ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XXV 1989 Вып. 1

УДК 621.394.74:519.2

Игнатюк И. А., Малышев В. А.

ПРОЦЕССЫ С ЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И СЕТИ СВЯЗИ

Рассматриваются системы связи со слабым взаимодействием между потоками передачи сообщений и находится для них явный вид стационарных вероятностей в виде ряда по диаграммам. Результаты вкладываются в общую схему процессов со слабым локальным взаимодействием.

§ 1. Введение

Пусть дана счетная цепь Маркова с непрерывным временем $\{\eta_t\}$, $t\in\mathbf{R}_+$. Рассмотрим счетное число независимых копий $\eta_t(x)$ таких цепей, занумерованных точками решетки $\mathbf{Z}^\nu$, и введем слабое локальное взаимодействие между этими цепями.

Изучение таких цепей началось 20 лет назад и в основном для случая, когда η_t имеет конечное число состояний [1] либо удовлетворяет условию Деблина [2]. В случае счетного числа состояний, когда условие Деблина не выполнено, проблема изучения эргодичности возникает уже для цепи η_t. Наиболее эффективным методом в конкретных задачах является метод функций Ляпунова [3]. Поэтому мы рассматриваем класс цепей с хорошей функцией Ляпунова.

Для процессов со слабым локальным взаимодействием мы доказываем эргодичность в некотором классе начальных условий и выписываем сходящийся явный ряд по «константе взаимодействия» для стационарного распределения. Такие диаграммные ряды выписывались ранее С. А. Пироговым [4] для случая конечного множества значений. Они могут оказаться полезными в технических расчетах систем связи (так же, как они являются основным средством физических расчетов).

Сети связи требуют некоторого обобщения понятия процесса с локальным взаимодействием — скачки здесь могут происходить одновременно в нескольких компонентах (мы благодарим А. Н. Рыбко за это замечание).

В последнем параграфе мы показываем, что обобщение нашей техники на случай сетей связи весьма просто, и рассматриваем пример, не стремясь к ненужной общности.

Сети связи с точки зрения процессов с локальным взаимодействием рассматривались в серии работ М. Я. Кельберта и Ю. М. Сухова (см., например, [5]) с использованием совершенно другой техники. Здесь применялся метод склейки и подбора мажорант, который в принципе не позволяет выписать явный вид для стационарных вероятностей. Более того, этот метод применим лишь в случае, когда окрестность взаимодействия имеет специальный вид — так называемую одностороннюю окрестность. С другой стороны, следует отметить, что метод склейки и подбора мажорант в ряде случаев проще и, безусловно, полезен.

§ 2. Формулировка результата

Пусть $\{\eta_t\}$ — неприводимая цепь Маркова с непрерывным временем $t\in\mathbf{R}_+$, счетным множеством состояний U и интенсивностями перехода $q(u, v)$, $u, v\in U$.

Будем считать, что данная цепь удовлетворяет следующим условиям:

1) $\sup\limits_{u\in U}|q(u,u)|<\lambda$, где $\lambda=\mathrm{const}>0$;

2) существует функция Ляпунова $f: U\to\mathbf{R}_+$ такая, что

а) ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\exp\{-\mathrm{b}f_k\}$ сходится при любом положительном b, где $\{f_k, k=0, 1, 2, \dots\}$ — множество значений функции f;

б) для каждого $k=0, 1, 2, \dots$ множество $\{u\in U|f(u)=f_k\}$ конечно;

в) для любых $u, v\in U$, $q(u, v)\neq 0$ лишь в том случае, если $|f(u)-f(v)|\leqslant M$, где M — некоторая положительная константа;

г) $\sum\limits_{v\in U}q(u,v)f(v)\leqslant-\varepsilon$, где $\varepsilon=\mathrm{const}>0$, для всех $u\in U\setminus U_0$, где множество U_0 конечно.

Определим марковский процесс со значениями в $U^{\mathbf{Z}^\nu}$. Для этого рассмотрим последовательность кубов

$$\Lambda_m=\{x\in\mathbf{Z}^\nu;\ \max_{j=1,\dots,\nu}|x^j|\leqslant md\},\quad m\in\mathbf{Z}_+,$$

и для каждого $m=1, 2, 3, \dots$ определим марковскую цепь

$$\xi^{(m)}=\{\xi^{(m)}(x),\ x\in\Lambda_m\}$$

со значениями в U^{Λ_m} и интенсивностями перехода

$$q_m(\bar u, \bar u'),\quad \bar u, \bar u'\in U^{\Lambda_m}.$$

Пусть $q_m(\bar u, \bar u')=0$ для всех наборов $\bar u=\{u(x)\in U;\ x\in\Lambda_m\}$ и $\bar u'=\{u'(x)\in U;\ x\in\Lambda_m\}$, которые отличаются значениями более чем в одной точке. В случае же, если эти наборы отличаются лишь в одной какой-либо точке $x\in\Lambda_m$, положим

(1) $$q_m(\bar u, \bar u')=q(u(x), u'(x))+c_m(\bar u, \bar u'),$$

где

$$c_m(\bar u, \bar u')=c(u(x), u(x+e_1), \dots, u(x+e_n); u'(x)),$$

если $x\in\Lambda_{m-1}$, и $c_m(\bar u, \bar u')=0$, если $x\in\Lambda_m\setminus\Lambda_{m-1}$ (множество $\{e_1, \dots, e_n\}\subset\mathbf{Z}^\nu$ здесь фиксировано, $e_k\neq 0$ и $\max\limits_{j=1,\dots,\nu}|e_k^j|\leqslant d$, $k=1, \dots, n$).

