ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1972

т. 202, № 3

Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 3

УДК 519. 217 МАТЕМАТИКА

В. А. МАЛЫШЕВ

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ И ПОЧТИ ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛУМАРТИНГАЛЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 VI 1971)

В ([1]) аналитическими методами были получены условия эргодичности для некоторых случайных блужданий в положительном квадранте плоскости. В связи с этим А. Н. Колмогоровым был задан * вопрос, нельзя ли получить эти результаты чисто вероятностными методами. В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос в существенно более общей ситуации. В частности, ослабляется условие ограниченности скачков, однородности, марковости. Получены также условия транзиентности соответствующих случайных блужданий. Метод допускает очевидное обобщение на случай непрерывного времени и пространства состояний, а некоторые построения можно провести и для случая числа измерений, большего двух.

Основой работы является объясняемое ниже геометрически наглядное построение полумартингала, являющегося «почти линейной» функцией на множестве состояний соответствующей цепи Маркова.

1. Формулировка основного результата. Рассмотрим однородную цепь Маркова $\mathscr{L}$ с дискретным временем, множеством состояний которой является множество $\mathbf{Z}_{++}=\{(i,j):\ i,\ j\geqslant 0$ целые$\}$. Будем обозначать через $M^{ij}=(M_x^{ij}, M_y^{ij})$ вектор среднего скачка за один шаг из точки (i,j) с компонентами M_x^{ij} вдоль оси x и M_y^{ij} вдоль оси y. Будет предполагаться выполненным следующее условие однородности: $M^{ij}=M^{kl}=M=(M_x, M_y)$, если $i, j, k, l\geqslant 1$; $M^{i0}=M^{k0}=M'=(M_x', M_y')$ для $i, k\geqslant 1$ и $M^{0i}=M^{0k}=M''$ для $i, k\geqslant 1$. Это условие может, конечно, нарушаться в конечном числе точек, но удобно предположить, что все состояния нашей цепи Маркова сообщаются между собой, $M_y', M_x''\neq 0$ и скачки за один шаг равномерно ограничены.

Теорема 1. A) *Если $M_x>0$, $M_y\geqslant 0$, то не существует стационарного распределения;*

B) *если $M_x, M_y<0$, то $\mathscr{L}$ эргодична* **, *если и только если*

$$M_xM_y'-M_yM_x'<0,\quad M_yM_x''-M_xM_y''<0; \tag{1}$$

возвратна, если

$$M_xM_y'-M_yM_x'\leqslant 0,\quad M_yM_x''-M_xM_y''\leqslant 0, \tag{2}$$

и транзиентна в остальных случаях;

C) *если $M_x\geqslant 0$, $M_y<0$, то $\mathscr{L}$ эргодична, если и только если*

$$M_xM_y'-M_yM_x'<0; \tag{3}$$

возвратна, если

$$M_xM_y'-M_yM_x'\leqslant 0, \tag{4}$$

и транзиентна в остальных случаях;

* На секции теории вероятностей Московского математического общества.

** Ненулевые возвратные периодические цепи считаются эргодическими (задача вычисления периода тривиальна).

Д) *симметричен случаю* С).

Тем самым в случаях В) — Д) дается полная классификация соответствующих цепей Маркова. Первый шаг доказательства — лемма о полумартингалах — показывает, что марковость несущественна в некотором не уточняемом здесь смысле.

2. Лемма о полумартингалах. Пусть дана последовательность случайных величин $S_0, S_1, S_2, \ldots$, причем с вероятностью 1 разности $S_i - S_{i-1}$ равномерно ограничены по модулю и $S_0 = \text{const}$. Обозначим через t случайное время первого достижения неотрицательной полуоси, т. е. $t = 0$, если $S_0 \leqslant 0$, и $t = n$, если $S_n \leqslant 0$, $S_i > 0$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Лемма 1. 1) *Если для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$M(S_n / S_{n-1}, \ldots, S_0) \leqslant S_{n-1} - \varepsilon, \tag{5}$$

то $Mt < \infty$.

2) *Если для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$M(S_n / S_{n-1}, \ldots, S_0) \geqslant S_{n-1} + \varepsilon, \tag{6}$$

то $t = \infty$ *с вероятностью* 1.

