В. А. Малышев, Асимптотика фейнмановских интегралов в евклидовой области, *ТМФ*, 1976, том 29, номер 2, 171–177

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 29, № 2
ноябрь, 1976

АСИМПТОТИКА ФЕЙНМАНОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ В ЕВКЛИДОВОЙ ОБЛАСТИ

В. А. Малышев

Доказана теорема об асимптотическом поведении интегралов для различных классов функций, включающих неперенормированные диаграммы евклидовых скалярных теорий поля. Дана простая рекуррентная формула для вычисления логарифмического показателя в асимптотике по ультрафиолетовому обрезанию.

В своей известной работе С. Вейнберг (см. [1]) доказывает одну общую теорему, позволяющую получить оценку сверху асимптотики сходящихся фейнмановских интегралов в евклидовой области. Более тонкие оценки в релятивистской области с использованием α-представления (а также для перенормированных интегралов) были получены в [2] и [3]. Результаты этих работ уточнялись в [7, 11, 8] и [10]. В той же работе [1] Вейнберг ставит задачу об определении класса функций, для которых можно исследовать точную асимптотику интегралов. Здесь эта задача решается с помощью введения довольно общих классов функций, для которых асимптотика интегралов сохраняется после интегрирования по части переменных. Задача исследования асимптотики по ультрафиолетовому обрезанию и внешним импульсам для сходящихся или расходящихся неперенормированных фейнмановских интегралов массивной скалярной евклидовой квантовой теории поля является частным случаем рассматриваемых ниже задач.

В разделе 1, используя некоторые идеи Вейнберга, доказывается, что для довольно широких классов функций операция интегрирования не меняет характера асимптотики. Для наиболее интересных случаев отсюда следует, что асимптотика по любому направлению имеет вид $Cp^{\alpha}\ln^{\beta}p$. Если под p понимается параметр ультрафиолетового обрезания, то необходимое и достаточное условие того, что $\alpha=\beta=0$, дает теорема счета степеней [1, 4]. Вообще же вычислять с помощью метода Вейнберга логарифмический показатель чрезвычайно трудоемко. Поэтому в разделе 2 предлагается совсем другой подход к вычислению этой асимптотики, существенно более простой. В доказательстве удобно (но не обязательно) использовать сам факт существования асимптотики вида $Cp^{\alpha}\ln^{\beta}p$, доказанный в разделе 1. Мы приводим простую рекуррентную формулу для вычисления показателей α и β для асимптотики по ультрафиолетовому обрезанию произвольного неперенормированного фейнмановского интеграла скалярной массивной теории. Это позволяет уточнить и дать единое доказательство для многих оценок фейнмановских интегралов в [5] и [6].

Наши методы полностью вещественны в отличие от [10], где ищется асимптотика по внешним импульсам для сходящихся интегралов с помощью методов комплексного переменного.

1. АСИМПТОТИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

Пусть R — множество вещественных чисел и $R_b=\{\eta:\ \eta>b\}\subset R$, $b>0$. В дальнейшем под χ_b будем понимать произвольную положительную функцию на R_b^n, обладающую свойством: для любого подмножества $\Lambda\subset\{1,\dots,n\}$ (включая пустое) найдется функция $M_\Lambda(\eta_\Lambda)>0$, $\eta_\Lambda=\{\eta_i,\ i\in\Lambda\}$ такая, что $\lim\chi_b(\eta_1,\dots,\eta_n)=M_\Lambda(\eta_\Lambda)$ при $\min\eta_j\to\infty$.

Функции $\psi_1(\eta_1,\dots,\eta_n)$ и $\psi_2(\eta_1,\dots,\eta_n)$, определенные на R_b^n, назовем равномерно асимптотически эквивалентными ($\psi_1\overset{u}{\sim}\psi_2$), если существует $b'\geqslant b$ такое, что $\psi_1=\chi_{b'}\psi_2$ для некоторой $\chi_{b'}$. При $n=1$ это определение сводится к обычной асимптотической эквивалентности с точностью до мультипликативной константы.