Относительно функции $c(u, u_1, \dots, u_n; u')$ будем предполагать, что для всех $u, u_1, \dots, u_n, u'\in U$ выполнено неравенство

(2) $$|c(u, u_1, \dots, u_n;\ u')|\leqslant p^{(\tau)}(u, u'),$$

где $p^{(\tau)}(u, u')$ — вероятность перехода цепи $\{\eta_t\}$ из u в u' за время $\tau\in\mathbf{R}_+$, и для всех $u, u_1, \dots, u_n\in U$

(2′) $$\sum_{v\in U}c(u, u_1, \dots, u_n; v)=0.$$

Определим теперь класс начальных условий для заданных цепей. Пусть $\mathfrak{A}$ — класс всех случайных полей на решетке $\mathbf{Z}^\nu$ со значениями в $U^{\mathbf{Z}^\nu}$ таких, что для каждого $\xi\in\mathfrak{A}$ можно указать константы $\alpha=\alpha(\xi)$ и

$C=C(\xi)$ такие, что для любых $x_1,\dots,x_N\in\mathbf{Z}^\nu$, где $x_i\neq x_j$ при $i\neq j$, и любых $f_{k_1},\dots,f_{k_N}$ имеет место неравенство:

$$P\{f(\xi(x_j))=f_{k_j},\ j=1,\dots,N\}\leqslant C^N\exp\left\{-\alpha\sum_{j=1}^{N}f_{k_j}\right\}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть* $\xi_0\in\mathfrak{A}$, $\alpha_0=\alpha(\xi_0)$, $C_0=C(\xi_0)$, *и для каждого* $m=1,2,\dots$ *с вероятностью* 1 $\xi_0^{(m)}(x)=\xi_0(x)$ *для всех* $x\in\Lambda_m$. *Тогда при достаточно малом* δ, $|\delta|<\delta_0$, *для любых* $t\in\mathbf{R}_+$, $x_1,\dots,x_N\in\mathbf{Z}^\nu$ *и* $u_1,\dots,u_N\in U$ *существуют пределы*

$$\lim_{m\to\infty}P\{\xi_t^{(m)}(x_j)=u_j,\ j=1,\dots,N\}=\pi_t(x_1,\dots,x_N,u_1,\dots,u_N), \tag{4}$$

$$\lim_{t\to\infty}\pi_t(x_1,\dots,x_N,u_1,\dots,u_N)=\pi(x_1,\dots,x_N,u_1,\dots,u_N), \tag{5}$$

причем каждый из этих пределов является аналитической функцией по δ *в области* $\{|\delta|<\delta_0\}$. *Более того, случайные поля* $\bar{\xi}_t$ *для любого* $t\in\mathbf{R}_+$ *и* ξ *с конечномерными распределениями* $\pi_t(x_1,\dots,x_N,u_1,\dots,u_N)$ *и* $\pi(x_1,\dots,x_N,u_1,\dots,u_N)$ *соответственно принадлежат классу* $\mathfrak{A}$.

§ 3. Доказательство теоремы. 1. Кластерное разложение

Докажем утверждение теоремы при $N=1$. При $N>1$ доказательство аналогично.

Пусть $x_0\in\Lambda_m$, $t_0\in\mathbf{R}_+$, $u\in U$. Выпишем в явном виде вероятность $P\{\xi_{t_0}^{(m)}(x_0)=u\}$. Пусть задана некоторая последовательность конфигураций на Λ_m

$$\bar{u}^i=\{u^i(x)\in U;\ x\in\Lambda_m\}.$$

Обозначим через $P_{t_0}\{\bar{u}^i;\ i=0,\dots,N\}$ вероятность того, что процесс $\bar{\xi}_t^{(m)}$ за промежуток времени от нуля до t_0 последовательно принимал только значения $\bar{u}^0,\dots,\bar{u}^N$, причем $\bar{u}^N=\bar{\xi}_{t_0}^{(m)}$. Тогда искомая вероятность запишется в виде ряда

$$P\{\xi_{t_0}^{(m)}(x_0)=u\}=\sum_{N=0}^{\infty}\ \sum_{\bar{u}^0,\dots,\bar{u}^N}P_{t_0}(\bar{u}^i;\ i=0,\dots,N), \tag{6}$$

где вторая сумма берется по всем таким наборам $\bar{u}^0,\dots,\bar{u}^N$, что $\bar{u}^i\neq\bar{u}^{i+1}$ для всех $i=0,\dots,N-1$ и $u^N(x_0)=u$. Выпишем в явном виде вероятность $P_{t_0}(\bar{u}^i,\ i=0,\dots,N)$:

$$\begin{aligned}P_{t_0}(\bar{u}^i,i=0,\dots,N)=&\int\limits_{0<\tau<\dots<\tau_N\leqslant t_0}\!\!\!\cdots\int\left[\prod_{i=0}^{N-1}(\exp\{q_m(\bar{u}^i,\bar{u}^i)\times\right.\\&\left.\times(\tau_{i+1}-\tau_i)\}\,q_m(\bar{u}^i,\bar{u}^{i+1}))\right]\exp\{q_m(\bar{u}^N,\bar{u}^N)(t_0-\tau_N)\}\times\\&\times d\tau_1\dots d\tau_N P\{\xi_0^{(m)}(x)=u^0(x);\ x\in\Lambda_m\},\end{aligned} \tag{7}$$

где $\tau_0=0$.

Подставив в (7) явное выражение для $q_m(\bar{u}^i,\bar{u}^{i+1})$ согласно (1) и разложив в ряд для всех $i=0,\dots,N$ значение

$$\exp\{\delta c_m(\bar{u}^i,\bar{u}^i)(\tau_{i+1}-\tau_i)\}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{(x_1,\dots,x_k)}\delta^k\int\limits_{\tau_i<\zeta_1<\dots<\zeta_k<\tau_{i+1}}\!\!\!\cdots\int\prod_{m=1}^{k}c(u^i(x_m),$$
$$u^i(x_m+e_1),\dots;\ u^i(x_m))\,d\zeta_1\dots d\zeta_k,$$

где сумма берется по всевозможным упорядоченным наборам $(x_1, \ldots$ $\ldots, x_k) \in \Lambda_m{}^k$, получим

$$(8) \qquad P\{\xi_{t_0}^{(m)}(x_0) = u\} = \sum_{N=0}^{\infty} \delta^N \times$$

$$\times \sum_{(x_1, \ldots, x_N) \in \Lambda_m{}^N} \int_{0<\tau_1< \ldots < \tau_N \leq t_0} \cdots \int K_A^{(m)}(x_0, t_0, u)\, d\tau_1, \ldots, d\tau_N,$$

где $A = \{(x_i, \tau_i), i=1, \ldots, N\}$ и

$$(9) \qquad K_A^{(m)}(x_0, t_0, u) = \sum \prod_{k=1}^{N} \Big[c(u^{2k-1}(x_k), \ldots, u^{2k-1}(x_k); u^{2k}(x_k)) \times$$

$$\times \prod_{x \in \Lambda_m} p^{(\tau_k - \tau_{k-1})}(u^{2k-2}(x), u^{2k-1}(x))\Big] \prod_{x \in \Lambda_m} p^{(t_0 - \tau_N)}(u^{2N}(x),$$

$$u^{2N+1}(x))\, P\{\xi_0(x) = u^0(x), \quad x \in \Lambda_m\}$$

(сумма здесь берется по всем таким конфигурациям $\bar{u}^0, \ldots, \bar{u}^{2N+1} \in U^{\Lambda_m}$, что для каждого $k=1, \ldots, N$ конфигурации $\bar{u}^{2k-1}$ и $\bar{u}^{2k}$ либо совпадают, либо отличаются лишь по значению в точке x_k, и $u^{2N+1}(x_0) = u$).

