МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том IV

Математика

Выпуск 1

Теория вероятностей и математическая статистика

Издательство Московского университета
2009 год

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том IV

Математика

Выпуск 1

Теория вероятностей и математическая статистика

Издательство Московского университета
2009 год

УДК 519.2
ББК 22.17
С 56

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ. Том IV. Математика. Выпуск 3. Теория вероятностей и математическая статистика / Под редакцией А.Н. Ширяева. — М.: Изд-во МГУ, 2009. — 180 с.
С 56

ISBN 978—5—211—05652—7

Выпуск посвящен теории вероятностей, математической статистике и их приложениям.

Механико-математический факультет МГУ выражает благодарность Попечительскому совету факультета и выпускникам О.Д. Звягину и А.В. Чеглакову за помощь в издании сборника.

ISBN 978—5—211—05652—7

ОСТРОВКИ МАТЕМАТИКИ В ДРУГИХ НАУКАХ (О НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДНИХ РАБОТАХ ЛАБОРАТОРИИ БОЛЬШИХ СЛУЧАЙНЫХ СИСТЕМ)

В. А. Малышев

Дается обзор нескольких последних работ лаборатории больших случайных систем.

1. Введение

Лаборатория больших случайных систем, созданная на механико-математическом факультете в 1992 году приказом ректора, занимается созданием и разработкой математических моделей явлений качественного характера в других науках. Скажем сначала несколько слов о философии выбора задач и тем для исследования.

Математика могла бы существовать сама по себе, с увлечением занимаясь магическими свойствами чисел, комбинаторными головоломками и постепенными обобщениями и уточнениями при построении архитектурных шедевров собственных областей. Такая независимость математики от жизни имеет, конечно, свои плюсы, но должна в конечном счете создавать состояние тоскливости. Поэтому естественны попытки математика вторгнуться в другие науки. В зависимости от возможностей и психики математика эти вторжения могут быть совершенно различны по своим целям. Либо он верит другим математикам, которые уже «знают, что надо делать», и берет задачи из их вполне математических статей. Либо он «идет на поклон» к тому же физику, «берет у него уравнение» и пробует исследовать его своими возможностями. Либо создает комьютерные программы.

Совершенно другой уровень получается, когда математик сам создает модели явлений, изначально мало связанных с математикой. Здесь за отсутствием экспериментальных знаний и опыта математику остается уповать на аксиомы и логику. Проблема всегда состоит в том, что аксиом как таковых почти никогда нет и их надо придумывать самому, исходя из уже аксиоматизированных областей и изучения литературы. При этом чтение литературы часто оказывается более полезным, чем разговор с живым представителем прикладной науки. Полная аксиоматизация даже такой математизированной науки, как физика, невозможна, и приходится ограничиваться островками, где возможна четкая логика, в море интуиции и расплывчатых формулировок.

Мы приведем здесь три примера. Они показывают, что первые две задачи представляют фундаментальный интерес, а третья, которая также интересна, но менее фундаментальна, должна решаться под конкретный заказ в рамках большого проекта.

2. О стохастических микромоделях твердого тела и жидкости

В шестидесятых годах прошлого века произошел фантастический всплеск математической статистической физики и квантовой теории поля. Это привело к аксиоматизации их равновесной части, основанной на понятии гиббсовского случайного поля, а также к математическим теоремам, сравнимым по сложности с самыми глубокими математическими достижениями. Однако, что касается неравновесной части, дело обстоит значительно хуже. Более того, многие важнейшие куски даже школьного курса общей физики остались непонятыми на математическом (а некоторые и на физическом) уровне.

В моделях разреженного газа молекулы основное время проводят на достаточном расстоянии друг от друга, двигаясь свободно, а их взаимодействие сводится к столкновениям. Характер столкновений мало влияет на качественную картину макроскопического поведения, и часто молекулы считаются твердыми шариками. В классических моделях твердого тела, наоборот, молекулы совершают малые колебания около своих состояний равновесия, все время взаимодействуя с одними и теми же соседями. Так, в каждом учебнике по общей физике можно увидеть задачу о колебаниях однородной системы гармонических осцилляторов, однако вывода закона Гука из микромоделей ни в одном учебнике найти невозможно. Такой вывод на основе равновесных гиббсовских мер дан в [1] для простейшей одномерной модели, однако, многомерный случай пока открыт, а тем более неясно, как выглядит динамика расширения.

