СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубчанинов В.Г.* Теория процессов, полная и неполная пластичность сплошных сред и постулат изотропии А.А. Ильюшина // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела: Мат-лы VII Междунар. науч. симп. Тверь, 16–17 декабря 2010 г. Тверь: Изд-во ТвГТУ, 2011. 30–49.
2. *Зубчанинов В.Г.* Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определимости и изотропии А.А. Ильюшина // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 5. 29–46.
3. *Prager W.* Introduction to Mechanics of Continua. 3th ed. N.Y.: Dover Publ., 2004.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации. М.: Логос, 2004.
5. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2014.
6. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986.

Поступила в редакцию
11.11.2020

УДК 510

РЕЗОНАНС В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

А. А. Лыков[1], В. А. Малышев[2], М. В. Меликян[3]

Рассматривается система многих точечных частиц с произвольным квадратичным взаимодействием и синусоидальной силой, действующей на одну фиксированную частицу. Найдены необходимые и достаточные условия резонанса и равномерной ограниченности траекторий частиц, а также в случае резонанса — асимптотика максимума энергии системы при больших временах.

Ключевые слова: неравновесная статистическая физика, резонанс, многочастичные системы, спектр, ограниченные траектории.

We consider large systems of point particles with arbitrary quadratic interaction and harmonic force acting on one fixed particle. Necessary and sufficient conditions for resonance and for uniform boundedness of trajectories are obtained. In the case of resonance, we obtained the large time asymptotics for energy maxima.

Key words: non-equilibrium statistical physics, resonance, many particle systems, spectrum, bounded trajectories.

П.Л. Чебышёв был величайшим математиком XIX века. Более того, он был всесторонним ученым: анализ, вероятность, теория чисел, а также изучение структуры и конструирование различных механизмов. Мы приносим ему дань глубокого уважения и жалеем, что сейчас он не может непосредственно помочь развитию математики.

Настоящая статья возникла в рамках пока необъятного проекта под названием "Структура классической математической физики". Одна из задач этого проекта — выяснить, какие макровыводы неравновесной статистической физики и механики сплошных сред можно получить (с идеальной математической строгостью) из классической механики больших систем точечных частиц. При этом мы рассматриваем взаимодействия между частицами только в рамках классических законов Ньютона, без всякой случайности (см. [1–3]). Необходимо также сказать о работах в физических журналах

---

[1] *Лыков Александр Андреевич* — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. лаб. больших случайных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: alekslyk@yandex.ru.

[2] *Малышев Вадим Александрович* — доктор физ.-мат. наук, проф., гл. науч. сотр. лаб. больших случайных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: 2malyshev@mail.ru.

[3] *Меликян Маргарита Врежовна* — асп. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mv.melikian@gmail.com.

Lykov Alexandr Andreevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Scientific Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Laboratory of Large Stochastic Systems.

Malyshev Vadim Aleksandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Laboratory of Large Stochastic Systems.

Melikian Margarita Vrezhovna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.

(см. [4] и ссылки там). Влияние внешней среды, конечно, можно считать случайным (см., например, [5]), но случайные силы лучше использовать после того, как будет изучено влияние внешних детерминированных сил.

1. Модель. Мы рассматриваем общую линейную систему N_0 точечных частиц в пространстве R^d с $N = dN_0$ координатами $q_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$. Обозначим

$$v_j = \frac{dq_j}{dt}, \quad p_j = m_j v_j, \quad j = 1, \ldots, N,$$

$$q = (q_1, \ldots, q_N)^T, \quad p = (p_1, \ldots, p_N)^T, \quad \psi(t) = (q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N)^T,$$

где m_j — масса той частицы, одна из координат (q_j) которой имеет индекс j. Далее будем считать все массы единичными. При этом потенциальная и кинетическая энергии системы имеют вид

$$U(\psi(t)) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant j,l \leqslant N} V_{j,l} q_j q_l = \frac{1}{2}(q, Vq), \quad T(\psi(t)) = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2} = \frac{1}{2}(p, p),$$

