А. А. Лыков, В. А. Малышев, С. Музычка, Линейные гамильтоновы системы с микроскопическим случайным воздействием, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2012, том 57, выпуск 4, 794–799

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/tvp4482

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arnold B. C.*, *Villasenor J. A.* The tallest man in the world. — Statistical Theory and Applications. Papers in honor of H. A. David. New York: Springer, 1996, p. 81–88.
2. *Pakes A. G.* Extreme order statistics on Galton–Watson trees. — Metrika, 1998, v. 47, № 2, p. 95–117.
3. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966, 355 с.
4. *Yanev G. P.* Revisiting offspring maxima in branching processes. — Pliska Stud. Math. Bulgar., 2007, v. 18, p. 401–426.
5. *Лидбеттер М.*, *Линдгрен Г.*, *Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 391 с.
6. *Галамбош Я. И.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984, 303 с.
7. *Лебедев А. В.* Предельные законы для максимумов на надкритических ветвящихся процессах. — Обозрение прикл. промышл. матем., 2004, v. 11, № 4, с. 867–868.
8. *Лебедев А. В.* Максимумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах. — Вестник МГУ. Сер. 1. Матем. мех., 2008, № 5, с. 3–6.
9. *Lebedev A. V.* Maxima of random particles scores in Markov branching processes with continuous time. — Extremes, 2008, v. 11, № 2, p. 203–216.
10. *Nelsen R.* An introduction to copulas. — Lecture Notes in Statis., 1999, v. 139, p. 1–216.
11. *McNeil A. J.*, *Frey R.*, *Embrechts P.* Quantitative Risk Management. Princeton: Princeton Univ. Press, 2005, 538 p.
12. *Гриневич И. В.* Макс-полуустойчивые предельные распределения, отвечающие линейной и степенной нормировке. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 774–776.
13. *Pancheva E.* Multivariate max-semistable distributions. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 794–795.
14. *Canto E Castro L., de Haan L., Temido M.G.* Rarely observed sample maxima. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 4, с. 787–799.


Поступила в редакцию
30.IX.2008



***ЛЫКОВ А. А.***[*], ***МАЛЫШЕВ В. А.***[*], ***МУЗЫЧКА С. А.***[*]

# ЛИНЕЙНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ С МИКРОСКОПИЧЕСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Известно, что для линейной гамильтоновой системы инвариантных мер много, и поэтому проблема сходимости к инвариантной мере Гиббса даже не стоит. Мы рассматриваем линейные гамильтоновы системы произвольной конечной размерности и доказываем, что если на одну выделенную частицу действуют еще диссипация и белый шум, то для почти всех гамильтонианов и «почти всех» начальных условий существует единственное предельное распределение. При этом оно будет гиббсовским с температурой, зависящей от диссипации и дисперсии белого шума.

*Ключевые слова и фразы*: мера Гиббса, сходимость к равновесию, гамильтоновы системы, белый шум.

[*] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия; e-mail: alekslyk@yandex.ru, malyshev2@yahoo.com, stepan_muzychka@mail.ru

**1. Основные результаты.** Рассмотрим фазовое пространство

$$L = L_{2N} = \mathbf{R}^{2N} = \{\psi = (q,p)\colon q = (q_1,\dots,q_N),\ p = (p_1,\dots,p_N) \in \mathbf{R}^N\}$$

со скалярным произведением

$$(\psi,\psi')_1 = \sum_{i=1}^{N} (q_i q_i' + p_i p_i').$$

Пространство $L$ является прямой суммой $L = l_N^{(q)} \oplus l_N^{(p)}$ ортогональных пространств координат и импульсов с индуцированными скалярными произведениями $(q,q')_1$ и $(p,p')_1$ соответственно. Нам наиболее интересен случай больших $N$, но в настоящей статье это нигде не используется.