Обозначим сумму

$$\sum_{(x_1, \ldots, x_N)} \int_{0<\tau_1< \ldots < \tau_N \leq t_0} \cdots \int K_A^{(m)}(x_0, t_0, u)\, d\tau_1, \ldots, d\tau_N$$

через $C_N{}^{(m)}(x_0, t_0, u)$. Прежде чем приступать к дальнейшему преобразованию ряда (9), введем следующие обозначения.

1. Пусть $A \subset \mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{R}_+$ — некоторое конечное множество. Обозначим через $O(A)$ множество $A \cup \{(x+e_k, \tau), k=1, \ldots, n \mid (x, \tau) \in A\}$, а через A_0 — проекцию множества A на слой $\mathbf{Z}^\nu \times \{0\}$:

$$A_0 = \{(x, 0) \in \mathbf{Z}^\nu \times \{0\} \mid (\{x\} \times \mathbf{R}_+) \cap A \neq \phi\}.$$

2. Пусть $x \in \mathbf{Z}^\nu$, t_1, $t_2 \in \mathbf{R}_+$, $t_1 \leq t_2$. Множество $\{(x, \tau) \in \mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{R}_+ \mid t_1 \leq \tau \leq t_2\}$ обозначим через $\gamma(x, t_1, t_2)$ (далее мы будем называть это множество отрезком длины $t_2 - t_1$ с верхним концом в точке (x, t_2) и нижним — в точке (x, t_1)).

3. Пусть задано некоторое конечное множество $A \subset \mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{R}_+$; рассмотрим

$$D_A = \bigcup_{(y, \tau) \in O(A)} \gamma(y, 0, \tau) \cup \gamma(x_0, 0, t_0).$$

Точки множества $O(A)$ разбивают D_A на конечное число отрезков ненулевой длины так, что любые два из этих отрезков имеют не более одной общей точки. Обозначим множество этих отрезков через Γ_A. Выделим теперь в A все те точки, каждая из которых является нижним концом некоторого отрезка в Γ_A, а в Γ_A выделим все те отрезки, нижний конец каждого из которых принадлежит множеству A, и добавим к выделенным отрезкам оставшиеся точки из A, считая точку отрезком нулевой длины. Обозначим множество полученных таким образом отрезков через $\Gamma_A{}^0$.

Пусть $A \subseteq \Lambda_m \times (0, t_0)$. Из (9) нетрудно получить следующее выражение для $K_A{}^{(m)}(x_0, t_0, u)$:

$$(10) \qquad K_A^{(m)}(x_0, t_0, u) = \sum{}' \prod_{\gamma(x, t, t+\tau) \in \Gamma_A{}^0} \Big\{\sum_{v \in U} c(u(x, t), \ldots, u(x +$$

$$+ e_n, t); v)\, p^{(\tau)}(v, u(x, t+\tau))\Big\} \prod_{\gamma(x, t, t+\tau) \in \Gamma_A \setminus \Gamma_A{}^0} p^{(\tau)}(u(x, t),$$

$$u(x, t+\tau))\, P\{\xi_0(x) = u(x, 0), (x, 0) \in A_0\},$$

где сумма $\Sigma^{(\cdot)}$ берется по всем таким конфигурациям на множестве $O(A)\cup A_0\cup\{(x_0,t_0)\}$, что $u(x_0,t_0)=u$.

Определение. Конечное множество $A\subset \mathbf{Z}^\nu\times(0,t_0)$ будем называть кластером, если выполнены следующие условия:

1. Для любого $\tau\in\mathbf{R}_+$ слой $\mathbf{Z}^\nu\times\{\tau\}$ содержит не более одной точки из A;
2. Если $(x,\tau)\in A$, то либо $(x,\tau)=(x_0,t_0)$, либо существует отрезок $\gamma(x,\tau,\tau')$ такой, что для некоторого k, $0\leqslant k\leqslant n$ $(x-e_k,\tau')\in A\cup O(A)\cup\cup\{(x_0,t_0)\}$ $(e_0=0)$.

Заметим, что в (8) входят лишь те множества $A\subseteq\Lambda_m\times(0,t_0)$ $A=\{(x_k,\tau_k)\}$, которые удовлетворяют первому условию определения, $\tau_k\neq\tau_j$ при $k\neq j$. С другой стороны, если множество A удовлетворяет первому, но не удовлетворяет второму условию, то

$$K_A{}^{(m)}(x_0,t_0,u)=0.$$

Таким образом, в разложение (8) входят только те множества A, которые являются кластерами.

Мы получили кластерное разложение для вероятности $P\{\xi_{t_0}^{(m)}(x_0)=u\}$.

Получим теперь необходимые кластерные оценки.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда существуют такие константы $\sigma>0$, $\alpha_1>0$, $\beta_1>0$ и $q>1$, что для любых $u,u_1,\ldots,u_n\in U$ и $t\in\mathbf{R}_+$, при $t>qf(u)$, для любого $k\in Z_+$ имеет место неравенство*

$$\sum\nolimits^{(k,\,t)}\Bigl|\sum_{v\in U}c\,(u,u_1,\ldots,u_n;v)\,p^{(t)}\,(v,v')\Bigr|\leqslant\beta_1\exp\{-\alpha_1(t+k)\},\tag{11}$$

где сумма $\Sigma^{(k,\,t)}$ берется по всем $v'\in U$, для которых выполнено неравенство

$$M(\sigma t+k-1)<|f(u)-f(v')|\leqslant M(\sigma t+k).$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда существует $h_0>0$ такое, что для любого $h\in(0,h_0)$ найдутся такие константы $\alpha_2>0$, $\beta_2>1$, что для любого $u\in U$ и любых t_i, $t_i'\in\mathbf{R}_+$, $i=1,\ldots,N$, таких, что $0<t_1\leqslant t_1'\leqslant\ldots\leqslant t_N\leqslant t_N'$, имеет место неравенство*

$$P\{f(\eta_{t_i})\geqslant q^{-1}(t_i'-t_i),\ i=1,\ldots,N\,|\,\eta_0=u\}\leqslant \tag{12}$$
$$\leqslant\beta_2\exp\Bigl\{-\alpha_2\sum_{i=1}^{N}(t_i'-t_i)+hf(u)\Bigr\}.$$

Лемма 3. *В условиях теоремы для любых $u,u_1,\ldots,u_n$, $v\in U$, $t\in\mathbf{R}_+$, имеет место неравенство*

$$\Bigl|\sum_{u'\in U}c\,(u,u_1,\ldots,u_n;u')\,p^{(t)}\,(u',v)\Bigr|\leqslant p^{(t+\tau)}\,(u,v).\tag{13}$$

Утверждение последней леммы легко следует из (2). Доказательства лемм 1, 2 будут приведены в следующем параграфе.

