше 1, то несущественным, и если равно 1, то безразличным.

Если $a > 0$, то число существенных или безразличных переменных конечно. Далее это всегда предполагается.

Асимптотическая свобода. Ясно, что инфракрасный скейлинг тесно связан с ренормгруппой Вильсона. Поэтому формально ИАС может возникнуть, если нет существенных неквадратичных векторов. Если взять $d=0$ и рассматривать только четные векторы, это значит, что $v \leq 2$ ($v=2(1+\varepsilon)$) (равенство достигается при $\alpha_i \equiv 0$, $n=4$). Поэтому при $\varepsilon=0$ надо исследовать следующий порядок по λ . (Например, при $v=4$; см. ниже). УАС удобно объяснять, применяя другое разбиение на моды:

$$\tilde{C}_k(p) = \tilde{C}(p) \chi_{[M_{k-1}, M_k]}(p). \quad (5)$$

В этом случае \mathcal{A}_N принадлежит самой \mathcal{A} и для любого состояния μ и $\mu' = R_M^* \mu$ (инфракрасный скейлинг)

$$(\mu')^n = R_M^* (\mu^{n-1}) \quad (6)$$

и, значит,

$$(\tilde{\mu}')^n = \tilde{\mu}^{n-1} = W \tilde{\mu}^n. \quad (7)$$

Из (7) следует, что ультрафиолетовый скейлинг R_M^* есть операция, в некотором смысле обратная к W , если ее рассматривать на эффективных мерах.

Поэтому, если состояние является УАС, то затравочные меры $\tilde{\mu}^{N,N}$ при $N \rightarrow \infty$ должны стремиться к гауссовой мере, так как

$$W^{N-n} \tilde{\mu}^{N,N} = \tilde{\mu}^{N,n} \rightarrow \tilde{\mu}^n. \quad (8)$$

Стратегия построения моделей евклидовой теории поля состоит таким образом в том, чтобы выбрать $\tilde{\mu}^{N,N}$ достаточно близко к гауссовой неподвижной точке так, чтобы существовал предел (8). Система мер $\tilde{\mu}^n$ полностью определит искомую меру μ . Действительно, условие согласования мер μ^n переходит в условие

$$\tilde{\mu}^n = W(\tilde{\mu}^{n+1}), \quad (8')$$

которое при построении $\tilde{\mu}^n$ следует из (8), и, наоборот, условие (8') дает согласованность мер μ^n , что следует из (6) и (7). Условие нетривиальности предела и OS-положительность налагает условия на существенные и безразличные переменные. В частности, теория не может быть ИАС. При этом в $\tilde{U}^{N,N}$ берутся только локальные существенные или безразличные члены.

Зоология диаграмм и дополнительные пересуммирование при итерации. Удобно представлять члены (2) — (3) как диаграммы с отростками (см. [7], стр. 56). При итерации формулы (12.1) снова возникнут диаграммы с отростками. Диаграмму после k -й итерации будем называть существенной, безразличной или несущественной в зависимости от того, что число $\hat{\omega} = v - aN - \hat{N}$

больше, равно или меньше нуля. Здесь N — число свободных отростков в диаграмме, N' — сумма порядков производных у этих отростков. Это определение оправдывается тем, что предел итерации линейной ренормгруппы (1), т. е. R_{M-n} при $n \rightarrow \infty$, при действии на несущественную диаграмму равен нулю.

На каждом шаге итерации мы будем дополнительно перестраивать ряд теории возмущений. Пусть уже сделана k -я итерация. Перед $(k+1)$ -й итерацией сделаем переупорядочивание Вика: в каждой существенной или безразличной диаграмме сделаем замену

$$:\xi_{T_1} : \dots : \xi_{T_k} : = \Sigma I(G), \quad (9)$$

где в обозначениях [7, стр. 56] сумма берется по всем диаграммам G вида (1, β) таким, что каждый двухточечный блок разбиения β не принадлежит ни одному T_j . Иначе говоря, произведение виковских мономов заменяется на их сумму. Возникающие при этом ребра называются виковскими, в отличие от η -ребер, в $G(x_1, \dots, x_k)$. Иногда удобно делать виковское переупорядочение и для некоторых несущественных диаграмм.

Еще одной перестройкой будет выделение локальных членов: после виковского переупорядочивания каждый виковский моном с $\hat{\omega} \geq 0$ разложим по формуле Тейлора до порядка $\hat{\omega} + 1$

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, 1) = & \Phi(x_1, 0) + \dots + \frac{1}{\hat{\omega}!} \frac{\partial^{\hat{\omega}} \Phi(x_1, 0)}{\partial t^{\hat{\omega}}} + \\ & + \frac{1}{(\hat{\omega} + 1)!} \int_0^1 \frac{\partial^{\hat{\omega} + 1} \Phi(x_1, t)}{\partial t^{\hat{\omega} + 1}} dt, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\Phi(x_1, t) = \xi^{(\beta_1)}(x_1) \xi^{(\beta_2)}(x_1 + t(x_2 - x_1)) \dots \xi^{(\beta_k)}(x_1 + t(x_k - x_1)).$$

Таким образом, после каждого шага итерации у нас останется сумма существенных или безразличных локальных членов и несущественных локальных и нелокальных членов. Первых всегда конечное число, мы их занумеруем и обозначим коэффициент перед i -м существенным или безразличным членом перед $(k+1)$ -й итерацией через $a_i^{(k)}$.

В фермионном случае мы докажем, что, ввиду сходимости рядов, преобразование

$$S_k: \{a_i^{(0)}\} \rightarrow \{a_i^{(k)}\}$$

является диффеоморфизмом. Грубо говоря, задача теперь сводится к двум: изучить сходимость S_k как задачу близкую к исследованию фазовых траекторий конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и с помощью кластерных разложений доказать сходимость остальных членов.

Полезно визуализировать диаграммы на данной итерации. В каждой содержатся свободные отростки и ребра. Будем говорить, что ребро имеет ранг k , если оно возникло на k -й итерации. Пусть G_{1p} — связные компоненты графа (на вершинах диаграммы G), образованного ребрами ранга 1, $\mathcal{F}_{1p} \subset G_{1p}$ — некоторое максимальное связанное поддерево графа G_{1p} ; далее в факторграфе $G/\{G_{1p}\}$ выделим связные компоненты G_{2p} ребер ранга 2 и т. д.

Произвольная диаграмма на n -м шаге итерации имеет вид (если в ней нет, для простоты, виковских ребер и без учета интегрирования по t в (10))

$$\begin{aligned} & \left[\prod_{k=1}^n M^{a_k} \right] \int dy_1 \left[\prod_{\zeta} C_1(M^{n-k(\zeta)+1}(y_i - y_j)) \right] \\ & \left[\prod_{v=1}^V : \prod_{i=1}^{n_v} \xi^{(\alpha_i)}(y_v) : \right] \left[\prod'_{\zeta} d(M^{n-k(\zeta)+1}(y_i - y_j)) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где M^{a_k} — множитель как в (2), появляющийся из-за скейлинга (линейной ренормгруппы) на k -м шаге итерации; произведение \prod берется по всем ребрам ζ , y_i, y_j — вершины ζ ; $k(\zeta)$ — ранг ребра ζ , V — число вершин диаграммы; $C_1(x - y)$ — один из конечного числа пропагаторов вида $\langle \eta^{(\alpha)}(x) \eta^{(\beta)}(y) \rangle$; \prod' берется по всем $\zeta \subset \bigcup_{k,p} \mathcal{F}_{kp}$; n_v — число свободных отростков из вершины v .

Кластерное разложение урезанных статсумм с помощью ренормгруппы. Если мы рассматриваем гиббсову перестройку мер ν^1 , то урезанной статсуммой в объеме Λ назовем

$$Z_{N,\Lambda} = \langle \exp \left(-\tilde{U} \left(\sum_{k=-N}^1 \xi_k(x) \right) \right) \rangle_{\Lambda, \nu^1}. \quad (12)$$

Заметим, что

$$Z_{N,\Lambda} = \langle SR_{M^{-1}} \langle \exp \left(-\tilde{U} \left(\eta + \sum_{k=-N}^0 \xi_k(x) \right) \right) \rangle_{\eta} \rangle_{\nu^1}. \quad (13)$$

Поэтому если при итерации ренормгруппы мы имеем хороший контроль над эффективным взаимодействием, то можно надеяться получить обычное [7] кластерное представление статсумм $Z_{N,\Lambda}$ с кластерной оценкой, равномерной по N . Отсюда стандартной техникой получаются аналитические свойства свободной энергии при снятых урезаниях $N \rightarrow \infty$, $\Lambda \uparrow R^V$.

Пусть $\mu_{N,\Lambda}$ — состояние с объемным урезанием Λ и импульсным урезанием N . Мы увидим далее, что аналогично получается

доказательство существования предельного состояния

$$\tilde{\mu} = \lim_{\Lambda \uparrow R^v} \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_{N, \Lambda}$$

§ 4. Сверхперенормируемая ИАС фермионная модель

Основные приемы доказательства сходимости легко понять на следующем примере. Рассмотрим гауссово ферми-поле на R^v , $v > 4$, с компонентами $\bar{\psi}_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\bar{\psi}_2(x)$, $\psi_2(x)$ и ковариацией

$$\langle \bar{\psi}_i(x) \psi_j(x) \rangle = \text{const } \delta_{ij} \int \frac{\exp(ip(x-y)) dp}{p^2 + m^2}. \quad (1)$$

Иначе говоря, его лагранжиан имеет вид

$$m^2 \bar{\psi}(x) \psi(x) + \nabla \bar{\psi}(x) \nabla \psi(x), \quad (2)$$

где, например, $\bar{\psi} = \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2$.

Мы будем рассматривать перестройки этого поля лагранжианом $\lambda(\bar{\psi}\psi)^2$. Это поле не является OS-положительным, но во многом сходно с моделью Φ^4_v . Простота рассматриваемой модели определяется сходимостью разложений в фермионном случае как при $\lambda > 0$, так и при $\lambda < 0$.

Замечание 1. Если поле $\xi(x)$ имеет распределение v^1 , которое неподвижно относительно W , то и поле $\hat{Z}\xi(x)$ неподвижно относительно W . Таким образом, всегда имеется неподвижная прямая. \hat{Z} называется перенормировкой величины поля.

Теорема 1. Пусть $v > 4$. Тогда для всех достаточно малых $|\lambda|$ существует $m^2 = m_{crit}^2(\lambda)$ такое, что предельная гиббсовская перестройка меры v^1 вида

$$\frac{d\mu}{d\nu^1} = \exp(-U), \quad U = \lambda \int [:(\bar{\psi}\psi)^2: + m^2 \bar{\psi}\psi] dx$$

существует и сходится при применении W^k , $k \rightarrow \infty$, к гауссову автомодельному полю с некоторой конечной перенормировкой волновой функции $Z(\lambda) \nabla \bar{\psi} \nabla \psi$.