где $V = (V_{j,l})_{j,l}$ — положительно-определенная $(N \times N)$-матрица, а

$$(q, q') = \sum_{j=1}^{N} q_j q'_j$$

— скалярное произведение. Положительная определенность V необходима, чтобы (при отсутствии внешней силы) частицы не уходили на бесконечность. Кроме того, пусть на фиксированную частицу, имеющую координату q_n с фиксированным номером $n \in \{1, \ldots, N\}$, действует (в направлении этой координаты) внешняя гармоническая сила с амплитудой a и частотой колебаний ω. Тогда полная энергия системы имеет вид

$$H(\psi(t)) = U(\psi(t)) + T(\psi(t)) - a \sin(\omega t) q_n.$$

Таким образом, движение системы описывается следующей системой уравнений:

$$\ddot{q}_j = -\sum_l V_{j,l} q_l + a \sin(\omega t) \delta_{j,n}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

где $\delta_{j,n}$ — символ Кронекера. Перепишем это в гамильтоновом виде

$$\begin{cases} \dot{q_j} = p_j, \\ \dot{p_j} = -\sum\limits_l V_{j,l} q_l + a \sin(\omega t) \delta_{j,n} \end{cases}$$

и в векторном виде

$$\dot{\psi} = A_0 \psi + a \sin(\omega t) g_n, \tag{1}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

— $(2N \times 2N)$-матрица, E — единичная $(N \times N)$-матрица и

$$g_n = (0, \ldots, 0, e_n)^T \in \mathbb{R}^{2N}, \quad e_n = (\delta_{1,n}, \ldots, \delta_{N,n}).$$

Ввиду того что матрица V положительно определена и, значит, все ее собственные значения строго положительны, удобно далее обозначать их $a_k = \nu_k^2$, $k = 1, \ldots, N$, причем удобно считать, что все ν_k положительны. Соответствующую им систему собственных векторов обозначим через $\{u_k, k = 1, \ldots, N\}$. Далее всегда считаем эту систему ортонормированной.

Лемма 1. *Числа $\pm i\nu_1, \ldots, \pm i\nu_N$ — собственные значения матрицы A_0.*

Доказательство. Пусть $u = u_k$ — собственный вектор матрицы V, соответствующий собственному значению ν_k^2, $k = 1, \ldots, N$, т.е. $Vu = \nu_k^2 u$. Рассмотрим вектор $x_\pm = \begin{pmatrix} u \\ \lambda_\pm u \end{pmatrix}$, где $\lambda_\pm = \pm i\nu_k$. Тогда

$$A_0 x_\pm = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda_\pm u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_\pm u \\ -Vu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_\pm u \\ -\nu_k^2 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_\pm u \\ \lambda_\pm^2 u \end{pmatrix} = \lambda_\pm x_\pm,$$

т.е. $x_\pm$ — собственный вектор A_0, соответствующий собственному значению $\lambda_\pm = \pm i\nu_k$.

Лемма доказана.

2. Основные результаты.

Теорема 1. 1. *Пусть $\omega^2 \neq \nu_j^2$ ни для какого $j \in \{1, \ldots, N\}$, тогда для всех $j \in \{1, \ldots, N\}$ и для всех $t \geqslant 0$*

$$|q_j(t)| \leqslant A_j \beta\gamma, \quad |p_j(t)| \leqslant 2A_j\beta\omega,$$

$$\beta = \max_r \frac{1}{|\omega^2 - a_r|}, \tag{3}$$

$$\gamma = 1 + \omega \max_r \frac{1}{a_r}, \tag{4}$$

$$A_j = |a| \sum_{k=1}^{N} |(u_k, e_n)(u_k, e_j)|. \tag{5}$$

2. *Пусть $\omega^2 = \nu_l^2$ хотя бы для одного $l \in \{1, \ldots, N\}$. Тогда ограниченность $q_j(t)$, $p_j(t)$ на промежутке $t \in [0, \infty)$ имеет место тогда и только тогда, когда для этого j верно*

$$\sum_{k \in I(\omega)} (u_k, e_n)(u_k, e_j) = 0,$$

где $I(\omega) = \{j \in \{1, \ldots, N\} : \omega^2 = \nu_j^2\}$. В противном случае имеет место резонанс, т.е. для всех $j \in \{1, \ldots, N\}$

$$\liminf_{t\to+\infty} q_j(t) = -\infty, \quad \limsup_{t\to+\infty} q_j(t) = +\infty,$$

$$\liminf_{t\to+\infty} p_j(t) = -\infty, \quad \limsup_{t\to+\infty} p_j(t) = +\infty.$$

