ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Том 14

ВЫПУСКИ И ТОМА СЕРИИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ:

Алгебра. Топология. 1962, М., 1964
Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964
Геометрия. 1963, М., 1965
Математический анализ. 1963, М., 1965
Теория вероятностей. 1963, М., 1965
Алгебра. 1964, М., 1966
Математический анализ. 1964, М., 1966
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1964, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967
Математический анализ. 1965, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М., 1968
Математический анализ. 1966, М., 1967
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1966, М., 1967
Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969
Математический анализ. 1967, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1967, М., 1969
Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970
Математический анализ. 1968, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1968, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1970
Математический анализ. 1969, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1969, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971
Математический анализ. 1970, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970, М., 1971
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 10, М., 1972
Математический анализ. Том 10, М., 1973
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 10, М., 1972
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 11, М., 1974
Математический анализ. Том 11, М., 1973
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 11, М., 1974
Современные проблемы математики. Том 1, М., 1973
Современные проблемы математики. Том 2, М., 1973
Современные проблемы математики. Том 3, М., 1974
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 12, М., 1974
Математический анализ. Том. 12, М., 1974
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 12, М., 1975
Современные проблемы математики. Том 4, М., 1975
Современные проблемы математики. Том 5, М., 1975
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 13, М., 1975
Математический анализ. Том 13, М., 1975
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 13, М., 1976
Современные проблемы математики. Том 6, М., 1976
Современные проблемы математики. Том 7, М., 1975
Проблемы геометрии. Том 7, М., 1975

МОСКВА 1977

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Том 14

Научный редактор
профессор *Р. В. Гамкрелидзе*

МОСКВА 1977

СОДЕРЖАНИЕ

Технический редактор *Н. А. Окунева*

Сдано в набор 24/VI-1976 г. Подписано в печать 4/I-1977 г. Формат 60×90$^1/_{16}$
Печ. л. 9,50 Уч.-изд. л. 10,59 Тираж 1300 экз. **Цена 1 р. 30 коп.** **Заказ** 6309

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, Люберцы, Октябрьский проспект, 403

Индекс 018832

УДК 519.2:530.145.6

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ АСПЕКТЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В. А. Малышев

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящий библиографический обзор включает работы по евклидовой квантовой теории поля (е. к. т. п.) с момента ее математического возникновения до апреля 1976 г. Основные идеи евклидовой квантовой теории поля возникли ранее в физических работах (об истории ее возникновения см. [243]), а первые математические работы относятся к 1972 г. В обзор включены лишь (за некоторым исключением) работы, удовлетворяющие требованию полной математической строгости. Настоящий обзор не может считаться обзором по всей конструктивной квантовой теории поля, хотя в настоящее время конструктивная теория развивается в основном в рамках евклидова подхода.

Первый период развития конструктивной квантовой теории поля основывался на гамильтоновой стратегии и был связан в основном с именами Глимма и Джаффе. Он отражен в монографии Хеппа [25] (см. также [126, 127]). Многие идеи гамильтонова подхода безболезненно перекочевали в евклидову область, и настоящий период развития теории отвечает евклидовой стратегии.

С точки зрения теории вероятностей, е. к. т. п. занимается построением и исследованием свойств случайных полей. Все возникающие случайные поля, интересные для е.к.т.п., оказываются обобщенными. Теории вероятностей хорошо знакомо (см., например, [10]) понятие случайного поля, в том числе и обобщенного поля $\varphi(x)$: так называется система случайных величин

$$\varphi(f)=\int f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $f(x)$ принадлежит пространству Шварца $\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$ на ν-мерном пространстве $\mathbf{R}^\nu$, заданных на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ), выбор которого не играет никакой роли при заданных конечномерных распределениях случайных величин $\varphi(f)$. При этом для любых $f_i \in \mathcal{S}$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$, с вероятностью 1

$$\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \varphi(f_1) + \lambda_2 \varphi(f_2).$$

В $\mathbf{R}^\nu = \{x:(x^0, \ldots, x^{\nu-1})\}$ удобно иногда выделять одну ось x^0. Она называется мнимым временем.

Эффект размерности ν оставался, по существу, не знакомым для теории вероятностей: неявно считалось, что теория случайных полей должна просто повторять с некоторыми усложнениями теорию случайных процессов. В общей же теории интегрирования в функциональных пространствах детально разрабатывались вопросы (как, например, абсолютная непрерывность гауссовых мер), мало интересные с точки зрения е. к. т. п. Однако в последнее время в математической статистической физике и в е. к. т. п. были поняты физические идеи и развиты математические методы, существенно изменившие положение.

Не каждое случайное поле, инвариантное относительно группы евклидовых движений в $\mathbf{R}^\nu$, представляет интерес для е. к. т. п. Для этого оно должно удовлетворять хотя бы одному из следующих условий: 1) поле марковское, а точнее существует слабо сходящаяся к нему последовательность марковских полей на решетке с шагом $\varepsilon \to 0$; 2) поле построено с помощью локального лагранжиана (см. ниже); 3) поле удовлетворяет условию положительности Остервальдера — Шредера (см. ниже).

Для ряда известных примеров эти условия выполняются одновременно. Условие 3 следует из 1 или 2. Из этих последних условий и из условия нетривиальности (т. е. негауссовости) поля следует, что объекты е. к. т. п. являются в высшей степени сингулярными и эта сингулярность растет с ростом ν.

В отличие от классической теории марковских процессов (соответствующей случаю $\nu=1$), где в основном используется техника условных вероятностей (мартингалы, замена меры, замена времени и т. д.), в е. к. т. п. существенно большую роль играет метод моментов. Смешанные моменты для обобщенного случайного поля являются обобщенными функциями

$$S^{(n)}(f_1, \ldots, f_n) \equiv \langle \varphi(f_1) \ldots \varphi(f_n) \rangle =$$
$$= \int S^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) f(x_1) \ldots f(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

называемыми функциями Швингера (евклидовыми функциями Грина). $\langle \cdot \rangle$ — символ математического ожидания. В е. к. т. п. $S^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ являются аналитическими функциями при $x_i \neq x_j$.

Знакомым в теории вероятностей объектом являются семиинварианты (связные части моментов) $G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$, которые можно, например, определить по индукции формулой

$$S^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum G^{(|Y_1|)}(Y_1) \ldots G^{(|Y_p|)}(Y_p), \qquad (1)$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $Y_1 \cup \ldots \cup Y_p$ множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Вместе с тем в е. к. т. п. появляются и другие величины, незнакомые теории вероятностей: вершинные функции, ядра Бете — Солпитера и т. д.

Определим сначала обратный пропагатор $\Gamma^{(2)}(x, y) = \Gamma^{(2)}(x-y)$ как ядро обратного оператора к ограниченному линейному оператору из соболевского пространства $\mathcal{H}_{-1}$ в $\mathcal{H}_1$ с ядром $G^{(2)}(x, y)$. Ядро

$$P^{(n)}(X, Y), \quad X = (x_1, \ldots, x_n), \quad Y = (y_1, \ldots, y_n)$$

определяется аналогично как ядро обратного оператора к оператору с ядром $G^{(2n)}(X, Y)$. Ядро Бете — Солпитера $K^{(n)}(X, Y)$ является связной частью для $(-P^{(n)}(X, Y))$ и определяется [136, 138] формулой, близкой к формуле (1). Так, $P^{(1)}(X, Y) = K^{(1)}(X, Y) = \Gamma^{(2)}(x-y)$.

Существование ядер Бете — Солпитера доказано для некоторых моделей при $n=1, 2, 3$ в [136, 259].

Такие объекты, как ядра Бете — Солпитера, обладают более сильным убыванием при раздвигании аргументов, чем семиинварианты, и дают более тонкую информацию о свойствах случайного поля и его зависимости от параметров. Они помогают также [260, 261] изучению спектра гамильтониана, аналога инфинитезимального оператора для марковской полугруппы в направлении мнимого времени $\mathbf{R}^\nu$ (см. ниже).

Е. к. т. п. переживает сейчас бурное развитие: результаты многих работ ко времени опубликования бывают уже перекрыты в препринтах. К настоящему времени в русском переводе выходят книги [55, 243], что позволило автору уделить большее внимание работам, появившимся после выхода или не вошедшим в [55, 243]. Стремительное развитие е. к. т. п. обусловлено также целенаправленностью большинства работ: по существу отсутствуют работы, где не решались бы конкретные задачи. Методы е. к. т. п. применяются пока лишь в статистической физике (см., однако, [170, 241]). Методы е. к. т. п. отличаются от стандартных программ по математической физике. Существует ряд руководств, старающихся ликвидировать этот пробел (см., например, [223, 224]).

Автор старался, чтобы обзор был полезен тем, кто хочет применять методы е. к. т. п. в своей области теории вероятностей, а также помог ориентации тех, кто хочет начать работать в с. к. т. п. Для тех, кто хорошо знаком с [55, 243], может представить интерес обзор последних препринтов. Получению этих препринтов автор во многом обязан Р. Л. Добрушину и Я. Г. Синаю, которых он искренно благодарит.

§ 2. АКСИОМАТИКА И СТРУКТУРА ЕВКЛИДОВЫХ ПОЛЕЙ

Важнейшая задача конструктивной квантовой теории поля — построить нетривиальный пример квантового поля в размерности $\nu=4$, удовлетворяющего аксиомам Уайтмана, еще не решена. Изучением следствий из аксиом Уайтмана занимается аксиоматическая квантовая теория поля (см. монографии [7, 18]; аксиомы Уайтмана приводятся также в [243]). Аналитические продолжения функций Уайтмана на пространство с мнимым временем называются функциями Швингера. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная последовательность обобщенных функций служила функциями Швингера для некоторого поля Уайтмана, дана в аксиомах Остервальдера — Шредера [208—210] (см. также работы Глазера [109, 110] и монографию [243]).

Исторически первые достаточные условия на случайное поле для того, чтобы по этому полю можно было восстановить теорию Уайтмана, были получены Нельсоном [199—201, 243]. Аксиоматическое описание полей Уайтмана, получающихся таким восстановлением из полей, удовлетворяющих аксиомам Нельсона, получено Саймоном [243, 247]. Различные аксиомы, промежуточные между аксиомами Остервальдера — Шредера и Нельсона, изучались Фрелихом [94, 96, 99, 95].

Наиболее общая формулировка аксиом Остервальдера — Шредера для е. к. т. п. дается в терминах бесконечной последовательности обобщенных функций Швингера $S^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$, определенных для $x_i \neq x_j$ и имеющих умеренное поведение при приближении к точкам с совпадающими аргументами.

Пусть эти функции являются моментами для некоторого случайного поля $\varphi(x)$ и выполнено условие, обеспечивающее единственность такого поля $\varphi(x)$. Например, пусть

$$S^{(n)}(f_1, \ldots, f_n) \leqslant n! \, |f_1| \ldots |f_n|,$$

где $|\cdot|$ — некоторая норма Шварца на $\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$. Тогда соответствующая релятивистская квантовая теория поля называется положительной в смысле Симанцика — Нельсона [99].

Случайное поле называется физическим [95, 99], если выполнено следующее условие, называемое условием положительности Остервальдера — Шредера. Мы приводим его для скалярных полей. Пусть P — произвольный многочлен от $\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)$, где все $f_i(x^0, \ldots, x^{\nu-1})$ имеют носители в области $x^0>0$. Пусть P_ϑ получается из P заменой всех $f_i(x^0, \ldots, x^{\nu-1})$ на $\vartheta f_i \equiv f_i(-x^0, x^1, \ldots, x^{\nu-1})$. Тогда

$$\langle P_\vartheta P \rangle \geqslant 0.$$

Физическое гильбертово пространство строится как пополнение пространства многочленов P с $\langle P_\vartheta P \rangle > 0$. Полугруппа E_t сдвигов по оси x^0 действует в физическом гильбертовом пространстве и, если поле имеет убывание корреляций, то E_t имеет положительный самосопряженный инфинитезимальный оператор, который называется физическим гамильтонианом.

Для функций Швингера положительных по Симанцику — Нельсону (в более слабом смысле) Борхерсом получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы они являлись моментами единственной евклидово инвариантной вероятностной меры на $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^\nu)$.

В [99] изучались теории Уайтмана, положительные в смысле Симанцика — Нельсона. Показано, что для таких теорий Уайтмана существует единственное разложение на чистые фазы, сохраняющее условие положительности Симанцика — Нельсона. Даны достаточные условия спонтанного нарушения симметрии для каждой чистой фазы и условия существования невакуумных секторов суперотбора (солитонов).

Даны также достаточные условия самосопряженности и нетривиальности (в смысле классов Борхерса) полей Уайтмана, а также условия существования хронологических и запаздывающих произведений полей (см. также [202]), эффективного потенциала и т. д.

О разложимости на чистые фазы см. также [163, 165]. С этим связан следующий результат Добрушина — Минлоса [12]. Пусть задана группа G преобразований измеримого пространства с σ-конечной мерой, инвариантной относительно G. В [12] получены необходимые и достаточные условия существования фактор-меры в пространстве орбит группы G.

Правила суперотбора в общей ситуации изучаются в [26, 66, 67, 100]. Проблеме моментов и другим близким вопросам для евклидовых полей посвящены работы [42, 49, 50, 68, 206].

Для более широкого класса полей (поля Джаффе), чем поля Уайтмана, в [54] строятся евклидовы функции Грина. Аксиоматика для квантовых полей — гиперфункций строится в [196].

Связь релятивистских и марковских полей обсуждается с разных точек зрения в [159, 164].

В [194] для случайного поля определяется понятие границы Мартина — Дынкина по аналогии с теорией марковских процессов. Различные представления коммутационных соотношений исследуются в [72, 79].

С евклидовым подходом тесно связаны различные формулировки фейнмановского интегрирования по путям. Число работ в физической литературе в этой области необозримо. Мы ограничимся ссылкой на следующие работы [23, 31, 58—60, 87, 162, 186, 195].

§ 3. СВОБОДНЫЕ (ГАУССОВЫ) ПОЛЯ

Объектом е. к. т. п. являются обобщенные случайные поля. Обычные (например, гладкие или решетчатые) поля появляются в качестве предварительных аппроксимаций (урезаний).

Вещественное гауссово поле (называемое свободным) удовлетворяющее аксиомам Нельсона или Остервальдера — Шредера, по существу единственно и определяется так. Рассмотрим вещественное гильбертово пространство (возможно неполное) $\mathscr{H}$ со скалярным произведением (f, g). В пополнении $\overline{\mathscr{H}}$ выберем базис $\{e_k\}$ и зададим взаимно независимые нормированные гауссовы случайные величины $\varphi(e_k)$ на некотором (неважно каком) вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ). Продолжая отображение по линейности и пополняя, получаем систему случайных величин $\varphi(f)$ на $\overline{\mathscr{H}}$ с $\langle \varphi(f)\varphi(g)\rangle = (f, g)$. Взяв в качестве $\mathscr{H}$ пространство Шварца $\mathscr{S}$ вещественных функций на $\mathbf{R}^\nu$ со скалярным произведением

$$(f_1(x), f_2(x)) = \int \tilde{f}_1(-k)\,\tilde{f}_2(k)\frac{dk}{m_0^2+k^2},$$

получим свободное поле с массой m_0. Если $m_0^2=0$, то необходимо, чтобы $\nu\geqslant 3$. Существует канонический изоморфизм I_τ релятивистского пространства Фока на подпространство F_τ гильбертова пространства случайных величин, порожденного многочленами от случайных величин $\varphi(f(x^1, \ldots, x^{\nu-1})\,\delta(x^0-\tau))$.