При этом $m_{crit}^2(\lambda)$, $\hat{Z}(\lambda)$ являются аналитическими по λ , а урезанные статсуммы допускают кластерное представление с равномерными кластерными оценками.

Исследуем сначала приближенно диффеоморфизмы S_k в пространстве $R^L = \{a_i\}$, где a_i — все существенные или безразличные переменные, L — их число.

Замечание 2. Число L может быть уменьшено: часто можно доказать с помощью некоторых соображений симметрии, что некоторые существенные или безразличные переменные не могут появиться в процессе итерации, если их не было в исходном взаимодействии. Например,

1) если степень каждого монома четна, то это свойство сохраняется;

2) если пропагаторы полей четны по x и если N четно в исходном взаимодействии, то можно не рассматривать, например, локальных членов вида $\bar{\psi}\nabla\psi$. Действительно, в диаграмме, являющейся коэффициентом, число нечетных из-за производных пропагаторов нечетно. Тогда преобразование $x_i \rightarrow -x_i$ для всех i показывает, что этот коэффициент равен нулю;

3) киральные симметрии и симметрии типа теоремы Фарри в квантовой электродинамике (см. [100]).

В соответствии с замечанием 2.2 и 2.3 (инвариантность относительно внутренних ортогональных преобразований $\psi \rightarrow O\psi$, $\bar{\psi} \rightarrow O^*\bar{\psi}$), в нашем случае надо рассматривать переменные $\bar{\psi}\psi$, $\nabla\bar{\psi}\nabla\psi$, с собственными значениями M^2 , 1 (заметим, что $:(\bar{\psi}\psi)^2:$ имеет собственное значение M^{4-v}).

Временно обозначим переменные, соответствующие $\bar{\psi}\psi$ и $:(\bar{\psi}\psi)^2:$ через m^2 и λ соответственно. В линейном приближении на плоскости (m^2, λ) фазовые траектории имеют вид

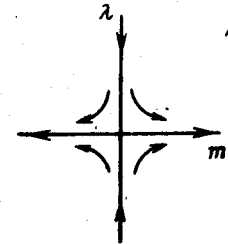


Рис. 1a ($v > 4$)

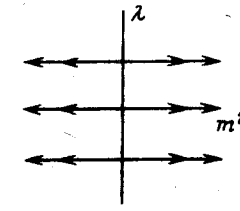


Рис. 1b ($v = 4$)

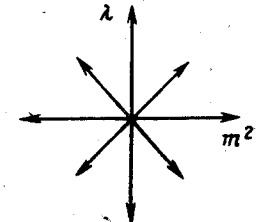


Рис. 1c ($v < 4$)

В линейном приближении рис. 1a $m_{crit}^2(\lambda) = 0$. Обсудим, как найти $m^2(\lambda)$ в общем случае (так называемая проблема тонкой настройки).

Будем строить $m^2(\lambda)$ в виде ряда по λ

$$m^2(\lambda) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k \lambda^k. \quad (3)$$

Для данного взаимодействия U через $U^{(n)}$ обозначим его вид после n -й итерации. Определим $c_2^{(1)}$ из условия

$$\left(U + c_2^{(1)} \lambda^2 \int \bar{\psi}\psi dx \right)^{(1)} = O(\lambda^3)$$

и т. д. по индукции потребуем, чтобы было выполнено следующее $(N-1)$ -условие

$$\left(U + \sum_{k=2}^N c_k^{(N-1)} \lambda^k \int \bar{\psi}\psi dx \right)^{(N-1)} = O(\lambda^{N+1}) \quad (4)$$

для всех N . На данном шаге для некоторых членов η -ребра могут возникать и без спаривания различных членов (т. е. в одном члене). N -условие определяет $c_k^{(N-1)}$ в виде конечной суммы некоторых диаграмм. При заданном k последовательность $c_k^{(N)}$ стабилизируется к c_k .

Докажем теперь сходимость ряда (3), сходимость

$$(U + m^2(\lambda) \int \bar{\psi} \psi dx)^{(N)} \rightarrow Z(\lambda) \nabla \bar{\psi} \nabla \psi,$$

где $Z(\lambda)$ — аналитическая функция от λ .

Оценка $\left| \sum_G I(G) \right| \leq \sum_G |I(G)|$ плоха уже для доказательства сходимости $U^{(1)}$, и мы должны учесть сокращения диаграмм: объединить диаграммы в семиинварианты. Фиксируем точки y_1, \dots, y_V в подынтегральном выражении (10.3). Каждой точке y_i сопоставлено не более 4 отростков вида $\eta^{(\alpha)}(y_i)$ или $\eta^{(\alpha)}\left(\frac{y_i}{M^\gamma}\right)$, $\gamma > 0$.

После их соответствующих спариваний и возникает диаграмма. Рассмотрим все диаграммы (y_1, \dots, y_V все время фиксированы) с заданными, подлежащими спариванию, отростками, но различными спариваниями, причем условимся считать, что каждому отростку сопоставлены ранги, по которым однозначно определяются числа γ , и спариваться могут лишь отростки с одинаковыми рангами k и числами γ . Это несколько меняет ковариацию, но оценки § 2 справедливы и для такой измененной ковариации.

В то же время заметим, что если ребру приписан ранг k , то оба его отростка за k итераций ренормгруппы приобретут множитель $M^{-\varepsilon k}$, где ε — константа для данной модели. Поэтому приписывание рангов ребрам дает множитель

$$1 + M^{-\varepsilon} + M^{-2\varepsilon} + \dots$$

на каждый отросток, т. е. $(C(M))^\nu$. Будем считать поэтому, что каждому отростку уже приписаны ранги и числа $\gamma = 0, 1, \dots$ (метод комбинаторных множителей).

Обозначим множество отростков с данными γ через \mathfrak{A}_γ . Любая диаграмма, полученная спариванием отростков из \mathfrak{A}_0 , связана, и любая такая связанная диаграмма возможна. Сумма всех таких диаграмм дает семиинвариант соответствующих мономов. Заметим, что диаграммы из $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots$ можно суммировать независимо. Сумма диаграмм из \mathfrak{A}_γ для каждого $\gamma \geq 1$ дает момент соответствующих мономов.

Обозначим $F_{kp}(G)$ связанные компоненты в диаграмме G , получающиеся после стирания в G всех ребер рангов, больших k . Назовем m -диаграммой и Z -диаграммой любую диаграмму со свободными отростками вида $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ или $\nabla \bar{\psi}(x)\nabla \psi(x)$ соот-

ветственно. Z -диаграмму назовем (Z, k) -диаграммой, если в ней нет ребер ранга большего k , и если есть ребра ранга k .

Рассмотрим сначала те диаграммы G после n -й итерации, у которых ни одна из $F_{kp}(G)$ не является ни m -диаграммой ни Z -диаграммой. Это свойство не расщепляет множество \mathfrak{A}_0 .

Семиинвариант, соответствующий \mathfrak{A}_0 , имеет оценку вида $\exp(-d(y_1, \dots, y_N))$, где $d(y_1, \dots, y_N)$ — длина наименьшего связного дерева на точках y_1, \dots, y_N (и возможно других). Оценка моментов для \mathfrak{A}_γ , $\gamma \geq 1$, может дать лишь множитель C^N (если применить лемму 1 § 2 с разбиением на кубы со стороной $M^{-\gamma}$). В то же время имеется еще множитель λ^N , и если $N < n$, то $M^{-\varepsilon(n-N)}$. Выбирая теперь сначала M достаточно большим, а затем λ достаточно малым, мы получим экспоненциальное по n убывание нормы взаимодействия (без интегрирования по y_1 , т. е. y_1 фиксировано), а норма вводится как абсолютное значение коэффициента перед фиксированным произведением виковских мономов.

Среди m -диаграмм после n -й итерации выживают только те, которые имеют порядок $O(\lambda^n)$. При этом выбором λ можно компенсировать расходящийся множитель, происходящий из линейной ренормгруппы. Поэтому и здесь оценка нормы такая же.

Нетрудно видеть также, что сумма всех (Z, k) -диаграмм с $k \leq n$ дается сходящимся рядом, который в пределе $n \rightarrow \infty$ и определяет $Z(\lambda)$.

Из этих рассуждений получают очевидным образом равномерные кластерные оценки в кластерном представлении урезанных статсумм. Теорема 1 доказана.

Вместо $(\bar{\psi}\psi)^2$ можно рассматривать любую степень $(\bar{\psi}\psi)^n$. Метод доказательства теоремы 1 дает полную информацию о состоянии только в критической точке, т. е. для $m^2 = m_{\text{crit}}^2(\lambda)$. Сейчас мы покажем, как получить аналогичную информацию для случая $m^2 > m_{\text{crit}}^2(\lambda)$.

Теорема 2. Если $m^2 > m_{\text{crit}}^2(\lambda)$, то ренормгруппа Вильсона при действии на такое поле сходится к нулю.

Доказательство этой теоремы во многом аналогично доказательству теоремы 1 и также приводит к кластерному разложению для урезанных статистических сумм. Мы укажем на основные изменения в доказательстве. Рассмотрим сначала гиббсовскую перестройку гауссовой меры $\nu^1(\hat{m}^2)$ с ковариацией $\frac{\exp(-p^2)}{\hat{m}^2 + p^2}$.

Тогда ξ_k имеет ковариацию

$$\frac{1}{\hat{m}^2 + p^2} (\exp(-M^{2(k-1)}p^2) - \exp(-M^{2k}p^2)). \quad (5)$$

При итерации ренормгруппы Вильсона (мы используем формулу $\langle A \rangle_\mu = \langle R_s^{-1}A \rangle_{R_s^*\mu}$) на k -м шаге итерации $\eta(x)$ имеет

ковариацию

$$\frac{1}{M^{k-1}\hat{m}^2 + p^2} (\exp(-p^2) - \exp(-M^2 p^2)).$$

Подбирая массу с помощью (4), мы получим функцию $m^2(\lambda, \hat{m}^2)$. Тогда, очевидно, теорема 2 верна для меры

$$\frac{d\mu}{d\nu^1(\hat{m}^2)} = \exp\left(-\lambda \int (\bar{\psi}\psi)^2 dx - m^2 \int \bar{\psi}\psi dx\right)$$

с $m^2 = m^2(\lambda, \hat{m}^2)$, так как эффективное взаимодействие стремится к нулю и ковариация гауссовой меры стремится к нулю, как $\frac{1}{M^{k-1}\hat{m}^2 + p^2} \exp(-p^2)$, $k \rightarrow \infty$. Чтобы доказать теорему 2 для любого $m^2 > m_{crit}^2(\lambda)$, найдем сначала \hat{m}^2 такое, что

$$\hat{m}^2 + m^2(\lambda, \hat{m}^2) = m^2. \quad (6)$$

Заметим, что $m^2(\lambda, \hat{m}^2)$ непрерывно зависит от \hat{m}^2 , $m^2(\lambda, 0) = m_{crit}^2(\lambda)$ и $m^2(\lambda, \hat{m}^2) \rightarrow 0$ при $\hat{m}^2 \rightarrow \infty$. Отсюда следует существование решения у (6). Далее для данного m^2 следовало бы соответствующее \hat{m}^2 «перенести в ковариацию», а во взаимодействии оставить $m^2(\lambda, \hat{m}^2)$. Дело осложняется тем, что при переносе \hat{m}^2 в ковариацию возникнет не $\frac{1}{\hat{m}^2 + p^2} \exp(-p^2)$, а другая ковариация $\frac{\exp(-p^2)}{\hat{m}^2 \exp(-p^2) + p^2}$. При этом ξ_k имеет ковариацию

$$\frac{\exp(-M^{2(k-1)}p^2) - \exp(-M^{2k}p^2)}{\hat{m}^2 \exp(-p^2) + p^2},$$

а $\eta(x)$ на s -м шаге

$$\frac{\exp(-p^2) - \exp(-M^2 p^2)}{M^{2s}\hat{m}^2 \exp\left(-\frac{p^2}{M^{2s}}\right) + p^2}.$$

Аналогичные рассуждения, как нетрудно видеть, применимы и в этом случае. Теорема 2 доказана.