Теорема 2. *В случае резонанса существует положительная константа C, такая, что*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{T(\psi(t))}{t^2} = \limsup_{t\to+\infty} \frac{U(\psi(t))}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{H(\psi(t))}{t^2} = C,$$

при этом

$$C = \frac{a^2}{8} \sum_{k \in I(\omega)} (u_k, e_n)^2.$$

Замечание. Можно сказать, что при заданном значении ω резонанса не будет почти для всех положительно-определенных матриц V в следующем смысле. Обозначим через Ω_N множество всех положительно-определенных $(N \times N)$-матриц. Оно является открытым подмножеством в R^M, где $M = N + \frac{N^2-N}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$. Поэтому условие п. 1 теоремы 1 определяет в Ω_N подмножество с нулевой мерой Лебега.

В то же время заметим, что при заданном значении ω множество $\Omega(\omega)$ матриц, таких, что $\omega^2 = \nu_l^2$ хотя бы для одного $l \in \{1, \ldots, N\}$, является алгебраическим многообразием в R^M. И тогда условие (5) означает, что резонанс будет иметь место "почти для всех" V из $\Omega(\omega)$ в смысле индуцированной меры на $\Omega(\omega)$.

3. Доказательства. Решение уравнения (1) имеет вид (см. [6])

$$\psi(t) = e^{A_0 t}\Big(a \int_0^t \sin(\omega s) e^{-A_0 s} g_n ds + \psi(0)\Big). \tag{6}$$

Так как решение однородного уравнения с произвольными начальными условиями всегда ограничено, то для построения частного решения неоднородного уравнения достаточно рассматривать нулевые начальные условия:

$$\psi(0) = 0 \Longleftrightarrow q_j|_{t=0} = 0, \quad p_j|_{t=0} = 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Лемма 2. *Для матрицы* (2) *верно*

$$e^{A_0 t} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{V}t) & (\sqrt{V})^{-1}\sin(\sqrt{V}t) \\ -\sqrt{V}\sin(\sqrt{V}t) & \cos(\sqrt{V}t) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где косинус и синус матрицы вводятся аналогично матричной экспоненте, но с соответствующими рядами.

Доказательство. По индукции можно доказать, что

$$A_0^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k V^k & 0 \\ 0 & (-1)^k V^k \end{pmatrix}, \quad A_0^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k V^k \\ (-1)^{k+1} V^{k+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда можно записать:

$$e^{A_0 t} = \begin{pmatrix} A_{11} \, A_{12} \\ A_{21} \, A_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{11} = A_{22} = E + 0t + (-V)\frac{t^2}{2!} + 0\frac{t^3}{3!} + V^2\frac{t^4}{4!} + \ldots = \cos(\sqrt{V}t),$$

$$A_{12} = 0 + Et + 0\frac{t^2}{2!} - V\frac{t^3}{3!} + 0\frac{t^4}{4!} + V^2\frac{t^5}{5!} + \ldots =$$

$$= (\sqrt{V})^{-1}(0 + \sqrt{V}t + 0\frac{t^2}{2!} - V^{3/2}\frac{t^3}{3!} + 0\frac{t^4}{4!} + V^{5/2}\frac{t^5}{5!} + \ldots) = (\sqrt{V})^{-1}\sin(\sqrt{V}t),$$

$$A_{21} = 0 + (-V)t + 0\frac{t^2}{2!} + V^2\frac{t^3}{3!} + 0\frac{t^4}{4!} - V^3\frac{t^5}{5!} + \ldots =$$

$$= -\sqrt{V}(0 + \sqrt{V}t + 0\frac{t^2}{2!} - V^{3/2}\frac{t^3}{3!} + 0\frac{t^4}{4!} + V^{5/2}\frac{t^5}{5!} + \ldots) = -\sqrt{V}\sin(\sqrt{V}t).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из (6), (7) имеем явный вид $q(t)$, $p(t)$:

$$q(t) = a\int_0^t \sin(\omega s)(\sqrt{V})^{-1}\sin(\sqrt{V}(t-s))e_n\,ds,$$

$$p(t) = a\int_0^t \sin(\omega s)\cos(\sqrt{V}(t-s))e_n\,ds.$$

Разложим вектор e_n по базису из собственных векторов матрицы V:

$$e_n = \sum_{k=1}^N (u_k, e_n)u_k.$$

Тогда так как

$$(\sqrt{V})^{-1}u_k = \frac{1}{\nu_k}u_k,\ \sin(\sqrt{V}t)u_k = u_k\sin(\nu_k t), \cos(\sqrt{V}t)u_k = u_k\cos(\nu_k t),$$

то

$$q(t) = a\sum_{k=1}^N (u_k, e_n)\left(\int_0^t \sin(\omega s)\frac{\sin(\nu_k(t-s))}{\nu_k}\,ds\right)u_k = a\sum_{k=1}^N (u_k, e_n)\frac{1}{\nu_k}\widetilde{q}_k(t)u_k, \tag{8}$$

$$p(t) = a\sum_{k=1}^{N}(u_k, e_n)\left(\int\limits_0^t \sin(\omega s)\cos(\nu_k(t-s))\,ds\right)u_k = a\sum_{k=1}^{N}(u_k, e_n)\widetilde{p}_k(t)u_k, \tag{9}$$

таким образом, вопрос об ограниченности свелся к вопросу ограниченности функций $\widetilde{q}_k(t)$ и $\widetilde{p}_k(t)$. Для тех $j \in \{1, \ldots, N\}$, для которых $\omega^2 \neq \nu_j^2$, имеем

$$\widetilde{q}_j(t) = \int\limits_0^t \sin(\omega s)\sin(\sqrt{a_j}(t-s))\,ds = \frac{1}{\omega^2 - a_j}(\omega\sin(\sqrt{a_j}t) - \sqrt{a_j}\sin(\omega t)),$$

$$\widetilde{p}_j(t) = \int\limits_0^t \sin(\omega s)\cos(\sqrt{a_j}(t-s))\,ds = \frac{\omega}{\omega^2 - a_j}(\cos(\sqrt{a_j}t) - \cos(\omega t)),$$

откуда получаем

$$|q_j(t)| = |(q, e_j)| = |a\sum_{k=1}^{N}(u_k, e_n)\frac{1}{\nu_k}\widetilde{q}_k(t)(u_k, e_j)| \leqslant A_j\beta\gamma,$$

где β определено в (3), γ — в (4), A_j — в (5). Аналогично

$$|p_j(t)| = |(p, e_j)| = |a\sum_{k=1}^{N}(u_k, e_n)\widetilde{p}_k(t)(u_k, e_j)| \leqslant 2A_j\beta\omega.$$

Для тех $j \in \{1, \ldots, N\}$, для которых $\nu_j^2 = \nu_l^2 = \omega^2$, имеем

$$\widetilde{q}_j(t) = \int\limits_0^t \sin(\omega s)\sin(\sqrt{a_j}(t-s))\,ds = \frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \frac{t\cos(\omega t)}{2},$$

$$\widetilde{p}_j(t) = \int\limits_0^t \sin(\omega s)\cos(\sqrt{a_j}(t-s))\,ds = \frac{t\sin(\omega t)}{2},$$

$$q_j(t) = (q, e_j) = a\sum_{k=1}^{N}(u_k, e_n)\frac{1}{\nu_k}\widetilde{q}_k(t)(u_k, e_j) =$$

$$= (a\sum_{k\in I(\omega)}(u_k, e_n)(u_k, e_j))(-\frac{t\cos(\omega t)}{2\omega}) + \underline{O}(1) = B_j(-\frac{t\cos(\omega t)}{2\omega}) + \underline{O}(1), \quad t \to +\infty,$$

где $I(\omega) = \{j \in \{1, \ldots, N\} : \omega^2 = \nu_j^2\}$.