Используя указанные леммы, легко получить нужные нам кластерные оценки.

Лемма 4. *Для любого кластера $A\subset\Lambda_m\times(0,t_0)$ имеет место неравенство*

$$|K_A^{(m)}(x_0,t_0,u)|\leqslant C^{|A|}\exp\Bigl\{-\varkappa\sum_{\gamma(y,\,t,\,t')\in\Gamma_A{}^0}(t'-t)-\varkappa f(u)\Bigr\},\tag{14}$$

где C и $\varkappa$ — некоторые положительные константы.

Доказательство леммы 4. Рассмотрим множество $\{0,1\}^A$. Будем говорить, что конфигурация на множестве $O(A)$ согласована с $\zeta\in\{0,1\}^A$, если для каждого отрезка $\gamma(y,t,t')\in\Gamma_A{}^0$ имеет место нера-

венство
$$f(u(y,t))\geqslant q^{-1}(t'-t),\quad \text{если } \zeta(y,t)=1,$$
и
$$f(u(y,t))<q^{-1}(t'-t),\quad \text{если } \zeta(y,t)=0.$$

Для каждого $\zeta\in\{0,1\}^A$ определим значение $K^{(m)}_{A,\zeta}(x_0,t_0,u)$ согласно (10), где сумма Σ' берется уже не по всем конфигурациям на множестве $O(A)$, а лишь по тем, которые согласованы с ζ.

Воспользуемся теперь для оценки суммы
$$\left|\sum_{v\in U} c(u(y,t),u(y+e_1,t),\dots,u(y+e_n,t);v)\,p^{(t'-t)}(v,u(y,t'))\right|$$
неравенством (13), если $\zeta(y,t)=1$, и неравенством (11), если $\zeta(y,t)=0$, а также леммой 2, где $h\in(0,h_0)$ достаточно мало ($h<\alpha_0$ и $h(\sigma M+q^{-1})<$ $<\alpha_1$); получим
$$|K^{(m)}_{A,\zeta}(x_0,t_0,u)|\leqslant C_1^{|A|}\exp\Big\{-\varkappa_1\sum_{\gamma(y,t,t')\in\Gamma_A{}^0}(t'-t)-\varkappa_1 f(u)\Big\},$$
где константы $C_1>1$ и $\varkappa_1>0$ не зависят от ζ. Отсюда очевидным образом следует неравенство (14).

Лемма 4 доказана.

Докажем теперь существование пределов (4) и (5). Для этого заметим, что для любого кластера $A\subset\Lambda_m\times(0,t_0)$ и любого $k>m$
$$K_A{}^{(k)}(x_0,t_0,u)=K_A{}^{(m)}(x_0,t_0,u)=K_A(x_0,t_0,u).$$

Далее нетрудно видеть, что если множество $A\subset\mathbf{Z}^\nu\times(0,t_0)$ состоит из N точек и является кластером, то $A\subset\Lambda_{N+n_0}$, где $n_0=\max\limits_{j=1,\dots,\nu}|x_0{}^j|$, и, следовательно, для любых m, $m'>N+n_0$ имеет место равенство

(15) $$C_N{}^m(x_0,t_0,u)=C_N{}^{m'}(x_0,t_0,u)=C_N(x_0,t_0,u).$$

Укажем алгоритм построения произвольного кластера $A\subset\mathbf{Z}^\nu\times(0,t_0)$. Пусть $|A|=N$ фиксировано. На первом шаге мы выбираем длину отрезка из $\Gamma_A{}^0$ с верхним концом в точке (x_0,t_0). Пусть эта длина равна τ_0. Затем выбираем все точки из множества $\{(x_0+e_i,\ t_0-\tau_0),\ i=0,\dots,n\}$, каждая из которых будет концом отрезка из $\Gamma_A{}^0$. Пусть $(x_1,t_0-\tau_0),\dots,(x_m,$ $t_0-\tau_0)$ — выбранные точки. Теперь мы для каждого $j=1,\dots,m$ выбираем длину отрезка с верхним концом в точке $(x_j,\ t_0-\tau_0)$, и т. д.

Очевидно, что число различных кластеров из N точек с фиксированными длинами отрезков из $\Gamma_A{}^0$ не превосходит $(2^{n+1})^N$.

Отсюда, используя лемму 4, нетрудно получить следующее неравенство:

(16) $$|C_N(x_0,t_0,u)|\leqslant C_2{}^N(2^{n+1})^N\exp\{-\varkappa f(u)\},$$

где $C_2=\mathrm{const}>0$. Из (15) и (16) при $\delta_0=1/C_2(2^{n+1})$ получаем существование предела $\lim\limits_{m\to\infty}P\{\xi^{(m)}_{t_0}(x_0)=u\}=\pi_{t_0}(x_0,u)$,

а также неравенство
$$\pi_{t_0}(x_0,u)\leqslant C_3\exp\{-\varkappa f(u)\},$$
где $C_3=C_3(\delta)>0$.

Аналогично доказывается неравенство
$$P\{f(\xi_{t_0}(x_0))=f(u)\}\leqslant C_3\exp\{-\varkappa f(u)\}$$
для любого $t_0\in\mathbf{R}_+$.

Докажем существование предела
$$\lim_{t\to\infty}\pi_t(x_0,u)=\pi(x_0,u).$$

Пусть $A \subset \mathbf{Z}^\nu \times (0, t_0)$ — произвольный кластер. Для каждого $\tau \in \mathbf{R}_+$ определим кластер A_τ:

$$A_\tau = \{(y, t+\tau) \mid (y, t) \in A\}.$$

Существование предела для $K_{A_\tau}(x_0, t_0+\tau, u)$ при $\tau \to \infty$ непосредственно следует из эргодичности цепи $\{\eta_t\}$. Отсюда в силу леммы 4 следует существование предела для $C_N(x_0, t_0, u)$ при $t_0 \to \infty$ для всех $N \in \mathbf{Z}_+$ и при $|\delta| < (C_2(2^{n+1}))^{-1}$ в силу неравенства (16) существование предела для $\pi_t(x_0, u)$ при $t \to \infty$.