§ 5. Сверхперенормируемая УАС фермионная модель

Рассмотрим модель предыдущего параграфа для $\nu = 3$. В этом случае есть ровно 2 существенных вектора $\bar{\psi}\psi$ и $:(\bar{\psi}\psi)^2:$ с собственными значениями M^2 и M . Рассмотрим затравочную меру вида

$$\frac{d\mu^{N,N}}{d\nu^1} = \exp\left(-m^2 M^{-2N} \int \bar{\psi}\psi dx - \lambda M^{-N} \int :(\bar{\psi}\psi)^2: dx\right). \quad (1)$$

Мы хотим доказать (для достаточно больших n — чтобы оставаться в зоне действия кластерных разложений) существование пределов

$$\bar{\mu}^n = \lim_{N \rightarrow \infty} W^{N-n} \bar{\mu}^{N,N} \quad (2)$$

и

$$\bar{U}^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{U}^{N,n}.$$

Выбор коэффициентов M^{-2N} и M^{-N} понятен: надо чтобы существовал предел в линейном приближении.

Если выбрать m^2 константой, то оказывается, что массовый член (как более сингулярный) может быстро расти.

Теорема 1. Существует такая константа $a(M)$, что для любого m_0^2 существуют пределы (2) при

$$m^2 = m_0^2 + \lambda^2 a(M) (N - n_0). \quad (3)$$

Доказательство. Мы поясним, почему возможна «грубая» подстройка массы в отличие от тонкой подстройки в инфракрасном случае и в теореме Боголюбова—Парасюка. Масса может возникнуть на первом шаге после виковского перепорядочивания и выделения локальных членов в диаграмме



$$(4)$$

где хотя бы одно из ребер является η -ребром, остальные ребра — виковские. Иначе говоря, во взаимодействии возникает член

$$(-\lambda)^2 M^{-2N} a \int \bar{\psi}\psi dx,$$

где $a = a(M)$ равно сумме значений диаграмм (4). Легко видеть что на первом шаге остальные члены имеют множитель M^{-sN} с $s \geq 3$.

Аналогично на k -м шаге возникнет

$$(-\lambda)^2 M^{-2(N-k)} a \int \bar{\psi}\psi dx. \quad (5)$$

Член (5) за $N - n - k$ шагов линейной ренормгруппой переводится в

$$(-\lambda)^2 M^{-2n} a \int \bar{\psi}\psi dx.$$

Возникнет ровно $N - n$ таких членов и для их сокращения мы и должны ввести «контрчлен» в (3). Далее алгоритм доказательства существования предела \bar{U}^n взаимодействий $\bar{U}^{N,n}$ в точности такой же, как в § 4.

Замечание 1. Статистическую сумму для $\mu^{N,N}$ так оценить нельзя. Действительно уже диаграмма \ominus расходится на первом шаге. Поэтому если не вводить вакуумных контрчленов, то получающиеся расходящиеся константы надо отбрасывать.

§ 6. Большие значения поля в бозонных моделях

Для бозонных моделей ряды по семиинвариантам, о которых шла речь в предыдущих параграфах, расходятся и необходимо изменение разложений. Мы здесь для примера рассмотрим модель Φ^4_3 и используем методы § 5 главы 1.

Рассмотрим затравочную меру вида

$$\frac{d\tilde{\mu}^{N,N}}{d\nu^1} = Z_\Lambda^{-1} \exp \left(-\lambda M^{-N} \int_\Lambda \Phi^4(x) : dx - (m_0^2 + \lambda^2 a(M)(N - n_0)) \cdot M^{-2N} \int_\Lambda \Phi^2(x) : dx + U^{\text{вак}} \right), \quad (1)$$

где Λ — куб со стороной M^N , $U^{\text{вак}}$ будет определен позже, ν^1 — гауссова мера с ковариацией $\frac{1}{p^2} \exp(-p^2)$.

Мы докажем сходимость статистических сумм Z_Λ при $N \rightarrow \infty$ (аналогично доказываем сходимость производящих функционалов). Обозначим взаимодействие под экспонентой в (1) через $-U$. Тогда

$$Z_\Lambda = \langle \langle \exp \left(-U \left(M^{-a\Phi} \left(\frac{x}{M} \right) + \eta(x) \right) \right) \rangle \rangle_\nu. \quad (2)$$

Как и в § 5.1, введем случайное множество

$$E = \left\{ x \in \Lambda : M^{-a} \left| \Phi \left(\frac{x}{M} \right) \right| > (N-1)^q \right\}, \quad q > 1. \quad (3)$$

Известно, что E имеет гладкую границу. Пусть Q_1 — разбиение R^3 на единичные кубы, $\Gamma \subset Q_1$ — конечное множество таких кубов. Обозначим через B случайное подмножество

$$B = \left\{ x \in E : |\eta(x)| > \frac{1}{2} (N-1)^q \right\} \quad (4)$$

и через Γ событие, состоящее в том, что $\{\Delta \in Q_1 : B \cap \Delta \neq \emptyset\} = \Gamma$. Тогда

$$p(\Gamma) \leq \exp(-|(N-1)^2 \Gamma|). \quad (5)$$

Аналогично введем

$$D = \left\{ x \in \Lambda : \left| M^{-a\Phi} \left(\frac{x}{M} \right) + \eta(x) \right| > \frac{1}{2} (N-1)^q \right\}. \quad (6)$$

Так же, как в § 5.1, мы сводим оценку статсуммы к множеству $\Lambda \setminus (D \cup E)$ и на этом множестве используем разложение для $p_0 = 4$

$$\langle \exp(-U) \rangle_\eta = \exp \left(\sum_{k=1}^3 \frac{(-1)^k}{k!} \langle U^{(k)} \rangle_\eta + \frac{1}{4!} \langle U^{(4)} \rangle_\eta \right), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (7)$$

$$\langle \cdot \rangle_{\eta,t} = \frac{\langle \cdot \exp(-tU) \rangle_\eta}{\langle \exp(-tU) \rangle_\eta}.$$

Далее все так же, как в § 5.1, за исключением того, что применяется кластерное разложение для оценки $\langle U^{(4)} \rangle_{\eta,t}$. Можно использовать, например, разложение, аналогичное разложению § 7 главы 4 [7] (см. следующий параграф).

Мы не будем более подробно останавливаться на этом. В опубликованных работах применяется решетчатый вариант этого подхода, где кластерное разложение для $\langle U^{(4)} \rangle_{\eta,t}$ несколько проще (что связано с конечностью числа степеней свободы в каждом кубе). Однако никакой принципиальной разницы нет. Заметим тем не менее, что описанный метод не применим для несверхперенормируемых взаимодействий. Здесь надо перейти к рассмотрению эффективных взаимодействий или корреляционных функций и менять соответственно кластерные разложения на каждом шаге.

Глава 3

ДОПОЛНЕНИЯ

§ 1. Возмущение гауссова поля на R^v

Рассмотрим трансляционно-инвариантное непрерывное гауссово поле $\xi(x)$ на R^v с ковариацией, удовлетворяющей условию

$$\int_{R^v} |\langle \xi(0) \xi(x) \rangle| dx < \infty. \quad (1)$$

Поле $\eta(x)$ из § 6.2 заведомо принадлежит этому классу.

Теорема 1. Если $P(y)$ — ограниченный снизу многочлен, то для достаточно малых $\lambda > 0$ существует кластерное разложение мер

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\nu_\Lambda} = Z_\Lambda^{-1} \exp(-\lambda U_\Lambda), \quad (2)$$

$$U_\Lambda = \int_\Lambda : P(\xi(x)) : dx.$$

Для доказательства мы получим кластерное представление статсумм

$$Z_{\Lambda} = \sum c^{|\Lambda|} \cap Z^{\nu} \setminus (\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n)^{|\Lambda|} k_{\Gamma_1} \dots k_{\Gamma_n}; \quad (3)$$

где сумма по наборам попарно непересекающихся подмножеств $\Gamma_i \subset \Lambda \cap Z^{\nu}$. Если $\{\Delta\}$ — система единичных кубов с центрами в точках Z^{ν} , то для $t \in Z^{\nu}$

$$c \equiv c_t = \left\langle \exp \left(-\lambda \int_{\Delta_t} :P(\xi(x)):dx \right) \right\rangle_0, \quad (4)$$

где Δ_t — единичный куб с центром в t .

Числа k_{Γ} определяются почти дословно так же, как в § 7.4 [7], и мы укажем лишь необходимые изменения.

Пусть $f_t, t \in \Lambda \cap Z^{\nu}$, — функционалы, имеющие вид

$$f_t = \left[\prod_i \left(\int_{\Delta_t} :P^{(\alpha_i)}(\xi(x)):dx \right) \right] \exp \left(-\lambda \int_{\Delta_t} :P(\xi(x)):dx \right). \quad (5)$$

Тогда вместо формулы 4.7.4 [7] имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{t \in \Lambda} f_t \right\rangle_0 &= \left\langle f_{t_0} \right\rangle_0 \left\langle \prod_{t \in \Lambda \setminus \{t_0\}} f_t \right\rangle_0 + \\ &+ \int_0^1 ds \left[\sum_{t \in \Lambda \setminus \{t_0\}} \int_{\Delta_{t_0}} \int_{\Delta_t} dx dy \langle \xi(x) \xi(y) \rangle_0 \right] \\ &\left\langle \left[\prod_{t \in \Lambda \setminus \{t_0, t\}} f_t \right] \frac{\delta f_{t_0}}{\delta \xi(x)} \frac{\delta f_t}{\delta \xi(y)} \right\rangle_{\{t_0, s\}}, \end{aligned} \quad (6)$$

которая следует из формулы интегрирования по частям (23.2.2) [7], если в (5) заменить интегралы римановыми суммами. При этом в формуле 3.7.4 [7], $C_{tt'}$ — числа, а ядра $C_{tt'}(x-y)$, $x \in \Delta_t, y \in \Delta_{t'}$.