В качестве микромодели жидкости можно представить себе уплотненный газ твердых шариков. Такое представление стало основным направлением в теоретической и математической физике, целью которого было вывести из такой микромодели уравнения Навье–Стокса и успокоиться. Явный математический неуспех этой программы требует признания того, что сильные школы имеют и свои минусы, подавляя создание других моделей своим авторитетом.

Однако уже довольно давно в монографии [4], вышедшей впервые в 1943 году, был развит другой подход к моделированию жидкостей, где жидкость рассматривается как твердое тело с менее жесткой структурой. Эта монография, будучи физической, основана тем не менее на хорошей вероятностной интуиции и может служить основой самых разных математических моделей. Одна из таких моделей введена в [3]. Она состоит в следующем.

Пусть задан конечный или счетный граф G, например решетка, с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $L = L(G)$. Конфигурацией называется функция $x_v, v \in V$, на множестве вершин со значениями в некотором множестве X, называемом пространством спинов или внутренних степеней свободы. На множестве конфигураций X^V задается марковский процесс с непрерывным временем. Переходы определяются так: для каждого ребра $l \in L(G)$ независимо от остальных ребер с интенсивностью $\lambda_l = \lambda_l(x_v, x_{v'})$ происходит одновременное изменение спинов x_v и $x_{v'}$, где v, v' — вершины ребра l:

$$(x_v(t), x_{v'}(t)) \to (x_v(t+dt), x_{v'}(t+dt)) = F(x_v(t), x_{v'}(t))$$

здесь $F : S = X \times X \to S = X \times X$ — некоторое отображение (бинарная реакция).

Частным случаем являются процессы Кавасаки, где пары точек обмениваются своими спинами, то есть F является перестановкой, а также еще более популярный процесс с запретами, где $X = \{0, 1\}$. Введенный процесс относится к процессам с локальным взаимодействием, которые играют в настоящий момент большую роль в построении физических моделей. Такие преобразования соответствуют преобразованию пар скоростей и, возможно, других степеней свободы при столкновениях частиц или их химических реакциях. В работе [3] для конечных X классифицируются бернуллиевские инвариантные меры для таких цепей.

Пространство X даже для молекул воды НОН может быть довольно сложным. Простейшая классическая трактовка вводит как длины связей ОН, так и угол между ними, а квантово-механическая модель определяет даже некоторый тетраэдр, исходя из молекулярных орбиталей. Более того, как известно, между близко расположенными молекулами воды могут образовываться водородные связи, причем одна молекула может образовать до 4 таких связей. Они во многом обусловливают основные физические свойства воды, в том числе и структуру ее связей, которые интенсивно экспериментально исследуются в последнее время (см., например, [5]).

В работе [2] пространство X состоит из трех элементов, которые соответствуют отсутствию частицы или ее наличию с двумя возможными скоростями. Уже с таким бедным пространством X удается моделировать фазовый переход от ламинарного (линейного) профиля скоростей к турбулентному (постоянному) в течении Куэтта.

3. Почему течет ток

Чтобы что-то двигалось, нужна движущая сила. Макроскопически ток определяется законом Ома

$$I = \frac{U}{R},$$

где U — потенциал (искомой силы). Имеется в виду большее: между концами отрезка проводника длины ΔL разность потенциалов равна

$$\Delta U = \frac{\Delta L}{L} U,$$

где L — длина всего проводника. Из однородности по длине проводника

$$U(x) = -Fx,$$

где F и есть искомая сила. Эта сила F во всех физических теориях (без объяснений) переносится из макро- на микрошкалу.

Первой микроскопической моделью электрического тока была модель Друде 1900 года, излагаемая во всех курсах физики твердого тела (см., например, [7]). Она основана на представлении об электрическом токе как о движении заряженных частиц, например электронов. В простейшей точной математической формулировке она может быть представлена так. На прямой в момент t в точках $x_i(t)$ находятся одинаковые частицы, динамика которых основана на следующих предположениях: частицы не взаимодействуют между собой, а в случайные моменты времени $t_{j,1} < t_{j,2} < \ldots < t_{j,i} < \ldots$ частица j останавливается по причине взаимодействия с внешней средой. При этом все $t_{j,i} - t_{j,i-1}$ независимы и одинаково распределены. В интервалах между столкновениями частица j разгоняется согласно закону Ньютона

$$m\frac{d^2x_j}{dt^2} = F,$$

где сила F является внешней, то есть не зависит от расположения $x_i(t)$ других частиц.