3) *Если*

$$M(S_n / S_{n-1}, \ldots, S_0) = 0, \tag{7}$$

то $Mt = \infty$.

Доказательство этих утверждений основано на стандартной вероятностной технике, и мы его опускаем.

3. Полумартингалы, ассоциированные с цепями Маркова. Пусть дана цепь Маркова со счетным множеством состояний A, одним существенным классом состояний и переходными вероятностями $p_{\alpha\beta}$. Пусть $f(\alpha)$ — вещественная функция на A такая, что $f(\alpha) > c > -\infty$.

Следствие 1. *Пусть для некоторого* $c_1 > c$ *множество состояний таких, где* $c_1 > f(\alpha) > c$, *конечно и для любого* $\alpha \in A$ *такого, что* $f(\alpha) \geqslant c_1$, *имеет место*

$$\sum_{\beta} p_{\alpha\beta} f(\beta) \leqslant f(\alpha) - \varepsilon \tag{8}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

Тогда цепь Маркова эргодична.

В несколько измененной формулировке это следствие было известно ([2]); в ряде работ такие функции f называются функциями Ляпунова (см., например, ([3])).

Утверждения 2 и 3 леммы 1 также имеют соответствующие следствия. Вместо условий (6) и (7) имеют место соответственно

$$\sum p_{\alpha\beta} f(\beta) \geqslant f(\alpha) + \varepsilon; \tag{9}$$

$$\sum p_{\alpha\beta} f(\beta) \geqslant f(\alpha). \tag{10}$$

4. Принцип локальной ε-линейности. Пусть A есть подмножество эвклидова пространства R^n и $f(\alpha)$ индуцирована некоторой функцией $f(x)$ на R^n. Обозначим через D_c^- множество $\{x\colon f(x) < c, x \in R^n\}$ и $D_c^+ = \{x\colon f(x) > c\}$.

Пусть длины (в R^n) скачков за один шаг из α ограничены некоторым числом d_α. Для точки $\alpha \in A \subset R^n$ обозначим через C_α выпуклую оболочку множества точек $\beta \in A$, для которых $\|\alpha - \beta\| \leqslant d_\alpha$.

Если функция f линейна, то условия (8), (9) и (10) выполнены тогда и только тогда, когда вектор среднего скачка за один шаг, отложенный из α, соответственно направлен в сторону $D^-_{f(\alpha)}$, лежит в гиперплоскости $f(x) = f(\alpha)$ или направлен в сторону $D^+_{f\,\alpha}$.

Если конец вектора среднего скачка, отложенного из α, принадлежит множеству $D^{-}_{f(\alpha)-5\varepsilon}$

$$\inf_{\varphi} \sup_{\|\tilde{\alpha}-\alpha\|\leqslant d_\alpha} |f(\tilde{\alpha})-\varphi(\tilde{\alpha})| \leqslant \varepsilon,$$

где inf берется по всем линейным функциям φ, то условие (8) выполняется.

Это последнее утверждение, а также аналогичное ему для случая вектора среднего скачка, направленного в сторону $D^{f(\overset{+}{\alpha})}$, будем называть принципом ε-линейности. Его значение заключается в том, что вместо выполнения условия (8) требуется выполнение геометрически наглядного условия трансверсальности поля векторов среднего скачка и линий уровня функции f.

5. Построение ε-линейных полумартингалов. Мы покажем здесь, как склеиваются локально ε-линейные куски в доказательстве основной теоремы при построении искомой функции f. Это склеивание производится в разных случаях различными способами.

Пусть сначала $M_x > 0$, $M_y < 0$ и выполнено условие (3). Обозначим через e_x и e_y единичные векторы, направленные соответственно по оси x и y. Углы между M и e_x и между $-M'$ и e_x обозначим соответственно φ и φ'. Очевидно,

$$\operatorname{tg}\varphi = -M_y/M_x > \operatorname{tg}\varphi' = M_y'/|M_x'|, \quad \varphi > \varphi'. \tag{11}$$

Проведем параллельные прямые, пересекающиеся с осью x под углом ψ, $\varphi > \psi > \varphi'$ (т. е. чуть повернутые прямые, параллельные вектору M). Рассмотрим линейную функцию f_ψ, линиями уровня которой являются эти параллельные прямые. Из (11) очевидно, что M и M' направлены в сторону $D^{-}_{f_\psi}$ (будем считать, что $f_\psi > 0$ с точностью до аддитивной константы на $\mathbf{Z}_{++}$). Если кроме того и вектор M'' направлен в сторону D_{f_ψ}, то доказательство закончено. В общем случае построение усложняется. Рассмотрим окружность O достаточно большого радиуса $1/\delta$ с центром в нижней полуплоскости и пересекающуюся с положительной полуосью y под углом $\varphi''-\delta$, где φ'' — угол между M'' и e_y (направление на окружности будем считать по часовой стрелке).