Переходя в (8) к пределу при $m \to \infty$, получим явный ряд для $\pi_{t_0}(x_0, u)$, сходящийся в круге $|\delta| < \delta_0$. Далее, переходя к пределу при $t_0 \to \infty$, получим явный ряд для $\pi(x_0, u)$, сходящийся в этом же круге. Тем самым мы доказали аналитичность обоих пределов в данном круге. Аналогично доказывается существование пределов (4) и (5) для произвольных $x_1, \ldots, x_N \in \mathbf{Z}^\nu$ и $u_1, \ldots, u_N \in U$, аналитичность этих пределов в круге $|\delta| < \delta_0$, а также неравенство

$$P\{f(\xi_t(x_1)) = f(u_1), \ldots, f(\xi_t(x_N)) = f(u_N)\} \leqslant$$
$$\leqslant C_3^N \exp\left\{-\varkappa \sum_{i=1}^{N} f(u_i)\right\}$$

для любого $t \in \mathbf{R}_+$. Следовательно, $\xi_t \in \mathfrak{A}$ для любого $t \in \mathbf{R}_+$, и случайное поле ξ с конечномерными распределениями $\pi(x_1, \ldots, x_N, u_1, \ldots, u_N)$ также принадлежит классу $\mathfrak{A}$. Теорема 1 доказана.

§ 4. Доказательство лемм 1 и 2

Мы будем пользоваться сведением непрерывной цепи Маркова к дискретной (см. [6]). Рассмотрим счетную цепь Маркова $\{\tilde\eta_t\}$, $t \in \mathbf{Z}_+$, с множеством состояний U и переходными вероятностями $\tilde p(u, v)$:

$$\tilde p(u, v) = \lambda^{-1} q(u, v), \text{ если } u \neq v, \text{ и } \tilde p(u, u) = 1 + \lambda^{-1} q(u, u). \tag{17}$$

Вероятности перехода цепи $\{\eta_t\}$, $t \in \mathbf{R}_+$ выражаются через вероятности перехода цепи $\{\tilde\eta_t\}$, $t \in \mathbf{Z}_+$, следующим образом:

$$p^{(t)}(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \tilde p^{(k)}(u, v). \tag{18}$$

Для цепи $\{\tilde\eta_t\}$, $t \in \mathbf{Z}_+$, можно построить целочисленную, положительную, ограниченную функцию $k = \{k(u), u \in U\}$ и функцию f_1: $U \to \mathbf{R}_+$ такие, что

1) для любого $u \in U \setminus \{u_0\}$ ($u_0 \in U_0$ фиксировано) выполнено неравенство

$$\sum_{v \in U} \tilde p^{(k(u))}(u, v) f_1(v) \leqslant f_1(u) - \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 = \text{const} > 0$;

2) для любых $u, v \in U$, $\tilde p(u, v) \neq 0$ только в том случае, если $|f_1(u) - f_1(v)| \leqslant M_1$, где $M_1 \geqslant M$;

3) ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \exp\{-\mathrm{b} f_{1i}\}$ сходится при любом $\mathrm{b} > 0$, где $\{f_{1i}, i \in \mathbf{Z}_+\} = f_1(U)$ — множество значений функции f_1; и для любого $i \in \mathbf{Z}_+$ множество $\{u \in U \mid f(u) = f_i\}$ конечно.

Достаточно взять $f_1(u_0) = f(u_0)$ и $f_1(u) = f(u) + M m_0 \varepsilon_0^{-1}$ для всех $u \in U \setminus \{u_0\}$, где $m_0 \in \mathbf{Z}_+$, $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $u \in U_0$ $\tilde p^{(m_0)}(u, u_0) > \varepsilon_0$ (см. [3, лемма 3.3]). Очевидно, что свойства а) и б) функции f: $U \to \mathbf{R}_+$ при этом сохраняются. Без ограничения общности мы можем считать, что $f_1=f$ и $f(u_0)=0$.

Утверждение 1. *Существует $h_0>0$ такое, что для любого $h\in(0, h_0)$ можно найти $\alpha>0$ и $\beta>0$ такие, что для любых $u\in U$ и $k\in\mathbf{Z}_+$ выполнено неравенство*

$$(19)\qquad P\{\tilde{\eta}_m\neq u_0,\ 0<m<k\,|\,\eta_0=u\}\leqslant\beta\exp\{hf(u)-\alpha k\}.$$

Доказательство этого утверждения можно легко получить, буквально следуя доказательству лемм 1.1 и 1.2 работы [3].

Утверждение 2. *Существуют такие константы α_1', β_1', $\sigma>0$, что для любого $k\neq0$, $u\in U$ и $t\in\mathbf{R}_+$ имеет место неравенство*

$$(20)\qquad \Sigma^{(k,\,t)}p^{(t)}(u,v)\leqslant\beta_1'\exp\{-\alpha_1'(t+k)\},$$

где сумма $\Sigma^{(k,t)}$ берется по всем тем $v\in U$, для которых $M(\sigma t+k-1)<|f(u)-f(v)|\leqslant M(\sigma t+k)$.

Доказательство. Заметим, что если $|f(u)-f(v)|\geqslant M(\sigma t+k-1)$, то $\tilde{p}^{(n)}(u, v)=0$ для любого $n\in Z_+$ такого, что $n<\sigma t+k-1$. Отсюда из (18) получаем неравенство

$$\Sigma^{(k,\,t)}p^{(t)}(u,v)\leqslant\sum_{n\geqslant\sigma t+k-1}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\Sigma^{(k,\,t)}\tilde{p}^{(n)}(u,v)\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{-\delta_1(\sigma t+k-1)\}\sum_{n\geqslant\sigma t+k-1}\frac{(\lambda t e^{\delta_1})^n}{n!}e^{-\lambda t}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{-\delta_1(\sigma t+k-1)-\lambda t+\lambda t e^{\delta_1}\},$$

где $\delta_1>0$. Нетрудно видеть, что $\sigma>0$ и $\delta_1>0$ можно выбрать таким образом, что $\delta_2=\delta_1\sigma+\lambda-\lambda e^{\delta_1}>0$. Положив $\alpha_1'=\min\{\delta_1, \delta_2\}$ и $\beta_1'=\exp\{\delta_1\}$, получим неравенство (20).