Обозначим через H_0 инфинитезимальный оператор марковской полугруппы

$$U(\tau) = I_{\tau_2}^* I_{\tau_1} = e^{-H_0|\tau|}, \quad \tau=\tau_2-\tau_1.$$

Свободное поле с различных точек зрения подробно изучается в [155, 198, 243].

Локальные свойства реализаций этого поля исследуются в [51] (см. также [222], где изучен носитель меры на $\mathscr{S}'$, соответствующей свободному полю).

Векторные гауссовы поля как с положительной, так и с нулевой массой (электромагнитное поле) строятся в [108, 149, 152, 269]. Там же обсуждается влияние способа построения (калибровки) на свойства этого поля.

Некоммутативные марковские свободные случайные ферми-поля вне связи с квантовой теорией поля рассматривались давно (см., например, [150, 265], а также [234]). Интересные для квантовой теории поля ферми-поля должны быть спинорными.

Такие евклидовы поля строятся в [104, 211]. В [104] обсуждаются различные трудности, возникающие при определении взаимодействующих евклидовых ферми-полей. В [211] дается вариант формулы Фейнмана — Каца — Нельсона для ферми-полей (см. также [266]), который используется в работах по модели Y_2 (см. § 9).

Общая процедура построения свободных евклидовых полей с произвольным спином дана в [212]. Эта процедура основана на красивом методе построения всех релятивистских свободных полей как массивных, так и безмассовых, предложенных в серии работ Вейнберга [263].

Приведем процедуру введения евклидова ферми-поля, близкую к языку многих физических работ. Мы можем смотреть на гауссово случайное поле как на коммутативную алгебру многочленов от образующих $\varphi(f)$ (где f пробегает некоторое соболевское пространство $\mathscr{H}$) с заданным линейным функционалом $\langle\cdot\rangle$ со следующими свойствами: $\langle 1\rangle = 1$, $\langle\varphi(f)\rangle = 0$, $\langle\varphi(f_1)\varphi(f_2)\rangle = (f_1, f_2)$,

$$\langle\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n)\rangle = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетное},\\ \sum\limits_p \prod\limits_{k=1}^{n} \langle\varphi(f_{i_k})\varphi(f_{j_k})\rangle(-1)^{\varepsilon_p}, & n=2m, \end{cases} \tag{1}$$

где $p=\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_m\\ j_1 & \ldots & j_m\end{pmatrix}$, $i_k<j_k$, $i_1<i_2<\ldots<i_m$, $\varepsilon_p\equiv 0$.

Исходя из этой интерпретации, свободное ферми-поле можно построить так. Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра с удвоенным числом антикоммутирующих образующих 1, $\psi(f)$, $\bar{\psi}(f)$. Определим линейный функционал $\langle 1\rangle = 1$, $\langle\psi\rangle = \langle\bar{\psi}\rangle = 0$, $\langle\psi(f)\psi(g)\rangle = \langle\bar{\psi}(f)\bar{\psi}(g)\rangle = 0$, $\langle\psi(f)\bar{\psi}(g)\rangle = (f, g)_* = -\langle\bar{\psi}(g)\psi(f)\rangle$, и т. д. по формуле (1), где ε_p — четность подстановки p для $\langle\psi(f_1)\ldots\psi(f_n)\bar{\psi}(g_1)\ldots\bar{\psi}(g_n)\rangle$, $(\cdot,\cdot)_*$ — некоторая билинейная форма в $\mathscr{H}$. $\mathfrak{G}$ можно пополнять по подходящей норме и рассматривать в ней урезанное евклидово действие $\Lambda_{g,\varkappa}$ и $\exp(-\Lambda_{g,\varkappa})$ аналогично вероятностному случаю (см. § 4). Здесь мы не будем на этом останавливаться. Укажем лишь, что для свободного поля Дирака при $\nu=2$ (в представлении Глимма) $\mathscr{H}=\mathscr{H}_s\otimes\mathbf{C}^2$ и $\left(s=-\frac{1}{2}\right)$

$$\langle\bar{\psi}(f)\psi(g)\rangle = \int\frac{\bar{\tilde{f}}(p)\,(q+m)\,g(p)\,dp}{m_0^2+p^2},$$

где $q=p_0\gamma_0+p_1\gamma_1$ с матрицами γ_μ второго порядка, удовлетворяющими соотношениям $\gamma_\mu^*=-\gamma_\mu$, $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+=-2\delta_{\mu\nu}$, $\mu, \nu=0, 1$.

§ 4. $P(\varphi)_2$ В КОНЕЧНОМ ОБЪЕМЕ

Основная идея построения негауссовых евклидовых полей заимствована из метода построения гиббсовских случайных полей в статистической физике. Рассмотрим новую меру на (Ω, Σ)

$$d\mu_{g,\varkappa} = Z^{-1} \exp(-\Lambda_{g,\varkappa})\, d\mu,$$

где $Z = Z_{g,\varkappa}$ — нормирующий множитель (статистическая сумма),

$$\Lambda_{g,\varkappa} = \int g(x)\, \mathscr{L}_\varkappa(x)\, dx$$

называется (евклидовым) действием, а $\mathscr{L}_\varkappa(x)$ — лагранжианом, который является обычно многочленом от $P(\varphi_\varkappa(x))$ от урезанного поля $\varphi_\varkappa(x) = \varphi(f_x)$ в точке x, где

$$f_x \equiv f_x(y) = \int\limits_{|k|<\varkappa} e^{ik(x-y)} dk.$$

Многочлен P всегда предполагается ограниченным снизу, $\varkappa$, $g(x)$ — параметры ультрафиолетового и объемного урезания соответственно, $g(x) \in C_0^\infty$. Рассматривается (слабая) сходимость функций Швингера (моментов)

$$S_{g,\varkappa}(x_1, \ldots, x_k) = \langle \varphi_\varkappa(x_1) \ldots \varphi_\varkappa(x_k) \rangle_{g,\varkappa}$$

при $\varkappa \to \infty$, $g \to 1$, где $\langle \cdot \rangle_{g,\varkappa}$ — усреднение по мере $d\mu_{g,\varkappa}$, или сходимость производящего функционала $I(f) = \langle e^{i\varphi(f)} \rangle_{g,\varkappa}$ для этих функций.

Обычно сначала исследуется существование предела при $\varkappa \to \infty$ и постоянном $g(x)$ (т. е. строится поле в конечном объеме). Основная необходимая оценка здесь — это равномерная по $\varkappa$ оценка

$$Z_{g,\varkappa} \equiv \langle e^{-\Lambda_{g,\varkappa}} \rangle_0 \leqslant e^{A|V|}, \tag{1}$$

где A не зависит от $\varkappa$ и g, $|V|$ — объем носителя g.

Для существования предела (для $m_0 > 0$, $P(\varphi)_\nu$ означает модель с лагранжианом $P(\varphi)$ в размерности ν) необходимо вместо многочлена P_n взять его виковскую перенормировку $:P: \equiv :P:_{d\mu}$, где $:\varphi: \equiv :\varphi^n:_{d\mu}$ для любого $n > 0$ определяются из равенства формальных степенных рядов по α

$$:\exp \alpha\varphi(f):_{d\mu} = \frac{\exp \alpha\varphi(f)}{\langle \exp \alpha\varphi(f) \rangle_0}. \tag{2}$$

Первые результаты относительно построения поля в конечном объеме были получены в рамках гамильтонова подхода, на котором мы сейчас остановимся. Заметим сначала, что при

$\nu = 2$ существует случайная величина

$$\Lambda_g = \lim_{\varkappa \to \infty} \Lambda_{g,\varkappa} \equiv :P:(g).$$

Положим $g(x^0, x^1) = \chi_{[\tau_1, \tau_2]}(x^0)\, \bar{g}(x^1)$ и определим

$$Q(\tau_2 - \tau_1) = I^*_{\tau_2} \exp[-\Lambda_g] I_{\tau_1}, \tag{3}$$

где Λ_g — оператор умножения на Λ_g в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$. Оказывается, $Q(\tau)$ образуют полугруппу и $Q(\tau) = e^{-H_g \tau}$, где

$$H_g = \int \bar{g}(x^1) : P(\varphi(x^1)) : dx^1 + H_0.$$

Первое доказательство ограниченности снизу гамильтониана H_g дано Нельсоном для $P = \varphi^4$. Глимм [111] дал доказательство для произвольного P и другого урезания. Глимм с Джаффе [119] получили линейную оценку снизу

$$H_g \geqslant l \cdot \mathrm{const}, \tag{4}$$

где l — диаметр носителя $\bar{g}(x^1)$. Оценка (4) эквивалентна оценке (1). Самосопряженность H_g доказана Глиммом и Джаффе [111] для φ^4 и Розеном для произвольного $P(\varphi)$. Было дано много упрощений и других доказательств этих результатов. Библиографию этих работ см. в [25, 243].

Однако только одно доказательство было перенесено на модель φ_3^4. Гамильтонов вариант этого доказательства см. в [125]. О построении $P(\varphi)_2$ в конечном объеме (т. е. предел при $\varkappa \to \infty$ и фиксированном $g(x)$) см. также в [243] и [198]. Функции Швингера могут быть выражены с помощью гамильтониана по формуле Фейнмана — Каца — Нельсона, легко получаемой из равенства (3).

§ 5. $P(\varphi)_2$ С МАЛОЙ КОНСТАНТОЙ СВЯЗИ

После построения поля в конечном объеме необходимо сделать предельный переход $g \to 1$. Для модели $\lambda P(\varphi)_2$ в предположении малости λ / m_0^2 эта процедура осуществляется с помощью группового разложения Глимма — Джаффе — Спенсера. Существует вариант этого разложения, использующий аналог уравнений Кирквуда — Зальцбурга [142], а в работе [141] проводится так называемое индуктивное разложение. С их помощью доказывается существование предельных функций Швингера $S^{(n)}$, которые выражаются с помощью метода последовательных приближений для уравнений Кирквуда — Зальцбурга. При том они удовлетворяют всем аксиомам Остервальдера — Шредера и являются аналитическими по λ при $\mathrm{Re}\lambda > 0$, $|\lambda| < c$ при фиксированном m_0 (см. [141, 142]).

Димок [62] доказал, что $S^{(n)}$ являются бесконечно-дифференцируемыми по λ справа в точке $\lambda=0$ и что фейнмановский ряд теории возмущений для них является асимптотическим по λ.

Свойства аналитичности $S^{(n)}$ по λ тесно связаны со свойствами убывания корреляций. В [141, 142] доказывается свойство слабого убывания корреляций

$$|\langle \varphi(f)\varphi(g_a)\rangle - \langle \varphi(f)\rangle \langle \varphi(g)\rangle| \leqslant C_{f,g}e^{-m|a|} \tag{1}$$

для некоторых констант $C_{f,g}$ и $m>0$, $g_a(x)=g(x-a)$.

Обозначим через $M=\sqrt{H^2-P^2}$ массовый оператор, где H — предельный гамильтониан, а P — инфинитезимальный оператор сдвига вдоль оси x^1. Тогда из (1) следует, что он имеет простой собственный вектор Ω с $M\Omega=0$ (вакуумный вектор), простое собственное значение $m(\lambda)$ (физическая масса) и не имеет спектра на интервале $(0, m(\lambda))$.

В [73] показано, что в действительности имеет место так называемое сильное убывание корреляций для семиинвариантов $G^{(n)}$, введенное в работах Дюно — Сuиллара — Яголницера по статистической физике. Это делается с помощью усовершенствования группового разложения Глимма — Джаффе — Спенсера. Отсюда для $P=\varphi^4$ выводится суммируемость по Борелю ряда теории возмущений. Ряды теории возмущений рассматриваются также в работах [5, 146, 193].

Спенсер [257] построил групповое разложение для случая большого внешнего поля. Пусть m_0 и P фиксированы, n нечетно и $n<\deg P$. Существует $D>0$ такое, что при $\mu>D$ функции Швингера для модели $(P(\varphi)+\mu\varphi)_2$ с периодическими граничными условиями сходятся к предельным функциям Швингера, удовлетворяющим всем аксиомам Остервальдера — Шредера и аналитически зависящим от параметров. Существует $m(\lambda)>0$ такое, что H не имеет спектра в $(0, m(\lambda))$ (см. [257]).

Димок в [61] изучает неевклидовы функции Грина для теории Уайтмана $\lambda P(\varphi)_2$ с малым λ. Доказывается, что они бесконечно дифференцируемы в некотором интервале $(0, \lambda_0)$. Получены явные выражения для производных.

Во всех вышеприведенных работах основную роль играли известные в теории вероятностей объекты: моменты и семиинварианты. Для дальнейшего изучения спектра гамильтониана H необходимы ядра Бете — Солпитера. Первые результаты относительно спектра H были получены Глиммом — Джаффе — Спенсером в [141]. Пусть Ω, $\mathcal{H}_\Phi$ — вакуум и гильбертово пространство теории Уайтмана, E_γ — спектральная проекция гамильтониана в интервале $[0,\gamma]$. Тогда для всех n, $\varepsilon>0$ существует $C_{n,\varepsilon}$ такая, что при $\lambda<C_{n,\varepsilon}$ и

$\gamma\leqslant(n+1)m_0-\varepsilon$, $E_\gamma\mathcal{H}_\Phi$ порождается векторами $E_\gamma e^{itH}\prod_{i=1}^{k}\varphi_0(f_1)\ldots$ $\ldots\varphi_0(f_k)\Omega$, $k=0,\ldots,n$, где $f_i\in\mathcal{S}(\mathrm{R})$, $\varphi_0(f)=\varphi(f\delta(x^0))$.

К сожалению, в доказательстве $C_{n,\varepsilon}\to 0$ при $n\to\infty$ и это не позволяет изучить весь спектр H. Ими доказано, что для четных многочленов массовый оператор M имеет только одно собственное значение $m(\lambda)$ на интервале $(0, 2m_0-\varepsilon)$ в пространстве нечетных векторов (т. е. меняющих знак при отображении $\varphi\to-\varphi$). Отсюда следует существование изометрической S-матрицы.

В последнее время доказано, что S-матрица отлична от единичной и ряд теории возмущений для нее является асимптотическим по λ (см. [71]).

Для модели φ_2^4 с помощью корреляционных неравенств доказано, что в интервале $(0, 2m(\lambda))$ нет спектра H (т. е. нет связанных состояний с энергией, меньшей $2m(\lambda)$), см. также [86, 258]. Но связанные состояния существуют в модели $(\varphi^6-\varphi^4)_2$ (см. [142]).

Структура спектра H зависит от свойств сильного экспоненциального убывания корреляций для ядер Бете — Солпитера (что эквивалентно аналитичности их преобразований Фурье). Необходимые оценки такого рода были получены Спенсером [259] также с помощью соответствующего расширения группового разложения. С помощью этих оценок в [261] (см. также [259]) показывается, что: 1) спектр M дискретен на интервале $(m, 2m)$; 2) на подпространстве четных векторов массовый оператор M не имеет сингулярного непрерывного спектра на интервале $(m, 4m-\varepsilon)$. На этом же подпространстве S-матрица унитарна.

Приведем другие результаты.

Ньюман [203] показал, что при достаточно малых λ плотности $Z^{-1}\exp(-\lambda\Lambda_g)$ сходятся в L_1 при $g\to 1$. Отсюда следует, что предельная мера является локально абсолютно непрерывной относительно $d\mu$.