Мы будем изучать систему $2N$ стохастических дифференциальных уравнений $k = 1,\dots,N$

$$\begin{aligned} dq_k &= p_k\,dt,\\ dp_k &= \sum_{l=1}^{N} \Big( (-V(k,l)q_l - D(k,l)p_l)\,dt + B(k,l)\,dw_{t,l} \Big), \end{aligned} \tag{1}$$

где $V = (V(i,j))$ — положительно определенная $(N\times N)$-матрица, $D = (D(i,j))$ — неотрицательно определенная симметричная $(N\times N)$-матрица, $B = (B(k,l))$ — произвольная вещественная матрица, $w_{t,l}$, $l = 1,\dots,N$, — стандартные броуновские движения, независимые по $l$.

Если $D = B = 0$, то система является линейной гамильтоновой системой с квадратичным гамильтонианом

$$H(\psi) = T + U, \qquad T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2, \quad U = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} V(i,j) q_i q_j. \tag{2}$$

Мы будем рассматривать системы, в которых матрицы $B$ и $D$ для некоторого $n = 1,\dots,N$ имеют следующий вид:

$$D = \alpha\Delta_n, \quad B = \sigma\Delta_n,$$

где $\Delta_n = (\delta_{i,j}\delta_{i,n})$ — матрица, в которой только на одном месте стоит единица, а на остальных нули. Заметим, что в данном случае на систему будет «действовать» только один белый шум $dw_{t,n}$. Будем считать, что индекс $n$ зафиксирован, и для краткости писать $dw_t = dw_{t,n}$. Далее мы везде неявно предполагаем, что $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, и особо оговариваем случаи, когда это не так.

В матричном виде систему (1) можно переписать так:

$$d\psi = A\psi\,dt + \sigma g_n\,dw_t, \tag{3}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V & -D \end{pmatrix},$$

$E$ — единичная $(N\times N)$-матрица, $g_n = (0,e_n) \in l_N^{(p)}$, $e_n = (0,\dots,0,1,0,\dots,0) \in \mathbf{R}^N$ — $n$-й стандартный орт. Решение последнего уравнения с произвольным начальным вектором $\psi(0)$ определяется однозначно и может быть записано в виде (см., например, [1, разд. 12.4])

$$\psi(t) = e^{tA}\left(\sigma\int_0^t e^{-sA} g_n\,dw_s + \psi(0)\right).$$

Введем множество

$$L_- = \{\psi \in L\colon H(e^{tA}\psi) \to 0,\ t \to \infty\} \subset L.$$

Нам понадобятся следующие результаты.

**Лемма 1.** *Множество $L_-$ является линейным подпространством пространства $L$, причем $L_- = \{(q,p) \in L\colon q \in l_V,\ p \in l_V\}$, где $l_V$ — подпространство $\mathbf{R}^N$, натянутое на векторы вида $V^k e_n$, $k = 0,1,\dots$, при этом $g_n \in L_-$. Более того, $L_-$ и его ортогональное дополнение, которое будем обозначать $L_0$, инвариантны относительно оператора $A$.*

Все утверждения этой леммы доказаны в [2].

Ввиду этой леммы, любой начальный вектор $\psi(0)$ единственным образом можно представить в виде

$$\psi(0) = \psi_0 + \psi_-, \qquad \psi_0 \in L_0, \quad \psi_- \in L_-.$$

Тогда решение $\psi(t)$ стохастического уравнения (3) с начальным вектором $\psi(0)$ для всех $t \geq 0$ можно представить в виде

$$\psi(t) = \psi^{(0)}(t) + \psi^{(-)}(t), \tag{4}$$

где $\psi^{(0)}(t)$, $\psi^{(-)}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot\psi^{(0)}(t) = A\psi^{(0)}(t), \quad d\psi^{(-)}(t) = A\psi^{(-)}\,dt + \sigma g_n\,dw_t$$

с начальными условиями $\psi^{(0)}(0) = \psi_0$ и $\psi^{(-)}(0) = \psi_-$ соответственно, поскольку сумма этих уравнений дает уравнение (3).

Согласно лемме 1, функция $\psi^{(0)}(t) \in L_0$, $t \in [0,\infty)$, детерминирована и представляется в виде

$$\psi^{(0)}(t) = e^{At}\psi^{(0)}(0), \tag{5}$$

а $\psi^{(-)}(t)$ является гауссовским случайным процессом со значениями в $L_-$ (так как $g_n \in L_-$).