Рассмотрим класс $\mathfrak{A}$ положительных функций, каждая из которых определена на своем R_b для некоторого $b>0$, мультипликативный и содержащий положительные константы и функцию x. Потребуем также, чтобы для любой $\varphi\in\mathfrak{A}$ и любых c_1, $c_2>0$ имело место $\varphi(c_1\eta+c_2)\overset{u}{\sim}\varphi(\eta)$. Через $\overline{\mathfrak{A}}$ будем обозначать класс функций на R_b^n для любого n вида $\sum\limits_{i=1}^{N}\varphi_{i1}(\eta_1)\dots\varphi_{in}(\eta_n)$, $\varphi_{ik}\in\mathfrak{A}$. Класс $\mathfrak{A}$ будем называть асимптотически замкнутым, если для любых φ_1, $\varphi_2\in\mathfrak{A}$ существует $\psi(\eta_1,\eta_2)\in\overline{\mathfrak{A}}$ такая, что

$$\int\limits_0^{\eta_2}\varphi_1(\eta_2\eta_1/z)\varphi_2(z)\,dz\overset{u}{\sim}\psi(\eta_1,\eta_2).$$

Примеры асимптотически замкнутых классов:

1) класс $\mathfrak{A}_0$ функций вида $C\eta^n\ln^m\eta$, где n — целое, m — целое неотрицательное;

2) класс $\mathfrak{A}_1$ функций вида $C\eta^\rho\ln^m\eta$, где ρ — любое вещественное число, m — любое неотрицательное.

Обозначим $\ln_1\equiv\ln$, $\ln_2\equiv\ln\ln$ и т. д. Определим класс $\mathfrak{A}_n$ как состоящий из функций вида $C\eta^{\rho_0}\ln_1{}^{\rho_1}\eta\dots\ln_{n-1}^{\rho_{n-1}}\eta\ln_n{}^m\eta$, где ρ_i — вещественные числа, m — целое неотрицательное. Асимптотическая замкнутость $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ доказывается легко. По-видимому и класс $\mathfrak{A}_n$ является асимптотически замкнутым.

Определение. *Пусть задан произвольный асимптотически замкнутый класс $\mathfrak{A}$. Будем говорить, что неотрицательная локально интегрируемая функция f на R^n относится к классу W, если для любой последовательности $\mathbf{L}_1,\dots,\mathbf{L}_n$ линейно независимых векторов R^n существует такая $\varphi\in\overline{\mathfrak{A}}$, что*

$$f(\mathbf{L}_1\eta_1\dots\eta_n+\mathbf{L}_2\eta_2\dots\eta_n+\dots+\mathbf{L}_n\eta_n+\mathbf{C})\overset{u}{\sim}\varphi(\eta_1,\dots,\eta_n)\qquad(1)$$

равномерно по $\mathbf{C}$ в любой ограниченной области R^n.

Замечание 1. Легко показать, что φ в правой части (1) зависит лишь от последовательности подпространств $\mathcal{L}_1,\dots,\mathcal{L}_n$, где $\mathcal{L}_m$ — подпространство, натянутое на $\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_m$ (по модулю того, что в представлении φ каждый член определен с точностью до мультипликативной константы). Если (1) имеет место для последовательности $\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_n$, то (1) имеет место и для любой другой $\mathbf{L}_1', \ldots, \mathbf{L}_n'$ с теми же $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_n$.

Это определение является ответом на вопрос Вейнберга о классе функций с точными асимптотическими свойствами.

Теорема 1. *Если $f \in W$, то для любой последовательности линейно независимых векторов* $\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_m, \mathbf{L}$, $m=n-1$,

$$\tilde{f}(\eta_1\mathbf{L}_1+\ldots+\eta_m\mathbf{L}_m+\eta\mathbf{L}) = \int_{-\eta}^{\eta} f(\eta_1\mathbf{L}_1+\ldots+\eta_m\mathbf{L}_m+\eta\mathbf{L})\,d\eta \in W.$$

Доказательство. Нам надо проверить условие (1) для $\tilde{f}$ и любой последовательности векторов $\mathbf{L}_1', \ldots, \mathbf{L}_n'$. Обозначим через $\mathscr{L}$ подпространство, натянутое на $\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_m$. Из замечания 1 следует, что достаточно рассматривать последовательности вида $\mathbf{L}_1', \ldots, \mathbf{L}_{r-1}', \mathbf{L}, \mathbf{L}_r', \ldots$ $\ldots, \mathbf{L}_m'$, $1 \leqslant r \leqslant m+1$, и $\mathbf{L}_1', \ldots, \mathbf{L}_{r-1}', \mathbf{L}_r'+\mathbf{L}, \mathbf{L}_{r+1}', \ldots, \mathbf{L}_m'$, где все $\mathbf{L}_i \in \mathscr{L}$.

