АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том XXXIV

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА · 1989

3. *Гихман И. И.* Об одном уточнении закона больших чисел.— Матем. сб., Киев. ун-т, 1952, № 6, с. 59—65.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Успехи матем. наук, 1957, т. 12, в. 5, с. 3—122.
5. *Васильева А. Б.* О развитии обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной за период 1966—1976 гг.— Успехи матем. наук, 1976, т. 31, в. 6, с. 102—122.
6. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. Киев: Наукова думка, 1975, 138 с.
7. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений. Киев: Наукова думка, 1981, 240 с.
8. *Шуренков В. М.* К теории марковского восстановления.— Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. XXIX, в. 2, с. 248—263.

Поступила в редакцию
23.I.1987
Переработанный вариант
20.V.1988

О НЕКОТОРЫХ РАБОТАХ ПО ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ НА КАФЕДРЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МГУ

МАЛЫШЕВ В. А., СИНАЙ Я. Г.[1]

I. Эргодическая теория. Эргодическая теория начала развиваться на механико-математическом факультете МГУ в конце двадцатых — начале тридцатых годов. Одной из первых публикаций была работа А. Я. Хинчина [1], содержавшая метрическое доказательство эргодической теоремы Биркгофа. Эта теорема впоследствии стала часто называться теоремой Биркгофа-Хинчина. А. Н. Колмогоров в [2] предложил несколько упрощенное доказательство этой теоремы. В те годы широко обсуждались и топологические аспекты теории динамических систем благодаря выходу на русском языке в 1941 году книги Г. Биркгофа «Динамические системы» под редакцией А. А. Маркова, В. В. Немыцкого и В. В. Степанова.

В сороковых годах появился ряд ярких, но, в целом, все же изолированных работ, относящихся к эргодической теории. Обзорная статья В. А. Рохлина [3] содержала изложение основ теории сохраняющих меру преобразований пространств Лебега. Сам термин «пространство Лебега» и теория измеримых разбиений, ставшие через несколько лет едва ли не самыми распространенными терминами эргодической теории, появились в несколько более ранней работе Рохлина [4]. Докторская диссертация С. В. Фомина, защищенная в начале пятидесятых годов, состояла из двух работ. В первой из них [5], выполненной под влиянием А. Н. Колмогорова, изучался спектр динамических систем, отвечающих гауссовским стационарным процессам. В этой работе были получены критерии эргодичности и перемешивания в терминах спектральной меры процесса, составляющие содержание теоремы, называемой иногда теоремой Маруямы — Фомина. Второй работой была классическая работа И. М. Гельфанда и С. В. Фомина [6], где с помощью теории унитарных представлений вычислялся спектр геодезических потоков на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Там же было введено понятие потока на однородных пространствах. Теория таких потоков позже превратилась в важный раздел эргодической теории.

Бурное развитие эргодической теории началось со знаменитой работы А. Н. Колмогорова [7], где впервые в исследования динамических систем были внесены идеи теории информации.

[1] П. 1, 2 соответствуют тексту доклада, прочитанного Я. Г. Синаем на юбилейной конференции, посвященной 50-летию кафедры теории вероятностей МГУ, п. 3 написан В. А. Малышевым.

Современное изложение основных результатов [7] можно сделать достаточно быстро. Пусть $\xi = \{\ldots, \xi_{-n}, \ldots, \xi_0, \ldots, \xi_m, \ldots\}$ — последовательность случайных величин, образующая эргодический стационарный в узком смысле случайный процесс. Предполагается, что значения случайных величин принадлежат конечному множеству $X = \{x_i\}$. Тогда из известной теоремы Макмиллана [8] вытекает существование предела

$$h = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{n}\sum_{x_1,\ldots,x_n} \mathbf{P}\{\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n\} \ln \mathbf{P}\{\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n\}\right],$$

называемого энтропией на единицу времени стационарного процесса ξ. Допустим теперь, что $f(\ldots, \xi_{-n}, \ldots, \xi_0, \ldots, \xi_m, \ldots)$ — измеримая функция со значениями в конечном множестве Y. Мы можем с помощью нее построить новый стационарный процесс $\eta = \{\ldots, \eta_{-n}, \ldots, \eta_0, \ldots, \eta_m, \ldots\}$, где $\eta_k = f(\ldots, \xi_{-n+k}, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_{k+m}, \ldots)$, которому отвечает своя энтропия на единицу времени h'. Оказывается, что $h' \leqslant h$; если же переход от ξ к η обратим, т. е. с вероятностью 1 по реализации процесса η восстанавливается реализация процесса ξ, то $h' = h$.