**Теорема 1.** *Для любого $\psi(0)$ имеет место сходимость по распределению*

$$\psi^{(-)}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \xi,$$

*где $\xi \in L_-$, а его распределение абсолютно непрерывно относительно меры Лебега на $L_-$ (определенной евклидовой структурой) и задается плотностью относительно этой меры*

$$p_\xi(\psi) = \frac{1}{Z}\exp\biggl(-\frac{2\alpha}{\sigma^2}\,H(\psi)\biggr), \qquad \psi \in L_-. \tag{6}$$

*Предел средней энергии имеет следующий явный вид*:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}\,H(\psi^{(-)}(t)) = \frac{\sigma^2}{4\alpha}\dim L_-.$$

Таким образом, действие случайной силы и диссипации на одну только частицу обеспечивает сходимость к равновесной мере Гиббса с температурой, зависящей от $\alpha$ и $\sigma$.

Первое утверждение следующей теоремы показывает, что сходимость к распределению Гиббса является типичным свойством линейных гамильтоновых систем с диссипацией и внешней случайной силой. Второе утверждение показывает, что диссипативный член необходим для этой сходимости.

Для заданного $N$ обозначим $\mathbf{H}_N$ гладкое многообразие всевозможных гамильтонианов $H$ вида (2), т.е. гладкое многообразие всех положительно определенных $(N \times N)$-матриц $V$. Пусть $\mu$ — произвольная абсолютно непрерывная вероятностная мера на $\mathbf{H}_N$, и пусть $\mathbf{H}_N^{(+)}$ множество всех гамильтонианов из $\mathbf{H}_N$, для которых размерность $L_0$ больше нуля.

**Теорема 2.** 1. *Мера $\mu$ подмножества $\mathbf{H}_N^{(+)}$ равна нулю.* 2. *Если $\alpha = 0$, то для любого начального условия $\psi(0)$ справедлива формула*

$$\mathbf{E}\, H(\psi(t)) = \frac{\sigma^2}{2}\, t + O(1).$$

Заметим, что для более узких (физических) классов гамильтонианов свойство $\dim L_0 = 0$ уже не является типичным (см. по этому поводу [2]).

Мы ограничиваемся в этой краткой заметке наиболее интересным случаем одной выделенной частицы, который показывает, что уже самое минимальное введение случайности в систему обеспечивает сходимость к физическому равновесию. Заметим, однако, что большинство результатов допускает обобщение на произвольные матрицы $D$ и $B$. Похожие системы, в основном в связи с обоснованием закона теплопроводности Фурье, рассматривались в 1960–70-е годы в работах Дж. Лебовица и его коллег (см. статьи [6], [7] и ссылки в них).

**2. Доказательства.**

Доказательство теоремы 1. Сначала предположим, что $\dim L_0 = 0$. В этом случае спектр матрицы $A$ лежит в левой полуплоскости.

Докажем сначала сходимость. Ввиду сделанного предположения, можно ограничиться рассмотрением процесса $\psi^{(-)}(t)$, который допускает следующее представление:

$$\psi^{(-)}(t) = \psi^{(g)}(t) + \psi^{(d)}(t),$$
$$\psi^{(g)}(t) = \sigma e^{tA} \int_0^t e^{-sA} g_n \, dw_s, \quad \psi^{(d)}(t) = e^{tA} \psi^{(-)}(0).$$

По определению $L_-$ функция $\psi^{(d)}(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$. Поэтому сходимость достаточно доказать для $\psi^{(g)}(t)$. Обозначим $C(t) = (\mathbf{E}\,\{\psi_i^{(g)}(t)\psi_j^{(g)}(t)\})$ матрицу ковариаций. Тогда

$$C(t) = \mathbf{E}\,\{\psi^{(g)}(t)(\psi^{(g)})^T(t)\} = \sigma^2 e^{tA}\, \mathbf{E} \left\{ \int_0^t e^{-sA} g_n \ dw_s \int_0^t g_n^T e^{-sA^T} \ dw_s \right\} e^{tA^T},$$