Рассмотрим сначала первый случай. Изменим обозначения: $(\mathbf{L}_1', \ldots$ $\ldots, \mathbf{L}_{r-1}', \mathbf{L}, \mathbf{L}_r', \ldots, \mathbf{L}_m') = (\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_m)$. Тогда

$$\tilde{f}(\mathbf{L}_1\eta_1\ldots\eta_n+\ldots+\mathbf{L}_n\eta_n+\mathbf{C}) = \int_{-\eta_r\ldots\eta_n}^{\eta_r\ldots\eta_n} d\eta\, f(\mathbf{L}_1\eta_1\ldots\eta_n+\ldots$$

$$\ldots+\mathbf{L}_{r-1}\eta_{r-1}\ldots\eta_n+\mathbf{L}_{r+1}\eta_{r+1}\ldots\eta_n+\ldots+\mathbf{L}_n\eta_n+\mathbf{C}+\mathbf{L}_r\eta).$$

Введем разбиение интервала $(-\eta_r\ldots\eta_n,\ \eta_r\ldots\eta_n)$ на непересекающиеся интервалы $J^{\pm}, J^{\pm}_{i_{r+1}\ldots i_m}\ J^{0}_{i_{r+1}\ldots i_n}$. Для этого возьмем η_i достаточно большими и положим

$$J^{\pm}=\{y:\ \eta_r\ldots\eta_n > \pm y > b\eta_{r+1}\ldots\eta_n\},$$

где $b=b(\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_n)$. Рассмотрим покрытие $(-b,\ b)$ интервалами $(u-b^{-1}(u),\ u+b^{-1}(u))$, где $b(u)=b(\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_r, \mathbf{L}_{r+1}+u\mathbf{L}_r, \mathbf{L}_{r+2}, \ldots, \mathbf{L}_n)$. Выбрав теперь конечное подпокрытие и сужая, если необходимо, каждый интервал этого покрытия, а также расширяя, если необходимо, интервал $(-b,\ b)$, мы найдем разбиение $(-b,\ b)$ на непересекающиеся интервалы вида $(u_{i_{r+1}}-\lambda_{i_{r+1}},\ u_{i_{r+1}}+\lambda_{i_{r+1}})$, $\lambda_{i_{r+1}} < b_{i_{r+1}} \equiv b(u_{i_{r+1}})$. Продолжая этот процесс по индукции, построим систему чисел

$$u_{i_{r+1}},\ u_{i_{r+1}i_{r+2}}, \ldots, u_{i_{r+1}\ldots i_n},\quad \lambda_{i_{r+1}}, \ldots, \lambda_{i_{r+1}\ldots i_n},$$

$$0 < \lambda_{i_{r+1}\ldots i_m} < b^{-1}_{i_{r+1}\ldots i_m} \equiv b^{-1}(\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_{r-1}, \mathbf{L}_{r+1}+$$

$$+u_{i_{r+1}}\mathbf{L}_r, \ldots, \mathbf{L}_m+u_{i_{r+1}\ldots i_m}\mathbf{L}_r, \mathbf{L}_r, \mathbf{L}_{m+1}, \ldots, \mathbf{L}_n),$$

так, чтобы интервалы $(u_{i_{r+1}\ldots i_m}-\lambda_{i_{r+1}\ldots i_m},\ u_{i_{r+1}\ldots i_m}+\lambda_{i_{r+1}\ldots i_m})$ образовывали разбиение интервала $(-b_{i_{r+1}\ldots i_{m-1}},\ b_{i_{r+1}\ldots i_{m-1}})$. Положим

$$J_{i_{r+1}\ldots i_m} = \{y: y=u_{i_{r+1}}\eta_{r+1}\ldots\eta_m+\ldots+u_{i_{r+1}\ldots i_m}\eta_m\ldots\eta_n+$$

$$+z\eta_{m+1}\ldots\eta_n,\ \eta_m\lambda_{i_{r+1}\ldots i_m} > \pm z > b_{i_{r+1}\ldots i_m}\}$$

(при $m=n$ последний член здесь равен z),

$$J^0_{i_{r+1}\dots i_n}=\{y:y=u_{i_{r+1}}\eta_{r+1}\dots\eta_n+\dots+u_{i_{r+1}\dots i_n}\eta_n+z,\ |z|<b_{i_{r+1}\dots i_n}\}.$$