Если ξ, η — последовательности независимых случайных величин, то $h = -\sum_i \mathbf{P}\{\xi_0 = x_i\} \ln \mathbf{P}\{\xi_0 = x_i\}$, $h' = \sum_j \mathbf{P}\{\eta_0 = y_j\} \ln \mathbf{P}\{\eta_0 = y_j\}$, и обратимый переход от одной последовательности независимых случайных величин к другой такой последовательности возможен только при условии $h = h'$. Тем самым А. Н. Колмогоров дал отрицательное решение классической проблемы метрического изоморфизма динамических систем, показав, что существуют автоморфизмы пространства Лебега со счетнократным лебеговским спектром, метрически неизоморфные между собой. Более того, до работы Колмогорова [7] при анализе проблемы метрического изоморфизма преобладал спектральный подход, восходящий к работе Дж. фон Неймана [9]. Теперь же проблема метрического изоморфизма приобрела вид проблемы кодирования, точнее, стационарного кодирования, поскольку функция f, задающая переход от ξ к η, может восприниматься как стационарная кодировка процесса ξ в процесс η.

Для последовательности независимых случайных величин сразу же возник весьма интригующий обратный вопрос о том, вытекает ли из равенства $h' = h$ существование функции f, задающей взаимно-однозначную кодировку ξ в η. Первый результат здесь был получен Л. Д. Мешалкиным, бывшим в те годы аспирантом А. Н. Колмогорова, который в [10] привел конкретные нетривиальные примеры стационарной кодировки (так называемый «пример Мешалкина», см. [10], [17]). В [11] было показано, что для любой эргодической стационарной последовательности ξ и любого распределения вероятностей $\{p_j\}$, $-\sum p_j \ln p_j = h' \leqslant h$, можно найти такую функцию f, что случайные величины $\{\eta_k\}$ независимы и имеют распределение $\{p_j\}$. Полное решение проблемы изоморфизма для последовательностей независимых случайных величин было получено Д. Орнстейном [12], показавшим, в частности, что равенство $h' = h$ достаточно для существования взаимно-однозначного (mod 0) перехода от ξ к η.

В [7] А. Н. Колмогоров предложил также понятие квазирегулярной динамической системы или, по принятой позже терминологии, К-системы (К — в честь Колмогорова). К-система есть аналог стационарного процесса, удовлетворяющего закону «0—1».

Одна из особенностей эргодической теории состоит в том, что стационарные процессы, возникающие в приложениях эргодической теории к гладким динамическим системам, представляют собой стационарные процессы с дискретным вмешательством случая. В таких процессах случайная точка остается в фиксированном состоянии случайное положительное время, после чего скачком меняет свое состояние. Для таких процессов Б. М. Гуревич в [13] нашел полезные условия квазирегулярности.

Важность понятия К-системы состоит в том, что, как оказалось впоследствии, к этому классу принадлежат многие динамические системы, порожденные системами обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе и физического происхождения. В последние годы теорию, изучающую соответствующие вопросы, называют иногда теорией динамического хаоса. В пределах данной статьи нет возможности остановиться на этом более подробно. Мы опишем только несколько полученных здесь результатов теоретико-вероятностного характера.

Рассмотрим последовательность n-мерных действительных случайных величин $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ с определителем 1, образующих стационарный в узком смысле эргодический случайный процесс. Предположим, что $\int \ln \| A_i \| \, d\mathbf{P} < \infty$. В работе В. И. Оселедца [14] была доказана следующая важная теорема.