Для данной точки $(0, y)\in R_{++}{}^2$ рассмотрим кривую $l_y \in R_{++}{}^2$. Она состоит из куска сдвинутой в направлении e_y окружности O, пересекающегося с осью y под углом $\varphi''-\delta$, до точки r_y, где r_y — точка, в которой касательная к этой окружности направлена под углом ψ к e_x. Далее, l_y образована отрезком прямой, параллельной этой касательной от точки r_y до пересечения с положительной полуосью x. Ясно, что начиная с некоторого $y > 0$, такая точка r_y существует.

Определим функцию $f(r) = y$ при $r \in l_y \subset R_{++}{}^2$. Из построения ясно, что принцип локальной ε-линейности выполняется. Поэтому случайное блуждание в данном случае эргодично.

При $M_xM_y' - M_yM_x' > 0$ линии уровня оказываются выпуклыми в противоположную сторону. В случае $M_xM_y' - M_yM_x' = 0$ система прямых выбирается строго параллельной вектору $M(M')$. При доказательстве возвратности система окружностей такая же, как в первом случае, а при доказательстве отсутствия эргодичности — такая же, как во втором.

При доказательстве транзиентности в случае В) ограниченность снизу функции f не обязательна. В остальном доказательства проводятся вполне аналогично.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Малышев, Случайные блуждания. Уравнения Винера — Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа, М., 1970. [2] F. G. Foster, Ann. Math. Stat., 24, 355 (1953). [3] Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных изменениях их параметров, «Наука», 1969.

Dokl. Akad. Nauk SSSR
Tom 202 (1972), No. 3

Soviet Math. Dokl.
Vol. 13 (1972), No. 1

CLASSIFICATION OF TWO-DIMENSIONAL POSITIVE RANDOM WALKS AND ALMOST LINEAR SEMIMARTINGALES

UDC 519.217

V. A. MALYŠEV

Conditions for ergodicity of some random walks in the positive quadrant of the plane were obtained by analytic methods in [1]. In connection with this, A. N. Kolmogorov posed(1) the question of whether it is possible to obtain these results by purely probabilistic methods. The present work gives an affirmative answer to this question in a substantially more general situation. In particular, the conditions of boundedness of the jumps, homogeneity, and Markovness are relaxed. Conditions for the transiency of the corresponding random walks are also obtained. The method admits of an obvious generalization to the case of continuous time and state space, and some of the constructions can also be done for the case, dimension greater than two.

The work is based on the descriptive geometrical construction, explained below, of a semimartingale which is an "almost linear" function on the set of states of the corresponding Markov chain.

1. Formulation of the fundamental results. We consider a homogeneous Markov chain $\mathfrak{L}$ with discrete time, the set of states of which is the set $\mathbf{Z}_{++} = \{(i, j)\colon i, j \geq 0$ integers$\}$. We shall denote by $M^{ij} = (M_x^{ij}, M_y^{ij})$ the vector, with x-component M_x^{ij} and y-component M_y^{ij}, of the mean jump for one step from the point (i, j). It will be assumed to satisfy the following homogeneity condition: $M^{ij} = M^{kl} = M = (M_x, M_y)$ if $i, j, k, l \geq 1$; $M^{i0} = M^{k0} = M' = (M_x', M_y')$ for $i, k \geq 1$ and $M^{0i} = M^{0k} = M''$ for $i, k \geq 1$. This condition can, of course, be violated at a finite number of points, but it will be convenient to assume that all states of our Markov chain are communicated among themselves, $M_y', M_x'' \neq 0$, and that the jumps for one step are uniformly bounded.

