Отдельный оттиск

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТОМ
XXXII
ВЫПУСК
5(197)

1977

1977 г. сентябрь — октябрь *т. XXXII, вып. 5 (197)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМЕНИ И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседания 23 февраля и 2 марта 1977 г.

1. В. А. Малышев «Решетчатые гамильтоновы модели».

Современная математическая физика имеет дело с операторами, действующими на функции от бесконечного числа равноправных переменных. Для решетчатых моделей есть три способа построения таких операторов (гамильтонианов): прямой, алгебраический и евклидов.

Пусть каждой точке $x \in \mathbf{Z}^{\nu}$ сопоставлено гильбертово пространство $\mathscr{H}_x$, $\dim \mathscr{H}_x = 2$, $\mathscr{H}_V = \bigotimes\limits_{x \in V} \mathscr{H}_x$, $\mathfrak{A}_V$ — алгебра всех операторов в $\mathscr{H}_V$. Одномерная ($\nu = 1$) модель Гейзенберга в основном состоянии определяется гамильтонианом

$$H_V = -\sum_{\{x,\, x+1\} \in V} (\sigma_x^1 \otimes \sigma_{x+1}^1 + \sigma_x^2 \otimes \sigma_{x+1}^2 + \sigma_x^3 \otimes \sigma_{x+1}^3)$$

в $\mathscr{H}_V$, где σ_x^i — матрицы Паули в $\mathscr{H}_x$.

Пусть $\mathscr{H}$ — бесконечное тензорное произведение $\mathscr{H}_x$ с выделенным вектором $\omega = \ldots \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \ldots$, $\mathscr{H}_V$ естественно вложены в $\mathscr{H}$. Имеет место

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}^{(n)}, \tag{1}$$

где $\mathscr{H}^{(n)}$ порождено всеми векторами, где в ω вместо $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ на n любых местах стоят $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Прямой подход состоит в том, что в некоторых случаях, как, например, в модели Гейзенберга, существует

$$H = \lim_{V \to \mathbf{Z}^{\nu}} (H_V + c_V 1) \tag{2}$$

как самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. В модели Гейзенберга нетрудно доказать, что $\mathscr{H}^{(n)}$ инвариантно относительно H и $H|_{\mathscr{H}^{(n)}}$ имеет вид дискретного оператора Шрёдингера с парным взаимодействием. Пока недоказанная гипотеза — асимптотическая полнота теории рассеяния Хаага — Рюэлля в этой модели.

Существование предела (2) связано с хорошими законами сохранения, что в большинстве случаев не имеет места. В алгебраическом подходе строится предел автоморфизмов $e^{iH_V t} A e^{-iH_V t}$ алгебры $\mathfrak{A}_V$ как автоморфизм $\mathfrak{A} = \lim \operatorname{ind} \mathfrak{A}_V$. Эта группа автоморфизмов в пространстве ГНС-представления $\mathfrak{A}$ по основному состоянию индуцируется унитарной группой, генератор которой и является искомым гамильтонианом H.

В евклидовом подходе рассматривается марковское по $t \in \mathbf{R}$ случайное поле $\xi(x, t)$, $\xi \in L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$, на $\mathbf{Z}^{\nu} \times \mathbf{R}$. Инфинитезимальный оператор марковской полугруппы и является искомым гамильтонианом в $\mathscr{H} = (\Omega, \Sigma_0, \mu)$, где Σ_0 — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все $\xi(x, 0)$.

Существуют два метода исследования спектра H в евклидовом подходе: метод ядер Бете — Солпитера, развивающийся в квантовой теории поля, и метод, основанный на кластерных свойствах марковской полугруппы. В рамках второго метода удается доказать ослабленный вариант разложения (1), когда поле $\xi(x, t)$ является малым гиббсовским возмущением независимого поля. Именно, если $\lambda > 0$ — константа возмущения, то

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{n=0}^{N+1} \mathscr{H}^{(n)}, \tag{3}$$

где $N = N(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to 0$ и $H \mid_{\mathscr{H}^{(n)}}$ $(0 \leqslant n \leqslant N)$ имеет вид, аналогичный n-частичному оператору Шрёдингера (с другим однородным оператором вместо лапласиана), спектр H на $\mathscr{H}^{(n+1)}$ лежит на полуинтервале $[c(N+1)\ln\lambda, \infty)$. Из этого представления можно извлечь полную информацию о спектре H в $\mathscr{H}^{(n)}$, $0 \leqslant n \leqslant N$.