Теорема. *Существуют такие постоянные $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k$, зависящие лишь от распределения вероятностей* $\mathbf{P}$, *что с* $\mathbf{P}$*-вероятностью 1 найдется фильтрация n-мерного пространства $R^n = L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_k$ такая, что*

1) $\dim L_i$ *постоянна почти всюду*;

2) *для всякого* $v \in L_i \setminus L_{i-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \| A_n A_{n-1} \ldots A_1 v \| = \lambda_i.$$

Близкое утверждение в несколько иных терминах было получено также В. М. Миллионщиковым [15]. Числа λ_i называются показателями Ляпунова. Такие произведения случайных матриц, естественно, возникают в теории гладких динамических систем. Пусть T — диффеоморфизм класса C^∞ гладкого n-мерного многообразия M класса C^∞ (предположение о бесконечной гладкости сделано ради простоты), сохраняющий гладкую меру. Рассмотрим индуцированное отображение касательных пространств $\mathcal{T}_x \to \mathcal{T}_{Tx}$, задаваемое дифференциалом dT отображения T. При фиксации системы координат дифференциал dT также можно считать случайной матрицей. К произведению таких матриц применима теорема Оселедца, из которой следует существование показателей Ляпунова для эргодических компонент гладкого преобразования T.

Возьмем произвольное конечное разбиение $\alpha = (C_1, C_2, \ldots C_r)$ пространства M. Тогда ему можно сопоставить последовательность случайных величин $\xi_i = \xi_i(x)$, определяемых соотношением: $\xi_i(x) = k$, если $T^i x \in C_k$, $1 \leqslant k \leqslant r$, $-\infty < i < \infty$. Инвариантность меры эквивалентна тому, что эта последовательность образует стационарный в узком смысле случайный процесс. Рассмотрим его энтропию на единицу времени h. Часто оказывается, что если α — достаточно мелкое разбиение, то h не зависит от α. Так определенная величина называется метрической энтропией диффеоморфизма T, поскольку она зависит от выбора инвариантной меры. Для широкого класса случаев h выражается через показатели Ляпунова по формуле $h = \Sigma^+ \ln \lambda_i$, где Σ^+ берется по $\lambda_i > 1$. Последнее выражение называется формулой Песина и доказано в [16] (см. также [17]). Величины типа энтропии и показателей Ляпунова можно приближенно находить на ЭВМ и даже измерять экспериментально (см. [17]). Они связаны с размерностными характеристиками инвариантных притягивающих множеств динамических систем типа странных аттракторов (см. [17]).

Основное свойство динамических систем, к которым применимы методы теории вероятностей,— это внутренняя неустойчивость их динамики. Важный пример такого рода систем образуют рассеивающие биллиарды, т. е. биллиарды в областях, граница которых строго выпукла (см. [18]). Представим себе, например, что на плоскости расположена периодическая конфигурация непересекающихся дисков с конечным горизонтом. Последнее означает, что для некоторой постоянной R любой прямолинейный отрезок длины R пересекает хотя бы один из дисков. В области между дисками с единичной скоростью движется материальная точка массы 1, отражающая от дисков по законам упругого удара. Из-за строгой выпуклости границы движение такой точки внутренне неустойчиво (газ Лоренца). В работе [19] была доказана следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что начальная точка* $(q(0), v(0))$ *имеет распределение вероятностей, задаваемое гладкой плотностью, сосредоточенной в ограниченной области. Пусть* $\mathbf{q}(t)$ — *смещение частицы за время* t. *Тогда* $\frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{q}(t)$ *подчиняется при* $t \to \infty$ *гауссовскому распределению вероятностей.*

Проблемы эргодической теории изучаются на семинаре, работающем более 25 лет при кафедре теории вероятностей. Одним из его руководителей был В. М. Алексеев вплоть до своей кончины в 1980 году.

II. Гиббсовские поля. Математические проблемы статистической механики привлекли внимание математиков — вероятностников в начале шестидесятых годов. Традиция изучения проблем статистической механики специалистами по теории вероятностей восходит к А. Я. Хинчину, монографии которого [20], [21] сыграли в свое время большую роль. В 1963 году Р. Л. Добрушин и Р. А. Минлос организовали семинар по этой тематике, а через два — три года появились первые публикации (см. [22]). Интересно отметить, что аналогичная деятельность примерно в то же время совершенно независимо возникла на Западе. Об этом свидетельствует выход в свет книги Д. Рюэлля [23], вскоре переведенной на русский язык.