Фрелих в [94] доказывает сходимость производящих функционалов при $g\to 1$ к функционалам, порождающим по известной теореме Минлоса (см., например, [10]) евклидово инвариантную, $\mathcal{S}$-квазиинвариантную меру на $\mathcal{S}'$. Доказывается существование функции Швингера для совпадающих аргументов. Проверяются все аксиомы Нельсона.

В [96] доказывается, что для $\lambda_1\neq\lambda_2$ в теориях $\lambda_1 P(\varphi)_2$ и $\lambda_2 P(\varphi)_2$ соответствующие им меры взаимно сингулярны. Отсюда следует теорема Хаага в аксиоматической квантовой теории поля (см. также [229]).

Для $\lambda P(\varphi)_2$ с малой константой связи имеют место, в частности, те результаты, которые приводятся в следующем параграфе для произвольной константы связи.

В [130] определяются так называемые вершинные функции (одночастично неприводимые и ампутированные) $\Gamma^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$. В теории возмущений связные функции Грина $G^{(n)}$ (семиинварианты) разлагаются в бесконечный ряд по связным диаграммам. Одночастично неприводимой называется диаграмма, которая не может быть откидыванием одного ребра разбита на две несвязные части, в каждой из которых есть хотя бы одно ребро. Если в бесконечном ряду для $G^{(n)}$ оставить только такие диаграммы, то получится вершинная функция $\Gamma^{(n)}$. На основании этого определения $G^{(n)}$ может быть выражена в виде многочлена от вершинных функций и наоборот. Это и можно взять за определение вне рамок теории возмущений.

В [130] доказывается существование вершинных функций и производящего функционала для них. Исследуются свойства аналитичности производящих функционалов для $\Gamma^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$.

В [132] в предположении малости константы связи доказывается, что вершинные функции удовлетворяют уравнениям Кэллена — Симанцика.

Нормальное произведение для негауссовых полей определяется такой же формулой как формула (2) § 4. В [230] приводятся различные полезные формулы для таких нормальных произведений

$$:\varphi(f_1)\ldots\varphi(f_n):_\rho,$$

где ρ — мера соответствующего поля. Дается формула связи между нормальными произведениями по разным мерам и т. д. Доказывается, что виковские степени относительно меры, соответствующей $\lambda P(\varphi)_2$ для малых λ, существуют.

Функции Грина — средние по мере $d\mu_\lambda$, соответствующей $\lambda P(\varphi)_2$, существуют как для виковских степеней относительно гауссовой меры, так и относительно $d\mu_\lambda$. Эти функции Грина связаны линейными соотношениями. Функции Грина удовлетворяют также аксиомам Остервальдера — Шредера и определяют, следовательно, теорию Уайтмана. С их помощью доказывается справедливость уравнений поля для модели $\lambda P(\varphi)_2$ в релятивистской области.

Поле $:\varphi^2:$ в модели $P(\varphi)_2$ изучается в [171].

§ 6. $P(\varphi)_2$ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНСТАНТОЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

При переходе к термодинамическому пределу (т. е. $g \to 1$) первая идея заключается в том, чтобы получить оценки сверху на функции Швингера или на производящий функционал и воспользоваться затем слабой компактностью для построения предельной точки.

Эта идея в рамках гамильтонова подхода впервые была реализована Глиммом — Джаффе в [120] с помощью индуктивного разложения. Оценки такого типа называются φ^j-оценками. История упрощения доказательства Глимма — Джаффе и дальнейшие результаты имеются в книге [243] (см. также [94—96, 99, 136, 137, 256, 246]).

Вторая идея заключается в выборе аппроксимации обобщенного случайного поля решетчатыми полями и выборе подходящих граничных условий так, чтобы с помощью корреляционных неравенств доказать сходимость функций Швингера при термодинамическом предельном переходе.

Вопрос о граничных условиях в е. к. т. п. сложнее, чем соответствующий вопрос для решетчатых моделей статистической физики (см. трактат [154] по граничным условиям, а также [153, 243]).

Многочисленные результаты, связанные с реализацией второй идеи имеются в книге Саймона [243] и в статье [155] (см. также работы [55, 94—96, 147, 148, 151, 156, 157, 177, 240, 242, 244, 246, 249, 250, 253]. Многие из результатов этих работ вошли в [243]). Поэтому здесь мы ограничимся изложением в основном более поздних результатов [99, 136, 252].

Существуют два типа решетчатой аппроксимации моделей $P(\varphi)_2$: с помощью обобщенной модели Изинга и классической модели Изинга. Так называется конечный набор случайных величин (спинов) x_i с совместным распределением

$$\exp\Big(\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j\Big)\, d\mu_1(x_1)\ldots d\mu_n(x_n),$$

где μ_i — меры на $\mathbf{R}$. Если x_i могут равняться только ± 1, то это называется классической моделью Изинга, в противном случае, когда x_i принимают любые вещественные значения, обобщенной (или решетчатой моделью $P(\varphi)_2$, если

$$d\mu(x) = e^{-P(x)-m_0^2x^2}dx).$$

Если $a_{ij} \geqslant 0$, то модель называется ферромагнитной.

Всякая модель $P(\varphi)_2$ является слабым пределом обобщенной ферромагнитной модели Изинга, а всякая модель с $P(\varphi) = a\varphi^4 + b\varphi^2 - \mu\varphi$ — пределом ферромагнитной классической модели Изинга.

Были доказаны новые корреляционные неравенства: Лебовица и Ньюмана (см. [204, 75, 205]). Пусть u_n — произвольный n-й семиинвариант в классической модели Изинга. Неравенства GKS давали $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$, неравенства GHS давали $u_3 < 0$. Из неравенств Лебовица следует $u_4 \leqslant 0$. Картье, Перкус и Сильвестр доказали, что $u_6 \geqslant 0$.

Кроме тех применений корреляционных неравенств, которые имеются в книге [243], укажем следующие.

С помощью неравенств Лебовица Глимм — Джаффе [131] нашли оценку сверху для $S^{(n)}$ с помощью $S^{(2)}$. Из неравенств Ньюмана следуют более сильные оценки такого рода.

В [158] доказано, что для любой модели $(a\varphi^4+b\varphi^2-\mu\varphi)_2$ при $\mu\neq0$ существует массовая щель (т. е. 0 есть простое изолированное собственное значение гамильтониана).

Спенсером доказано [258], что для φ_2^4 первое четное связанное состояние имеет энергию, которая, по крайней мере, в два раза превосходит энергию первого связанного состояния.

В [226] рассматривается марковский процесс $q(t)$, соответствующий $P(\varphi)_1$ е.к.т.п. (в одномерном случае). Доказывается, что с вероятностью 1

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_t^{t+1} q(s)\,ds/(\ln t)^{\frac{n}{4}} = a_n^{-\frac{n}{4}},$$

где a_n — старший коэффициент у $P(\varphi)$. Аналогичная задача рассматривается для моделей $P(\varphi)_2$.

В [136] рассматриваются некритические модели $P(\varphi)_2$ (т. е. с отличной от нуля физической массой). Доказаны новые φ^j- и π-оценки. Для каждой чистой фазы устанавливается формула интегрирования по частям для функций Швингера (относительно формул интегрирования по частям см. также [135] и [65]).

Отсюда получается утверждение, что $G^{(n)}$ при $n>2$ ограничены и непрерывны для каждой чистой фазы, а для $n=2$

$$G^{(2)}(x-y)-C_{m_0}(x-y)$$

ограничены и непрерывны (иначе говоря, на близких расстояниях некритические $P(\varphi)_2$ имеют каноническое поведение, т. е. такое же, как свободное поле).

В [136] доказывается также, что $G^{(n)}(x_1,\dots,x_n)$ есть ядро ограниченного оператора $G^{(n)}$.

$$G^{(n)}: H_{-1}^{\otimes j}\to H_1^{\otimes(n-j)},\quad 0<j<n,$$

где H_{-1} и H_1 — соболевские пространства. Ограничение $G^{(n)}$ на подпространство с фиксированным полным моментом является оператором Гильберта—Шмидта.

Отсюда следует существование вершинных функций $\Gamma^{(n)}(x_1,\dots,x_n)$. Показывается [136], что $\Gamma^{(2)}(x)$ имеет экспоненциальное убывание, равное КДД-радиусу $\overline{m}$, $m<\overline{m}<M$, где m — физическая масса, а (m, M) — верхняя массовая щель. Строятся двух и трехчастичные ядра Бете—Солпитера.

В [99] дана общая схема конструктивного анализа моделей е. к. т. п. Пусть $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^\nu)$, $h\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^{\nu-1})$, χ_T — характеристическая функция интервала $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$. Приведем основной результат в этом направлении.

Теорема В. [99]. Если

$$C_1)\ \log\langle e^{\varphi(h\chi_T)}\rangle \text{ при } T\to\infty,$$

и

$$C_2)\ \langle e^{i\varphi(f)}\,[e^{-i\varphi(h\chi_T)}-1]\rangle \text{ при } T\to0$$

растут линейно по T, то отсюда следует самосопряженность операторов φ релятивистского квантового поля и существование хронологических и запаздывающих произведений. Условия C_1 и C_2 устойчивы относительно разложения теории на чистые фазы.

При доказательстве этой теоремы из условий C_1 и C_2 выводятся φ-оценки. При этом не предполагается существования полей в фиксированный момент времени. Из этого результата выводятся различные следствия для моделей φ_ν^4.

§ 7. ФЕЙНМАНОВСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ФОРМАЛЬНЫЕ ПЕРЕНОРМИРОВКИ В ЕВКЛИДОВОЙ ОБЛАСТИ

Связные функции Швингера можно разложить в формальный ряд

$$C_{g,\varkappa}^{(n)}(f_1,\dots,f_n)=\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m n!}{(m+n)!}\mathfrak{L}_m, \qquad (1)$$

где

$$\mathfrak{L}_m=\langle \varphi_\varkappa(f_1),\dots,\varphi_\varkappa(f_n),\Lambda_{g,\varkappa},\dots,\Lambda_{g,\varkappa}\rangle_0^{tr}$$

семиинвариант порядка $m+n$ случайных величин, указанных в скобках. Можно доказать, что для модели φ_ν^4 этот ряд расходится.

Целью формальной теории возмущений является выбрать лагранжиан P так, чтобы для всех $f_1,\dots,f_n$ существовал предел $\lim\limits_{\substack{\varkappa\to\infty\\ g\to1}}\mathfrak{L}_m$. При этом коэффициенты могут зависеть от $\varkappa$ и g и можно надеяться, что такая теория существует не только на уровне формальной теории возмущений.

В разложении $\mathfrak{L}_m$ по формуле для семиинвариантов степеней гауссовых величин каждый член может быть изображен связной диаграммой и является фейнмановским интегралом в евклидовой области. Сходимость этих интегралов устанавливается с помощью теоремы счета степеней. Методом счета степеней пользовались давно, но впервые ее полное доказательство дано в известной работе Вейнберга [262]. Однако это доказательство было довольно сложным. Упрощенное доказательство дано в [160]. Если в [262] применяется индукция по последовательному интегрированию по одному переменному, то в [160] применен в некотором смысле двойственный прием. Другой простой метод предложен в [20]. Этот метод позволяет одновременно получить простую рекуррентную формулу для показателей ρ и n в асимптотике $C\varkappa^{\rho} \ln^n \varkappa$ фейнмановского интеграла по $\varkappa$. Таким же способом может быть получена формула для логарифмического показателя в асимптотике по внешним импульсам.

Методы Вейнберга развивались в работах [24, 92]. В [20] выделен класс функций, для которых вместо оценки сверху, полученной Вейнбергом (и достаточной для доказательства теоремы счета степеней), может быть получена точная асимптотика по внешним импульсам.

В перечисленных выше работах применялись методы теории функций вещественной переменной. Если фейнмановский интеграл записывается в α-представлении [14], то применяется выход в комплексную область. Этим способом также можно получить асимптотику интеграла по внешним импульсам [39] (см. также [264]).

Если масса свободного поля равна нулю, то фейнмановские интегралы могут расходиться также в области малых импульсов. Теорема счета степеней в инфракрасной области, двойственная в некотором смысле к теореме счета степеней в ультрафиолетовой области, доказана в [180].

Вычитание бесконечностей из фейнмановских интегралов применялось в физических работах давно. Общая комбинаторная процедура такого рода (R-операция Боголюбова — Парасюка) существует для произвольного лагранжиана [8, 25, 270]. Основная теорема этой теории заключается в том, что после применения R-операции интегралы сходятся. Имеются различные доказательства этой теоремы в α-представлении [1, 3, 4, 25, 173] (см. также [140]) или на языке импульсных обрезаний [270]. Последняя работа особенно легко переводится на евклидов язык, применяемый в этом обзоре.

Обобщение R-операции на случай дробных степеней пропагатора содержится в [145]. R-операция эквивалентна введению контрчленов в лагранжиан (см., например, [25]). На R-операции основана теория умножения случайных величин $\varphi(x)$. Мы приведем здесь лишь несколько работ на эту тему [2, 267, 271, 272]. Последние две особенно близки к вероятностному языку.

В настоящее время усилилась деятельность по инфракрасным формальным перенормировкам. На этот случай полностью перенесена общая теория R-операции и доказана основная теорема [178, 179, 181, 182]. Об инфракрасных расходимостях см. также [221].

Существуют другие методы перенормировки (см., например, [25, 34, 254, 255]).

Физическая литература по формальной теории перенормировок трудно обозрима. Мы с сожалением опускаем теорию перенормировок для калибровочных полей (см. например, [218, 181]).

Теория перенормировок для неполиномиальных лагранжианов недостаточно еще понята математиками (см., например, [33, 35, 76, 93, 219]).

В [48] теория возмущений излагается без помощи диаграммной техники посредством понятий, хорошо известных в комбинаторном анализе: перманентов, пфаффианов, гессианов и т. д.

Комбинаторная задача раскраски графов связывается с фейнмановскими диаграммами в [197].

§ 8. МОДЕЛЬ φ_3^4

Эта модель определяется следующим евклидовым действием

$$\Lambda_{g,\varkappa}=\lambda\int:\varphi_{\varkappa}^4(x):g(x)\,dx+\delta m\int:\varphi_{\varkappa}^2(x):g^2(x)\,dx+C,$$

где константы δm и C зависят от $\varkappa$ и g [109]. Эта модель является сверхперенормируемой, в которой расходятся (примитивно) одна массовая диаграмма и две вакуумных.

Первой работой по этой трехмерной модели была работа Глимма [114], выполненная в рамках чисто гамильтонова подхода. В ней был построен предел гамильтонианов $H_{g,\varkappa}$ при $\varkappa\to\infty$ в подходящем гильбертовом пространстве F. Возникающие здесь нефоковские представления соотношений коммутации изучались Хеппом [25], Экманом, Остервальдером и Фабри [70, 74, 77, 78] (см. также [176]).

Следующая работа Глимма и Джаффе [128] была уже выполнена в рамках евклидова подхода. В ней получена оценка статистической суммы

$$\langle -e^{-\Lambda_{\varkappa,g}}\rangle_0\leqslant e^{A|V|}, \tag{1}$$

равномерная по $\varkappa$ (причем предел левой части при $\varkappa\to\infty$ существует), $|V|$ — объем носителя g, A не зависит от $\varkappa$ и g. Это эквивалентно линейной оценке снизу перенормированного гамильтониана $H_{g,\varkappa}$. В (1) $\langle\cdot\rangle_0$ означает усреднение по свободному полю.