Утверждение 3. *Существуют такие константы $\alpha_2'>0$, $\beta_2'>0$ и $h_2>0$, что для любых $u^i\in U$, $i=1,\dots, n+1$, и любого $t\in\mathbf{R}_+$ имеет место неравенство*

$$(21)\qquad \Sigma^{(0,\,t)}\Big|\sum_{u\in U}c(u_1,\dots,u_{n+1};u)\,p^{(t)}(u,v)\Big|\leqslant\beta_2'\exp\{h_2 f(u_1)-\alpha_2' t\},$$

где сумма $\Sigma^{(0,t)}$ берется по всем таким $v\in U$, что

$$|f(u)-f(v)|\leqslant M\sigma t.$$

Доказательство. Пусть $\pi_0(u)$, $u\in U$ — стационарные вероятности цепи $\{\eta_t\}$, $t\in\mathbf{R}_+$:

$$\sum_{v\in U}q(u,v)\,\pi_0(v)=0 \text{ для любого } u\in U.$$

Тогда для любого $u\in U$

$$\sum_{v\in U}\tilde{p}(u,v)\,\pi_0(v)=\pi_0(u)$$

и, следовательно, $\pi_0(u)$, $u\in U$ — стационарные вероятности цепи $\{\tilde{\eta}_t\}$, $t\in Z_+$.

Покажем, что существуют такие константы α', β', $h'>0$, что для любого $u\in U$ и любого $m\in Z_+$ верно неравенство

$$(22)\qquad |\tilde{p}^{(m)}(u, u_0)-\pi_0(u_0)|\leqslant\beta'\exp\{h'f(u)-\alpha' m\}.$$

При $u=u_0$ неравенство (22) легко следует из (19). Пусть теперь $u\in U$ произвольно. Воспользуемся неравенством

$$(23)\qquad |\tilde p^{(m)}(u,u_0)-\pi(u_0)|\leqslant\sum_{n=0}^{m}|\tilde p^{(n)}(u_0,u_0)-\pi_0(u_0)|\,f^{(m-n)}(u,u_0)+$$
$$+\pi_0(u_0)\sum_{n\geqslant m+1}f^{(n)}(u,u_0),$$

где

$$f^{(n)}(u,v)=P\{\tilde\eta_k\neq u_0,\ 1\leqslant k<n,\ \tilde\eta_n=v|\eta_0=u\}.$$

Из (23) в силу (19) и (22) для $u=u_0$ получаем неравенство (22) для произвольного $u\in U$.

Оценим левую часть неравенства (21). Из (18) получим

$$(24)\qquad \Sigma^{(0,\,t)}\left|\sum_{u\in U}c(u_1,\ldots,u_{n+1};u)\,p^{(t)}(u,v)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\Sigma^{(0,\,t)}\left|\sum_{u\in U}c(u_1,\ldots,u_{n+1};u)\,\tilde p^{(k)}(u,v)\right|\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

Покажем, что существуют такие константы $\alpha''>0$, $\beta''>0$ и $h''>0$, что для любых $u_1,\ldots,u_{n+1}\in U$ и любого $k\in\mathbf{Z}_+$ выполнено неравенство

$$(25)\qquad \Sigma^{(0,\,t)}\left|\sum_{u\in U}c(u_1,\ldots,u_{n+1},u)\,\tilde p^{(k)}(u,v)\right|\leqslant\beta''\exp\{h''f(u_1)-\alpha''k\}.$$

Действительно, левая часть (25) не превосходит суммы

$$\sum_{u\in U}|c(u_1,\ldots,u_{n+1};u)|\sum_{m=0}^{k}|\tilde p^{(m)}(u,u_0)-\pi(u_0)|\,\Sigma^{(0,\,t)}f^{(k-m)}(u_0,v).$$

Отсюда, последовательно применяя неравенства (19), (22) и условия на цепь $\{\eta_t\}$ 1) и 2), в), а также неравенство (2), получим (25).

Из (24) и (25) легко получить, что левая часть неравенства (21) не превосходит

$$\beta''\exp\{h''f(u_1)-\lambda t(1-e^{-\alpha''})\}$$

и, положив $\alpha_2'=\lambda(1-e^{-\alpha''})$, $h_2'=h''$, $\beta_2'=\beta''$, получим (21).

Лемма 1 является очевидным следствием доказанных утверждений. Перейдем к доказательству леммы 2.

Утверждение 4. *Существует $h_0>0$ такое, что для любого $h\in(0,h_0)$ можно указать такие константы $\alpha_3'>0$, $\beta_3'>0$, что для любого $u\in U$ и любого $t\in\mathbf{R}_+$ верно неравенство*

$$(26)\qquad P\{\eta_\tau\neq u_0,\ 0<\tau\leqslant t|\eta_0=u\}\leqslant\beta_3'\exp\{hf(u)-\alpha_3't\}.$$

Доказательство этого утверждения легко следует из (19). Действительно, представим левую часть (26) в виде суммы

$$P\{\eta_\tau\neq u_0,\ 0<\tau\leqslant t\,|\,\eta_0=u\}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}P\{\tilde\eta_m\neq u_0,\ 0<m\leqslant k\,|\,\tilde\eta_0=u\}.$$

Отсюда в силу (19) получим

$$P\{\eta_\tau\neq u_0,\ \ 0<\tau\leqslant t|\eta_0=u\}\leqslant\beta\exp\{hf(u)-\lambda(1-e^{-\alpha})t\}$$

и, положив $\beta_3'=\beta$, $\alpha_3'=\lambda(1-e^{-\alpha})$, получим (26).

Утверждение 5. *Пусть* $t_1, t_1' \in \mathbf{R}_+$, $t_1 \leqslant t_1'$, $u \in U$, $0<c<1$. *Обозначим через* $B_c(t_1, t_1')$ *следующее событие*:
$B_c(t_1, t_1')=\{$*процесс* η_t *за промежуток времени* $(t_1, t_1+c(t_1'-t_1))$ *сделал не менее* $(Mq)^{-1}(t_1'-t_1)$ *скачков*$\}$.