Theorem 1. A) *If $M_x > 0$, $M_y \geq 0$, then there exists no stationary distribution*;
B) *if $M_x, M_y < 0$, then $\mathfrak{L}$ is ergodic*(2) *if and only if*

$$M_xM_y' - M_yM_x' < 0, \quad M_yM_x'' - M_xM_y'' < 0; \tag{1}$$

increasing if

$$M_xM_y' - M_yM_x' \leqslant 0, \quad M_yM_x'' - M_xM_y'' \leqslant 0, \tag{2}$$

and transient in the remaining cases;

AMS 1970 *subject classifications*. Primary 60G45, 60J15, 60J05, 60J10; Secondary 60J25.

(1) In the probability theory section of the Moscow Mathematical Society.

(2) Nontrivial increasing periodic chains are considered to be ergodic (the problem of calculating the period is trivial).

C) *if* $M_x \geq 0$, $M_y < 0$, *then* $\mathfrak{L}$ *is ergodic if and only if*

$$M_x M'_y - M_y M'_x < 0; \tag{3}$$

increasing if

$$M_x M'_y - M_y M'_x \leqslant 0, \tag{4}$$

and transient in the remaining cases;

D) *is symmetric to case* C).

By the same token, cases B)–D) give a complete classification of the corresponding Markov chains. The first step of the proof—a lemma on semimartingales—shows that the Markov condition is immaterial in a sense not precisely defined here.

2. Lemma on semimartingales. Let there be given a sequence of random variables $S_0, S_1, S_2, \cdots$, where, with probability 1, the differences $S_i - S_{i-1}$ are uniformly bounded in absolute value, and $S_0 = \text{const}$. We denote by t the random time of first hitting the nonnegative semiaxis, i.e., $t = 0$ if $S_0 \leq 0$, and $t = n$ if $S_n \leq 0$, $S_i > 0$ for $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

Lemma 1. 1) *If, for some* $\epsilon > 0$,

$$M(S_n / S_{n-1}, \ldots, S_0) \leqslant S_{n-1} - \varepsilon, \tag{5}$$

then $Mt < \infty$.

2) *If, for some* $\epsilon > 0$,

$$M(S_n / S_{n-1}, \ldots, S_0) \geqslant S_{n-1} + \varepsilon, \tag{6}$$

then $t = \infty$ *with probability* 1.

3) *If*

$$M(S_n / S_{n-1}, \ldots, S_0) = 0, \tag{7}$$

then $Mt = \infty$.

The proof of these assertions is based on standard probabilistic techniques and will be omitted here.

3. Semimartingales associated with Markov chains. Let there be given a Markov chain with a countable set of states A, some essential class of states, and transition probabilities $p_{\alpha\beta}$. Let $f(\alpha)$ be a real function on A such that $f(\alpha) > c > -\infty$.

Corollary 1. *Let, for some* $c_1 > c$, *the set of states such that* $c_1 > f(\alpha) > c$ *be finite and, for any* $\alpha \in A$ *such that* $f(\alpha) \geq c$,

$$\sum_{\beta} p_{\alpha\beta} f(\beta) \leqslant f(\alpha) - \varepsilon \tag{8}$$

hold for some $\epsilon > 0$.

Then the Markov chain is ergodic.

This corollary was previously known [2] in a slightly different form; also, in a series of works (see [3] for example) the functions f are called Ljapunov functions.

Assertions 2 and 3 of Lemma 1 also have corresponding corollaries. Instead of conditions (6) and (7), the relations

$$\sum p_{\alpha\beta} f(\beta) \geqslant f(\alpha) + \varepsilon, \tag{9}$$
$$\sum p_{\alpha\beta} f(\beta) \geqslant f(\alpha) \tag{10}$$

will hold.

4. The principle of local ϵ-linearity. Let A be a subset of Euclidean space R^n and $f(\alpha)$ be induced by some function $f(x)$ on R^n. We shall denote by D_c^- the set $\{x: f(x) < c, x \in R^n\}$ and $D_c^+ = \{x: f(x) > c\}$.

Let the lengths (in R^n) of the jumps for one step from α be bounded by some number d_α. For the point $\alpha \in A \subset R^n$ we denote by C_α the convex hull of the points $\beta \in A$ for which $\|\alpha - \beta\| \leq d_\alpha$.