Вместо 6.7.4. [7] будем иметь

$$\begin{aligned} k_B &= \sum_{\tau} \left[\prod_{m=1}^n \int_{\Delta} dx \int_{\Delta'} dy \langle \xi(x) \xi(y) \rangle_0 \right] \times \\ &\times \int_0^1 \Phi(\tau, s) \left\langle \frac{\delta}{\delta \xi_{\tau}} \prod_{i=0}^n f_{t_i} \right\rangle_{\tau, s} ds, \end{aligned}$$

где Δ соответствует точке t_{i_m} , $\Delta' - t_m$,

$$\frac{\delta}{\delta \xi_{\tau}} = \prod_{m=1}^n \frac{\delta^2}{\delta \xi(x) \delta \xi(y)}, \quad x \in \Delta, \quad y \in \Delta',$$

а остальные обозначения такие же, как в [7].

Вместо (13.7.4) нам понадобится оценка:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta} \frac{\delta^n}{\delta \xi(x_1) \dots \delta \xi(x_n)} \exp \left(-\lambda \int_{\Delta} :P(\xi(x)):dx \right) dx_1 \dots dx_n \right| \leq \\ \leq (C\lambda^{1/l})^n \left(\frac{l-1}{l} n \right)!, \end{aligned}$$

где l — степень P . При этом мы используем оценку: если $\int_{\Delta} :P(\xi(x)):dx = B$, то $\int_{\Delta} :P^{(\alpha)}(\xi(x)):dx \leq CB^{l-1}$, $B > 1$, с вероятностью 1 для $\alpha > 0$, где C зависит только от P . Например, для члена в f_t , равного

$$\begin{aligned} \left| \lambda^n \left(\int_{\Delta} :P^{(1)}(\xi(x)):dx \right)^n \exp \left(-\lambda \int_{\Delta} :P(\xi(x)):dx \right) \right| \leq \\ \leq \sup_B \lambda^n B^{l-1} e^{-\lambda B} \leq \left(\frac{l-1}{l} n \right)! (C\lambda^{1/l})^n. \end{aligned}$$

Далее доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 1 в § 7, гл. 4 [7].

§ 2. Решетчатые поля с дальнедействующим неограниченным потенциалом

Этот параграф написан Р. Р. Ахмитзяновым и Е. Н. Петровой и является исправленной версией работы [12].

Пусть на Z^{ν} рассматривается гиббсово поле с вещественными значениями x_t

$$\frac{d\mu_{\Lambda}}{d\mu_0} = Z_{\Lambda}^{-1} \exp(-U_{\Lambda}),$$

$$U_{\Lambda} = \sum_{t \in \Lambda} |x_t|^m + \sum_{t, t' \in \Lambda} U_{tt'},$$

$$U_{tt'} = \lambda x_t^{2k} x_{t'}^{2k} r_{tt'}^{\nu-2}, \quad r_{tt'} = |x_t - x_{t'}|,$$

где μ_0 — мера Лебега на $R^{|\Lambda|}$.

Теорема 1. Если $m\epsilon - 4k\nu > 0$, то система мер μ_{Λ} допускает кластерное разложение.

Доказательство. Введем константу $B = \lambda^{-\frac{1}{8k}}$ и для каждой фиксированной конфигурации построим систему шаров: для каждой t такой, что $|x_t| > B$, строим шар с центром в t радиуса

$$R_t = \left(\frac{|x_t|}{B} \right)^{\frac{4k}{\epsilon(1-\omega)}}, \quad (1)$$

где $0 < \omega < 1$ такое, что

$$m\varepsilon(1-\omega) - 4k\nu > 0.$$

Связные константы объединения этих шаров назовем каплями. Обозначим $T = \{(t, t') : t \text{ и } t' \text{ не принадлежат одновременно одной и той же капле}\}$. Элементы T будем называть звеньями. Используем разложение

$$\exp\left(-\lambda \sum_{(t, t') \in T} U_{tt'}\right) = \sum_{Q \subset T} \prod_{(t, t') \in Q} [\exp(-U_{tt'}) - 1] \stackrel{\text{def}}{=} \\ = \sum_{Q \subset T} \prod_{(t, t') \in Q} a_{tt'}.$$

Рассмотрим связанные «графы» Γ , образованные каплями и звеньями.

Лемма 1.

$$Z_\Lambda = \sum_{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n} c^{|\Lambda - \cup \bar{\Gamma}_i|} k_{\Gamma_1} \dots k_{\Gamma_n},$$

где $\bar{\Gamma}$ — носители Γ ,

$$c = \int_{-B}^B \exp(-|x|^m) dx,$$

$$k_\Gamma = \int_{D \subset \bar{\Gamma}} \prod_{(t, t') \in D} \exp\left(-\lambda \sum_{(t, t') \in D} U_{tt'}\right) \prod_{(t, t') \in D} a_{tt'} \prod_{t \in \bar{\Gamma}} \exp(-|x_t|^m) dx_t,$$

где интеграл по множеству конфигураций на $\bar{\Gamma}$ таких, что связанные компоненты порожденных ими шаров в точности совпадают с каплями в Γ . Произведение \prod берется по всем каплям D , входящим в Γ , $\prod_{(t, t')}$ — по всем звеньям из Γ .

Эта лемма непосредственно следует из построения.

Лемма 2. Для любой конфигурации и для любого ее звена

$$|a_{tt'}| \leq \lambda x_t^{2k} x_{t'}^{2k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon} = \sqrt{\lambda} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega}.$$

Доказательство. Рассмотрим три случая: 1) $|x_t|, |x_{t'}| < B$; 2) $|x_t| > B, |x_{t'}| < B$; 3) $|x_t|, |x_{t'}| > B$.

Случай 1).

$$\lambda x_t^{2k} x_{t'}^{2k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon} \leq \lambda B^{4k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon} \leq \sqrt{\lambda} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega}.$$

Случай 2). Здесь $r_{tt'} > R_t$ и мы имеем

$$\lambda x_t^{2k} x_{t'}^{2k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon} \leq \lambda x_t^{2k} B^{2k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega} R_t^{-\varepsilon(1-\omega)} \leq \\ \leq \frac{\lambda x_t^{2k} B^{2k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega} B^{4k}}{x_t^{4k}} \leq \lambda B^{4k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega} \leq \sqrt{\lambda} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega}.$$

Случай 3). В данном случае t, t' принадлежит разным каплям и значит

$$r_{tt'} > R_t + R_{t'} \geq (R_t R_{t'})^{1/2}.$$

Отсюда

$$r_{tt'}^{-\varepsilon(1-\omega)} \leq R_t^{\frac{-\varepsilon(1-\omega)}{2}} R_{t'}^{\frac{-\varepsilon(1-\omega)}{2}} = \frac{B^{4k}}{x_t^{2k} x_{t'}^{2k}}.$$

Поэтому

$$\lambda x_t^{2k} x_{t'}^{2k} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon} \leq \lambda r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega} x_t^{2k} x_{t'}^{2k} r_{tt'}^{-\varepsilon(1-\omega)} \leq \sqrt{\lambda} r_{tt'}^{-\nu-\varepsilon\omega}.$$

Лемма 3. Для шара с центром в t

$$\exp\left(-\frac{1}{2}|x_t|^m\right) \leq (V\bar{\lambda})^N,$$

где N — число точек в этом шаре.

Доказательство. Так как $N \leq cR_t^\nu$, то достаточно доказать, что

$$\exp\left(-\frac{1}{2}|x_t|^m\right) \leq \lambda^{\frac{c_1 R_t^\nu}{2}},$$

или, используя (1),

$$|x_t|^m \geq C \left(\frac{|x_t|}{B}\right)^{\frac{4k\nu}{\varepsilon(1-\omega)}} (-\ln \lambda),$$

или подставляя значение B

$$|x_t|^{\frac{m\varepsilon(1-\omega) - 4k\nu}{\varepsilon(1-\omega)}} \geq C (-\ln \lambda) \lambda^{\frac{\nu}{2\varepsilon(1-\omega)}}.$$

Последнее неравенство выполнено в условиях теоремы для достаточно малых λ .

Из леммы 3 следует оценка

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum'_t |x_t|^m\right) \leq (V\bar{\lambda})^{|\mathcal{D}|}, \quad (2)$$

где Σ' — по всем центрам шаров данной капли D .

Из леммы 2 и оценки (2) стандартным суммированием по «графам» следует кластерная оценка (см. [7]).

§ 3. Моды Федербуша и разложение Бэттла

Пусть $\xi_x, x \in Z^\nu$, — гауссово поле с $\langle \xi_y \rangle = 0$, $\langle \xi_x \xi_y \rangle = \Phi(x-y)$. Пусть B — оператор в $l_2(Z^\nu)$ с ядром $\Phi(x-y)$ и пусть существуют $A = B^{-1}$ и \sqrt{A} .

Если $\psi_k(x)$ — ортонормированный базис в $l_2(Z^v)$, то

$$\alpha_k = \sum_x c_{kx} \xi_x, \quad c_{kx} = (V \bar{A} \psi_k)(x) \quad (1)$$

является таковым в пространстве гауссовых величин. При этом

$$\xi_x = \sum_k c_{kx} a_k. \quad (2)$$

В § 4 главы 1 под разложением на моды понималось разложение пространства гауссовых величин на ортогональные подпространства (по импульсам), а внутри каждого такого подпространства есть свой масштаб убывания корреляций. Федербуш предложил [68] полную ортогонализацию (1) для специфического базиса ψ_k , который мы сейчас кратко опишем.

Положим для $f(x) \in l_2(Z^v)$

$$(\nabla f)(x) = f(x^1, \dots, x^i, \dots, x^v) - f(x^1, \dots, x^i - 1, \dots, x^v), \\ \nabla^\alpha = \nabla_1^{\alpha^1} \dots \nabla_v^{\alpha^v}$$

для любого набора $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^v)$ неотрицательных целых чисел. Пусть \mathcal{L}_k — множество функций вида $\nabla^\alpha f$, где f имеет конечный носитель, а $|\alpha| = \alpha^1 + \dots + \alpha^v = k$.

Утверждение 1. Для всех k \mathcal{L}_k плотно в $l_2(Z^v)$.

Нетрудно доказывается переходом к преобразованию Фурье.