Тогда при достаточно малом $c>0$ *найдутся такие константы* $\beta_4'>0$ *и* $\alpha_4'>0$, *что*

$$P\{B_c(t_1, t_1') \mid \eta_0=u\} \leqslant \beta_4' \exp\{-\alpha_4'(t_1'-t_1)\}. \tag{27}$$

Для доказательства этого утверждения воспользуемся разложением (18):

$$P\{B_c(t_1, t_1') \mid \eta_0=u\}=\sum_{v \in U} P\{B_c(t_1, t_1') \mid \eta_{t_1}=v\}\, p^{(t_1)}(u, v) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n \geqslant (Mq)^{-1}(t_1'-t_1)} \frac{(c\lambda(t_1'-t_1))^n}{n!} e^{-\lambda c(t_1'-t_1)} \times$$

$$\times \sum_{v \in U} p^{(t_1)}(u, v) \sum_{v' \in U} \tilde{p}^{(n)}(vv') \leqslant \exp\{(\lambda(1-c)+(Mq)^{-1}\ln c)(t_1'-t_1)\}.$$

Нетрудно видеть, что при достаточно малом $c>0$

$$\alpha_4'=-\lambda(1-c)-(Mq)^{-1}\ln c>0$$

и, следовательно, верно неравенство (27).

Доказательство леммы 2. Докажем одновременно индукцией по $m \in \mathbf{Z}_+$ лемму 2 и следующее утверждение.

Утверждение 6. *Существует* $h_0>0$ *такое, что для любого* $h \in (0, h_0)$ *можно указать такие константы* $\alpha_5'>0$ *и* $\beta_5'>1$, *что для любого* $u \in U$ *и любых* $t_i, t_i' \in \mathbf{R}_+$, $i=1, \ldots, m$, $0<t_1 \leqslant t_1' \leqslant \ldots \leqslant t_m \leqslant t_m'$, *выполнено неравенство*

$$P\{\eta_t \neq u_0,\ t_m<t \leqslant t_m',\ f(\eta_{t_i})>q^{-1}(t_i'-t_i),\ i=1, \ldots, m-1\} \leqslant \tag{28}$$

$$\leqslant (\beta_5')^m \exp\left\{hf(u)-\alpha_5' \sum_{i=1}^m (t_i'-t_i)\right\}.$$

При $m=1$ неравенство (28) легко следует из утверждения 4. Достаточно воспользоваться неравенством

$$P\{\eta_t \neq u_0, t_1<t \leqslant t_1' \mid \eta_0=u\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{\eta_t \neq u_0, 0<t \leqslant t_1' \mid \eta_0=u\}+\int_0^{t_1} P\{\eta_t \neq u_0,$$

$$t_1-\tau<t \leqslant t_1' \mid \eta_{t_1-\tau}=u_0\} P\{\eta_{t_1-\tau}=u_0 \mid \eta_0=u\}\, d\tau,$$

а также неравенством (26).

Утверждение леммы 2 при $m=1$ очевидным образом следует из (28) при $m=1$, (27) и неравенства

$$P\{f(\eta_{t_1})>q^{-1}(t_1'-t_1) \mid \eta_0=u\} \leqslant P\{\eta_t \neq u_0,\ t_1<t \leqslant t_1+$$

$$+c(t_1'-t_1) \mid \eta_0=u\}+P\{B_c(t_1, t_1') \mid \eta_0=u\}.$$

Далее, пусть при $m=k$ утверждение 6 и утверждение леммы 2 выполнены. Тогда из неравенства

$$P\{f(\eta_{t_i})>q^{-1}(t_i'-t_i),\ i=1, \ldots, k,\ \eta_t \neq u_0,\ t_{k+1}<t \leqslant$$

$$\leqslant t_{k+1}' \mid \eta_0=u\} \leqslant P\{f(\eta_{t_i})>q^{-1}(t_i'-t_i),\ i=1, \ldots, k \mid \eta_0=u\} \times$$

$$\times \int_{t_k}^{t_{k+1}} P\{\eta_t \neq u_0, \tau<t \leqslant t_{k+1}' \mid \eta_\tau=u_0\}\, d\tau+$$

$$+P\{f(\eta_{t_i})>q^{-1}(t_i'-t_i),\ i=1,\ldots,k-1,\ \eta_t\neq u_0,$$
$$t_k<t<t_{k+1}'\mid\eta_0=u\}$$

в силу утверждения 4 легко следует справедливость утверждения 6 при $m=k+1$. Далее рассмотрим неравенство

$$(29)\qquad P\{f(\eta_{t_i})>q^{-1}(t_i'-t_i),\ i=1,\ldots,k+1\mid\eta_0=u\}\leqslant$$
$$\leqslant P\{f(\eta_{t_i})>q^{-1}(t_i'-t_i),\ i=1,\ldots,k;\ \eta_t\neq u_0,\ t_{k+1}<t<$$
$$<t_{k+1}+c(t_{k+1}'-t_{k+1})\mid\eta_0=u\}+P\{f(\eta_{t_i})>q^{-1}(t_i'-t_i),$$
$$i=1,\ldots,k;\ B_c(t_{k+1},t_{k+1}^{\bullet})\mid\eta_0=u\}.$$

Воспользовавшись при оценке первого слагаемого правой части неравенства (29) леммой 2 при $m=k$ и утверждением 5, а при оценке второго слагаемого утверждением 6 при $m=k+1$, получим справедливость утверждения леммы 2 при $m=k+1$.

Лемма 2 доказана.

§ 5. Более общий класс процессов и применение к сетям связи

Мы рассмотрели марковский процесс ξ_t, у которого в каждый момент времени может изменяться значение лишь в одной какой-либо точке $x\in\mathbf{Z}^\nu$. На практике часто встречаются процессы, у которых может меняться значение сразу в нескольких точках.