Рассмотрим теперь, например, интервал $J^{\pm}$. Другие интервалы рассматриваются даже несколько проще. Имеем

$$\int_{J^{\pm}} f(\mathbf{L}_1,\eta_1\dots\eta_n+\dots+\mathbf{L}_r\eta+\mathbf{L}_{r+1}\eta_{r+1}\dots\eta_n+\dots+\mathbf{L}_n\eta_n+\mathbf{C})\,d\eta=$$

$$=\eta_{r+1}\dots\eta_n\int_b^{\eta_r} dz f(\mathbf{L}_1\eta_1\dots\eta_n+\dots+\mathbf{L}_{r-1}\eta_{r-1}\dots\eta_n+$$

$$+\mathbf{L}_r z\eta_{r+1}\dots\eta_n+\dots+\mathbf{L}_n\eta_n+\mathbf{C}).$$

Используя равенство $\eta_k\dots\eta_n=\eta_k\dots(\eta_{r-1}\eta_r/z)\eta_{r+1}\dots\eta_r z$, $k<r$, получим

$$\int_{J^{\pm}}=\eta_{r+1}\dots\eta_n\int_b^{\eta_r} dz\,\chi_b\left(\eta_1,\dots,\eta_{r-2},\frac{\eta_{r-1}\eta_r}{z},z,\eta_{r+1},\dots,\eta_n\right)\times$$

$$\times\sum_i \varphi_{i1}(\eta_1)\dots\varphi_{i,r-1}\left(\frac{\eta_{r-1}\eta_r}{z}\right)\varphi_{i,r}(z)\dots\varphi_{in}(\eta_n)=$$

$$=\eta_{r+1}\dots\eta_n\sum_i\varphi_{i1}(\eta_1)\dots\varphi_{i,r-2}(\eta_{r-2})\varphi_{i,r+1}(\eta_{r+1})\dots\varphi_{in}(\eta_n)=$$

$$=\int_b^{\eta_r}\chi_b\varphi_{i,r-1}\left(\frac{\eta_{r-1}\eta_r}{z}\right)\varphi_{ir}(z)\,dz.$$

Из определения асимптотической замкнутости легко следует теперь, что для некоторой $\psi_i(\eta_1,\eta_2)\in\overline{\mathfrak{A}}$ имеет место

$$\int_{J^{\pm}}\overset{u}{\sim}\eta_{r+1}\dots\eta_n\sum_i\varphi_{i1}(\eta_1)\dots\varphi_{i,r-2}(\eta_{r-2})\psi_i(\eta_{r-1},\eta_r)\varphi_{i,r+1}(\eta_{r+1})\dots(\varphi_{in}(\eta_n)).$$

Второй случай рассматривается аналогично с помощью несколько другого разбиения, на чем мы не останавливаемся.

Следующее утверждение уточняет основной результат работы Вейнберга [1].

Теорема 2. *Если $f\in W$, то для любой последовательности линейно независимых векторов $\mathbf{L}_1,\dots,\mathbf{L}_m,\mathbf{L}$, $m=n-1$,*

$$\tilde f(\eta_1\mathbf{L}_1+\dots+\eta_n\mathbf{L}_m)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta_1\mathbf{L}_1+\dots+\eta_m\mathbf{L}_m+\eta\mathbf{L})\,d\eta\in W$$

в случае сходимости последнего интеграла.

Доказательство этой теоремы проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 1.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ

Здесь мы рассмотрим более узкий класс функций. Пусть в евклидовом пространстве R^n задана конечная система $\mathscr{L}$ плоскостей L произвольной размерности, проходящих через начало координат, и для каждой $L\in\mathscr{L}$

задана неотрицательная локально интегрируемая функция на R^n

$$f_L(k) \equiv \tilde{f}_L(\rho(k, L)) \sim \rho^{\alpha_L}(k, L) \text{ при } \rho(k, L) \to \infty,$$

где $\rho(k, L)$ — евклидово расстояние от точки $k \in R^n$ до плоскости L, α_L — вещественные числа. Положим $f = \prod\limits_{L \in \mathscr{L}} f_L$ и рассмотрим [1]

$$I_\varkappa(\mathscr{L}) = \int\limits_{|k| \leqslant \varkappa} f\, dk, \qquad k = (k_1, \dots, k_n).$$