Несомненно, центральным понятием, выкристаллизовавшимся из анализа моделей равновесной статистической механики, оказалось предельное распределение Гиббса. Оно было введено примерно одновременно в работах Р. Л. Добрушина [24] и О. Лэнфорда и Д. Рюэлля [25]. Для так называемых непрерывных разреженных систем близкое понятие было введено гораздо раньше в работе Н. Н. Боголюбова и Б. И. Хацета [26] (см. модифицированное изложение в [27]). Приведем определение предельного распределения Гиббса для важного класса решетчатых моделей. Предположим, что задана последовательность случайных величин ξ_n, $n = (n_1, \ldots, n_\nu) \in \mathbf{Z}^\nu$, принимающих значения из конечного множества X, и формальное выражение, называемое гамильтонианом, и имеющее вид $H = \sum\limits_{\langle n,\, m\rangle} \Phi(\xi_n, \xi_m)$. Обозначение $\langle n, m\rangle$ означает ближайших соседей решетки, для которых $\| n - m \| = 1$. С помощью H можно построить условные вероятности вида

$$\mathbf{P}\{\xi_n = x_n, n \in V \mid \xi_m = y_m, m \in \mathbf{Z}^\nu \setminus V\} =$$
$$= \frac{1}{\Xi} \exp\left\{- \sum_{\langle n,\, m\rangle,\, n,\, m \in V} \Phi(x_n, x_m) - \sum_{\substack{\langle n,\, m\rangle,\, m \in \mathbf{Z}^\nu \setminus V \\ n \in V}} \Phi(x_n, y_m)\right\}. \qquad (1)$$

Здесь Ξ — нормирующий множитель, называемый статистической суммой, V — произвольное конечное множество.

Определение 1. Совместное распределение вероятностей $\mathbf{P}$ случайных величин ξ_n называется предельным распределением Гиббса, если для любого конечного множества V условное распределение случайных величин ξ_n, $n \in V$ при фиксированных ξ_m, $m \in \mathbf{Z}^\nu \setminus V$, с $\mathbf{P}$-вероятностью 1 дается формулой (1).

Условие, выражаемое (1), называется часто ДЛР-условием (Добрушин, Лэнфорд, Рюэлль). При $\nu = 1$ предельные распределения Гиббса оказываются конечными однородными цепями Маркова. При $\nu > 1$ предельные распределения Гиббса можно рассматривать как цепи Маркова с многомерным временем. Имеются естественные обобщения определения 1 на случайные величины с непрерывными значениями и случайные поля с непрерывным временем. Непрерывные гиббсовские случайные поля широко применяются в квантовой теории поля (см. недавнюю книгу Глимма и Джаффе [28]).

Эргодическая теорема для конечных цепей Маркова показывает, что при естественных предположениях условные вероятности однозначно определяют соответствующую стандартную цепь Маркова. Для предельных распределений Гиббса при $\nu > 1$ ситуация оказывается гораздо более разнообразной и связанной с теорией фазовых переходов в статистической механике. Рассмотрим однопараметрическое семейство гамильтонианов $H_\beta = \beta \sum\limits_{\langle n,\, m\rangle} \Phi(\xi_n, \xi_m)$. При $\beta = 0$ случайные величины ξ_n независимы и одинаково распределены. Оказывается, что точка $\beta = 0$ устойчива в том смысле, что при малых β предельное распределение Гиббса единственно, и ξ_n, $n \in \mathbf{Z}^\nu$ образуют стационарное случайное поле, обладающее довольно сильными свойствами регулярности. В обсуждаемом здесь случае простейший путь для доказательства соответствующих теорем основан на так называемых корреляционных уравнениях (см. [23], [24], [29]). В последние годы в работах В. А. Малышева [30], [31] получил дальнейшее развитие так называемый метод кластерных разложений, позволяющий получать тонкие оценки семиинвариантов случайных полей. Этот метод изложен в недавней монографии В. А. Малышева и Р. А. Минлоса [32]. С его помощью удалось доказать единственность предельного распределения Гиббса и многие другие важные свойства для гораздо более широкого класса гамильтонианов.