If the function f is linear, then conditions (8), (9) and (10) are satisfied if and only if the vector of the mean jump for one step (emanating) from α is respectively, directed toward the side $D^-_{f(\alpha)}$, lies in the hyperplane $f(x) = f(\alpha)$, or is directed toward the side $D^+_{f(\alpha)}$.

If the end of the vector of the mean jump (emanating) from α belongs to the set $D^-_{f(\alpha)-5\epsilon}$,

$$\inf_{\varphi} \sup_{\|\tilde{\alpha}-\alpha\| \leqslant d_\alpha} |f(\tilde{\alpha}) - \varphi(\tilde{\alpha})| \leqslant \varepsilon,$$

where inf is taken over all linear functions ϕ, then condition (8) is satisfied.

This last assertion, along with its analogue in the case when the mean jump vector is directed toward the side $D^+_{f(\alpha)}$, will be called the *principle of ϵ-linearity*. Its significance lies in the fact that instead of requiring that condition (8) be satisfied, it is required that the descriptive geometric condition of transversality of the field of mean jump vectors and the level curves of the function f be satisfied.

5. Construction of ϵ-linear semimartingales. We shall show here how locally ϵ-linear pieces are pasted together in the proof of the fundamental theorem to construct the desired function f. This pasting is done in different cases by different methods.

Let $M_x > 0$, $M_y < 0$ initially, and condition (3) be satisfied. We denote by e_x and e_y the unit vectors directed respectively along the x and y axes. The angles between M and e_x and between $-M'$ and e_x will be denoted respectively by ϕ and ϕ'. Obviously,

$$\operatorname{tg} \varphi = -M_y / M_x > \operatorname{tg} \varphi' = M_y' / |M_x'|, \quad \varphi > \varphi'. \tag{11}$$

We draw parallel lines intersecting the x-axis in an angle ψ, $\phi > \psi > \phi'$ (i.e., slightly turned, the lines will be parallel to the vector M). We consider the linear function f_ψ, the level curves of which are these parallel lines. It is obvious from (11) that M and M' are directed toward the side $D^-_{f_\psi}$ (we shall consider $f_\psi > 0$ to within an additive constant on $\mathbf{Z}_{++}$). If in addition the vector M'' is directed toward the side $D^-_{f_\psi}$, then the proof is finished. In the general case, the construction is more complicated. We consider a circumference O of sufficiently large radius $1/\delta$ with center in the lower half plane and intersecting the positive y-axis in the angle $\phi'' - \delta$, where ϕ'' is the angle between M'' and e_y (the positive direction along the circumference will be considered to be in the clockwise sense).

For a given point $(0, y) \in R^2_{++}$, we consider a curve $l_y \subset R^2_{++}$. It consists of a piece of the circumference O shifted in the e_y direction and intersecting the y-axis in the angle $\phi'' - \delta$ at the point r_y, where r_y is the point at which the tangent to this circumference makes the angle ψ with e_x. In addition, l_y is formed by the segment of the line parallel to this tangent from the point r_y up to its intersection with the positive x-axis. It is clear that if we start with some $y > 0$, such an r_y exists.

We define the function $f(r) = y$ for $r \in l_y \subset R^2_{++}$. It is clear from the construction that the principle of local ϵ-linearity is satisfied. Therefore the random walk in this case is ergodic.

For $M_x M'_y - M_y M'_x > 0$, the level curves turn out to be convex in the opposite case. In case $M_x M'_y - M_y M'_x = 0$, the system of lines is chosen to be strictly parallel to the vector M (M'). For the proof that $\mathfrak{L}$ is increasing, the system of circumferences is as in the first case, and for the proof of nonergodicity is as in the second.

For the proof of transiency in case B), the boundedness below of the function f is not necessary. For the rest, the proof is carried out completely analogously.

Moscow State University

Received 3/JUNE/71

BIBLIOGRAPHY

[1] V. A. Malyšev, *Random walks. Wiener-Hopf equations in quarter-plane, Galois automorphisms*, Moscow, 1970. (Russian)

[2] F. G. Foster, Ann. Math. Statist. 24 (1953), 355. MR 15, 44.

[3] R. Z. Has'minskiĭ, *Stability of systems of differential equations under random perturbations of their parameters*, "Nauka", Moscow, 1969. (Russian) MR 41 #3925.

Translated by:
E. Nishiura