Легко проверить, что $f \in W$, поэтому в силу теоремы 1 (в применении к асимптотически замкнутому классу $\mathfrak{A}_1$)

$$I_\varkappa \sim C \varkappa^\rho \ln^m \varkappa.$$

Далее под $\overline{\mathscr{L}}$ будем понимать множество всех непустых пересечений M плоскостей из $\mathscr{L}$, включая R^n (пересечение пусого числа плоскостей из $\mathscr{L}$) с заданными числами α_L и размерностями $l_M^{\overline{\varkappa}}$ этих пересечений. Будем считать $\overline{\mathscr{L}}$ частично упорядоченным в смысле теоретико-множественного включения. Две системы $\overline{\mathscr{L}}_1$ и $\overline{\mathscr{L}}_2$ будем называть изоморфными, если имеется взаимно-однозначное отображение $\overline{\mathscr{L}_1}$ в $\overline{\mathscr{L}_2}$, сохраняющее порядок и все числа α_L и $l_M^{\overline{\varkappa}_i}$.

Пару показателей (ρ, m) для системы $\overline{\mathscr{L}}$ будем обозначать $(\rho_{\overline{\mathscr{L}}}, m_{\overline{\mathscr{L}}})$. Упорядочим пары (ρ, m) хронологически: $(\rho_1, m_1) > (\rho_2, m_2)$, если либо $\rho_1 > \rho_2$, либо $\rho_1 = \rho_2$, $m_1 > m_2$. Из доказательства теоремы 3 будет следовать, что числа ρ и m не зависят от прочих деталей расположения плоскостей из $\mathscr{L}$. С каждым непустым $M \in \overline{\mathscr{L}}$ свяжем систему $\overline{\mathscr{L}}_M$ следующим образом. Элементами $\overline{\mathscr{L}}_M$ являются все $M' \in \overline{\mathscr{L}}$, содержащие M, с индуцированным из $\overline{\mathscr{L}}$ порядком, числа α_L для $L \supseteq M$ остаются неизменными, а размерности равны $l_{M'}^{\overline{\mathscr{L}}_M} = l_{M'}^{\overline{\mathscr{L}}} - l_M^{\overline{\mathscr{L}}} \geqslant 0$. Можно сказать, что рассматривается система плоскостей $L \supseteq M$ в фактор-пространстве R^n/M. Если $M = R^n$, то положим по определению $(\rho_{\overline{\mathscr{L}}_M}, m_{\overline{\mathscr{L}}_M}) = (0, 0)$.

Теорема 3. *Для любой системы $\overline{\mathscr{L}}$ положим*

$$(\tilde{\rho}_{\overline{\mathscr{L}}}, \tilde{m}_{\overline{\mathscr{L}}}) = \max_{M \in \overline{\mathscr{L}},\, \dim M > 0} \Big(\rho_{\overline{\mathscr{L}}_M} + \sum_{L \notin \overline{\mathscr{L}}_M} \alpha_L + l_M^{\overline{\mathscr{L}}} - 1,\; m_{\overline{\mathscr{L}}_M}\Big).$$

Тогда

$$(\rho_{\overline{\mathscr{L}}}, m_{\overline{\mathscr{L}}}) = \begin{cases} (0, 0), & \text{если } \tilde{\rho}_{\overline{\mathscr{L}}} < -1; \\ (0, \tilde{m}_{\overline{\mathscr{L}}} + 1), & \text{если } \tilde{\rho}_{\overline{\mathscr{L}}} = -1; \\ (\tilde{\rho}_{\overline{\mathscr{L}}} + 1, \tilde{m}_{\overline{\mathscr{L}}}), & \text{если } \tilde{\rho}_{\overline{\mathscr{L}}} > -1. \end{cases}$$

Замечание 2. Эта теорема позволяет вычислить ρ и m для любой диаграммы. Действительно, числа $l_M^{\overline{\mathscr{L}}}$ являются числом независимых циклов в соответствующих поддиаграммах, $n = \nu l$, где ν — размерность физического пространства, l — число независимых циклов в диаграмме, при-

[1] Мы рассматриваем $|k| = \sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2}$. Случай $|k| = \max\limits_{i=1}^{n} |k_i|$ рассматривается аналогично.