Эта чрезвычайно сложная работа основана на так называемом индуктивном разложении левой части (1), которое используется и во многих дальнейших работах.

Фельдманом [85] было доказано существование предела ненормализованных функций Швингера при $\varkappa\to\infty$. Для достаточно малых λ, зависящих от g, им доказано также существование обычных функций Швингера, которые являются моментами некоторой вероятностной меры. В диссертации Фельдмана [84] даны также некоторые методические объяснения ряда вопросов, связанных с индуктивным разложением Глимма — Джаффе.

Сходимость решетчатой аппроксимации для модели $(\lambda\varphi^4+\mu\varphi)_3$ в конечном объеме была доказана Паком [216]. Им также получены другие результаты для этой модели в конечном объеме [215, 217].

Фельдманом и Остервальдером [89] для достаточно малых λ/m_0 совершен предельный переход к бесконечному объему. Именно, они доказали сходимость функций Швингера при $\varkappa\to\infty$ и $g\to 1$, а также следующие утверждения: 1) предельные функции Швингера удовлетворяют аксиомам Остервальдера—Шредера; 2) предельная теория имеет массовую щель $m>0$. На интервале $(0, 2m)$ нет спектра на пространстве четных векторов; 3) предельные функции Швингера бесконечно дифференцируемы по λ и их разложения по теории возмущений являются асимптотическими рядами; 4) функции Швингера являются моментами единственной вероятностной меры μ_λ на пространстве $\mathscr{S}'$, причем μ_{λ_1} и μ_{λ_2} взаимно сингулярны при $\lambda_1\neq\lambda_2$.

Метод работы [89] — синтез индуктивного разложения Глимма — Джаффе [109] и группового разложения Глимма — Джаффе — Спенсера [142]. Отметим, что здесь впервые в конструктивной теории используются так называемые t- (или α-) ультрафиолетовые урезания. Аналогичные результаты получены в [185]. Те же авторы [88, 90] получили аналогичные результаты для модели $(\lambda\varphi^4+\mu\varphi)_3$, где внешнее поле $\mu(\lambda)$ достаточно велико, а λ произвольно. Вместо группового разложения Глимма — Джаффе — Спенсера здесь используется разложение Спенсера, введенное им для соответствующей модели $\varphi_2{}^4$ с большим внешним полем μ [257]. Здесь используются периодические граничные условия.

Для граничных условий Дирихле существование предельных функций Швингера доказано для произвольных λ и μ. При этом существенно используются корреляционные неравенства. Монотонность функций Швингера $S_{V,D}(x_1,\ldots,x_n)$ при возрастании объема устанавливается также, как в аргументе Нельсона, для φ_2^4. Кроме того, используются неравенства:

1) $S_{V,D}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant S_{V,P}(x_1,\ldots,x_n)$,

2) $S_{V,P,\mu}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant S_{V,P,\mu'}(x_1,\ldots,x_n)$,

$0\leqslant\mu\leqslant\mu'$, где индексы P и D означают соответственно периодические граничные условия и условия Дирихле. Но для достаточно большого μ', как указано выше, получена оценка

$$|S_{V,D}(f_1,\ldots,f_n)|\leqslant\sqrt{n!}\,|f_1|\ldots|f_n|$$

для функций Швингера с некоторой нормой Шварца $|\cdot|$.

Зайлер и Саймон построили [239] гамильтониан для урезанной по объему модели φ_3^4. При этом они использовали специальный выбор контрчленов и метод реконструкции Остервальдера—Шредера. Для этого гамильтониана доказана

теорема о симметрии Нельсона. Доказано также, что для случая, когда $g(x)$ есть характеристическая функция куба $[-l_1, l_1]\times[-l_2, l_2]\times[0, t]$, то статистическая сумма $Z_{l_1l_2t}$ в этом объеме обладает следующим свойством: существует

$$\lim_{l_1l_2t\to\infty}\frac{\ln Z_{l_1l_2t}}{l_1l_2t}=\lim_{l_1,l_2\to\infty}\frac{-E_{l_1,l_2}}{l_1l_2},$$

где E_{l_1,l_2} — наименьшее собственное значение гамильтониана в этом конечном объеме. Доказывается выпуклость и другие важные свойства $-E_{l_1,l_2}$. Получены φ-оценки для φ_3^4 типа Глимма—Джаффе и Фрелиха для $P(\varphi)_2$.

§ 9. МОДЕЛЬ Y_2 (Yukawa$_2$)

Евклидово действие для этой модели имеет вид

$$\Lambda_{t,l,\varkappa}=\lambda:\Lambda^{I}_{t,l,\varkappa}:+\lambda^2\delta m^2_\varkappa\int_{-\frac{t}{2}}^{t/2}\int_{-l/2}^{l/2}d^2x:\varphi^2_\varkappa(x):+\frac{\lambda^2}{2}\langle:V^{I}_{t,l,\varkappa}:^2\rangle, \quad (1)$$

где

$$\delta m^2_\varkappa=\frac{1}{2\pi^2}\int_{|k|<\varkappa}\frac{d^2k}{(1+k^2)},$$

$$\Lambda^{I}_{t,l,\varkappa}=\int_{-t/2}^{t/2}\int_{-l/2}^{l/2}d^2x\overline{\psi}_\varkappa(x)\,\psi_\varkappa(x)\,\varphi_\varkappa(x).$$

Перенормировочные константы в этой модели логарифмически расходятся.

Исследование этой модели началось с работ Глимма [112, 113]. Его гамильтонов подход развивался затем в ряде работ, из которых мы укажем лишь некоторые [63, 64, 81, 115, 191, 231, 233, 187] (остальную библиографию см. в [25]).

Структура токов в этой модели изучается в [64, 168]. В работе [233] проверены аксиомы Хаага — Кастлера, за исключением Лоренц-инвариантности. Последняя аксиома доказана в работе [191], что и завершило проверку этих аксиом.

Сходимость ряда теории возмущений для малых констант взаимодействия для урезанных теорий исследуется в [6, 245]. Это отличает данную теорию от бозонных взаимодействий, где ряд теории возмущений расходится.

Полуевклидов подход к модели Юкавы развивается в работах [44—47]. В [46] разбирается также обобщенная модель Юкавы (GY_2) с лагранжианом взаимодействия

$$(\pm\overline{\psi}\psi\varphi^N+\varphi^{2M}),\quad M>N>1.$$

Там получена линейная по объему оценка снизу гамильтониана в этой модели, равномерная по ультрафиолетовому урезанию.

Евклидовы методы для этой модели основываются на идее исключения (выинтегрирования) фермионов. Сначала вводится свободное фермионное евклидово поле, как в работе [211]. В этой же работе получена формула Фейнмана — Каца — Нельсона для взаимодействующего поля с ультрафиолетовым и объемным урезаниями.

Пользуясь тем, что евклидово действие является квадратичным по фермионным полям, можно избавиться от этих полей, считая бозонное поле $\varphi(x)$ случайным внешним полем. Эта процедура приводит к формуле Мэттьюза — Салама для евклидовых функций Грина. В этой формуле они выражаются теперь только через усреднение по бозонным полям и можно применять обычную вероятностную технику.

Впервые такая процедура была использована в [236]. В выражении для функций Швингера фигурируют детерминанты случайных интегральных операторов. Для снятия ультрафиолетового урезания надо несколько изменить контрчлены. Доказательство сходимости перенормированной формулы Мэттьюза — Салама при снятии ультрафиолетового обрезания дано в [236].

Там же показано, что получающиеся детерминанты Фредгольма принадлежат пространству L_p на вероятностном пространстве (λ, Σ, μ) для бозонного поля, а также получены оценки для функций Швингера

$$|S(f_1, \ldots, f_n;\ g_1, \ldots, g_m;\ h_1, \ldots, h_m)| \equiv$$

$$\equiv \left| < \prod_{i=1}^{n} \varphi(f_i) \prod_{j=1}^{m} \overline{\psi}(g_j) \prod_{k=1}^{m} \psi(h_k) e^{-\Lambda} > \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 G_2^{n+2m} \sqrt{n!} \prod_{i=1}^{n} \| f_i \|_{-1} \prod_{j=1}^{m} \| g_j \|_{-\frac{1}{2}} \| h_j \|_{-\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

с константами C_1, C_2, не зависящими от ультрафиолетового обрезания. Индексы у норм указывают, в каком соболевском пространстве $\mathscr{H}_{-1}$ или $\mathscr{H}_{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{C}^2$ они берутся.

В [237] доказаны оценки сверху статистической суммы Z_V и ненормализованных функций Швингера $Z_V S^{(n)}$ в конечном объеме V:

$$Z_V \leqslant e^{a|V|}, \quad |S^{(n)} Z_V| \leqslant e^{a|V|},$$

где a не зависит от V. Заодно получаются линейные оценки снизу для гамильтониана в конечном объеме. В гамильтоновом подходе эти оценки были доказаны Шредером [233], а в полуевклидовом подходе в [46].

Аналогичный результат также в формализме Мэттьюза-Салама получен в [189], но с помощью других методов оценки. В [189] доказана оценка снизу $Z_V \geqslant C^{|V|}$, где $C>0$. Заметим,

что все эти результаты обобщаются на псевдоскалярную модель Юкавы.

В [188] доказано, что формулы (2) имеют место также в присутствии произвольной конечной перенормировки массы бозонного поля. Там же доказана сходимость функций Швингера при снятии ультрафиолетового урезания в этом случае.

Аналогичный результат получен в [238].

Пусть H_l — перенормированный гамильтониан в объеме $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$, E_l — нижняя граница его спектра. В [190] доказывается сходимость $\alpha_l = -\frac{H_l}{l}$ к конечному пределу α_∞ при $l \to \infty$. или сходимость давления

$$\frac{\ln \langle \exp(-\lambda_{t,l}) \rangle}{tl} \quad \text{при} \quad tl \to \infty$$

к α_∞. Получены φ-оценки для гамильтониана. Приведем их евклидов вариант: пусть $S_l(e^{\varphi(f)})$ — производящий функционал для бозонных функций Швингера. Тогда существует константа $c(f)$ такая, что

$$S_l(e^{\varphi(f)}) \leqslant e^{c(f)}$$

равномерно по l. (для фермионных полей такая оценка тривиальна, так как $\psi(f)$ — ограниченный оператор).

Приведем основной технический результат, используемый в этой работе (наложение вакуумов): пусть P_l — проектор на основные состояния H_l, Ω — фоковский вакуум. Тогда $P_l\Omega \neq 0$ для всех конечных l.

Аналогичные результаты получены в [239]. При этом здесь не используются поля Остервальдера-Шредера, а перенормированный гамильтониан в формуле Мэттьюза-Салама строится на основе разложений Филлипса (они заменяют формулу Троттера в выводе формулы Фейнмана — Каца — Нельсона).

В [56] для малых $|\lambda|$ и достаточно больших бозонной m_b и фермионной m_f масс проводится конструкция, аналогичная групповому разложению Глимма — Джаффе — Спенсера для моделей $P(\varphi)_2$. С ее помощью доказывается, что существует предел функций Швингера при снятии объемного урезания. Приведем основной результат: для достаточно малых $\left|\frac{\lambda}{m_b}\right|$, $\left|\frac{\lambda}{m_f}\right|$ предельные функции Швингера удовлетворяют всем аксиомам Остервальдера — Шредера, включая экспоненциальное убывание корреляций. Таким образом, соответствующая релятивистская теория удовлетворяет аксиомам Уайтмана, включая существование массовой щели и единственности вакуума.

§ 10. Sine-Gordon$_2$ И ДРУГИЕ МОДЕЛИ

Модель Sine-Gordon в двумерном случае в некоторых аспектах аналогична модели $\exp\varphi_2$, называемой в [243] моделью Хее-Крона. Эта последняя модель сейчас является самой простой моделью с. к. т. п. В [29] рассматриваются более общие неполиномиальные модели, но с ультрафиолетовым урезанием. В них действие задается в виде

$$\Lambda_{g,\varkappa}=\lambda\int v(\varphi_\varkappa(x))\,g(x)\,dx,$$

где $v(\alpha)=\int e^{i\alpha s}d\nu(s)$ вещественна, а $\nu(s)$ — ограниченная мера с ограниченным носителем на $\mathbf{R}$ (см. также [27, 28, 30]).

В модели Sine-Gordon действие относительно свободной меры с массой $m_0\geqslant 0$ задается в виде

$$\Lambda_{V,1}=-\lambda\int_V dx:\cos(\varepsilon\varphi_\varkappa(x)+\theta):_1.$$

Евклидовы методы применяются к этой модели в работах Фрелиха [101—103]. Мы перечислим здесь основные результаты:

1) Для всех $m_0\geqslant 0$, $\varepsilon^2<4\pi$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $\theta\in[0,2\pi)$,

$$p(\lambda,\varepsilon,m_0)=\lim_{V\to R^2}\frac{1}{|V|}\log\langle e^{-\Lambda_{V,1}}\rangle_{m_0}<\infty$$

($:\ :_1$ означает, что упорядочение Вика делается по свободному полю с единичной массой) существует и положительна.

Для $\varepsilon^2>4\pi$ $p(\lambda,\varepsilon,m_0)$ бесконечна и соответствующая теория не может существовать без ультрафиолетовых перенормировок.

2) Если дополнительно $\varepsilon^2<\frac{16}{\pi}$ (это предположение, по-видимому, обусловлено лишь технической стороной дела), то для величин (киральные поля)

$$\varkappa_\theta=:\cos(\varepsilon\varphi(x)+\theta):_1$$

существуют моменты в пределе бесконечного объема и удовлетворяют всем аксиомам Остервальдера—Шредера, кроме последней (вакуум может не быть единственным).

3) Для всех $m_0>0$, $\varepsilon^2<\varepsilon_0^2\leqslant 4\pi$, $0<\left|\frac{\lambda}{m_0^2}\right|<\lambda_0(\varepsilon)$ существует нетривиальное рассеяние для построенной теории.

Отличительной чертой этой теории является следующее свойство:

4) Для всех $m_0>0$, $\varepsilon^2<4\pi$, $\left|\frac{\lambda}{m_0^2}\right|<\lambda_0(\varepsilon)$ ряд теории возмущений для евклидовых функций Грина в бесконечном объеме является сходящимся.

5) Существует положительная массовая щель. Если ε^2 достаточно мало, то существует теория рассеяния Хаага—Рюэлля и амплитуды рассеяния имеют асимптотический по λ ряд теории возмущений.

В доказательстве конечности $p(\lambda,\varepsilon,m_0)$ основную роль играет связь этой модели с классической статистической механикой. Именно, модель Sine-Gordon в некотором смысле изоморфна классической статистической механике двухкомпонентного газа с юкавским взаимодействием при $m_0>0$ и двухкомпонентного нейтрального кулоновского газа при $m_0=0$. Основу этого изоморфизма составляет следующая легко проверяемая формула

$$\langle\prod_{k=1}^{n}:e^{i\varepsilon_k\varphi}:_C\rangle_C=\exp\Bigl(-\frac{1}{2}\sum_{k\neq l}\varepsilon_k\varepsilon_l C(x_k,x_l)\Bigr),$$

где $C(x,x^1)$ — ядро ковариационной функции.