Закон больших чисел говорит, что при широких предположениях относительно распределений случайных времен для каждой частицы с вероятностью единица существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_j(t)}{t} = v = \frac{F\tau}{2m}, \tau = < t_{j,i} - t_{j,i-1} > .$$

Если частицы одинаковы и плотность ρ частиц постоянна, то в среднем за единицу времени через данную точку прямой будет проходить $v\rho = \frac{F\tau\rho}{2m}$ частиц, что дает закон Ома $U = FL, I = v\rho, R = \frac{2mL}{\tau\rho}$.

Таким образом, модель Друде — это модель трения (Эйнштейн, Стокс и др.), которая при определенном скейлинге даст закон Ньютона с трением

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F - A\frac{dx}{dt}.$$

Над обобщением **тормозящей** силы потрудились математики (около 15 статей в журнале «Communications in Math. Physics») — от независимости к (асимптотически слабой) зависимости от прошлого и более общим случайным средам. Основная же проблема состоит, конечно, в том, что никакого ускоряющего внешнего поля или внешней силы нет на пассивной части проводника (то есть вне генератора, батареи и т.д.). Нельзя сказать, что она совсем осталась без внимания. Конечно, есть и было понимание, что сила идет от самих зарядов, но вопрос «КАК?» оставался без ответа даже на физическом уровне строгости. Этому есть ряд причин:

1) простота, наглядность и достаточность модели Друде для прикладных целей. Вычислительно и удобно, и естественно считать макросилу также и микросилой;

2) физика электрического тока в начале XX века сразу ушла в квантовую область, где сконцентрировалась на других проблемах. Зоммерфельд добавил другое распределение по скоростям, Блох добавил внешний периодический потенциал (от кристаллической решетки), в ферми-жидкостях Ландау вместо модели свободных электронов возникла модель свободных или слабо взаимодействующих квазичастиц, Андерсон добавил почти периодический потенциал.

3) общая тенденция физики не обращать внимания на логическую структуру теорий.

Однако имеется долгая дискуссия в «American Journal of Physics» насчет этого, откуда полезно привести цитату «Common students misconception — drifting electrons push each other through a wire just like water molecules push each other through a pipe (despite charge neutrality inside the metal)». Однако студенты, возможно, правы — нейтральность, конечно, имеет место на макрошкале, но не на микрошкале, а тем более на еще более мелкой шкале, определяемой ниже.

Введенная в [6] модель максимально упрощена: она не квантовая, нет кристаллической решетки, бесконечно тонкий провод. Однако положительный фон зарядов для макронейтральности, которого нет в модели, можно ввести без потери результата.

В момент 0 на интервале $[0, L)$ есть $N(L)$ частиц в точках

$$0 = x_{N(L)}(0) < x_{N(L)-1}(0) < ... < x_1(0) < L.$$

Энергия этой конфигурации частиц

$$U = \sum_{<i,i-1>} V(x_i - x_{i-1}).$$

где суммирование ведется по парам ближайших соседей (чисто техническое предположение). Потенциал предполагается отталкивающим (около нуля):

$$V(x) = V(-x) > 0$$

с ростом в нуле:

$$f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \sim c_1 r^{-a}, a \geq 2, r = |x| \to 0$$

и убыванием в бесконечности: $V(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Динамика $x_i(t) = x_i^{(N)}(t)$ дается системой N зацепляющихся уравнений Ньютона с диссипацией энергии

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} - A\frac{dx_i}{dt}, i = 1, ..., N \tag{1}$$

(массы $m = 1$). Внешней силы нет, но есть сила взаимодействия $F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$ и граничные условия на концах пассивного участка. Как возможно движение без внешней силы? Попробуем расположить частицы так, чтобы на каждую действовала сила, направленная вправо. Для этого достаточно (и необходимо), чтобы для всех i

$$x_i - x_{i+1} < x_{i-1} - x_i$$

Тогда на каждую частицу действуют силы: с каждой из сторон порядка N^a, а результирующая сила

$$G_i^{(N)}(t) = f(x_i(t) - x_{i+1}(t)) - f(x_{i-1}(t) - x_i(t)) > 0$$

должна быть порядка 1. Она соответствует ускоряющей силе Друде.

Но надо соблюсти еще много требований. Основные из них:

1) почему эта картина сохраняется во времени?

2) почему плотность, а также скорости частиц макроскопически (то есть при $N \to \infty$) однородны?

В модели есть параметр N (число частиц) и 3 шкалы относительно этого параметра:

1) первая шкала — макрошкала — порядка 1 — скорости частиц;

2) вторая шкала — микрошкала (обратная плотность) — порядка $\frac{1}{N}$ — расстояния между соседними частицами

$$x_{i+1}(t) - x_i(t);$$

3) третья шкала — тонкая (субмикро) шкала — порядка $\frac{1}{N^2}$ — разности между последовательными расстояниями

$$\delta_i = x_{i-1}(t) + x_{i+1}(t) - 2x_i(t),$$

которую надо подбирать так, чтобы общая сила была порядка 1. Сила, двигающая ток, возникает именно на тонкой шкале.