Утверждение 2. \mathcal{L}_k ортогонально многочленам вида

$$\sum_{|\alpha| < k} a_\alpha x^\alpha; \quad x^\alpha = x_1^{\alpha^1} \dots x_v^{\alpha^v}. \quad (3)$$

Для доказательства надо «проинтегрировать по частям» с помощью формулы Лейбница

$$\nabla_i (fg) = (\nabla_i f) g + f (\nabla_i g) - (\nabla_i f) (\nabla_i g).$$

Обозначим теперь $\Delta_{r,0} = \{0, 1, \dots, p^r - 1\}^v \subset Z^v$.

Утверждение 3.

$$\dim(\mathcal{L}_{s+1} \cap l_2(\Delta_{1,0})) = p^v - M,$$

где $M = M(s)$ — число линейно независимых многочленов (3) степени $\leq s$, если только p таково, что число линейно независимых многочленов (3) в кубе $\Delta_{1,0}$ также равно M .

Для $v=1$ это следует из линейной независимости функций $\nabla^{s+1} \chi_t$, $t=0, 1, \dots, p-s-2$, где $\chi_t(x) = 1$, если $t=x$, и равно 0 в остальных случаях. Для $v>1$ аналогично.

Рассмотрим разбиение $\{\Delta_{r,\gamma}\}$ для любого $r=1, 2, \dots$, решетки Z^v на кубы, конгруэнтные $\Delta_{r,0}$; γ нумерует кубы данного разбиения. В [68] строится рекуррентно базис ψ_k , $k=(r_k, \gamma_k, t_k) = (r, \gamma, t)$, где для данных r и γ индекс t пробегает $p^v - M$ значений для $r=1$ и $Mp^v - M$ значений для $r>1$. Точнее, сначала произвольно выбирается базис в $l_2(\Delta_{1,0}) \cap \mathcal{L}_{s+1}$, в осталь-

ных $\Delta_{1,\gamma}$ — сдвигом. При $r \geq 2$ в пространстве функций в $\Delta_{r,0}$, являющихся многочленами степени $\leq s$ в каждом $\Delta_{r-1,\gamma} \subset \Delta_{r,0}$ и ортогональных всем многочленам степени $\leq s$ в $\Delta_{r,0}$ (это пространство очевидно имеет размерность $Mp^v - M$), произвольно выбирается базис.

Для $r \geq r_0$ можно конкретизировать это построение. Рассмотрим семейство $\{\psi\}$ функций в $L_2([0, p^v], d^v x)$, удовлетворяющих условиям:

а) на каждом из единичных кубов с целочисленными вершинами в $[0, p^v]$ ψ являются полиномами степени $\leq s$;

в) $\int_{[0, p^v]} \psi x^\alpha d^v k = 0, \quad |\alpha| \leq s.$

Выберем в этом множестве произвольный базис $\Phi_t(x)$, $t=1, \dots, Mp^v - M$. Затем $\psi_k(x)$ можно выбрать близкими к функциям

$$\frac{1}{(p^{r-1})^{v/2}} \Phi_t \left(\frac{x}{p^{r-1}} \right), \quad (4)$$

что объясняет связь мод Федербуша с ренормгруппой.

Далее можно строить различного рода кластерные разложения на множестве \hat{T} индексов k (см. замечание 1, стр. 101 [7]). Факторы сходимости многомасштабных кластерных разложений, как в главе 2 ($M^{-1}, \lambda, e^{-d\tau}$), переходят в алгоритмах Федербуша в оценки коэффициентов c_{kx} и в комбинаторику кластерных разложений. Мы отсылаем за подробностями к работам Федербуша и Бэттла (см. § 4 этой главы). Пока этими методами удалось получить не очень много результатов, но ими раскрыты богатые структуры в теории кластерных разложений.

В общей идеологии кластерных разложений представляет интерес работа Бэттла [41]. Он обсуждает различия между «внешними» (exterior) разложениями типа

$$\langle F_A \rangle_\Lambda = \sum k_\Gamma^{(\Lambda)}(A) \frac{Z_{\Lambda/(A \cup \Gamma)}}{Z_\Lambda}, \quad (5)$$

где каждый член разложения, нумеруемый множествами $\Gamma \subset \Lambda$, зависит от некоторой внешности $A \cup \Gamma$, и «внутренними» (interior) разложениями типа формулы (8) [7] см. на стр. 109. Бэттл вводит новый класс разложений, названный им внутренними (intrinsic): в рекуррентной формуле типа (5) могут фигурировать другие корреляционные функции вместо $f_A^{(\Lambda)} = \frac{Z_{\Lambda \setminus A}}{Z_\Lambda}$. Он вводит этот класс на примере следующей модели:

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\nu} = Z_\Lambda^{-1} \exp \left(-\lambda \left(\sum J(x-y) \sigma_x \sigma_y + \sum g(\sigma_x) \right) \right) \equiv \\ \equiv Z_\Lambda^{-1} \exp(-\lambda U_\Lambda),$$

где $\sigma_x \in R$, $x \in \Lambda \subset Z^v$, $J(x-y)$ — положительно определено, и $\sum_x |J(0, x)| < \infty$,

$$c|\sigma|^\nu \leq g(\sigma) \leq c|\sigma|^\alpha$$

для некоторых $\nu > 1$ и $\alpha \geq 2$. Мера ν является произведением мер $d\mu(\sigma)$ на R таких, что

$$\int d\mu(\sigma)(1+|\sigma|^\alpha) < \infty.$$

Кластерное разложение для системы мер μ_Λ строится следующим рекуррентным образом. На первом шаге применяется одна из разновидностей интерполяционной формулы (F_Λ — функция с носителем в $A \subset \Lambda$)

$$\langle F_A \rangle_\Lambda = \langle F_A \rangle_A - 2\lambda \sum_{x \in A} \sum_{y \in \Lambda \setminus A} J(x-y) \times \int_0^1 ds_1 (\langle F_A \sigma_x \sigma_y \rangle_{s_1} - \langle F_A \rangle_{s_1} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{s_1}), \quad (6)$$

где

$$\langle F \rangle_s = \frac{\langle F \exp(-\lambda U_\Lambda(s_1)) \rangle_0}{\langle \exp(-\lambda U_\Lambda(s_1)) \rangle_0},$$

$$U_\Lambda(s_1) = s_1 U_\Lambda + (1-s_1)[U_A + U_{\Lambda \setminus A}].$$

Далее для каждой из корреляционных функций $\langle F_A \sigma_x \sigma_y \rangle_{s_1}$, $\langle F_A \rangle_{s_1}$, $\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{s_1}$ в правой части (6) эта процедура повторяется. Получающийся бесконечный ряд вполне аналогичен обычному «внутреннему» кластерному разложению.

Разложение (6) имеет ряд преимуществ. Так в существенной области параметров оно сильнее, чем разложение § 2 этой главы или работы [67] (см. также [47]).

§ 4. Другие работы

Началом метода многомасштабных кластерных разложений можно считать знаменитую работу Глимма—Джаффе [2], основывающуюся частично на более ранних идеях Глимма [105, 106]. В [2] доказана устойчивость (конечность) статистической суммы модели ϕ_3^4 . Хотя в этой работе ренормгруппа не упоминалась, но уже использовалось разбиение на моды и их последовательное интегрирование. Усовершенствование метода Глимма—Джаффе и построение ϕ_3^4 в конечном и бесконечном объеме было осуществлено в работах [72, 73, 78, 119, 120, 125]. Вводное изложение этого метода см. в [6].

Следующим шагом был ряд новых идей Галлаветти. По-видимому, это было стимулировано иерархическими моделями Дайсона и различными связанными с ними исследованиями. Обзор по иерархическим моделям см. в [1] и [9]. В [80] вводится иерархическая бернуллиевская модель и дается доказательство устойчивости ее статсуммы для ϕ_3^4 модели. В этой работе уже

сказано (одной фразой о связи разбиения на клетки с ренормгруппой Вильсона. Вводится также марковская иерархическая модель (исследование которой продолжено в [81, 50]), где η_Δ для кубов фиксированного ранга k является гауссовым марковским полем на решетке. Многие идеи и технические приемы из [80] использовались во всех последующих работах по многомасштабным разложениям.

Настоящая ϕ_3^4 исследована Галлаветти и др. в [49]. Однако ряд технических приемов (в частности, из-за фиксации на марковском свойстве) слишком сложны, требуют тонкого анализа краевых задач для эллиптических уравнений, который и осуществлен в [51]. Это, по-видимому, и остановило дальнейшее продвижение по такому пути. В [52], [124] рассмотрена двумерная модель с взаимодействием $2\lambda \int \cos \alpha \xi(x) : dx$. Хорошо известно, что при $\alpha^2 < 4\lambda$ она не требует перенормировок. При $4\lambda \leq \alpha^2 < 8\lambda$ необходимы только вакуумные контрчлены. Этот случай фактически и исследован. При переходе

через пороги $\alpha_{2n}^2 = 8\lambda(1 - \frac{1}{2^n})$ меняется структура вакуумных контрчленов.

Известно, что преобразование сайн-Гордон сводит данную модель к кулоновскому газу. Обсуждается, как изменение структуры контрчленов сказывается на статфизической картине кулоновского газа. Алгебраизация этой техники («итерированное разложение Майера») дана в [48]. Другие «итерированные разложения Майера» см. в статье Имбри в сборнике [23] и в работах Гелфанда и Макка.

В цикле работ Гавендзкого—Купьяйна получено кластерное разложение для возмущения безмассового гауссова поля на Z^3 взаимодействием $V(\Delta \xi)$ для широкого класса функций V . Окончательные результаты см. в [94, 95]. Более простые модели или результаты см. [87—90].

Модель $\lambda \phi^4 + m^2_{crit}(\lambda) \phi^2$ на Z^4 построена (с полным контролем над ней) в [93]. Это было первым примером контроля над несверхперенормируемой моделью. В подходе Гавендзкого—Купьяйна отчетливо видно разделение ролей ренормгруппы и кластерных разложений в контроле над сходимостью многомасштабных разложений. В [99] ими построена ультрафиолетовая модель $\lambda \phi^4$ с $\lambda < 0$. Иерархические аналоги см. в [91, 86, 103].

Двумерная модель Гросса—Неве построена в [100]. Ее построение — первый пример контроля над ультрафиолетовой несверхперенормируемой моделью, удовлетворяющей аксиомам Остервальдера—Шредера. В [101] содержится строгий контроль над ϵ -разложением в неперенормируемой модели Гросса—

Неве с пропагатором $\frac{\mu}{p^2(1-\epsilon)}$. Построена негауссова неподвижная точка

ренормгруппы Вильсона. В бозонном иерархическом случае ϵ -разложение исследовалось в [92, 97]. Более ранние работы по иерархическим моделям см.

в [1]. Попытка добавить к многомасштабным разложениям $\frac{1}{N}$ -разложение содержится в [98]. Исключительно насыщенный (но трудно читаемый) обзор всех последних работ этих авторов см. [102].