Иная ситуация складывается в окрестности $\beta = \infty$. Формально при $\beta = \infty$ предельное распределение Гиббса должно быть сосредоточено на таких реализациях, которые доставляют минимум гамильтониану H. Разумеется, это неверно в буквальном смысле слова, но можно ввести понятие основного периодического состояния как такой периодической реализации, для которой среднее значение H на одну ячейку решетки, существующее в силу периодичности, принимает наименьшее возможное значение (см. [33]). Нетрудно привести примеры гамильтонианов H, где число таких основных состояний больше 1. Подобное свойство называется вырождением основного состояния. Оно часто встречается среди гамильтонианов, обладающих дополнительной симметрией. В работах [34] (см. также [33]) была построена теория, связывающая структуру множества основных состояний со структурой множества предельных распределений Гиббса в окрестности точки $\beta = \infty$. Основной вывод этой теории состоит в том, что при определенном условии устойчивости (условии Пайерлса), каждое основное состояние порождает ветвь предельных распределений Гиббса.

Области малых и больших β называются в статистической механике высокотемпературными и низкотемпературными областями. В каждой из этих областей применим свой метод теории возмущений. Большой интерес представляют критические значения параметров, в частности, β, при которых происходит переход от одной области к другой. В окрестности критических значений параметров происходят неожиданные физические явления. Кроме того, то, что в статистической механике встречается только при критическом значении параметров, в квантовой теории поля возникает как основной тип особенностей. Этими обстоятельствами объясняется интерес к поведению систем статистической механики в окрестности критических значений.

С точки зрения теории вероятностей мы встречаемся здесь с новым кругом задач. Отдельные случайные величины ξ_n распределены так, что ковариации $\mathbf{M}\,(\xi_n - \bar{\xi}_n)\,(\xi_{n_1} - \bar{\xi}_{n_1})$ убывают столь медленно при $\|n - n_1\| \to \infty$, что дисперсия $\mathbf{M}\,\big(\sum\limits_{n\in V} \xi_n - \sum\limits_{n\in V} \bar{\xi}_n\big)^2$ растет быстрее, чем $|V|$, например, как $|V|^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$. Такие случайные величины естественно считать сильно зависимыми, и мы приходим к общей проблеме получения предельных теорем для сумм сильно зависимых случайных величин. Предельные распределения в таких теоремах должны описываться в терминах так называемых автомодельных случайных полей (см. [35], [36], [37]), и методы доказательства предельных теорем значительно отличаются от классических методов теории вероятностей. Анализ ситуации для так называемых иерархических моделей Дайсона был начат в [38], и затем значительно продвинут в работах П. М. Блехера [39].

III. Динамика, спектр и другие вопросы. Будучи в 1965—75 годах молодой наукой, «вероятностная физика» быстро вступила в пору зрелости. Так, в начале семидесятых годов решетчатые системы с непрерывными значениями переменных считались значительно более сложным объектом, нежели системы с конечным множеством значений. Идейное и техническое развитие (часто совершенно неотделимые друг от друга) выровняло статус непрерывного и дискретного (в одной задаче это было сделано впервые в [40]), а замечательные работы Гавендзкого — Купяйнена, давшие строгие рамки картине Вильсона, сделали непрерывные системы в ряде случаев естественнее и проще дискретных. Эти работы Гавендзкого — Купяйнена стимулировались, в частности, более ранними работами Блехера — Синая по иерархическим моделям и мощным развитием кластерной техники.