где $^T$ обозначает транспонирование. Пользуясь «изометрией» Ито [5], получаем:

$$C(t) = \sigma^2 e^{tA} \int_0^t e^{-sA} g_n g_n^T e^{-sA^T} \, ds\, e^{tA^T}. \tag{7}$$

Вычислим интеграл в последней формуле. Найдем такую матрицу $U$, не зависящую от времени, что

$$\int_0^t e^{-sA} g_n g_n^T e^{-sA^T} \, ds = e^{-tA} U e^{-tA^T} - U. \tag{8}$$

Для этого дифференцируем (8) по $t$, при этом экспоненты сокращаются и мы получаем

$$AU + UA^T = -g_n g_n^T.$$

Данное уравнение относительно $U$ имеет единственное решение, так как спектр матрицы $A$ лежит в левой полуплоскости [3, разд. 4.4, с. 16]. Легко проверить, что решением является следующая матрица:

$$U = \frac{1}{2\alpha}\begin{pmatrix} V^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Таким образом, из (7) и (8) имеем $C(t) = \sigma^2(U - e^{tA}Ue^{tA^T})$. Так как спектр матрицы $A$ лежит в левой полуплоскости, то $\lim_{t\to+\infty} C(t) = \sigma^2 U$. Поэтому существует предел по распределению

$$\xi = \lim_{t\to\infty} \psi^{(g)}(t) = \lim_{t\to\infty} \psi^{(-)}(t),$$

который является гауссовским с нулевым средним и матрицей ковариаций $\sigma^2 U$.

Перейдем к последнему утверждению теоремы 1. Из (9) и из положительной определенности $V$ следует, что $U$ невырождена. Поэтому распределение $\xi$ имеет плотность $p_\xi(\psi)$ относительно стандартной меры Лебега $dq_1 \cdots dp_N$ на $L$. Так как матрица $(2\alpha U)^{-1}$ определяет квадратичную форму $H$, то

$$p_\xi(\psi) = \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{2\alpha}{\sigma^2}H(\psi)\right).$$

Напомним, что $H(\psi) = (Q\psi, \psi)_1/2$, где $(2N\times 2N)$-матрица $Q = (q_{i,j})$ определяется равенством векторов $Q(q,p) = (Vq, p)$. Тогда для средней энергии получаем

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{E}\, H(\psi^{(-)}(t)) = \mathbf{E}\, H(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2N} q_{i,j}c_{i,j} = \frac{\sigma^2}{2}\operatorname{tr}(QU) = \frac{\sigma^2}{4\alpha}\dim L.$$

Таким образом, для случая $L_0 = \{0\}$ теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь случай $L_0 \neq \{0\}$. Пусть $v_1, \ldots, v_d$ — произвольный ортонормированный базис подпространства $l_V$ с единственным ограничением, что $v_1 = e_n$. Построим по нему ортонормированный базис в $L_-$ следующим образом:

$$h_k^{(q)} = (v_k, 0), \quad h_k^{(p)} = (0, v_k), \qquad k = 1, \ldots, d.$$

Координаты на $L_-$ в этом базисе будем обозначать $\psi' = (\psi'_1, \ldots, \psi'_{2d})$. В данных координатах наше уравнение на $L_-$ запишется в виде

$$d\psi' = A'\psi'\,dt + g'_1\,dw_t,$$

где $A' = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V' & -D' \end{pmatrix}$, $E$ — единичная матрица порядка $d$, а $V'$, $D'$ и $g'_1$ — матрицы операторов $V$, $D$ и выделенный вектор соответственно в новых координатах.