Одновременно с работами Гавендзкого—Купьяйна начался цикл работ Балабана, в котором также усовершенствовалась техника Галлаветти, но с упором на специфические трудности калибровочных моделей. Техника Балабана объяснена на примере модели ϕ_3^4 в [23]. Она основана на оценке статсумм. Поэтому для ее использования в несверхперенормируемых моделях требуются ее изменения.

Заметим сначала, что более ранняя деятельность по двумерным калибровочным моделям (см. [111—113, 58—60]) отражена в монографии [5]. В [15—17] и [18—20] рассматривается решеточная аппроксимация трехмерной ($d=3$) модели с взаимодействием

$$\sum_{\mu=1}^d \frac{1}{2} |\partial_\mu \Phi(x) + e q A_\mu(x) \Phi(x)|^2 + \frac{1}{2} m_0^2 |\Phi(x)|^2 +$$

$$+\lambda |\Phi(x)|^4 + \sum_{\mu, \nu=1}^d \frac{1}{4} |F_{\mu\nu}(x)|^2 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \sum_{\mu=1}^d |A_{\mu}(x)|^2, \quad (1)$$

где Φ — скалярное поле со значениями в R^N , g — антисимметрическая $N \times N$ -матрица, A_{μ} — векторное поле, $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$. Доказывается устойчивость статсумм равномерно по шагу ε решетки (в фейнмановской калибровке). Вакуумные контрцлены в этой статсумме вводятся явно разложением по теории возмущений до 6-го порядка включительно. Несколько другая модель рассматривается в [21]. Необходимые свойства решетчатых пропагаторов доказываются в [22]. В [24—25] изучаются гауссовы калибровочные модели на решетке, действие блокспиновой ренормгруппы на них и свойства пропагаторов в разных масштабах.

Модель Хиггса без явного массового члена изучается в [33], [34], [32]. В [29] и в [26] отмечено доказательство устойчивости статистических сумм в неабелевых калибровочных моделях. Действие блокспиновой ренормгруппы и ее модификаций в неабелевом случае изучается в порядке перечисления в работах [27, 30, 28]. Простейшее применение этой техники имеется в [31].

В [114] рассматривается модель с взаимодействием (1) и доказывается сходимость эффективного взаимодействия для малых полей. Отсюда далее выводится сходимость статсумм при стремлении к нулю шаге решетки. В [115] эта модель строится в бесконечном объеме (с помощью корреляционных неравенств или кластерных разложений). Обсуждаются трудности с доказательством инвариантности относительно евклидовых вращений.

Обзорные лекции [110] содержат много информации и усовершенствований относительно трехмерной модели Хиггса (1) как в массивном, так и в безмассовом случае.

В работах [75, 121, 130] результаты Гавендзкого—Купьянена о $(\Delta\Phi)_3^4$ и Φ_4^4 инфракрасных моделях были получены другим методом, являющимся развитием методов Глимма—Джаффе.

Многомасштабные разложения являются сейчас также простейшим методом доказательства БПХЦ-теоремы, получения оценок диаграмм. В частности, были передоказаны результаты работ [61—65]. Об этих вопросах, а также о связи классической теории перенормировок и многомасштабных разложений см. [74, 76, 77, 82—84].

В работах Федербуша и Бэтла разрабатываются различные приемы, новые комбинаторные оценки и найдены неожиданные идеи в теории кластерных разложений. В [68, 69] предлагается при изучении гиббсовских перестроек гауссова поля с медленным убыванием корреляций вводить специальный базис в пространстве гауссовых величин. Этот базис идейно связан с ренормгрупповой идеологией (разбиением на моды). В этих работах много технических новшеств, однако результат гораздо проще может быть получен другими методами (см., например, § 7.4 в [7]). В [44, 45, 36, 37] этот метод применен к ультрафиолетовым проблемам: Φ_2^4 , Φ_3^4 . Новые комбинаторные оценки имеются в [38, 43, 46, 47] и в [44].

В [41] пропагандируется новый метод кластерных разложений, не использующий статсумм. Применение этой техники к ферми-системам см. в [39, 40, 42].

Основным аргументом за несуществование Φ_4^4 является ее инфракрасная асимптотическая свобода, доказанная Гавендзким и Купьяненом. Другие аргументы за см. в [10, 11, 13]. Обсуждение аргументов против см. в [85].

Построение ультрафиолетовых моделей с помощью корреляционных неравенств см. в [53, 57].

Полностью вне нашего обзора остались применения многомасштабных разложений к случайным операторам Шрёдингера, гиббсовским полям со случайным взаимодействием, блужданиям без самопересечений, системам с непрерывной симметрией и др. Часть из вопросов см. в сборнике [23].

ЛИТЕРАТУРА

1. Блехер П. М., Сургайлис Д., Автомодельные случайные поля. «Итоги науки и техн. ВИНТИ. Теория вероятностей. Мат. стат. Теор. кибернет.», 1983, 20, 3—51 (РЖМат, 1983, 10B91)
2. Глимм Дж., Джаффе А., Положительность гамильтониана поля Φ_3^4 . «Евклидова квант. теория поля. Марковск. подход». М.: Мир, 1978, 132—197 (РЖМат, 1979, 1B264)
3. —, Математические методы квантовой физики. М.: Мир, 1984, 445 с.
4. Завьялов О. И., Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979, 317 с. (РЖМат, 1980, 4B141)
5. Зайлер Э., Калибровочные теории. М.: Мир, 1985, 222 с.
6. Малышев В. А. Введение в евклидову квантовую теорию поля. М.: МГУ, 1985, 96 с. (РЖМат, 1986, 1B427K)
7. —, Миллос Р. А. Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений. М.: Наука, 1985, 288 с. (РЖМат, 1986, 1B420K)
8. Саймон Б., Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976
9. Синай Я. Г., Теория фазовых переходов, М.: Наука, 1980, 207 с.
10. Aizenman M., The intersection of Brownian paths as a case study of a renormalization group method for quantum field theory. Commun. Math. Phys., 1985, 97, № 1—2, 91—110 (РЖМат, 1985, 9B258)
11. —, Geometric analysis of Φ^4 fields and Ising models. Parts I and II. Commun. Math. Phys., 1982, 86, № 1, 1—48
12. Akhmitzjanov R. R., Malyshev V. A., Petrova E. N., Cluster expansion for unbounded nonfinite potential. «Statistical Physics and dynamical systems. Rigorous results», Eds. Fritz J., Jaffe A., Szasz D., Birkhauser, 1985, 221—235
13. Aragao de Carvalho C., Caracciolo S., Frohlich J., Polymers and $g\varphi^4$ theory in four dimensions. Preprint, IHES, 1982, 70 p.
14. Auberson G., Mennessier G., The reciprocal of a Borel summable function is Borel summable. Commun. Math. Phys., 1985, 100, № 3, 439—446
15. Batalan T., Ultraviolet stability for a model of interacting scalar and vector fields. I. A lower bound. Preprint HUTMP, 1982, 89 p.
16. —, Ultraviolet stability for a model of interacting scalar and vector fields. II. An upper bound. Preprint. HUTMP, 1982, 116 p.
17. —, Ultraviolet stability for a model of interacting scalar and vector fields. III. Preprint, HUTMP, 1982
18. —, (Higgs) $_{2,3}$ quantum fields in a finite volume. I. A lower bound. Commun. Math. Phys., 1982, 85, 603—626
19. —, (Higgs) $_{2,3}$ quantum fields in a finite volume. II. An upper bound. Commun. Math. Phys., 1982, 86, № 4, 555—594 (РЖМат, 1983, 6B296)
20. —, (Higgs) $_{2,3}$ quantum fields in a finite volume. III. Renormalization. Commun. Math. Phys., 1983, 88, 411—445 (РЖМат, 1983, 10B210)
21. —, (Proca) $_{2,3}$ quantum field in a finite volume. III. Renormalization. Preprint. HUTMP, 1982, 70 p.
22. —, Regularity and Decay of lattice Green's Functions. Commun. Math. Phys., 1983, 89, № 4, 571—597 (РЖМат, 1984, 1B429)
23. —, Ultraviolet stability in field theory. The Φ_3^4 model. «Scaling and self-similarity in physics». Ed. Fröhlich J., Birkhauser, 1983, 297—319
24. —, Propagators and renormalization transformations for lattice gauge theories. I. Commun. Math. Phys., 1984, 95, № 1, 17—40
25. —, Propagators and renormalization transformations for lattice gauge theories. II. Commun. Math. Phys., 1984, 96, № 2, 223—250
26. —, Recent results in constructing gauge fields. Physica, 1984, 124A, 79—90
27. —, Propagators for lattice gauge theories in a background field. Commun. Math. Phys., 1985, 99, № 3, 389—434