Изучение гиббсовского поля как марковского процесса по направлению одной из осей началось в работе [42]. Основные постулированные там оценки матричных элементов переходного оператора (трансфер-матрицы) были впервые доказаны в [43] для размерности 2 и в [41], [44] для произвольной размерности (доказательство существенно упрощено в [45]). Эти результаты конкурируют с другим подходом Глимма — Джаффе и их учеников. Методы московской школы предпочтительнее в случае компактного множества значений. Основной разультат [41] состоит во вложении любой ограниченной области спектра логарифма трансфер — матрицы в «конечночастичное» подпространство. Эти работы позволили чисто вероятностными методами получить строгие алгоритмы расчета спектра частиц в решетчатых моделях квантовой теории поля (динамика в основном состоянии).

Динамика в температурном состоянии для трансляционно-инвариантных взаимодействий исследовалась пока лишь на уровне теории существования в работах Синая [55] и Доброшина [58].

Гуревич, Сухов [57], Чулаевский [57] выполнили важные исследования по вполне-интегрируемым бесконечночастичным системам.

Для не трансляционно-инвариантных взаимодействий в ряде случаев удается получить полный контроль за бесконечночастичной системой (доказать асимптотическую полноту). Первый результат такого рода получен в [46], второй в [47]. Полное исследование «частицы в идеальном классическом газе» впервые выполнено в [54], подобные квантовые примеры рассматривались Айзенштейном и Малышевым.

Свободные системы изучены достаточно полно. Добрушин и Сухов рассматривали кинетичесике и гидродинамические пределы для них [59].

Отметим также работы сотрудников кафедры по статистической физике неупорядоченных систем, где вероятность вводится дополнительно «руками»: случайные блуждания в случайной среде (Синай [53], Молчанов [49]), уравнение Шредингера со случайным потенциалом (Молчанов [48]), доказательство совпадения перколяционных порогов (Меньшиков [50]). Методы статистической физики начинают применяться в сложных системах массового обслуживания ([51], [52]).

Крайнее расширение спектра задач «вероятностной физики» обусловило деятельность кафедры по переводу зарубежных монографий (Рюэлля, Глимма — Джаффе, Зайлера), по написанию как библиографических, так и обстоятельных и оригинальных по содержанию монографических обзоров в изданиях ВИНИТИ и др. по многим разделам математической физики, выпуск учебных пособий и популярных изданий, чтение новых спецкурсов.

Кроме основного семинара по вероятностным методам в теоретической физике, являющегося сейчас фактически общемосковским, на кафедре работают другие семинары по различным направлениям математической физики, где выступают физики — теоретики и ученые из многих стран мира.[1]

Заметим в заключение, что возникшая мощная техника позволяет не только далеко продвинуть классическую вероятностную проблематику, но и дать новый вклад в философию современной теоретической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khinchin A. Ja.* Zur Birckhoffs Lösung des Ergodenproblem.— Math. Ann., 1932, B. 107, S. 485—488.
2. *Колмогоров А. Н.* Упрощенное доказательство эргодической теоремы Биркгофа—Хинчина.— УМН, 1938, № 5, с. 52—56.
3. *Рохлин В. А.* Избранные вопросы метрической теории динамических систем.— УМН, 1949, т. 30, № 2, с. 57—128.
4. *Рохлин В. А.* Об основных понятиях теории меры.— Мат. сборник, 1949, т. 67, № 1, с. 107—150.
5. *Фомин С. В.* Нормальные динамические системы.— Укр. мат. журнал, 1950, т. 2, № 2, с. 25—47.
6. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны.— УМН, 1952, т. 47, № 1, с. 118—137.
7. *Колмогоров А. Н.* Новый метрический инвариант транзитивных автоморфизмов и потоков пространств Лебега.— ДАН СССР, 1958, т. 119, № 5, с. 861—864.
8. *Хинчин А. Я.* Об основных теоремах теории информации.— УМН, 1956, т. 67, № 1, с. 17—77.
9. *Neumann J. von.* Zur Operatorenmethode in der Klassischen Mechanik.— Ann. Math., 1932, B. 33, S. 587—642.
10. *Мешалкин Л. Д.* Один случай изоморфизма схем Бернулли.— ДАН СССР, т. 128, № 1, 1959, с. 41—44.
11. *Синай Я. Г.* О слабом изоморфизме преобразований с инвариантной мерой.— Матем. сборник, 1964, т. 63, № 1, с. 23—42.
12. *Орнстейн Д.* Эргодическая теория, случайность и динамические системы. Серия: Математика. Новое в зарубежной науке. М.: «Мир», 1978, 166 с.
13. *Гуревич Б. М.* Некоторые условия существования K-разбиений для специальных потоков.— Труды Моск. Матем. об-ва, 1967, т. 17, с. 89—116.
14. *Оселедец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем.— Труды Моск. матем. об-ва, 1968, т. 19, с. 179—210.