Правая часть последней формулы есть очевидно гиббсова плотность классического газа из n частиц с зарядами $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ и с парным потенциалом $C(x,x')$.

В доказательство конечности $p(\lambda,\varepsilon,m_0)$ сначала оценки сводятся к случаю $m_0=0$, а этот последний случай допускает явное решение.

В ряде физических работ ранее вводилось понятие релятивистского квантового поля при конечной температуре β^{-1} (обычное релятивистское поле соответствует нулевой температуре $\beta^{-1}=0$). Для таких полей могут быть введены аксиомы типа аксиом Уайтмана или Хаага-Кастлера, а также может быть совершен переход к евклидовой области.

В [97, 166] такие теории рассматриваются в двумерном пространстве времени с полиномиальным или с экспоненциальным взаимодействием $Q(\varphi)$. При этом евклидов вариант свободной скалярной теории является гауссовым полем в полосе $\mathbf{R}\times\left[-\frac{\beta}{2},\frac{\beta}{2}\right]$ с периодическими граничными условиями и стандартной ковариацией. Взаимодействие в конечном объеме $-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\Bigr]\times\Bigl[-\frac{\beta}{2},\frac{\beta}{2}\Bigr]$ задается плотностью

$$\frac{1}{Z}\exp\Bigl[-\int_{-l/2}^{l/2}\int_{-\beta/2}^{\beta/2}:Q(\varphi_\varkappa(x)):dx\Bigr].$$

Это поле соответствует релятивистскому гиббсовскому состоянию

$$\omega(A)=\frac{\operatorname{Tr}(e^{-\beta H_l}A)}{\operatorname{Tr}(e^{-\beta H_l}A)},$$

где H_l — гамильтониан в объеме $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$. Доказывается существование производящего функционала для функций Швингера и исследуются различные свойства порожденной им меры (квазиинвариантность и т. д.). Доказывается теорема о реконструкции единственного состояния $\omega(\cdot)$ по заданной евклидовой теории.

Построение модели Sine-Gordon$_2$ в конечном объеме тесно связано с устойчивостью (существованием статистической суммы) для нейтрального кулоновского двухкомпонентного газа в конечном объеме. Методы квантовой теории поля применялись для доказательства устойчивости других систем статистической физики [82, 83].

Одна из самых первых моделей квантовой теории поля — модель Тирринга в двумерном случае — соответствует взаимодействию

$$\frac{g}{2} j^{\mu}(x) j^{\mu}(x) + M : \bar{\psi}_{\varkappa}(x) \psi_{\varkappa}(x) :,$$

где ток $j^{\mu}(x)$ равен $:\bar{\psi}_{\varkappa}(x) \gamma^{\mu} \psi_{\varkappa}(x):$.

При $M=0$ это явно решаемая модель (перенормируемая). См. обзор [57] по этой модели. Пока еще нет изложения евклидова варианта модели Тирринга.

Соотношения между вполне интегрируемыми классическими системами [220] и явно решаемыми моделями е. к. т. п. еще не вполне ясны. О классической теории поля см. также [169].

В [53] обнаружено, что ряд теории возмущений по M в модели Тирринга совпадает с рядом теории возмущений по λ в модели Sine-Gordon$_2$ (см. также [19, 21]). Это позволяет выписать ряд изоморфизмов между моделями: например, между массивной моделью Тирринга и моделью $\lambda : \cos(\varepsilon\varphi + \theta) :_1$.

К модели Тирринга можно добавлять также взаимодействие с векторным массивным бозонным полем A_{μ} (квантовая электродинамика, QED$_2$). Это позволяет доказывать существование разных моделей и исследовать различные физические эффекты: экранирование заряда, бесконечное число секторов суперотбора и т. д. (см. [101, 102, 103, 105]).

В [22] изучалось взаимодействие массивного векторного поля с безмассовым фермионным полем в рамках гамильтонова подхода. В [91] построена модель квантовой теории поля в неевклидовом пространстве. В [213] для одной одномерной модели вычисляют (используя ее явную решаемость) аномальные размерности в асимптотике для функций Грина. Работы [37, 38] посвящены свободным полям и полям Ли в релятивистской квантовой теории поля. Несколько в стороне от основных сейчас направлений лежат работы [164, 235]. В [235] делается попытка построения конструктивных моделей без помощи процедур урезания в каком бы ни было смысле.

§ 11. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И СОЛИТОНЫ

В [143] доказано существование фазового перехода в модели $\lambda\varphi_2^4$ для достаточно больших λ/m_0^2. Точнее, сначала рассматривается теория в конечном объеме с граничными условиями Дирихле. Показывается, что при термодинамическом предельном переходе получается неэргодическое случайное поле (т. е. существует дальний порядок). Соответствующее релятивистское поле имеет вырожденный вакуум. Это связано с нарушением симметрии $\varphi \to -\varphi$. Соответствующий результат верен также для $P(\varphi)_2$ моделей с четным P.

Этот результат, по-видимому, может быть получен также с помощью контурной техники, что дало бы возможность получить чистые фазы (эргодические компоненты поля) пределом из соответствующих граничных условий.

Объявлено о готовящейся работе [144], где для $\lambda\varphi_2^4$ получены низкотемпературные разложения и изучена нижняя часть спектра гамильтониана.

В [106] объявлено о доказательстве существования дальнего порядка в многокомпонентной модели $:(\varphi_1^2 + \ldots + \varphi_n^2)^2:_3$. Это связано с нарушением непрерывной симметрии. Этот результат должен оказать существенное влияние на дальнейшее развитие всей теории фазовых переходов.

В соответствующей многокомпонентной модели в размерности 2 такого дальнего порядка, по-видимому, нет. Это известно для решетчатых систем (теорема Мермина-Вагнера).

Последние результаты имеют непосредственное отношение к физической теореме Голдстоуна [52] о появлении безмассовых частиц при нарушении непрерывной симметрии. То, что эта ситуация, хорошо известная физикам, в действительности не так проста, следует из результатов работы [69]. В ней рассматривается решетчатая спиновая система, в каждой точке которой задан двумерный случайный вектор $s_t = (s_t^1, s_t^2)$ с распределением

$$Z^{-1} \exp\left(\sum_{t=1}^{N} a_t s_t + \sum_{t,t'} \sum_{i=1}^{2} I_{tt'}^{i} s_t^i s_{t'}^i\right) \prod_t \mu(s_t),$$

где μ — мера на $\mathbb{R}^2$ с плотностью $\exp(-Q|s^2|)$, где Q — ограниченный снизу многочлен, $a_t = (a_t^1, 0)$.

Тогда при $|I_{tt'}^2| \leqslant I_{tt'}^1$, $t \neq t'$ и $I_{tt}^2 \leqslant I_{tt}^1$ имеет место

$$\langle s_t^2 s_{t'}^2 \rangle^2 \leqslant (\langle s_t^1 s_{t'}^1 \rangle - \langle s_t^1 \rangle \langle s_{t'}^1 \rangle)(\langle s_t^1 s_{t'}^1 \rangle + \langle s_t^1 \rangle \langle s_{t'}^1 \rangle).$$

Это неравенство внешне противоречит известной теореме Голдстоуна. В [69] имеется объяснение этому противоречию. Там же доказана сходимость решетчатых аппроксимаций для многокомпонентных моделей теории поля.

В [100] дано строгое построение новых секторов суперотбора (солитонных секторов) для модели Sine-Gordon$_2$ и многокомпонентных моделей $(\vec{\varphi}\vec{\varphi})_2^2$. В последних моделях предполагается наличие явно нарушенной симметрии. Эти секторы являются собственными подпространствами для оператора заряда. Исследуется теория рассеяния для солитонов. Развивается общая теория, объясняющая почему солитонные секторы могут существовать только в двумерном пространстве-времени, за исключением возможно неабелевых теорий Янга-Миллса. Изложение ведется в основном в рамках гамильтонова подхода (локально фоковское свойство и т. д.). Автор указывает, что возможна также чисто евклидова интерпретация.

§ 12. СКЕЙЛИНГ И ПОДХОД К φ_4^4

Скейлинг или изменение масштаба некоторых величин (например, преобразование $\varphi(x)\to\varphi(sx)$ или $\varphi\to\frac{1}{Z_3}\varphi$) дает интересные изоморфизмы между различными моделями теории поля, а также может быть использован для получения более сингулярных моделей е. к. т. п.

В [132] доказано, что модели $\lambda\varphi_2^4$ с одинаковым безразмерным отношением λ/m_0^2 изоморфны, $(:\lambda\varphi^4:m_0)_2$ и $:\lambda\varphi^4+\sigma\varphi^2: :m_0^1)_2$ модель (mass shift) изоморфны при явно задаваемых соотношениях между m_0, m_0^1, σ.

Строить более сингулярные модели е. к. т. п. можно либо непосредственно, либо предельным переходом из менее сингулярных моделей. Сингулярности бывают двух типов: ультрафиолетовые и инфракрасные. По-видимому, см. § 6, ультрафиолетовые сингулярности для всех моделей канонические, т. е. такие же, как у свободного поля.

Существование критической прямой, т. е. такой, на которой физическая масса $m=0$, на плоскости (m_0^2, λ) для моделей $\lambda\varphi_2^4$ не доказано. Для этой прямой, по-видимому, имеет место

$$|S^2(x)|\sim|x|^{-\nu+2-\eta},\quad |x|\to\infty,$$

где аномальная размерность $\eta>0$.

Перечислим некоторые результаты, связанные с существованием критической точки.

Для модели $\lambda\varphi_2^4$ физическая масса m убывает при убывании m_0 в некотором интервале $(m_{0,c},\ \infty)$. Предполагается, что существует критическая точка, т. е. $m(m_{0,c})=0$. Имеются оценки для критической точки [172].

В [129] доказывается, что $m(m_0^2)$ удовлетворяет условию Липшица на любом интервале $(m_{0,c}+\varepsilon,\ \infty)$. Основной метод [129] — неравенство Лебовица для четвертого семиинварианта. В [129] доказывается также, что критические экспоненты для этой модели ограничены снизу их классическими значениями.

Существование критической точки доказывается для решетчатых моделей: физическая масса является непрерывной возрастающей функцией σ при $\sigma\geqslant\sigma_c$, $m(\sigma_c)=0$ (см. [36, 225]).

В [134] доказывается непрерывность физической массы при приближении к критической точке из области единственности для $\lambda\varphi_2^4$. В [133] получены оценки для безразмерной физической константы связи

$$g^{(4)}=-m^{\nu-4}\chi^{-4}(0)\int G^{(4)}(0,x_2,x_3,x_4)\,dx_2dx_3dx_4,$$

где $\chi(k)=\tilde{G}^{(2)}(k)$. Доказано, что в области единственности $0\leqslant g^{(4)}\leqslant\text{const}$. С помощью корреляционных неравенств получены также другие оценки на семиинварианты и вершинные функции.

Для получения сингулярностей в ультрафиолетовом поведении можно в области единственности для $\lambda\varphi_2^4$ двигаться по кривой постоянной физической массы m в плоскости (m_0^2, λ) по направлению $m_0^2\to\infty$. Если сделать одновременно мультипликативную перенормировку поля, то предполагается (см. [135, 138—140]), что в пределе (infinite scaling limit) получается евклидово поле, удовлетворяющее всем аксиомам Остервальдера-Шредера, имеющее физическую массу m и

$$S^{(2)}(x)\sim|x|^{-\nu+2-\eta_1},\quad |x|\to 0.$$

Предполагается, что $\eta=\eta_1$ (гипотеза универсальности) и что при $m=0$ получается автомодельное (скейлинг-инвариантное) поле, называемое неподвижной точкой Гелл-Манна, Лоу, Вильсона. Это поле, по-видимому, может быть получено из случайного поля σ_t на решетке Z^2, соответствующего двумерной классической модели Изинга в критической точке, с помощью формулы

$$\varphi(f)=\lim_{s\to 0}\sum_{t\in Z^2}\sigma_t f(st).$$

Поэтому аномальная размерность η должна совпадать с таковой в двумерной модели Изинга.

Существование масштабного предела (infinite scaling limit) в моделях φ_2^4 доказывается в [135] с помощью гипотезы о вершинных функциях:

$$\Gamma^{(6)}\leqslant 0\ \text{или}\ \Gamma^2(x)\leqslant \text{cons}e t^{-(m+\varepsilon)|x|}.$$

В этой же работе доказывается, что $\Gamma^2(x)$ и собственно энергетическая часть $\Pi(x)$ положительны. Из аналогичных предположений доказывается отсутствие трехчастичных связанных состояний.

Предполагается, что аналогичная картина имеет место в размерности $\nu=3$.

В [140] объясняется, почему при $\nu<3$ infinite scaling limit дает неперенормируемую е. к. т. п. и указываются соотношения между перенормировкой и критическими экспонентами.

В [139, 232] дается оптимистическая программа решения центральной проблемы е. к. т. п. — построения модели φ_4^4. Программа основана на решетчатой аппроксимации этой модели. Простое замечание [139] показывает, что снятие ультрафиолетового обрезания эквивалентно построению масштабного предела в критической точке в статистической механике.

В этих работах приводится перенормировочная программа, состоящая из 4 шагов: 1) перенормировка массы, 2) мультипликативная перенормировка поля, 3) равномерная по обрезанию оценка сверху на функции Швингера [131], 4) перенормировка заряда, необходимая для обеспечения нетривиальности предела.

Объясняется, почему каждый пункт может быть реализован в основном независимо от остальных.

Основной вывод, который делается из приводимых рассуждений: φ_4^4 существует тогда и только тогда, когда масштабный предел классической модели Изинга в критической точке в размерности 4 не является гауссовым полем. Другое достаточное условие: неравенство Букингэма — Гантона для критических экспонент должно обращаться в равенство

$$f=\frac{(\delta+1)}{(\delta-1)}(2-\eta)-\nu=0,$$

что согласуется со стандартным физическим фольклором, по которому для $\nu=4$ критические экспоненты в модели Изинга равны $\eta=0$, $\delta=3$.