28. —, Spaces of regular gauge field configurations on a lattice and gauge fixing conditions. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 99, № 1, 75—102
29. —, Renormalization group methods in non-Abelian gauge theories. Preprint, HUTMP, 1983, 35 p.
30. —, Averaging operators for lattice gauge theories. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 98, № 1, 17—51
31. —, Ultraviolet stability of three-dimensional lattice pure gauge field theories. Preprint, Harvard Univ., 1985, 41 p.
32. —, *Imbrie J., Jaffe A.* Renormalization of the Higgs model: minimizers, propagators and the stability of mean field theory. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 97, № 1—2, 299—329 (PJKMar, 1985, 9A644)
33. —, —, —, Exact renormalization group for gauge theories. Preprint, Harv. Univ., 1983, 25 p.
34. —, —, Brydges D. The mass gap for Higgs models on a unit lattice. *Ann. Phys.*, 1984, 158, № 2, 281—319
35. *Battle G. A.*, III, Pseudoscalar interaction of coupled quantum-mechanical oscillators with independent Fermi systems. *J. Math. Phys.*, 1982, 23, № 5, 760—779 (PJKMar, 1983, 2B280)
36. —, Non-Gaussian α -positivity of ϕ_a^{2n} field theories. *J. Funct. Anal.*, 1983, 51, № 3, 312—325 (PJKMar, 1983, 11B340)
37. —, Non-Gaussian α -positivity of ϕ_a^{2n} field theories. II. Preprint. Texas Univ., 1985, 29 p.
38. —, A new combinatoric estimate for cluster expansions. *Commun. Math. Phys.*, 1984, 94, № 1, 133—139 (PJKMar, 1985, 4B822)
39. —, An elementary expansion of the Yukawa₂ field theory without vacuum energy counter-terms. Part I. Preprint, Texas Univ., 1985, 31 p.
40. —, An elementary expansion of the Yukawa₂ field theory without vacuum energy counter-terms. Part II. Preprint, Texas Univ., 1985, 40 p.
41. —, An intrinsic cluster expansion for statistical mechanics. Preprint. Texas Univ., 1985
42. —, A technical note on a fermi cluster expansion. Preprint. Texas Univ., 1985, 11 p.
43. —, Application of the Tataru—Vinicius identity to an enumeration problem. Preprint. Texas Univ., 1985, 4 p.
44. —, *Federbush P.*, A phase cell cluster expansion for Euclidean field theories. *Ann. Phys.*, (USA), 1982, 142, № 1, 95—139 (PJKMar, 1983, 4B383)
45. —, —, A phase cell cluster expansions for a hierarchical ϕ_3^4 model. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 88, № 2, 263—293 (PJKMar, 1983, 9B249)
46. —, —, A note on cluster expansions, tree graph identities, extra $1/N!$ factors!!! *Lett. Math. Phys.*, 1984, 8, № 1, 55—57 (PJKMar, 1984, 7B207)
47. —, —, *Robinson R. W.*, Tree graphs and quasi-bounded spin systems. Preprint, 1984
48. *Benfatto G.*, An iterated Mayer expansion for the Yukawa gas. Preprint, Univ. di Roma, dip. di Matematica, 1984, 18 p.
49. —, *Cassandro M., Gallovtotti G., Nicolo F., Olivieri E., Presutti E., Scaccia-telli E.* Ultraviolet stability in euclidean scalar field theories. *Commun. Math. Phys.*, 1980, 71, № 2, 95—130 (PJKMar, 1980, 8B136)
50. —, —, —, —, —, Some probabilistic techniques in field theory. *Commun. Math. Phys.*, 1978, 59, № 2, 143—166 (PJKMar, 1978, 12B391)
51. —, *Gallovtotti G., Nicolo F.*, Elliptic equations and gaussian processes. *J. Funct. Anal.*, 1980, 36, № 3, 343—400 (PJKMar, 1980, 10B203)
52. —, —, —, On the massive sine-Gordon equation in the first few regions of collapse. *Commun. Math. Phys.*, 1982, 83, № 3, 387—410 (PJKMar, 1982, 9B195)
53. *Bovier A., Felder G.*, Skeleton inequalities and the asymptotic nature of perturbation theory for ϕ^4 -theories in two and tree dimensions. *Commun. Math. Phys.*, 1984, 93, № 2, 259—275 (PJKMar, 1984, 11B251)
54. *Breen S.*, Leading large order asymptotics for $(\phi^4)_2$ perturbation theory. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 92, № 2, 179—194 (PJKMar, 1984, 6B241)
55. *Brydges D.*, Field theories and Symanzik's polymer representation. «Gauge Theor. Fundam. Interact. and Rigor. Results. Lect. Int. Summer Sch. Theor. Phys., Poiana Brasov, 1981». Boston e. a. 1982, 311—337 (PJKMar, 1985, 5B667)
56. —, *Federbush P.*, A new form of the Mayer expansion in classical statistical mechanics. *J. Math. Phys.*, 1978, 19, № 10, 2064—2067 (PJKMar, 1979, 5B314)
57. —, *Fröhlich J., Sokal A. D.*, A new proof of the existence and nontriviality of the continuum ϕ_2^4 and ϕ_3^4 quantum field theories. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 91, № 2, 141—186 (PJKMar, 1984, 4B257)
58. —, —, *Seiler E.*, On the construction of quantized gauge fields. I. General results. *Ann. Phys.*, 1979, 121, № 1—2, 227—284 (PJKMar, 1980, 3B251)
59. —, —, —, On the construction of quantized gauge fields. II. Construction of the lattice approximation. *Commun. Math. Phys.*, 1980, 71, 159—205
60. —, —, —, On the construction of quantized gauge fields. III. The two-dimensional abelian Higgs model without cutoffs. *Commun. Math. Phys.*, 1981, 79, № 3, 353—399 (PJKMar, 1981, 10B311)
61. *Calan C. de, Petritis D., Rivasseau V.*, Local existence of the Borel transform in Euclidean massless ϕ_4^4 . *Commun. Math. Phys.*, 1985, 101, № 4, 559—577
62. —, *Rivasseau V.*, Renormalization in the complete Mellin representation of Feynman amplitudes. *Commun. Math. Phys.*, 1981, 78, 531—544
63. —, —, Local existence of the Borel transform in Euclidean ϕ_4^4 . *Commun. Math. Phys.*, 1981, 82, № 1, 69—100 (PJKMar, 1982, 5B394)
64. —, —, A comment on the local existence of the Borel transform in euclidean ϕ_4^4 . *Commun. Math. Phys.*, 1983, 91, № 2, 265 (PJKMar, 1984, 4B258)
65. —, —, The perturbation series ϕ_3^4 field theory is divergent. *Commun. Math. Phys.*, 1982, 83, № 1, 77—82 (PJKMar, 1982, 8B277)
66. *Cammarota C.*, Decay of correlations for infinite range interactions in unbounded spin systems. *Commun. Math. Phys.*, 1982, 85, № 4, 517—528
67. *Combe Ph., Haegh-Krohn R., Rodriguez R., Sirugue M., Sirugue-Collin M.* Zero mass, 2 dimensional real time sine-Gordon model without u. v. cut-offs. *Ann. Inst. H. Poincare*, 1982, A37, № 2, 115—127 (PJKMar, 1983, 5B327)
68. *Federbush P.*, A mass zero cluster expansion. Part 1. The expansion. *Commun. Math. Phys.*, 1981, 81, № 3, 327—340 (PJKMar, 1982, 4B483)
69. —, A mass zero cluster expansion. Part 2. Convergence. *Commun. Math. Phys.*, 1981, 81, № 3, 341—360 (PJKMar, 1982, 4B484)
70. —, A phase cell approach to Yang—Mills theory. O. Introductory exposition. Preprint. Univ. of Michigan, 1984, 24 p.
71. —, *Kennedy T.*, Surface effects in Debye screening. Preprint, 1985, 127 p.
72. *Feldman J.*, The $\lambda\phi_4^4$ field theory in a finite volume. *Commun. Math. Phys.*, 1974, 37, № 2, 93—120 (PJKMar, 1975, 8B541)
73. —, Ph. D. Thesis. Harvard Univ., 1974
74. —, *Magnen J., Rivasseau V., Sénéor R.*, Bounds on completely convergent euclidean Feynman graphs. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 98, № 2, 273—288 (PJKMar, 1985, 10B323)
75. —, —, —, Infra red ϕ_4^4 . Lectures at XLIII Session of Les Houches Summer School in Critical Phenomena, Random Systems, Gauge Theories. 1984, 44 p.
76. —, —, —, Large order bounds for the perturbative ϕ^4 theory. Lectures XLIII Session of Les Houches Summer School on: Critical Phenomena, Random Systems. Gauge Theories, Preprint, 1984, 16 p.
77. —, —, —, Bounds on renormalized Feynman graphs. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 100, № 1, 23—55
78. —, *Osterwalder K.*, The Wightman axioms and the mass gap for weakly coupled $(\phi^4)_3$ quantum field theories. *Ann. Phys.*, (USA), 1976, 97, 80—135
79. *Fröhlich J., Imbrie J. Z.*, Improved perturbation expansion for disordered systems: beating Griffith singularities. Preprint HUTMP, 1985

80. *Gallavotti G.*, Some aspects of the renormalization problems in statistical mechanics and field theory. *Atti Accad. naz. Lincei Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur.*, 1978, Sez. 1, 15, № 2, 23—59 (PЖMar, 1979, 7B236)
81. —, On the ultraviolet stability in statistical mechanics and field theory. *Ann. math. pura ed appl.*, 1979, 120, 1—23 (PЖMar, 1980, 3B254)
82. —, Renormalization theory and ultraviolet stability for scalar fields via renormalization group methods. Preprint Univ. di Roma, Dip. di Matematica, 1984
83. —, *Nicolo F.* Renormalization theory in four-dimensional scalar fields (1). *Commun. Math. Phys.*, 1985, 100, № 4, 545—590
84. —, —, Renormalization theory in four-dimensional scalar fields (11). *Commun. Math. Phys.*, 1985, 101, № 2, 247—282
85. —, *Rivasseau V.*, Φ^4 field theory in dimension 4: a modern introduction to its unsolved problems. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1984, 40, № 2, 185—210
86. *Gawędzki K.*, Block spin renormalization. Preprint Institut des Hautes, Etudes Scientifiques, France, May, 1984
87. —, *Kupiainen A.*, Renormalization group study of a critical lattice model. I. Convergence to the line of fixed points. *Commun. Math. Phys.*, 1981, 82, № 3, 407—433 (PЖMar, 1982, 7B250)
88. —, —, Renormalization group study of a critical lattice model. II. The correlation functions. *Commun. Math. Phys.*, 1982, 83, № 4, 469—492 (PЖMar, 1982, 7B251)
89. —, —, Renormalization group for a critical lattice model. Effective interactions beyond the perturbation expansion or bounded spins approximation. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 88, № 1, 77—94 (PЖMar, 1983, 9B250)
90. —, —, A rigorous block spin approach to massless lattice theories. *Commun. Math. Phys.*, 1980, 77, № 1, 31—64 (PЖMar, 1981, 3B212)
91. —, —, Triviality of ϕ_4^4 and all that in hierarchical model approximation. *J. Stat. Phys.*, 1982, 29, № 4, 683—698
92. —, —, Non-Gaussian fixed points of the block spin transformation hierarchical model approximation. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 89, № 2, 191—220 (PЖMar, 1984, 1B1123)
93. —, —, Massless lattice ϕ_4^4 theory: rigorous control of a renormalizable asymptotically free model. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 99, № 2, 197—252
94. —, —, Block spin renormalization group for dipole gas and $(\Delta\phi)^4$. *Ann. Phys.*, 1983, 147, № 1, 198—243
95. —, —, Lattice dipole gas and $(\Delta\phi^4)$ models at long distances: decay of correlations and scaling limit. *Commun. Math. Phys.*, 1984, 92, № 4, 531—553 (PЖMar, 1984, 9B446)
96. —, —, Rigorous renormalization group and asymptotic freedom. In «Scaling and self-similarity in physics». Ed. Fröhlich J. Birkhäuser, 1983, 227—262
97. —, —, Non-gaussian scaling limits. Hierarchical model approximations. *IHES*, July, 1983, 26 p.
98. —, —, Rigorous renormalization group and large N . *Univ. Bielefeld*, Preprint, 1983, 12 p.
99. —, —, Non-trivial continuum limit of a ϕ_4^4 model with negative coupling constant. *Harvard Univ.*, Preprint, 1984, 51 p.
100. —, —, Gross-Neveu model through convergent perturbation expansions. *Univ. Helsinki*, Preprint, 1985, 54 p.
101. —, —, Renormalization of a non-renormalizable quantum field theory. *Univ. Helsinki*, Preprint, 1985
102. —, —, Asymptotic freedom beyond perturbation theory. *Harvard Univ.*, Preprint, 1985, 156 p.
103. —, —, *Tirozzi B.*, Borel summability of the perturbation series in a hierarchical $\lambda(\Delta\phi)^4$ model. *J. Stat. Phys.*, 1984, 36, № 1—2, 145—162 (PЖMar, 1985, 3B234)
104. —, —, —, Renormalons: a dynamical system approach. Preprint. *HUTMP*, 1984, 35 p.