Для функций $p_j(t)$ выкладка аналогична:

$$p_j(t) = (p, e_j) = a\sum_{k=1}^{N}(u_k, e_n)\widetilde{p}_k(t)(u_k, e_j) =$$

$$= (a\sum_{k\in I(\omega)}(u_k, e_n)(u_k, e_j))\frac{t\sin(\omega t)}{2} + \underline{O}(1) = B_j\frac{t\sin(\omega t)}{2} + \underline{O}(1), \quad t \to +\infty,$$

откуда следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Из (8), (9) ввиду ортогональности рассматриваемой системы собственных векторов имеем

$$U(\psi(t)) = \frac{a^2}{2}\sum_{k=1}^{N}(u_k, e_n)^2 a_k(\widetilde{q}_k(t))^2 = \frac{a^2}{2}\sum_{k\in I(\omega)}(u_k, e_n)^2\omega^2\left(\frac{t\cos(\omega t)}{2\omega}\right)^2 + \underline{O}(1) =$$

$$= \frac{a^2}{8} \sum_{k \in I(\omega)} (u_k, e_n)^2 t^2 \cos^2(\omega t) + \underline{O}(1), \quad t \to +\infty.$$

Аналогично

$$T(\psi(t)) = \frac{a^2}{2} \sum_{k=1}^{N} (u_k, e_n)^2 (\widetilde{p}_k(t))^2 = \frac{a^2}{2} \sum_{k \in I(\omega)} (u_k, e_n)^2 \left(\frac{t \sin(\omega t)}{2} \right)^2 + \underline{O}(1) =$$

$$= \frac{a^2}{8} \sum_{k \in I(\omega)} (u_k, e_n)^2 t^2 \sin^2(\omega t) + \underline{O}(1), \quad t \to +\infty,$$

$$H(\psi(t)) = U(\psi(t)) + T(\psi(t)) - a \sin(\omega t) q_n = C t^2 \cos^2(\omega t) + C t^2 \sin^2(\omega t) +$$

$$+ a B_n \frac{t \sin(2\omega t)}{4\omega} + \underline{O}(1) = C t^2 + \underline{O}(t), \quad t \to +\infty,$$

откуда следует утверждение теоремы 2.

4. Дальнейшие задачи и обобщения. Первое обобщение тривиально: если гармонические силы $f_j(t)$ действуют на каждую частицу j, то ввиду линейности можно взять сумму N вышеприведенных решений для каждой отдельной силы f_j. Следующие обобщения — произвольные и даже случайные $f_j(t)$. Какие из них дадут более реальную картину воздействия внешней среды на биологические объекты, также мало понятно.

В физике часто различают три вида сил: силы взаимодействия между частицами (interaction forces), внешние движущие силы (driving forces) и внешние диссипативные силы (dissipative forces). Четкого определения двух последних внешних сил нет, но они снижают общую энергию системы и, как правило, зависят от скорости частицы, на которую они действуют. И есть, конечно, много примеров. Самое важное обстоятельство, которое еще не исследовано, — это зависимость распространения резонанса от вида графа $G = G(V)$, определяемого матрицей V. В данном случае может помочь имеющаяся литература по спектральной теории графов (см., например, [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lykov A.A., Malyshev V.A.* Harmonic chain with weak dissipation // Markov Processes and Related Fields. 2012. **18**. 1–10.
2. *Лыков А.А., Малышев В.А., Чубариков В.Н.* Регулярные континуальные системы точечных частиц. I: Системы без взаимодействия // Чебышёвский сборник. 2016. **17**, № 3. 148–165.
3. *Lykov A.A., Malyshev V.A.* From N-body problem to Euler equations // Rus. J. Math. Phys. 2017. **24**, N 1. 79–95.
4. *Kuzkin V., Krivtsov A.* Energy transfer to a harmonic chain under kinematic and force loadings: Exact and asymptotic solutions // J. Micromech. and Mol. Phys.. 2018. **3**, N 1–2. 1850004.
5. *Lykov A.A., Malyshev V.A.* Convergence to Gibbs equilibrium — unveiling the mystery // Markov Processes and Related Fields. 2013. **19**. 643–666.
6. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: КомКнига, 2007.
7. *Brouwer A.E., Haemers W.H.* Spectra of graphs. Springer, 2009.

Поступила в редакцию
18.11.2020