Развиваемая физиками идея конформной инвариантности не нашла еще применений в е. к. т. п. (см., однако, [174, 183, 184]). То же самое можно сказать и о суперполях [175].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Аникин С. А.**, Аркадьев В. А., Замечание об R-операции с нелинейным числом вычитаний. Теор. и мат. физ., 1975, **24**, № 1, 133—135 (РЖМат, 1975, 12Б668)
2. —, Завьялов О. И., Контрчлены о формализме нормальных произведений. Теор. и мат. физ., 1976, **26**, № 2, 162—171 (РЖМат, 1976, 6Б559)
3. —, —, Поливанов М. К., Одно простое доказательство. Теор. и мат. физ., 1973, **17**, № 2, 189—198
4. —, Поливанов М. К., О доказательстве теоремы Боголюбова — Парасюка для нескалярного случая. Теор. и мат. физ., 1974, **21**, № 2, 175—182 (РЖМат, 1975, 4Б1025)
5. **Басуев А. Г.**, Васильев А. Н., Способ суммирования ряда теории возмущений в скалярных теориях. Теор. и мат. физ., 1974, **18**, № 2, 181—189 (РЖМат, 1974, 6Б599)
6. —, Сходимость ряда теории возмущений для взаимодействия Юкавы. Теор. и мат. физ., 1975, **22**, № 2, 203—212

7. **Боголюбов Н. Н.**, Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., «Наука», 1969, 424 с. (РЖМат, 1970, 4Б511К)
8. —, Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957, 442 с. (РЖМат, 1959, 1721К)
9. **Гачок В. П.**, Гончар Н. С., Существование функций Грина в евклидовой области для $P(\varphi)_2$-теории. Теор. и мат. физ., 1974, **18**, № 2, 174—180 (РЖМат, 1974, 6Б963)
10. **Гельфанд И. М.**, Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., Физматгиз, 1961, 472 с. (РЖМат, 1963, 8Б364К)
11. **Гончар Н. С.**, Ренормализованная степень обобщенного случайного поля и уравнения для функций Грина в евклидовой области. Теор. и мат. физ., 1973, **17**, № 3, 373—390 (РЖМат, 1974, 4Б496)
12. **Добрушин Р. Л.**, Минлос Р. А., Фактормеры на измеримых пространствах. Тр. Моск. мат. о-ва, 1975, **32**, 77—92 (РЖМат, 1976, 5Б864)
13. —, —, Построение одномерного квантового поля с помощью непрерывного марковского поля. Функц. анализ и его прил., 1973, **7**, № 4, 89—90
14. **Завьялов О. И.**, О параметрических представлениях диаграмм Фейнмана. Теор. и мат. физ., 1975, **23**, № 3, 291—299 (РЖМат, 1975, 11Б572)
15. —, Замечания о структуре R-операции. Теор. и мат. физ., 1974, **21**, № 3, 322—328
16. **Иванов С. С.**, Петрина Д. Я., Ребенко А. Л. Об уравнениях для коэффициентных функций S-матрицы в квантовой теории поля. Теор. и мат. физ., 1974, **19**, № 1, 37—46 (РЖМат, 1974, 9Б651)
17. —, —, —, S-матрица в конструктивной квантовой теории поля. Теор. и мат. физ., 1975, **23**, № 2, 160—177 (РЖМат, 1975, 9Б491)
18. **Йост Р.**, Общая теория квантованных полей. М., «Мир», 1967, 236 с. (РЖМат, 1968, 5Б535)
19. **Корепин В. Е.**, Фаддеев Л. Д., Квантование солитонов. Теор. и мат. физ., 1975, **25**, № 2, 147—163 (РЖМат, 1976, 4Б546)
20. **Малышев В. А.**, Асимптотика фейнмановских интегралов в евклидовой области. Теор. и мат. физ., 1976, **29**, № 2
21. **Погребков А. К.**, Сушко В. Н., Квантование $(\sin\varphi)_2$-взаимодействия в терминах фермионных переменных. Теор. и мат. физ., 1975, **24**, № 3, 425—429
22. —, —, Гамильтонова теория взаимодействия массивного векторного и безмассового фермионного полей в двумерном пространстве-времени: $(\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi B_{\mu})_2$-взаимодействие. I. Пространство состояний с положительно-определенной метрикой. Теор. и мат. физ., 1975, **22**, № 2, 159—175
23. **Славнов А. А.**, Континуальный интеграл в теории возмущений. Теор. и мат. физ., 1975, **22**, № 2, 177—185 (РЖМат, 1975, 7Б520)
24. —, Об асимптотическом поведении диаграмм Фейнмана. Теор. и мат. физ., 1973, **17**, № 2, 169—177
25. **Хепп К.**, Теория перенормировок. М., «Наука», 1974, 255 с. (РЖМат, 1975, 4Б632К)
26. **Хоружий С. С.**, Поля и алгебры наблюдаемых в моделях с правилами суперотбора. I. Модель с абелевой калибровочной группой. Теор. и мат. физ., 1975, **25**, № 3, 291—306 (РЖМат, 1976, 6Б880)
27. **Albeverio S.**, An introduction to some mathematical aspects of scattering theory in models of quantum fields. «Scattering theory Math. Phys. Proc. NATO Adv. Study Inst. Denver, Colo., 1973». Dordrecht—Boson, 1974, 299—381 (РЖМат, 1975, 12Б653)
28. —, Hoegh-Krohn R., Uniqueness of the physical vacuum and the Wightman functions in the infinite volume limit for some non polynomial interactions. Commun. Math. Phys., 1973, **30**, № 3, 171—200 (РЖМат, 1973, 9Б502)
29. —, —, The scattering matrix for some non-polynomial interactions I, II. Helv. Phys. Acta, 1973, **46**, № 4, 504—534, 535—545

30. —, —, The Wightman axioms and the mass gap for strong interactions of exponential type in two-dimensional space-time. J. Funct. Anal., 1974, **16**, № 1, 39—82 (РЖМат, 1974, 11Б584)
31. —, —, Mathematical theorey of Feynman path integrals. Univ. of Oslo, 1974
32. —, —, Homogeneous random fields and statistical mechanics. J. Funct. Anal., 1975, **19**, № 3, 242—272 (РЖМат, 1975, 12Б987)
33. **Alebastrov V. A.**, Efimov G. V., A proof of the unitarity of S-matrix in a nonlocal quantum field theory. Commun. Math. Phys., 1973, **31**, № 1, 1—24 (РЖМат, 1973, 12Б603)
34. **Ashmore J. F.**, On renormalization and complex space-time dimensions. Commun. Math. Phys., 1973, № 3, 177—187 (РЖМат, 1973, 7Б465)
35. **Atakishiev N. M.**, Filippov A. T., Calculation of superpropagators in non-linear Quantum field theories. Commun. Math. Phys., 1971, **24**, № 1, 74—86 (РЖМат, 1972, 7Б463)
36. **Baker G.**, Self-interacting Boson quantum field theory and the thermodynamic limit in d dimensions. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 6, 1324—1346
37. **Baumann K.**, There are no-scalar Lie fields in three or more dimensional space-time. Commun. Math. Phys., 1976, **47**, № 1, 69—74
38. **Bellissard J.**, Quantized fields in external field. II. Commun. Math. Phys., 1976, **46**, № 1, 53—74 (РЖМат, 1976)
39. Bergère M., Lam P., Asymptotic expansion of Feynman amplitudes. Part I. The convergent case. Commun. Math. Phys., 1974, **39**, № 1, 1—32
40. —, Zuber J. B. Renormalisation of Feynman amplitudes and parametric integral representation. Commun. Math. Phys., 1974, **35**, № 2, 113—140 (РЖМат, 1974, 7Б487)
41. **Bisognano J.**, Wichmann E., On the duality condition for a Hermitian scalar field. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 4, 985—1007 (РЖМат, 1975, 10Б506)
42. **Borchers H. J.**, Yngvason J., Integral representations for Schwinger functionals and the moment problem over nuclear space. Commun. Math. Phys., 1975, **43**, № 3, 255—271 (РЖМат, 1976, 3Б962)
43. **Bratelli O.**, Conservation of estimates in quantum field theory. Communs Pure and Appl. Math., 1972, **25**, 759—779
44. **Brydges D.**, Boundedness below for fermion model theories. I. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 8, 1649—1661 (РЖМат, 1976, 2Б475)
45. —, Boundedness below for fermion model theories. II. Commun. Math. Phys., 1976, **47**, № 1, 1—24
46. —, Cluster Expandions for fermion fields by the time dependent Hamiltonian approach. Preprint, 1975
47. —, Federbush P., A semi-Euclidean approach to boson-fermion model theories. J. Math. Phys., 1974, **15**, № 6, 730—732 (РЖМат, 1974, 12Б318)
48. **Caianiello E. R.**, Combinatorics and renormalization in quantum field theory. Reading, Mass. e. a., W. A. Benjamin, 1973, XX, 121 pp. (РЖМат, 1974, 10В445К)
49. **Challifour J. L.**, Slinker S. P., Euclidean field theory. I. The moment problem. Commun. Math. Phys., 1975, **43**, № 1, 41—58
50. —, Euclidean field theory. II. Embedding of the relativistic Hilbert space. Indiana Univ., Preprint, 1975
51. **Colella Ph.**, Lanford O. E., III. Sample field behavior for the free Markov random field. Lect. Notes Phys., 1973, **25**, 44—70 (РЖМат, 1974, 11В134)
52. **Coleman S.**, There are no Goldstone bosons in two dimensions. Commun. Math. Phys., 1973, **31**, № 4, 259—264 (РЖМат, 1973, 12Б604)
53. —, Quantum sine-Gordon equation as the massive thirring model. Phys. Rev. D., 1975, **11**, № 8, 2088—2097
54. **Constantinescu F.**, Thaleimer W., Euclidean Green's functions for Jaffe fields. Commun. Math. Phys., 1974, **38**, № 4, 299—316 (РЖМат, 1975, 6Б684)
55. Constructive quantum field theory. The 1973 «ettore majorana» international school of mathematical physics. Eds Velo G., Wightman A. (Lect. Notes Phys., 25). Berlin e. a., Springer, 1973, 331 pp. (РЖМат, 1974, 8Б502К)
56. **Cooper A.**, Rosen L., The weakly coupled Yukawa$_2$ field theory: cluster expansion and Wightman axioms. Univ. of Toronto. Canada, Preprint, 1975
57. **Dell'Antonio G. F.**, A model field theory: the thirring model. Acta Phys. Austriaca, 1975, **43**, № 1-2, 43—88
58. **De Witt C. M.**, Feynman path integral. Definition without limiting procedure. Commun. Math. Phys., 1972, **28**, № 1, 47—67 (РЖМат, 1973, 3Б859)
59. —, Feynman path integrals. I. Linear and affine techniques. II. The Feynman—Green function. Commun. Math. Phys., 1974, **37**, № 1, 63—81 (РЖМат, 1975, 6Б1075)
60. —, Path integrals in Riemannian manifolds. Lect. Notes Phys., 1975, **39**, 535—542 (РЖМат, 1976, 3Б572)
61. **Dimock J.**, The $P(\varphi)_2$ Green's functions: smoothnees in the coupling constant. Preprint, 1975
62. —, Asymptotic perturbation expansion in the $P(\varphi)_2$ quantum field theory. Commun. Math. Phys., 1974, **35**, № 4, 347—356 (РЖМат, 1974, 9Б635)
63. —, Spectrum of local Hamiltonians in the Yukawa$_2$ field theory. J. Math. Phys., 1972, **13**, № 4, 477—481 (РЖМат, 1972, 11Б604)
64. —, Estimates, renormalized currents and field equations for the Yukawa$_2$ field theory. Ann. Phys. (USA), 1972, **72**, № 1, 177—242
65. —, Glimm J., Measures on Schwartz distribution space and applications to $P(\varphi)_2$ field theories. Adv. Math., 1974, **12**, № 1, 58—83 (РЖМат, 1974, 7Б872)
66. **Doplicher S.**, Roberts J. E., Fields, statistics and non-Abelian gauge groups. Commun. Math. Phys., 1972, **28**, № 4, 331—348 (РЖМат, 1973, 5Б780)
67. —, Haag R., Roberts J. E., Local observables and particle statistics. II. Commun. Math. Phys., 1974, **35**, № 1, 49—85 (РЖМат, 1974, 7Б946)
68. **Dubois-Violette M.**, A generalisation of the classical moment problem on *-algebras with applications to relativistic quantum theory. I. Commun. Math. Phys., 1975, **43**, № 3, 225—254 (РЖМат, 1976, 3Б960)
69. **Dunlop F.**, Newman Ch. M., Multicomponent field theories and classical rotators. Commun. Math. Phys., 1975, **44**, № 3, 223—235 (РЖМат, 1976, 6В238)
70. **Eckmann J.-P.**, Representations of the CCR in the $(\varphi^4)_3$ model: independence of space cutoff. Commun. Math. Phys., 1972, **25**, № 1, 1—61 (РЖМат, 1972, 8Б504)
71. —, Epstein H., Fröhlich J., Asymptotic perturbation expansion for the S-matrix and the definition of time-ordered functions in relativistic quantum field models. Univ. of Geneva, Preprint, 1975
72. —, Fröhlich J., Unitary equivalence of local algebras in the quasi free representation. 1974, **A20**, № 2, 201—210 (РЖМат, 1975, 3Б855)
73. —, Magnen J., Sénéor R., Decay properties and Borel summability for the Schwinger functions in $P(\varphi)_2$ theories. Commun. Math. Phys., 1975, **39**, № 4, 251—271 (РЖМат, 1975, 8Б497)
74. —, Osterwalder K., On the uniqueness of the Hamiltonian and of the representation of the CCR for the quartic Boson interaction in three dimensions. Helv. Phys. Acta, 1971, **44**, 884—909
75. **Ellis R. S.**, Monroe J. L., Newman C. M., The GHS and other correlation inequalities for a class of even ferromagnets. Commun. Math. Phys., 1976, **46**, № 2, 167—182 (РЖМат, 1975, 9Б413)

76. Epstein H., Glaser V., Renormalization of non polynomial Lagrangians in Jaffe's class. Commun. Math. Phys., 1972, 27, № 3, 181—194 (РЖМат, 1973, 2Б527)
77. Fabrey J. D., Exponential representations of the canonical commutation relations. Commun. Math. Phys., 1970, 19, № 1, 1—30 (РЖМат, 1971, 4Б528)
78. —, Weyl systems for the $(\varphi^4)_3$ model. J. Math. Phys., 1973, 14, № 7, 909—910 (РЖМат, 1974, 1Б592)
79. Fannes M., Verbeure A., Gauge transformations and normal states of the CCR. J. Math. Phys., 1975, 16, № 10, 2086—2088 (РЖМат, 1976, 4Б956)
80. Faris W., Lavine R. B., Commutators and self-adjointness of Hamiltonian operators. Commun. Math. Phys., 1974, 35, № 1, 39—48 (РЖМат, 1974, 7Б732)
81. Federbush P., Positivity for some generalized Yukawa models on one space dimension. J. Math. Phys., 1973, 14, № 11, 1532—1542
82. —, A new approach to the stability of matter problem. I. J. Math. Phys., 1975, 16, № 2, 347—351 (РЖМат, 1975, 9Б470)
83. —, A new approach to the stability of matter problem. II. J. Math. Phys., 1975, 16, № 3, 706—709 (РЖМат, 1975, 12Б604)
84. Feldman J., The $\lambda\varphi_3^4$ field theory in a finite volume. Thesis. Harvard Univ. Cambridge, Massachusetts, July, 1974,
85. —, The $\lambda\varphi_3^4$ field theory in a finite volume. Commun. Math. Phys., 1974, 37, № 2, 93—120 (РЖМат, 1975, 8Б541)
86. —, On the absence of bound states in the $\lambda\varphi_2^4$ quantum model without symmetry breaking. Can. J. Phys., 1974, 52, 1583—1587
87. —, A relativistic Feynman—Kac formula. Nucl. Phys., 1973, B52, 608—614
88. —, The nonperturbative renormalization of $(\varphi\lambda^4)_3$. Harvard Univ., preprint, 1975
89. —, Osterwalder K., The Wightman axioms and the mass gap for weakly coupled $(\varphi^4)_3$ quantum field theories. Ann. Phys., 1976, 97, № 1, 80—135
90. —, —, The construction of $\lambda\varphi_3^4$ quantum field models. Proc. Intern. Colloq. Math. methods of quantum field theory, Marseille, 1975,
91. Figari R., Höegh-Krohn R., Nappi C. R. Interacting relativistic Boson fields in the De Sitter universe with two space-time dimensions. Commun. Math. Phys., 1975, 44, № 3, 265—278 (РЖМат, 1976, 5Б451)
92. Fink J. P., Asymptotic estimates of Feynman integrals. J. Math. Phys., 1968, 9, № 9, 1389—1400 (РЖМат, 1969, 3Б345)
93. Flume R., Superpropagators of non-localizable fields. Commun. Math. Phys., 1972, 24, № 4, 303—309
94. Fröhlich J., Schwinger functions and their generating functionals. I. Helv. phys. acta, 1974, 47, № 3, 265—306
95. —, Schwinger functions and their generating functionals. II. Preprint, 1974
96. —, Verification of axioms for Euclidean and relativistic fields and Haag's theorem in a class of $P(\varphi)_2$-models. Ann. Inst. H. Poincaré, 1974(1975), A21, № 4, 271—317 (РЖМат, 1975, 11Б585)
97. —, The reconstruction of quantum fields from Euclidean Green's functions at arbitrary temperatures in models of a self-interacting Bose field in two space-time dimensions. Preprint, 1974
98. —, Existence and analyticity in the bare parameters of $[\lambda(\vec{\varphi}\cdot\vec{\varphi})^2-\sigma\varphi_1^2-\mu\varphi_1]$ quantum fields models. I. Preprint, 1975
99. —, The pure phases, the irreducible quantum fields and dynamical symmetry breaking in the Symanzik—Nelson positivity in quantum field theories. Ann. Phys., 1976, 97, № 1, 1—54
100. —, New super-selection sectors (solitons states) in two dimensional Bose quantum field models. Princeton Univ., Preprint, 1975
101. —, Quantized «sine-Gordon» equation with a nonvanishing mass term in two space-time dimensions. Phys. Rev. lett., 1975, 34, № 13, 833—836