Перейдем к строгим формулировкам. Данная система $N(L)$ уравнений имеет единственное решение, но оно зависит от начальной конфигурации частиц и от выбранных граничных условий. Построено простейшее семейство явных решений этой системы.

Решение называется квазистационарным (то есть стремящимся к стационарному для любого $-\infty < t < \infty$ при $N \to \infty$), если оно обладает следующими свойствами:

1) оно периодично с периодом $s = \frac{1}{N}$, где $N = \frac{N(L)}{L}$ — плотность, то есть

$$x_i(s) = x_{i+1}(0), \quad i = 1, ..., N(L) - 1,$$

при этом новые частицы входят (вбрасываются) в интервал в моменты, кратные s, а крайне правые частицы покидают интервал в точке L в моменты, кратные s;

2) частицы движутся только направо;

3) (граничные условия) есть внешние силы, которые действуют на крайне левую и крайне правую частицы так, что

$$F_{\text{left}}(x_{N(L)}(t)) > |f(x_{N(L)-1}(t) - x_{N(L)}(t))|$$

$$F_{\text{right}}(x_1(t)) < |f(x_1(t) - x_2(t))|$$

Теорема. *Для любого потенциала V и любых граничных условий из введенного класса, существует $L_0 > 0$, такая, что для любого $L < L_0$ и для любой достаточно большой плотности N существует квазистационарное решение. При этом при $N \to \infty$ имеют место свойства МАКРОскопической однородности по времени и по пространству без МИКРООднородности: действующие на каждую частицу i силы*

$$G_i^{(N)}(t) \to \text{const} > 0,$$

скорости всех частиц

$$v_i^{(N)}(t) \to \text{const} > 0,$$

однородность плотности частиц: для любого t и любого подынтервала $l \subset [0, L]$

$$\frac{N(l,t)}{N} \to \frac{|l|}{L}, N = N([0, L], t),$$

где $N(l, t)$ — число частиц в интервале I в момент t.

Схема доказательства и построения решения — сведение системы N уравнений к системе двух уравнений: линейному ОДУ и нелинейному функциональному уравнению.

Будем искать гладкую возрастающую функцию $x(t)$ на интервале времени $[0, T_L]$ для некоторого $T_L > 0$, такую, что $x(0) = 0$, $x(T_L) = L$, и удовлетворяющую одновременно двум уравнениям: линейному ОДУ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = G(t) - A\frac{dx}{dt} \tag{2}$$

и нелинейному функциональному уравнению

$$f(x(t) - x(t-s)) - f(x(t+s) - x(t)) = G(t), t \in [0, T_L].$$

Тогда

$$x_k(t) = x(t + (k-1)s), t \in (0, s), k = 1, ..., N(L), \tag{3}$$

будет искомым решением. Это означает, что соседи отстоят друг от друга на равные времена (но НЕ на равные расстояния).

Линейное ОДУ на $[0, T_L]$ с начальными условиями

$$x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = v_0 = A^{-1}w \tag{4}$$

может быть решено явно, если считать «силу Друде» $G(t)$ заданной в виде

$$G(t) = w + \nu t + g(t)$$

для некоторой константы $w > 0$, имеющей смысл базисной постоянной силы, которая движет частицы вправо (аналог силы Друде). «Голая» функция νt с малым параметром

$$\nu = \nu(N) = s^{a-2}a^{-1}A^{-a-1}w^{a+2}$$

определяет слабый рост этой силы в некотором интервале времени порядка $O(1)$. Поправочный член $g(t)$, необходимый для удовлетворения уравнений, ищется подстановкой в функциональное уравнение и его решением. Полное доказательство см. в [6].

4. Пробки на автотрассах

Пробки бывают не только в городах, но и на автотрассах, за МКАД. Анализ движения автомобилей по автотрассам более доступен точному математическому анализу, чем по переплетениям московских улиц. Есть два подхода к такому анализу: макроподход с уравнениями в частных производных, подобными уравнениям для жидкости (см., например, [10]), и микроподход, где есть много элементарных единиц — машин. Мы предложим одну модель микроподхода, показывающую, какие параметры играют существенную роль.