105. *Glimm J.*, Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions. I. *Commun. Math. Phys.*, 1967, 5, № 5, 343—386 (PЖMar, 1968, 12B476)
106. —, Boson fields with the ϕ^4 interaction in three dimensions. *Commun. Math. Phys.*, 1968, 10, № 1, 1—47
107. *Gross L.*, Convergence of $U(1)_3$ lattice gauge theory to its continuum limit. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 92, № 2, 137—162 (PЖMar, 1984, 7B208)
108. *Hooft G't.*, On the convergence of planar diagram expansion. *Commun. Math. Phys.*, 1982, 86, № 4, 449—464
109. —, Rigorous construction of planar diagram field theories in four dimensional euclidean space. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 88, № 1, 1—26
110. *Imbrie J.*, Renormalization group methods in gauge field theories. *Harv. Univ.*, Preprint, 1985, 81 p.
111. *Ito K. R.*, Construction of two-dimensional quantum electrodynamics based on a hamiltonian formalism. *Lett. Math. Phys.*, 1978, 2, № 5, 357—365 (PЖMar, 1979, 2B256)
112. —, Construction of two-dimensional quantum electrodynamics. *J. Math. Phys.*, 1980, 26, № 6, 1473—1494 (PЖMar, 1981, 2B435)
113. —, Construction of euclidean (QED)₂ via lattice gauge theory. Boundary condition and volume dependence. *Commun. Math. Phys.*, 1982, 83, № 4, 537—561 (PЖMar, 1982, 8B286)
114. *King C.*, The $U(1)$ Higgs model I. The continuum limit. *HUTMP*, Preprint, 1984, 86 p.
115. —, The $U(1)$ Higgs model II. The infinite volume limit. *HUTMP*, Preprint, 1984, 66 p.
116. *Lang G., Lesniewski A.*, Axioms for renormalization in euclidean quantum field theory. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 91, № 4, 505—518 (PЖMar, 1984, 4B249)
117. *Lesniewski A.*, On Callan's proof of the BPHZ theorem. *Helv. Phys. Acta*, 1983, 56, № 6, 1158—1167 (PЖMar, 1984, 8B281)
118. *Mack G., Pordt A.*, Convergent perturbation expansions for euclidean quantum field theory. *Commun. Math. Phys.*, 1985, 97, № 1—2, 267—298
119. *Magnen J., Sénéor R.*, The infinite volume limit of the ϕ_3^4 model. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1976, 24, 95—159
120. —, —, Phase space cell expansion and Borel summability for the Euclidean ϕ_3^4 theory. *Commun. Math. Phys.*, 1977, 56, 237—276 (PЖMar, 1978, 5B262)
121. —, —, The infra-red behaviour of $(\Delta\phi)_3^4$. *Ann. Phys.*, 1982, 152, № 1, 130—202
122. —, —, A note on cluster expansions. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1983, A38, № 1, 93—98 (PЖMar, 1983, 8B310)
123. *Malyshev V. A.*, Uniform cluster estimates for lattice models. *Commun. Math. Phys.*, 1980, 64, № 2, 131—157 (PЖMar, 1979, 5B311)
124. *Nicolo F.*, On the massive sine-Gordon equation in the higher regions of collapse. *Commun. Math. Phys.*, 1983, 88, № 4, 561—600 (PЖMar, 1984, 1B329)
125. *Park Y. M.*, Convergence of lattice approximations and infinite volume limit in the $(\lambda\phi^4 - \sigma\phi^2 - \mu\phi)_3$ field theory. *J. Math. Phys.*, 1977, 18, № 3, 354—366 (PЖMar, 1977, 8B239)
126. *Polchinski J.*, Renormalization and effective lagrangeans. *Nucl. Phys. B*, 1984, 231, № 2, 269—295
127. *Potthof J.*, Euclidean ϕ_3^4 theory in a electromagnetic potential. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1982, A37, № 2, 129—154 (PЖMar, 1983, 5B326)
128. *Rivasseau V.*, Construction and Borel summability of planar 4-dimensional Euclidean field theory. *Commun. Math. Phys.*, 1984, 95, № 4, 445—486
129. *Ruijsenaars S. N. M.*, The Wightman axioms for the fermionic Federbush model. *Commun. Math. Phys.*, 1982, 87, № 2, 181—228 (PЖMar, 1983, 6B294)

130. *Sénéor R.*, Superrenormalizable infrared theories. «Lect. Notes Math.», 1983, 1031, 108—113
131. *Spencer T.*, The Lipatov argument. Commun. Math. Phys., 1980, 74, № 3, 273—280 (PЖМат, 1980, 12B269)
132. *Weingarten D. H., Challifour J. L.*, Continuum limit of QED₂ on a lattice. Ann. Phys., (USA), 1979, 123, № 1, 61—101 (PЖМат, 1980, 5B221)
133. —, —, Continuum limit of QED₂ on a lattice. II. Ann. Phys., (USA), 1980, 126, № 1, 154—175 (PЖМат, 1981, 154—175)
134. *Westwater M. J.*, On Edward's model for long polymer chains. Commun. Math. Phys., 1980, 72, № 2, 131—174 (PЖМат, 1980, 8B435)
135. —, On Edward's model for polymer chains. II. The self-consistent approach. Commun. Math. Phys., 1981, 79, № 1, 53—73 (PЖМат, 1981, 7B257)
136. —, On Edward's model for polymer chains. III. Borel summability. Commun. Math. Phys., 1982, 84, № 4, 459—470 (PЖМат, 1982, 12B320)
137. —, Edward's model for long polymer chains. Lect. Notes Phys., 1982, 153, 394—396 (PЖМат, 1982, 9B201)

ВЫПУСКИ И ТОМА СЕРИИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ

Алгебра. Топология. 1982. М., 1964	Алгебра. Топология. Геометрия. Том 10. 1971
Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962. М., 1964	Математический анализ. 1970. М., 1971
Геометрия. 1963. М., 1965	Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970. М., 1971
Математический анализ. 1963. М., 1966	Алгебра. Топология. Геометрия. 1970. М., 1972; Том 11, 1974; Том 12, 1974; Том 13, 1975; Том 14, 1977; Том 15, 1977; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1980; Том 18, 1981; Том 19, 1981; Том 20, 1982; Том 21, 1983; Том 22, 1984; Том 23, 1985
Теория вероятностей. 1963. М., 1965	Математический анализ. Том 10, 1973; Том 11, 1973; Том 12, 1974; Том 13, 1975; Том 14, 1977; Том 15, 1977; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1980; Том 19, 1981; Том 20, 1982; Том 21, 1983; Том 22, 1984; Том 23, 1985
Алгебра. 1964. М., 1966	Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 10, 1972; Том 11, 1974; Том 12, 1972; Том 13, 1976; Том 14, 1977; Том 15, 1978; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1980; Том 19, 1981; Том 20, 1982; Том 21, 1983; Том 22, 1984; Том 23, 1985
Математический анализ. 1964. М., 1966	Современные проблемы математики. Том 1, 1973; Том 2, 1973; Том 3, 1974; Том 4, 1975; Том 5, 1975; Том 6, 1976; Том 7, 1976; Том 8, 1977; Том 9, 1977; Том 10, 1978; Том 11, 1978; Том 12, 1978; Том 13, 1979; Том 14, 1979; Том 15, 1980; Том 16, 1980; Том 17, 1981; Том 18, 1981; Том 19, 1982; Том 20, 1982; Том 21, 1982; Том 22, 1983; Том 23, 1983; Том 24, 1984; Том 25, 1984; Том 26, 1985; Том 27, 1985
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1964. М., 1966	Проблемы геометрии. Том 7, 1976; Том 8, 1977; Том 9, 1979; Том 10, 1978; Том 11, 1981; Том 12, 1981; Том 13, 1982; Том 14, 1983; Том 15, 1984; Том 16, 1984; Том 17, 1985
Алгебра. Топология. Геометрия. 1965. М., 1967	
Математический анализ. 1965. М., 1966	
Алгебра. Топология. Геометрия. 1966. М., 1968	
Математический анализ. 1966. М., 1967	
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1966. М., 1967	
Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. М., 1969	
Математический анализ. 1967. М., 1969	
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1967. М., 1969	
Алгебра. Топология. Геометрия. 1968. М., 1970	
Математический анализ. 1968. М., 1969	
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1968. М., 1970	
Алгебра. Топология. Геометрия. 1969. М., 1970	
Математический анализ. 1969. М., 1971	
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1969. М., 1970	

СОДЕРЖАНИЕ

(Соответствует рубрикам 27.43—27.45 Рубрикатора ГАСНТИ)

В. Л. Гурко. Случайные детерминанты	3
§ 1. Полярное разложение случайных матриц	3
§ 2. Моменты случайных детерминантов Вандермонда	6
§ 3. Интегральные представления для детерминантов	7
§ 4. Интегрирование на алгебрах Грассмана и Клиффорда	8
§ 5. Распределение корней характеристического уравнения	9
§ 6. Стохастическое условие Калмана	11
§ 7. Методы вычисления моментов случайных детерминантов	11
§ 8. Гипотеза Фреше	15
§ 9. Проблема Ляпунова для систем линейных стационарных уравнений со случайными коэффициентами	17
§ 10. Стохастический метод наименьших квадратов	18
§ 11. Случайные детерминанты Фредгольма и управление спектром случайных линейных операторов в гильбертовом пространстве	20
§ 12. Центральная предельная теорема для случайных детерминантов	22
§ 13. О связи между сходимостью случайных детерминантов и сходимостью спектральных функций случайных матриц	24
§ 14. Полуциркулярный закон Вигнера	25
§ 15. V-преобразование спектральных функций	27
§ 16. Круговой закон	28
§ 17. Эллиптический закон	29
§ 18. Осцилляционная теорема Штурма	30
§ 19. Закон арктангенса	30
§ 20. Случайные детерминанты Фредгольма	31
§ 21. Элементы G-анализа	35
§ 22. Уравнение Дайсона	40
§ 23. Предельные теоремы для нормированных спектральных функций пучка самосопряженных случайных матриц	41
Литература	47
М. В. Меньшиков, С. А. Молчанов, А. Ф. Сидоренко. Теория перколяции и некоторые приложения	53
Введение	53
§ 1. Постановка дискретных задач теории перколяции	62
§ 2. О точных значениях критических вероятностей	65
§ 3. Метод поколений	67
§ 4. Метод проектирования	70
§ 5. Возрастающие события. Базовые неравенства. Формула Руссо	72
§ 6. Совпадение критических точек	75
§ 7. Другие перколяционные характеристики	83
§ 8. Непрерывные модели перколяции	84
§ 9. Просачивание случайных полей	96
§ 10. Многомасштабные схемы перколяции	103
Литература	108