Рассмотрим один из таких процессов. Определим последовательность марковских цепей

$$\xi_t^{(m)}=\{\xi_t^{(m)}(x),\quad x\in\Lambda_m\}$$

со значениями в U^{Λ_m} и интенсивностями перехода

$$q_m(\bar u,\bar u'),\ \ \bar u,\bar u'\in U^{\Lambda_m}.$$

Пусть для всех конфигураций $\bar u$, $\bar u'\in U^{\Lambda_m}$, которые отличаются лишь одной координатой, интенсивности перехода $q_m(\bar u',\bar u')$ определяются согласно (1), а для тех конфигураций $\bar u$, $\bar u'$, которые отличаются по своим значениям в каких-либо двух соседних точках x и y ($x=y+e_k$, $k=1,\ldots,n$), интенсивности перехода равны

$$q_m(\bar u,\bar u')=\delta c_1(u(x),u(y);u'(x),u'(y))$$

(для удобства будем считать, что $c_1(u_1,v_1;u_2,v_2)=c(v_1,u_1;v_2,u_2)$). Во всех остальных случаях, если $\bar u\neq\bar u'$, положим

$$q_m(\bar u,\bar u')=0.$$

Пусть для всех $u_1,u_2,v_1,v_2\in U$ выполнено неравенство

$$(30)\qquad |c(u_1,v_1;u_2,v_2)|\leqslant p^{(\tau)}(u_1u_2)p^{(\tau)}(v_1,v_2),\ \ \tau=\mathrm{const}>0$$

и для всех $u_1,v_1\in U$

$$(30')\qquad \sum_{u_2v_2\in U}c(u_1,v_1;u_2,v_2)=0.$$

Теорема 2. *Пусть марковская цепь $\{\eta_t\}$ удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) § 2, *и пусть выполнены условия* (2), (2′), (30) *и* (30′). *Тогда если $\xi_0\in\mathfrak{A}$ и δ достаточно мало, то для любых $x_1,\ldots,x_N\in\mathbf{Z}^\nu$ и $u_1,\ldots,u_N\in U$ существуют пределы*

$$\lim_{m\to\infty}P\{\xi_t^{(m)}(x_j)=u_j,\ j=1,\ldots,N\}=\pi_t(x_1,\ldots,x_N,u_1,\ldots,u_N)$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \pi_t(x_1, \ldots, x_N, u_1, \ldots, u_N) = \pi(x_1, \ldots, x_N, u_1, \ldots, u_N),$$

причем эти пределы являются аналитическими функциями по δ в некоторой окрестности нуля и, более того, случайные поля ξ_t и ξ с конечномерными распределениями $\pi_t(x_1, \ldots, x_N, u_1, \ldots, u_N)$ и $\pi(x_1, \ldots, x_N, u_1, \ldots, u_N)$ соответственно принадлежат классу $\mathfrak{A}$.

Доказательство теоремы 2 так же, как и доказательство теоремы 1, основано на технике кластерных разложений и использует свойства цепи $\{\eta_t\}$ (леммы 1, 2 и 3). Мы не будем здесь проводить доказательство этой теоремы, поскольку оно почти дословно повторяет предыдущие рассуждения. Приведем конкретный пример процессов с локальным взаимодействием, для которого выполнены условия теоремы 2, из теории сетей массового обслуживания.

Пусть в узлах решетки $\mathbf{Z}^\nu$ находятся обслуживающие устройства, и пусть любые два соседние узла x и $y \in Z^\nu \left(\sum_{j=1}^{\nu} |x^j - y^j| = 1\right)$ соединены линией, по которой может передаваться информация как из узла x в узел y, так и из узла y в узел x.

Далее пусть в узлах $x \in \mathbf{Z}^\nu$ возникают независимые в совокупности пуассоновские потоки сообщений, которые требуют передачи по линиям сети, и пусть интенсивность каждого потока равна λ. По мере поступления сообщений в каждом узле образуется очередь, где первым обслуживается то сообщение, которое раньше поступило.

Пусть каждое сообщение характеризуется маркой (d, l), где $d \in \{0, 1\}$ — индекс сообщения, а $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$ — его длина.

Будем считать, что возникшее в узле сообщение с равной вероятностью передается в один из соседних узлов так, что за один раз с интенсивностью α передается лишь часть сообщения длины 1. Сообщение с индексом $d=0$ сразу после передачи его в соседний узел выбывает из сети, а сообщение с индексом $d=1$ с вероятностью θ снова встает в очередь для передачи в следующий узел.

Пусть марки различных сообщений независимы и имеют распределение $G=H\times F$, где H — вероятностная мера на $\{0, 1\}$ (пара чисел $p=H(1)$ и $1-p=H(0)$), а F — вероятностная мера на $\{1, 2, \ldots, N\}$.

Рассмотрим так называемую систему с маловероятными конфликтами. По линии сети может одновременно идти передача двух сообщений из различных узлов. В данном случае с интенсивностью δ происходит конфликт, передача прекращается и оба сообщения снова встают в очередь, каждое в своем узле.

При $\delta=\theta=0$ сеть распадается на независимые узлы, работа каждого из которых описывается некоторой марковской цепью $\{\eta_t\}$, $t \in \mathbf{R}_+$. Состояние этой цепи задает все сообщения, находящиеся в узле в порядке их очередности и указывает длину той части первого сообщения, которая еще не передана по линии связи. Роль функции Ляпунова в данном случае играет длина очереди: если $u=((d_1, l_1), \ldots, (d_k, l_k), l)$, где $0 \leqslant l \leqslant l_1$, то

$$f(u) = \sum_{j=2}^{k} l_j + l.$$

Условия а), б) и в) здесь выполнены автоматически. Условие г) выполнено, если выполнено неравенство

$$\lambda \sum_{n=1}^{N} nF(n) < \alpha.$$

Нетрудно также проверить условия (2) и (30) (условия (2′) и (30′) выполняются автоматически).

Таким образом, в данном случае применима теорема 2 и, следовательно, при достаточно малых δ и θ и нулевых начальных условиях имеет место сходимость к стационарному режиму. Стационарные конечномерные вероятности аналитичны по δ и θ в некоторой окрестности нуля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Добрушин Р. Л.* Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент // Пробл. передачи информ. 1971. Т. 7. № 2. С. 70–87.
2. *Басис В. Я.* О стационарности и эргодичности многокомпонентных марковских процессов с локальным взаимодействием // Многокомпонентные случайные системы. М.: Наука, 1978. С. 31–46.
3. *Малышев В. А., Меньшиков М. В.* Эргодичность, непрерывность, аналитичность счетных цепей Маркова // Тр. Моск. матем. об-ва. М.: МГУ, 1979. Т. 39. С. 1–49.
4. *Пирогов С. А.* Кластерные разложения для систем автоматов // Пробл. передачи информ. 1986. Т. 22. № 4. С. 60–66.
5. *Кельберт М. Я., Сухов Ю. М.* Условия существования и единственности случайного поля, описывающего состояние коммутационной сети // Пробл. передачи информ. 1983. Т. 13. № 4. С. 50–71.
6. *Штойян Д.* Качественные свойства и оценки стохастических моделей. М.: Мир, 1979.

Поступила в редакцию
9.X.1986