Пусть сначала по трассе с одной полосой в одном направлении движется машина, которая представляется точкой $x(t)$ на прямой R. В точках

$$... < Y_k < Y_{k+1} < ...$$

прямой стоят светофоры. На каждом светофоре k в детерминированные моменты времени $\tau_{k,n}$ зеленый свет включается, а в $\sigma_{k,n}$ выключается, причем

$$... < \tau_{k,n} < \sigma_{k,n} < \tau_{k,n+1} < \ldots .$$

Движение машины описывается так. Постояв перед светофором, машина набирает скорость по определенному закону $v(t)$ и далее движется с постоянной, максимально разрешенной скоростью $V_{\max}$ до следующего красного света. Задача состоит в вычислении средней скорости автомобиля на большом промежутке времени при разумных предположениях о множестве имеющихся параметров. Параметров действительно много: длительности красного и зеленого света для каждого из светофоров и сдвиги по времени для разных светофоров, расстояния между светофорами, $V_{\max}$ и закон набора скорости. Предположение состоит в том, что ответ будет мало зависеть от дисперсий этих величин, а в основном от их средних.

Рассмотрим теперь поток автомашин, где будем представлять машины точками

$$... < x_i(t) < x_{i-1}(t) < ...$$

на прямой R. При этом добавляются следующие параметры:

1) расстояние между последовательными точками не может быть менее некоторого числа d, которое можно считать, например, средней длиной машин;

2) учитывается запаздывание s начала движения каждого следующего водителя при начале движения на зеленый свет.

При этом содержательна даже задача с одним светофором. Если на трассу поступает слева поток машин с постоянной плотностью $\rho < d^{-1}$, то аналогично задачам теории массового обслуживания, существует критическая плотность $\rho_{\rm cr}$, выше которой образующаяся перед светофором пробка растет. Но, как мы знаем из опыта, пробки постепенно рассасываются и снова возникают. Это может быть только по причине переменной плотности $\rho(t)$ машин в течение дня. Это единственный макропараметр в задаче. Все остальные — микропараметры, то есть на гораздо меньшей временной шкале. Ситуация вполне аналогична возникающей при выводе уравнений в частных производных из микродинамики.

Одна такая задача о динамике роста пробки была решена в [11].

Список литературы

[1] *Malyshev V. A.* One-dimensional mechanical netrworks and crystals // Moscow Math. J. 2006. **6**, № 2. P. 263–268.

[2] *Малышев В. А., Манита А. Д.* Стохастическая микромодель течения Куэтта // Теория вероятностей и ее применения. 2008. **53**, № 4. С. 798–809.

[3] *Malyshev V. A., Zamyatin A. A.* Exchange processes with a local interaction: invariant Bernoulli measures // Markov Processes and Related Fields. 2009. **15**, № 1. P. 125–133.

[4] *Френкель Я.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975.

[5] *Moro R., Rabinovitch R., Xia Ch, Kresin V.* Electric dipole moments of water clusters from a beam deflection measurement // Phys. Rev. Lett. 2006. **97**. № 123401.

[6] *Малышев В. А.* Почему течет ток: многочастичная одномерная модель // Теор. и матем. физ. 2008. **155**, № 2. P. 301–311.

[7] *Ашкрофт Н., Мермин Н.* Физика твердого тела. Т. 1, 2. М.: Мир, 1979.

[8] *Jackson J.* Surface charges on circuit wires and resistors play three roles // Amer. J. Phys. 1996. **64**, № 7. P. 855–870.

[9] *Preyer N.* Transient behaviour of simple RC circuits // Amer. J. Phys. 2002. **70**. P. 1187–1193.

[10] *Prigogine I., Herman R.* Kinetic Theory of Vehicular Traffic. Elsevier, 1971.

[11] *Замятин А. А., Малышев В. А.* Накопление на границе для одномерной стохастической системы частиц // Проблемы передачи информации. 2008. **43**, № 4. P. 68–82.

Содержание

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
Том IV. Математика
Выпуск 3. Теория вероятностей и математическая статистика /
Под редакцией чл.-корр. РАН, профессора А.Н. Ширяева
М.: Изд-во Моск. ун-та, 180 с.

Оригинал-макет изготовлен издательской группой механико-математического факультета МГУ

Редактор Н.А. Леонтьева

Подписано в печать 27.04.2009
Формат 60 x 90 /8 Бумага офс. № 1. Усл. печ. л. 18, 0.
Заказ Тираж 150 экз.

Ордена «Знак Почета» Издательство Московского университета
125009, Москва, ул. Б.Никитская, 5/7

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета
119992, Москва, Ленинские горы.