102. —, Classical and quantum statistical mechanics in one and two dimensions: two—component Yukawa—and Coulomb systems. Preprint, 1975
103. —, Quantum sine-Gordon equation and quantum solitions in two space-time dimensions. Princeton Univ., Preprint, 1976
104. —, Osterwalder K., Is there a Euclidean field theory for Fermions? Helv. phys. acta, 1974, 47, 781—805
105. —, Seiler E., The massive Thirring-Schwinger model: convergence of perturbation theory in the mass. Preprint. Inst. Adv. Stud., 1975
106. —, Simon B., Spencer T., Phase transitions and continuum symmetry breaking. Princeton Univ., Preprint, 1976
107. Gidas B., On the self-adjointness of the Lorentz generator for $(:\varphi^4:)_{1+1}$. J. Math. Phys., 1974, 15, № 6, 867—869 (РЖМат, 1975, 11Б1161)
108. Ginibre J., Velo G., The free Euclidean massive vector field in the Stückelberg gauge. Ann. Inst. H. Poincaré., 1975, A22, № 3, 257—264
109. Glaser V., The positivity condition in momentum space. — В сб.: «Пробл. теор. физики», М., «Наука», 1969, 68—69, 421—422 (РЖМат, 1970, 1Б483)
110. —, On the equivalence of the Euclidean and Wightman formulations of field theory. Commun. Math. Phys., 1974, 37, № 4, 257—272 (РЖМат, 1975, 2А756)
111. Glimm J., Boson fields with nonlinear selfinteraction in two dimensions. Commun. Math. Phys., 1968, 8, № 1, 12—25 (РЖМат, 1968, 11Б408)
112. —, Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions. I. Commun. Math. Phys., 1967, 5, № 5, 343—386 (РЖМат, 1968, 12Б476)
113. —, The Yukawa coupling of quantum fields in two dimensions. II. Commun. Math. Phys., 1967, 6, № 1, 61—76
114. —, Boson fields with the $:\varphi^4:$ interaction in three dimensions. Commun. Math. Phys., 1968, 10, № 1, 1—47
115. —, Jaffe A., Self-adjointness of the Yukawa$_2$ Hamiltonian. Ann. Phys (USA), 1970, 60, № 2, 321—383 (РЖМат, 1971, 5Б972)
116. —, —, The particle search in a quantum field model. Bull. Amer. Math Soc., 1973, 79, 5, № 5, 979—980 (РЖМат, 1974, 7Б520)
117. —, —, A $\lambda\varphi^4$ quantum field theory without cutoffs. I. Phys. Rev., 1968, 176, № 5, 1945—1951
118. —, —, The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs. II. Ann. Math., 1970, 91, № 2, 362—401
119. —, —, The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs. III. Acta Math., 1970, 125, 203—268
120. —, —, The $\lambda\varphi_2^4$ quantum field theory without cutoffs. IV. J. Math. Phys., 1972, 13, № 10, 1568—1584 (РЖМат, 1973, 5Б925)
121. —, —, Infinite renormalisation of the Hamiltonian is necessary. J. Math. Phys., 1969, 10, № 12, 2213—2214 (РЖМат, 1970, 7Б532)
122. —, —, Singular perturbations of self adjoint operators. Communs Pure and Appl. Math., 1969, 22, № 3, 401—414 (РЖМат, 1970, 3Б636)
123. —, —, Energy momentum spectrum and vacuum expectation values in quantum field theory. I. J. Math. Phys., 1970, 11, № 12, 3335—3338
124. —, —, The energy momentum spectrum and vacuum expectation values in quantum field theory. II. Commun. Math. Phys., 1971, 22, № 1, 1—22
125. —, —, Positivity and self adjointness of the $P(\varphi)_2$ Hamiltonian. Commun. Math. Phys., 1971, 22, № 4, 253—258 (РЖМат, 1972, 4Б614)
126. —, —, Boson quantum field models. «Mathematics of contemporary physics», ed. by R. Streater, Acad. Press, New York, 1972
127. —, —, Quantum fields models. «Statistical mechanics and quantum field theory», ed. by C. de Witt and R. Stora, Gordon and Breach, New York, 1971
128. —, —, Positivity of the φ_3^4 Hamiltonian. Fortschr. Phys., 1973, 21, № 7, 327—376
129. —, —, φ_2^4 quantum field models in the single-phase region: Differentiability of the mass and bounds on critical exponents. Phys. Rev. D, 1974, 10, № 2, 536—539

130. —, —. The entropy principle for vertex functions in quantum field models. Ann. Inst. H. Poincaré, 1974, **A21**, № 1, 1—25
131. —, —. Remark on the existence of φ_4^4. Phys. Rev. Lett., 1974, **33**, № 7, 440—442
132. —, —. Critical point dominance in quantum field models. Ann. Inst. H. Poincaré, 1974, **A21**, № 1, 27—41
133. —, —. Absolute bounds on vertices and couplings. Ann. Inst. H. Poincaré, 1975, **A22**, № 2, 97—107
134. —, —. On the approach to the critical point. Ann. Inst. H. Poincaré, 1975, **A22**, № 2, 109—122
135. —, —. Three-particle structure of φ^4 interactions and the scaling limit. Phys. Rev. D., 1975, **11**, № 10, 2816—2827
136. —, —, Two and three body equations in quantum field models. Commun. Math. Phys., 1975, **44**, № 3, 293—320 (РЖМат, 1976, 6А540)
137. —, —, φ^j bounds in $P(\varphi)_2$ quantum field models. Proc. Int. Colloq. math. methods in quantum field theory. Marseille, 1975
138. —, —. Particles and bound states and progress toward unitarity and scaling. Int. Symp. on Math. Problems in Theor. Phys., Kyoto, January 23—29, 1975
139. —, —. Critical problems in quantum fields. Proc. Int. Colloq. math. methods of quantum field theory. Marseille, 1975
140. —, —. Critical exponents and renormalization in the φ^4 scaling limit. Conference on quantum dynamics: models and mathematics. Bielefeld, September, 1975
141. —, —. S p e n c e r T., The Wightman axioms and particle structure in the $P(\varphi)_2$ quantum field model. Ann. Math., 1974, **100**, № 3, 585—632 (РЖМат, 1975, 5Б932)
142. —, —, —. The particle structure of the weakly coupled $P(\varphi)_2$ model and other applications of high temperature expansions. I, II. Lect. Notes Phys., 1973, **25**, 132—198, 199—242 (РЖМат, 1974, 9Б641, 9Б642)
143. —, —, —. Phase transitions for φ_2^4 quantum fields. Communs Math. Phys., 1975, **45**, № 3, 203—216 (РЖМат, 1976, 7Б498)
144. —, —, —. A cluster expansion for the φ_2^4 quantum field theory in the two phase region. Preprint, 1976
145. **Gomes M.**, L o w e n s t e i n J. H., Z i m m e r m a n n W., Generalisation of the momentum—space subtraction procedure for renormalized perturbation theory. Communs Math. Phys., 1974, **39**, № 2, 81—90
146. **Graffi S.**, G r e c c h i V., Matrix moment methods in perturbation theory, Boson quantum field models, and anharmonic oscillators. Communs Math. Phys., 1974, **35**, № 3, 235—252 (РЖМат, 1974, 8Б501)
147. **Griffiths R.**, S i m o n B., Griffiths—Hurst—Sherman inequalities and a Lee—Yang theorem for the $(\varphi^4)_2$ field theory. Phys. Rev. Lett., 1973, **30**, 931
148. —, —. The φ_2^4 field theory as a classical Ising model. Communs Math. Phys., 1973, **33**, 145—164
149. **Gross L.**, The free Euclidean proca and electromagnetic fields, report to the Cumberland lodge conference on functional integration and its applications. 1974
150. —. Existence and uniqueness of physical ground states. J. Funct. Anal., 1972, **10**, № 1, 52—109 (РЖМат, 1972, 11Б776)
151. **Guerra F.**, Uniqueness of the vacuum energy density and van Hove phenomena in the infinite volume limit for two dimensional self-coupled Bose fields. Phys. Rev. Lett., 1972, **28**, 1213
152. —, Local algebras in Euclidean quantum field theory proceedings of the meeting on C-algebras and their applications to theoretical physics. Symp. math. Acad. Press., 1975
153. —, R o s e n L., S i m o n B., The pressure is independent of the boundary conditions for $P(\varphi)_2$ field theories. Princeton Univ. Preprint, 1975
154. —, —, —. Boundary conditions for the $P(\varphi)_2$ Euclidean field theory. Preprint, 1975

155. —, —, —. The $P(\varphi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics. I, II. Ann. Math., 1975, **101**, № 1, 111—189; № 2, 191—259 (РЖМат, 1975, 9Б450, 9Б451)
156. —, —, —. Nelson's symmetry and the infinite volume behavior of the vacuum in $P(\varphi)_2$. Communs Math. Phys., 1972, **27**, № 1, 10—22 (РЖМат, 1973, 2Б513)
157. —, —, —. The vaccum energy for $P(\varphi)_2$: infinite volume limit and coupling constant dependence. Communs Math. Phys., 1973, **29**, № 3, 233—247 (РЖМат, 1973, 7Б456)
158. —, —, —, Correlation inequalities and the mass gap in $P(\varphi)_2$. III. Mass gap for a class of strongly coupled theories with non-zero external field. Communs Math. Phys., 1975, **41**, № 1, 19—32
159. —, R u g g i e r o P., A new interpretation of the Euclidean—Markov field in the framework of physical Minkowski space-time. Preprint, 1975
160. **Hahn Y.**, Z i m m e r m a n n W., An elementary proof of Dyson's power counting theorem. Communs Math. Phys., 1968, **10**, № 4, 330—342
161. **Hamilton E.**, The infinitely renormalized field in the scalar model. J. Math. Phys., 1976, **17**, № 4, 443—457
162. **Hańćkowiak J.**, Statistical methods in quantum field theory. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 7, 1524—1527 (РЖМат, 1976, 3Б508)
163. **Hegerfeldt G. C.**, Extremal decomposition of Wightman functions and of states on nuclear *-algebras by Choquet theory. Communs Math. Phys., 1975, **45**, № 2, 133—135 (РЖМат, 1976, 7Б999)
164. —, From Euclidean to relativistic fields and on the notion of Markoff fields. Communs Math. Phys., 1974, **35**, № 2, 155—171 (РЖМат, 1974, 7А850)
165. —, Prime field decompositions and infinitely divisible states on Borchers' tensor algebra. Communs. Math. Phys., 1975, **45**, № 2, 137—151 (РЖМат, 1976, 7Б998)
166. **Høegh-Krohn R.**, Relativistic quantum statistical mechanics in two-dimensional space-time. Communs Math. Phys., 1974, **38**, № 3, 195—224 (РЖМат, 1975, 5Б537)
167. **Jaffe A.**, States of constructive field theory. Proc. 17th Int. Conf. on high energy phys. London, 1974, I-243—I-250
168. —, M c B r y a n O., What constructive field theory says about currents. «Local Currents and their Appl. Proc. Inform. Conf. Princeton, N. Y., 1971». Amsterdam e. a., 1974, 17—30 (РЖМат, 1975, 8Б534)
169. **Kijowski J.**, S z c z y r b a W., A canonical structure for classical field theories. Commun. Math. Phys., 1976, **46**, № 2, 183—206 (РЖМат, 1976, 9Б425)
170. **Klein A.**, L a n d a u L. J., Singular perturbations of positivity preserving semigroups via path space techniques. J. Funct. Anal., 1975, **20**, № 1, 44—82 (РЖМат, 1976, 3Б862)
171. —, —, The :φ^2: field in the $P(\varphi)_2$ model. Communs Math. Phys., 1975, **43**, № 2, 143—154
172. —, —, An upper bound on the energy gap in the $(\lambda\varphi^4+\sigma\varphi^2)_2$ model. J. Math. Phys., 1976, **17**, № 1, 87—93 (РЖМат, 1976, 9Б420)
173. **Kolk C. M. van der**, K e r f E. A. d e, A simplified proof of the Bogoliubov—Parasiuk theorem. Physica, 1975, **A80**, № 4, 339—359 (РЖМат, 1976, 6Б536)
174. **Koller K.**, The significance of conformal inversion in quantum field theory. Communs Math. Phys., 1975, **40**, № 1, 15—35
175. **Ktorides C. N.**, A clifford algebraic approach to superfields and some consequences. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 10, 2123—2129 (РЖМат, 1976, 4Б975)
176. **Kunofsky Jn.**, Holomorphic versions of the Fabrey—Glimm representations of the canonical commutation relations. Communs Math. Phys., 1975, **43**, № 1, 17—32 (РЖМат, 1976, 2Б466)
177. **Lenard A.**, N e w m a n C. M., Infinite volume asymptotics in $P(\varphi)_2$ field theory. Communs Math. Phys., 1974, **39**, № 3, 243—250 (РЖМат, 1975, 6Б1152)