15. *Миллионщиков В. М.* Критерий устойчивости вероятностного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами.— Мат. сб., 1969, т. 78, № 2, с. 179—202.
16. *Песин Я. Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория.— УМН, 1977, т. 32, № 4, с. 55—111.
17. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т. 2, М.; Изд-во ВИНИТИ, 1985, 310 с.
18. *Синай Я. Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов.— УМН, 1970, т. 25, № 2, с. 141—192.
19. *Bunimovich L. A.*, *Sinai Ya. G.* Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers.— Commun. Math. Phys., 1981, v. 78, № 4, p. 479—497.
20. *Хинчин А. Я.* Математические основания статистической механики. М.— Л.: ГТТИ, 1943, 128 с.
21. *Хинчин А. Я.* Математические основания квантовой статистической механики. М.— Л.: ГТТИ, 1951, 256 с.
22. *Добрушин Р. Л.* Существование конфигурационного интеграла.— Теория вероятн. и ее прим., 1964, т. 17, № 5, с. 377—410.
23. *Ruelle D.* Statistical Mechanics. Rigorous Results. New — York — Amsterdam; Benjamin, 1969, 217 p.
(Перевод на русский язык: Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971, 367 с.)
24. *Добрушин Р. Л.* Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием.— Функц. анал. и его прил., 1968, т. 2, № 4, с. 31—43. Гиббсовские случайные поля. Общий случай.— Функц. анал. и его прил. 1969, т. 3, № 1, с. 27—35.
25. *Lanford O. E.*, *Ruelle Ф.* Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics.— Comm. Math. Phys., 1969, v. 13, N 3, p. 194—215.
26. *Боголюбов Н. Н.*, *Хацет Б. И.* О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия.— ДАН СССР, 1969, т. 66, № 3, с. 321—324.
27. *Боголюбов Н. Н.*, *Петрина Д. Я.*, *Хацет Б. И.* Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля. Теор. Мат. Физ., 1969, т. I, № 2, с. 251—274.
28. *Глимм Д.*, *Джаффе А.* Математические методы квантовой физики. М.: Мир, 1984, 445 с.
29. *Добрушин Р. Л.* Задача единственности гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов.— Функц. анализ и его прил., 1968, т. 2, № 4, с. 44—57.
30. *Малышев В. А.* Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля.— УМН, 1980, т. 35, № 2, с. 3—53.
31. *Малышев В. А.* Элементарное введение в математическую физику бесконечно-частичных систем. Дубна, 1983, 110 с.
32. *Малышев В. А.*, *Минлос Р. А.* Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений. М.: Наука, 1985, 288 с.
33. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.: Наука, 1980, 208 с.
34. *Пирогов С. А.*, *Синай Я. Г.* Фазовые диаграммы классических решетчатых систем.— Теор. мат. физ., 1975, т. 25, с. 358—369; 1976; т. 26, с. 61—76.
35. *Синай Я. Г.* Автомодельные случайные поля.— Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. XXI, в. 1, с. 63—80.
36. *Добрушин Р. Л.* Автомодельность и ренорм-группа обобщенных случайных полей. В сб.: Многокомпонентные случайные системы, М.: Наука, 1978, с. 179—213.
37. *Jona — Lasinio G.*, *Gallavotti G.* Limit Theorems for Multidimensional Markov Processes.— Comm. Math. Phys., 1975, v. 41, N 3, p. 301—307.
38. *Bleher P. M.*, *Sinai Ya. G.* Critical Indices for Dyson's Asymptotic Hierarchical Models.— Comm. Math. Phys., 1975, v. 45, N 3, p. 247—278.
39. *Блехер П. М.* Теорема о больших уклонениях в окрестности критической точки φ^4-иерархической модели.— Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. 30, № 3, с. 399—510.