Для достаточно больших λ в области фазовых переходов первого рода теория рассеяния Хаага — Рюэлля, по-видимому, не является асимптотически полной из-за наличия квантовых солитонов. В ряде случаев удается доказать существование солитонных секторов.

Заседание 9 марта 1977 г.

1. Ю. С. Ильяшенко «Топология слоений на аналитические кривые».

Классические теоремы Андронова — Понтрягина и Гробмана — Хартмана утверждают, что множество структурно устойчивых векторных полей на вещественной проективной плоскости и в окрестности особой точки открыто и всюду плотно в соответствующем функциональном пространстве. Наоборот, для уравнений с комплексным временем типичным представляется явление «абсолютной негрубости».

1°. **Определение.** Пусть $\mathscr{A}$ — некоторый класс аналитических дифференциальных уравнений на комплексном многообразии M. Уравнение α называется *абсолютно негрубым в классе* $\mathscr{A}$, если существует такая окрестность U уравнения α в классе $\mathscr{A}$ и такая окрестность $\mathscr{H}$ тождественного гомеоморфизма $M \to M$ в пространстве всех гомеоморфизмов $M \to M$ с равномерной топологией, что всякое уравнение $\alpha' \in U$, сопряженное с уравнением α гомеоморфизмом $H \in \mathscr{H}$, аналитически эквивалентно α.

2°. **Группы монодромии.** Каждой петле γ на решении φ-аналитического дифференциального уравнения и аналитической трансверсали Γ к решению φ в точке p соответствует комплексная функция последования Δ_γ, представляющая собой росток конформного отображения $(\Gamma, p) \to (\Gamma, p)$ и определяемая аналогично функции последования Пуанкаре [1]. Росток Δ_γ зависит только от гомотопического класса петли γ. Группа ростков $\{\Delta_\gamma \mid \gamma \in \pi_1(\varphi)\}$ с операцией суперпозиции называется группой монодромии решения φ и естественно гомоморфна группе $\pi_1(\varphi)$. Богатство группы монодромии обуславливает «запутанность» решений.

3°. **Теорема.** *Аналитическое дифференциальное уравнение на* $\mathbf{C}P^n$ *с конечным числом особых точек в любой аффинной окрестности задается полиномиальным векторным полем.*

Обозначим через $\mathscr{A}_n$ класс уравнений на $\mathbf{C}P^2$, которые в фиксированной аффинной окрестности (z, w) имеют вид: $dw/dz = P_n/Q_n$, где P_n и Q_n — полиномы степени не выше n, $n \geqslant 2$. Класс $\mathscr{A}_n$ изоморфен числовому «пространству коэффициентов» многочленов P_n, Q_n и снабжен естественной мерой Лебега, что придает смысл словам «почти все $\alpha \in \mathscr{A}_n$».

4°. **Плотность.** Открытое всюду плотное множество $\mathscr{A}_n' \subset \mathscr{A}_n$ состоит из уравнений α, имеющих бесконечно удаленное решение F_α; F_α — бесконечно удаленная прямая с выколотыми $n+1$ особыми точками уравнения α. Соответствующая группа монодромии обозначается $\mathscr{F}_\alpha$. Переходя от ростков к представителям, можно говорить об орбитах точек под действием группы $\mathscr{F}_\alpha$. Оказывается, для почти всех α все орбиты группы $\mathscr{F}_\alpha$ (кроме неподвижной точки p), плотны в окрестности p; это обуславливает плотность всех решений (кроме бесконечно удаленного) почти всех уравнений $\alpha \in \mathscr{A}_n$ (М. Г. Худай-Веренов). Как показал А. А. Щербаков, плотность орбит группы $\mathscr{F}_\alpha$ связана с ее некоммутативностью.