Данное уравнение имеет вид нашего основного уравнения (3). Оператор $A'$ является ограничением оператора $A$ на подпространство $L_-$; пусть $L_- = L'_0 \oplus L'_-$ — соответствующее разложение $L_-$ по $A'$. Тогда $L'_0 = 0$. Поэтому мы можем применить утверждения, доказанные для случая $L_0 = 0$. Заметим, что квадратичная форма $H'$ на $L_-$, порождаемая $V'$, совпадает с ограничением квадратичной формы $H$ на подпространство $L_-$. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Если $\alpha = 0$, то закон сохранения энергии дает $L_- = 0$. Представим решение $\psi(t)$ в виде

$$\psi(t) = \psi_h(t) + \psi_I(t),$$

где $\psi_h(t)$ — решение однородного уравнения с начальными условиями $\psi(0)$, а $\psi_I(t)$ — решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. Так как $H(\psi(t))$ обладает свойствами нормы, то справедливо неравенство

$$|H(\psi(t)) - H(\psi_I(t))| \leqslant H(\psi_h(t)) = H(\psi(0)).$$

Последнее равенство выполнено, так как $\alpha = 0$, и, значит, энергия сохраняется. Вычислим $\mathbf{E}\, H(\psi_I(t))$. Обозначим $\psi_I(t) = (q^{(I)}(t), p^{(I)}(t))$. Решение с нулевыми начальными условиями получается как в известной (см., например, [4]) формуле для решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} q(t) &= \sigma\, (\sqrt{V})^{-1} \int_0^t \sin(\sqrt{V}(t-s)) e_n\, dw_s, \\ p(t) &= \sigma \int_0^t \cos(\sqrt{V}(t-s)) e_n\, dw_s. \end{aligned}$$

Используя снова «изометрию» Ито, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\, T &= \frac{\sigma^2}{2}\, \mathbf{E}\, (p(t), p(t))_1 = \frac{\sigma^2}{2}\, \mathbf{E}\, \{p^T p\} = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t e_n^T \cos^2 \Big(\sqrt{V}(t-s)\Big) e_n\, ds, \\ \mathbf{E}\, U &= \frac{\sigma^2}{2}\, \mathbf{E}\, (Vq(t), q(t))_1 = \frac{\sigma^2}{2}\, \mathbf{E} \{q^T V q\} = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t e_n^T \sin^2 \Big(\sqrt{V}(t-s)\Big) e_n\, ds, \\ \mathbf{E}\, H(\psi_I(t)) &= \mathbf{E}\, \{T + U\} = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t e_n^T e_n\, ds = \frac{\sigma^2}{2}\, t. \end{aligned}$$

Второе утверждение теоремы 2 доказано.

Заметим, что $\mathbf{H}_N$ является гладким многообразием. Определим матрицу $\Sigma(V)$ так, что ее $k$-й столбец равен вектору $V^k e_n$. Тогда

$$\mathbf{H}_N^{(+)} = \{V \colon \dim l_V < N\} = \Big\{V \colon \det(\Sigma(V)) = 0\Big\}.$$

Заметим, что $\det(\Sigma(V)) \neq 0$ для матриц $V \in \mathbf{H}_N$ с простым спектром и собственным базисом $v_1, \ldots, v_N$, обладающим свойством $(v_k, e_n)_1 \neq 0$ для всех $k = 1, \ldots, N$ (см. [2]). Поэтому функция $\det(\Sigma(V))$ не обращается тождественно в нуль на многообразии $\mathbf{H}_N$. Таким образом, $\mathbf{H}_N^{(+)}$ является множеством нулей полинома на $\mathbf{H}_N$. Следовательно, его размерность меньше размерности всего $\mathbf{H}_N$, и значит, по известной теореме Сарда, его мера $\mu$ равна нулю.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1996, 400 с.
2. *Lykov A. A.*, *Malyshev V. A.* Harmonic chain with weak dissipation. — Markov Process. Related Fields, 2012, v. 18, №4, p. 721–729.
3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970, 534 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004, 559 с.
5. *Булинский А. В.*, *Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005, 402 с.
6. *Rieder Z.*, *Lebowitz J. L.*, *Lieb E.*. Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state. — J. Math. Phys., 1967, v. 8, №5, p. 1073–1078.
7. *Spohn H.*, *Lebowitz J. L.* Stationary non-equilibrium states of infinite harmonic systems. — Comm. Math. Phys., 1977, v. 54, №2, p. 97–120.

Поступила в редакцию
22.VII.2012