178. **Lowenstein J. H.**, Convergence theorems for renormalized Feynman integrals with zero-mass propagators. Communs Math. Phys., 1976, **47**, № 1, 53—68
179. —, S p e e r E., Distributional limit of renormalized Feynman integrals with zero-mass denominators. Commans Math. Phys., 1976, **47**, № 1, 43—51
180. —, Z i m m e r m a n n W., The power counting theorem for Feynman integrals with mass less propagators. Communs Math. Phys., 1975, **44**, № 1, 73—86 (РЖМат, 1976, 4Б555)
181. —, —, On the formulation of theories with zero-mass propagators. Nucl. Phys., 1975, **B86**, № 1, 77—103
182. —, —, Infrared convergence of Feynman integrals for the massless A^4-model. Communs Math. Phys., 1976, **46**, № 2, 105—118
183. **Lüsher M.**, M a c k G., Global conformal invariance in quantum field theory. Communs Math. Phys., 1975, **41**, № 3, 203—234
184. **Mack G.**, S y m a n z i k K., Currents, stress tensor and generalized unitarity in conformal invariant quantum field theory. Communs Math. Phys., 1972, **27**, № 4, 247—281 (РЖМат, 1973, 3Б511)
185. **Magnen J.**, S e n e o r A., The infinite volume limit of the φ_3^4 model. Ann. Inst. H. Poincaré, 1976, **A24**, № 2, 95—159
186. **Maheshwari A.**, The generalized Wiener—Feynman path integrals. J. Math. Phys., 1976, **17**, № 1, 33—36
187. **McBryan O. A.**, Higher order estimates for the $Yukawa_2$ quantum field theory. Communs Math. Phys., 1975, **42**, № 1, 1—7
188. —, Finite mass renormalisations in the Euclidean $Yukawa_2$ field theory. Communs Math. Phys., 1975, **44**, № 3, 237—243 (РЖМат, 1976, 6Б539)
189. —, Volume dependence of Schwinger functions in the $Yukawa_2$ quantum field theory. Communs Math. Phys., 1975, **45**, № 3, 279—294
190. —, Convergence of the vacuum energy density, φ-bounds and existence of Wightman functions for the $Yukawa_2$ model. Preprint, 1976
191. —, P a r k Y. M., Lorentz covariance of the $Yukawa_2$ quantum field theory. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 1, 104—110 (РЖМат, 1975, 7Б514)
192. **McClary W. K.**, On the semiboundedness of the $(\varphi^4)_2$ Hamiltonian. Communs Math. Phys., 1973, **32**, № 1, 71—73 (РЖМат, 1974, 2Б556)
193. —, Approximate vacuums in $(:\varphi^{2m}:g(x))_2$ field theories and perturbation series. Communs Math. Phys., 1972, **24**, № 3, 171—179 (РЖМат, 1972, 7Б564)
194. **Miyamoto M.**, Martin—Dynkin boundaries of random fields. Communs Math. Phys., 1974, **36**, № 4, 321—324 (РЖМат, 1974, 12В68)
195. **Mizrahi M. M.**, The Weyl correspondence and path integrals. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 11, 2201—2206 (РЖМат, 1976, 5Б506)
196. **Nagamachi S.**, M u g i b a y a s h i N., Hyperfunction quantum field theory. Communs Math. Phys., 1976, **46**, № 2, 119—134
197. **Nakanishi N.**, Quantum field theory and the colouring problem of graphs. Communs. Math. Phys., 1973, **32**, № 2, 167—181 (РЖМат, 1974, 2В505)
198. **Nelson E.**, Probability theory and Euclidean field theory. Lect. Notes Phys., 1973, **25**, 94—124 (РЖМат, 1974, 11В133)
199. —, Quantum fields and Markow fields. «Proc. Symp. Pure Math., Berkeley, Calif., 1971, vol. 23». Providence, 1973, 413—420 (РЖМат, 1976, 7Б704)
200. —, Construction of quantum fields from Markoff fields. J. Funct. Anal., 1973, 12, № 1, 97—112 (РЖМат, 1973, 8Б762)
201. —, The free Markoff field. J. Funct. Anal., 1973, **12**, № **2**, 211—227 (РЖМат, 1973, 8Б763)
202. —, Time-ordered operator products of sharp-time quadratic forms. J. Funct. Anal., 1972, **11**, № 2, 211—219 (РЖМат, 1973, 3Б740)
203. **Newman C.**, The construction of stationary two-dimensional Markoff fields with an application to quantum field theory. J. Funct. Anal., 1973, **14**, № 1, 44—61 (РЖМат, 1974, 2В142)
204. —, Inequalities for Ising models and field theories which obey the Lee—Yang theorem. Communs Math. Phys., 1975, **41**, № 1, 1—9 (РЖМат, 1975, 10Б487)
205. —, Moment inequalities for ferromagnetic Gibbs distributions. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 9, 1956—1959 (РЖМат, 1976, 3Б498)
206. **O'Carroll M.**, O t t e r s o n P., Some aspects of Markov and Euclidean field theories. Commun. Math. Phys., 1974, **36**, № 1, 37—58 (РЖМат, 1974, 10Б476)
207. **Osterwalder K.**, Duality for free Bose fields. Communs Math. Phys., 1973, **29**, № 1, 1—14 (РЖМат, 1973, 7Б452)
208. —, Euclidean Green's functions and Wightman distributions. Lect. Notes Phys., 1973, **25**, 71—93 (РЖМат, 1974, 8Б785)
209. —, S c h r a d e r R., Axioms for Euclidean Green's functions. Communs Math. Phys., 1973, **31**, № 2, 83—112 (РЖМат, 1973, 11Б435)
210. —, —, Axioms for Euclidean Green's functions. II. Communs Math. Phys., 1975, **42**, № 3, 281—205 (РЖМат, 1975, 12Б666)
211. —, —, Euclidean Fermi fields and a Feynman—Kac formula for Boson—Fermion models. Helv. phys. acta, 1973, **46**, № 3, 277—302 (РЖМат, 1974, 5Б608)
212. **Ozkaynak H.**, Euclidean fields for massive particels of arbitrary spin. Preprint, 1975
213. **Parisi G.**, Z i r i l l i F., Anomalous dimensions in one-dimensional quantum field theory. J. Math. Phys., 1973, **14**, № 2, 243—245 (РЖМат, 1973, 9Б490)
214. **Park Y. M.**, Lorentz covariance of the $P(\varphi)_2$ quantum field theory without Higher order estimates. Communs Math. Phys., 1973, **34**, № 3, 179—192 (РЖМат, 1974, 6Б966)
215. —, The $\lambda\varphi_3^4$ Euclidean quantum field theory in a periodic box. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 11, 2183—2188
216. —, Lattice approximation of the $(\lambda\varphi^4-\mu\varphi)_3$ field theory in a finite volume. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 5, 1065—1075 (РЖМат, 1975, 10Б492)
217. —, Uniform bounds of the pressure of the $\lambda\varphi_3^4$ field model. Preprint, 1975
218. **Piguet O.**, Construction of a strictly renormalizable effective Lagrangian for the massive Abelian Higgs model. Communs Math. Phys., 1974, **37**, № 1, 19—28 (РЖМат, 1975, 1Б752)
219. **Pohlmeyer K.**, Higher order perturbation theory for exponential Lagrangians: third order. Communs Math. Phys., 1972, **26**, № 2, 130—148 (РЖМат, 1973, 2Б508)
220. —, Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints. Communs Math. Phys., 1976, **46**, № 3, 207—221
221. **Provost J. P.**, R o c c a F., V a l l é e G., Algebraic approach of the infra-red-problem for external. J. Math. Phys., 1975, **16**, № **4**, 832—833
222. **Reed M.**, R o s e n L., Support properties of the free measure for Boson fields. Communs Math. Phys., 1974, **36**, № 2, 123—132
223. —, S i m o n B., Methods of modern mathematical physics. Vol. I. Functional analysis. Acad. Press., New York, 1972
224. —, —, Methods of modern mathematical physics. Vol. II. Analysis of operators. Acad. Press., New York, 1975
225. **Rosen J.**, Mass renormalization for the Euclidean lattice field theory. Preprint the Rockfeller Univ. New York, 1975
226. —, S i m o n B., Fluctuations in $P(\varphi)_1$ processes. Preprint, Princeton Univ., 1975
227. **Rosen L.**, Renormalization of the Hilbert space in the mass shift model. J. Math. Phys., 1972, **13**, № 6, 918—927
228. —, S i m o n B., The (φ^{2n}) field Hamiltonian for complex coupling cons-

tant. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, **165**, March. 365—379 (РЖМат, 1972, 11Б624)

229. **Schrader R.**, On the Euclidean version of Haag's theorem in $P(\varphi)_2$ theories. Communs Math. Phys., 1974, **36**, № 2, 133—136 (РЖМат, 1974, 10Б477). Erratum: Communs Math. Phys., 1974, **38**, № 1, 81—82 (РЖМат, 1975, 3Б492)
230. —, Local operator products and field equations in $P(\varphi)_2$. Theories Institut für theoretische Physik. Fortschr. Phys., 1974, **11**, № 22, 611—631 (РЖМат, 1975, 9Б877)
231. —, A remark on Yukawa plus Bodon self interaction in two space time dimensions. Communs Math. Phys., 1971, **21**, № 2, 164—170 (РЖМат, 1974, 10Б427)
232. —, A possible constructive approach to Φ_4^4. Preprint, Institut Theor. Phys., Fr. Univ. Berlin, Germany, 1975
233. —, Yukawa quantum field theory in two space-time dimensions, without cutoff. Ann. Phys., 1972, **70**, 412—457
234. —, Uhlenbrock D. A., Markov structures on Clifford algebras. J. Funct. Anal., 1975, **18**, № 4, 369—413 (РЖМат, 1975, 11Б883)
235. **Schroeck F. E. Jr.**, A model of quantum field theory treated in the Fock—Cook formalism. II. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 3, 729—739
236. **Seiler E.**, Schwinger functions for the Yukawa model in two dimensions with space-time cuttoff. Communs Math. Phys., 1975, **42**, № 2, 163—182
237. —, Simon B., Bounds in the Yukawa quantum field theory: upper bound on the pressure, Hamiltonian bound and linear lower bound. Communs Math. Phys., 1975, **45**, № 2, 99—114 (РЖМат, 1976, 7Б486)
238. —, —, On finite mass renormalizations in the two dimensional Yukawa model. J. Math. Phys., 1975, **16**, № 11, 2289—2293 (РЖМат, 1976, 5Б513)
239. —, —, Nelson's symmetry and all that in the Yukawa$_2$ and φ_3^4 field theories. Ann. Phys., 1976, **97**, № 2, 470—518
240. **Simon B.**, On the Glimm—Jaffe linear lower bound in $P(\varphi)_2$ field theories. J. Funct. Anal., 1972, **10**, № 2, 251—258 (РЖМат, 1972, 11Б1031)
241. —, Essential self-adjointness of Schrödinger operators with positive potentials. Math. Ann., 1973, **201**, № 3, 211—220 (РЖМат, 1973, 7Б604)
242. —, Studying spatially cutoff $(\varphi^{2n})_2$ Hamiltonians. «Statist. Mech. and Field Theory. Lect. 1974. Haifa Summer School.». New York; Jerusalem—London, 1972, 197—224 (РЖМат, 1974, 6Б965)
243. —, The $P(\varphi)_2$ Euclidean (Quantum) field theory. Princeton series in physics. Princeton Univ. Press. Princeton, N.-Y., 1974
244. —, Ergodic semigroups of positivity preserving self-adjoint operators. J. Funct. Anal., 1973, **12**, № 3, 335—339 (РЖМат, 1973, 8Б799)
245. —, Convergence of regularized, renormalized perturbation series for super-renormalizable field theories. II. Nuovo Cimento, 1969, **59A**, № 1, 199—213
246. —, The Glimm—Jaffe φ-bound: A Markov proof. Lect. Notes Phys., 1973, **25**, 125—131 (РЖМат, 1974, 8Б786)
247. —, Positivity of the Hamiltonian semigroup and the construction semigroup and the construction of Euclidean region fields. Helv. Phys. Acta, 1974, **46**, № 5, 686—696 (РЖМат, 1974, 7Б944)
248. —, Distributions and their hermite expansions. J. Math. Phys., 1971, **12**, № 1, 140—148 (РЖМат, 1971, 7Б694)
249. —, Correlation inequalities and the mass gap in $P(\varphi)_2$. I. Domination by the two point function. Communs Math. Phys., 1973, **31**, № 2, 127—136 (РЖМат, 1973, 11Б430)
250. —, Approximation of Feynman integrals and Markov fields by spin systems. Proc. Int. Congr. of Math. (Vancouver, B. C., 1974)
251. —, Notes on infinite determinants of Hilbert space operators. Princeton Preprint, 1975
252. —, Bose-quantum field theory as an Ising ferromagnet: recent developments. Lect. Notes Phys., 1975, **39**, 543—553 (РЖМат, 1976, 2Б458)
253. —, Hoegh-Krohn R., Hypercontractive semigroups and two dimensional self-coupled Bose fields. J. Funct. Anal., 1972, **9**, № 2, 121—180 (РЖМат, 1972, 6Б663)
254. **Speer E. R.**, The convergence of BPH renormalization. Communs Math. Phys., 1974, **35**, № 2, 151—154 (РЖМат, 1974, 8Б488)
255. —, Analytic renormalization using many space-time dimensions. Communs Math. Phys., 1974, **37**, № 1, 83—92 (РЖМат, 1975, 5Б536)
256. **Spencer T.**, Perturbation of the $P(\varphi)_2$ quantum field Hamiltonian. J. Math. Phys., 1973, **14**, № 7, 823—828
257. —, The mass gap for the $P(\varphi)_2$ quantum field models with a strong external field. Communs Math. Phys., 1974, **39**, № 1, 63—76
258. —, The absence of even bound states in φ_2^4. Communs Math. Phys., 1974, **39**, № 1, 77—79
259. —, The decay of the Bethe—Salpeter kernel in $P(\varphi)_2$ quantum field models. Communs Math. Phys., 1975, **44**, № 2, 143—164 (РЖМат, 1976, 4Б568)
260. —, The Bethe—Salpeter kernel in $P(\varphi)_2$. Preprint, 1975
261. —, Zirilli F., Scattering states and bound states in $\lambda P(\varphi)_2$. Preprint, Rockfeller Univ., 1975
262. **Weinberg S.**, High-energy behavior in quantum field theory. Phys. Rev., 1960, **118**, № 3, 838—849 (РЖМат, 1962, 8Б380)
263. —, Reynman rules for any spin. Phys. Rev. B., 1964, **133**, № 5, 1318—1332
264. **Westwater M. J.**, On the renormalisation of Feynman integrals. Fortschr. Phys., 1969, **17**, № 1, 1—71 (РЖМат, 1969, 10Б361)
265. **Wilde I. F.**, The free Fermion as a Markov field. J. Funct. Anal., 1974, **15**, № 1, 12—21 (РЖМат, 1974, 7Б948)
266. **Williams D. N.**, Euclidean Fermi fields with a Hermitean Feynman—Kac—Nelson formula. I. Communs Math. Phys., 1974, **38**, № 1, 65—80 (РЖМат, 1975, 3Б862)
267. **Wilson K. G.**, Zimmermann W., Operator product expansions and composite field operators in the general frame work of quantum field theory. Communs Math. Phys., 1972, **24**, № 2, 87—106 (РЖМат, 1972, 6Б828)
268. **Wreszinski W. F.**, Goldstone's theorem for quantum spin systems of finite range. J. Math. Phys., 1976, **17**, № 1, 109—111
269. **Yao T. H.**, The connection between an Euclidean Gauss Markov vector field and the real proca Wightman field. Communs Math. Phys., 1975, **41**, № 3, 267—271 (РЖМат, 1975, 12Б658)
270. **Zimmermann W.**, Convergence of Bogoliubov's method of renormalisation in momentum space. Communs Math. Phys., 1969, **15**, № 3, 208—234 (РЖМат, 1970, 7Б523)
271. —, Composite operators in the perturbation theory of renormalizable interactions. Ann. Phys., 1973, **77**, № 1-2, 536—569 (РЖМат, 1974, 1Б414)
272. —, Normal products and the short distance expansion in the perturbation theory of renormalizable interactions. Ann. Phys., 1973, **77**, № 1-2, 570—601 (РЖМат, 1974, 1Б415)