чем на каждом шаге l уменьшается по крайней мере на 1. Отсюда, в частности, следует и теорема счета степеней:

$$\lim_{\varkappa\to\infty} I_\varkappa<\infty$$

тогда и только тогда, когда для всех $M\in\mathscr{L}$

$$\sum_{L\notin\overline{\mathscr{L}}_M} \alpha_L+l_M^{\overline{\mathscr{L}}}<0.$$

Доказательство теоремы 3. Представим интеграл $I_\varkappa$ в виде

$$I_\varkappa=\int\limits_0^\varkappa d|k| \int\limits_{S_{|k|}^{n-1}} f\,d\omega,$$

где $S_{|k|}^{n-1}$ — $(n-1)$-мерная сфера радиуса $|k|$, $d\omega$ — соответствующая дифференциальная форма на $S_{|k|}^{n-1}$. Рассмотрим произвольную точку $x\in S_1^{n-1}$ и выберем такое $M\subset\overline{\mathscr{L}}$, что $x\in M$ и M имеет минимальную размерность. Построим геодезическую окрестность O_x точки x в $M\cap S_1^{n-1}$ достаточно малого радиуса и нормальную трубчатую окрестность (см., например, [9]) $N_x\subset S_1^{n-1}$ этой геодезической окрестности O_x.

Окрестности N_x образуют открытое покрытие S_1^{n-1}, из которого мы выберем конечное подпокрытие и перенесем его масштабным преобразованием на $S_{|k|}^{n-1}$. Пусть $O_{x_1},\ldots,O_{x_p}$, $N_{x_1},\ldots,N_{x_p}$ — перенесенные таким образом окрестности точек $x_1,\ldots,x_p\in S_{|k|}^{n-1}$. По теореме 1 нам достаточно найти такие ρ и m, что для некоторых $0<c_1\leqslant c_2<\infty$ $c_1\varkappa^\rho\ln^m\varkappa\leqslant I_\varkappa\leqslant c_2\varkappa^\rho\ln^m\varkappa$, $\varkappa>\varkappa_0$. Поэтому можно рассмотреть интеграл по каждой N_{x_i} и взять максимум. Но

$$\int\limits_{N_{x_i}} f\,d\omega\sim c_3\varkappa^{\sum\limits_{L\not\supset M}\alpha_{\mathscr{L}}}\varkappa^{\dim O_{x_i}}\int\limits_{Q_{x_i}}\bar f_M\,d\omega,\ \bar f_M=\prod_{L\supset M} f_L,$$

где Q_{x_i} — слой над x_i в расслоении N_{x_i}. Легко убедиться также, что

$$c_4I_\varkappa(\overline{\mathscr{L}}_M)\leqslant\int\limits_{Q_{x_i}}\bar f_M\,d\omega\leqslant c_5I_\varkappa(\overline{\mathscr{L}}_M),\qquad 0<c_4\leqslant c_5<\infty.$$

Так как $\dim O_{x_i}=l_M^{\overline{\mathscr{L}}}-1$, то из двух последних формул получается доказательство теоремы 3. С помощью более тонких построений можно было бы обойтись без использования теоремы 1.

В заключение хочу поблагодарить Я. Г. Синая за просмотр рукописи и ценные замечания.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 16 января 1976 г.

Литература

[1] S. Weinberg. Phys. Rev., **118**, 838, 1960.
[2] О. И. Завьялов. ЖЭТФ, **47**, 1099, 1964.
[3] О. И. Завьялов, Б. М. Степанов. ЯФ, **1**, 922, 1965.
[4] Yu. Hahn, W. Zimmerman. Commun. Math. Phys., **10**, 330, 1968.
[5] J. Glimm, A. Jaffé. Fortsch. d. Physik, **21**, 327, 1973.
[6] J. Feldman, K. Osterwalder. Ann. Phys., **97**, 80, 1976.
[7] J. P. Fink. J. Math. Phys., **9**, 1389, 1968.
[8] M. J. Westwater. Fortsch. d. Physik. **17**, 11, 1969.

[9] R. Thom. Commun. Math. Helv., 28, 17, 1954 (перевод в сб.: «Расслоенные пространства и их приложения», ИЛ, 1958).
[10] M. Bergére, P. Lam. Commun. Math. Phys., 39, 1, 1974.
[11] J. Lowenstein, W. Zimmerman. Commun. Math. Phys., 44, 73, 1975.

ASYMPTOTICS OF FEYNMAN INTEGRALS IN EUCLIDEAN REGION

V. A. Malyshev

The theorem about asymptotic behaviour of integrals is proved for different classes of functions including nonrenormalised diagrams of the Euclidean scalar field theories. The simple recurrent formula is given for calculating logarithmic power in the asymptotics when ultraviolet cut-off tends to infinity. This answers the question posed by S. Weinberg in [1].