40. *Malyshev V. A.* Phase transitions in classical Heisenberg ferromagnets with arbitrary parameter of anisotropy.— Commun. Math. Phym., v. 1975, v. 40, № 1, p. 75—82.
41. *Malyshev V. A.* Uniform cluster estimates for lattice models.— Comm. Math. Phys. 1979, v. 64, p. 131—157.
42. *Минлос Р. А., Синай Я. Г.* Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа.— Теор. Мат. Физ. 1970, т. 2, № 3, с. 230—243.
43. *Абдулла-Заде Ф. Г., Минлос Р. А., Погонян С. К.* Кластерные оценки для гиббсовских случайных полей и некоторые их применения. В сб.: Многокомпонентные случайные системы. М.: Наука, 1978, с. 5—30.
44 *Malyshev V. A.* Complete cluster expansion for weakly coupled Gibbs random fields. In: Manycomponent systems. Berlin Springer, 1979, p. 505—530.
45. *Малышев В. А.* Семиинварианты нелокальных функционалов гиббсовских случайных полей.— Мат. заметки, 1983, т. 34, № 3, с. 443—452.
46. *Botvich D. D., Malyshev V. A.* Unitary equivalence of temperature dynamics for ideal and locally perturbed fermi-gas.— Comm. M. Phys., 1983, v. 91, p. 301—312.
47. *Malyshev V. A., Nickolaev I. V., Terlecky Yu. A.* Temperature dynamics of the locally perturbed classical ideal gas.— J. Stat. Phys., 1985, v. 40, № 1/2, p. 133—146.
48. *Молчанов С. А.* Строение собственных функций одномерных неупорядоченных систем.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1978, т. 42, с. 70—103.
49. *Козлов С. Н., Молчанов С. А.* Об условиях применимости ЦПТ к случайным блужданиям на решетке,— ДАН СССР, 1984, т. 278, N 3, с. 531—534.
50. *Меньшиков М. В., Молчанов С. А., Сидоренко А. В.* Математическая теория протекания.— «Итоги науки. Теор. вероятн. ...», 1986, т. 24, с. 53—110.
51. *Цареградский И. П.* О системе массового обслуживания с бесконечным числом локально взаимодействующих приборов.— Теория вероятн. и ее примен. 1982, т. 27, № 3, с. 583—587.
52. *Кельберт М. Я., Сухов Ю. М.* Свойства слабой зависимости полного случайного поля, описывающего состояние коммутационной сети.— Проблемы пер. информации, 1985, т. 21, № 3, с. 89—98.
53. *Синай Я. Г.* Предельное поведение одномерного случайного блуждания в случайной среде.— Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, в. 2, с. 247—258.
54. *Presutti E., Sinai Ya. G., Soloviechik M. R.* Hyperbolicity and Möller-morphism for a model of classical statistical mechanics. In: «Statistical Physics and Dynamical Systems», Birkhäuser, 1985, p. 253—284.
55. *Синай Я. Г.* Построение кластерной динамики для динамических систем статистической механики.— Вестник МГУ, 1974, № 1, с. 152—158.
56. *Гуревич Б. М., Сухов Ю. М.* Стационарные решения цепочки уравнений Боголюбова в классической статистической механике.— ДАН СССР, 1975, т. 223, с. 276—279.
57. *Чулаевский В. А.* Метод обратной задачи теории рассеяния в статистической физике.— Функцион. анализ и его прил., 1983, т. 17, № 1, с. 53—62.
58. *Dobrushin R. L., Fritz Y.* Nonequilibrium dynamics at one-dimensional infinite particle systems with a singular interaction.— Comm. Math. Phys., 1977, v. 55, N 3, p. 275—292.
59. *Добрушин Р. Л., Синай Я. Г., Сухов Ю. М.* Динамические системы статистической механики и кинетики.— Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985, т. 2, с. 233—310.

Поступила в редакцию
23.I.1987
Переработанный вариант
20.V.1988