ISSN 0202—7488

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Соответствует рубрикам 27.43—27.47
Рубрикатора ГАСНТИ

## Том 19

Научный редактор
член-корр. АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1966 г.

МОСКВА 1982

1—6399

Главный редактор информационных изданий ВИНИТИ
профессор *А. И. Михайлов*

Главный редактор серии
член-корр. АН СССР *Р. В. Гамкрелидзе*

ВЫПУСКИ И ТОМА СЕРИИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ:

**Алгебра. Топология. 1962, М., 1964**
Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962, М., 1964
Геометрия. 1963, М., 1965
Математический анализ. 1963, М., 1965
Теория вероятностей. 1963, М., 1965
Алгебра. 1964, М., 1966
Математический анализ. 1964, М., 1966
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1964, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967
Математический анализ. 1965, М., 1966
Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, М., 1968
Математический анализ. 1966, М., 1967
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1966, М., 1967
Алгебра. Топология. Геометрия. 1967, М., 1969
Математический анализ. 1967, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1967, М., 1969
Алгебра. Топология. Геометрия. 1968, М., 1970
Математический анализ. 1968, М., 1969
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1968, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1970
Математический анализ. 1969, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1969, М., 1970
Алгебра. Топология. Геометрия. 1970, М., 1971
Математический анализ. 1970, М., 1971
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970, М., 1971
Алгебра. Топология. Геометрия. Том 10, М., 1972; Том 11, 1974; Том 12, 1974; Том 13, 1975; Том 14, 1977; Том 15, 1977; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1981; Том 19, 1981
Математический анализ. Том 10, 1973; Том 11, 1973; Том 12, 1974; Том 13, 1975; Том 14, 1977; Том 15, 1977; Том 16, 1978; Том 17, 1980; Том 18, 1980
Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 10, 1972; Том 11, 1974; Том 12, 1972; Том 13, 1976; Том 14, 1977; Том 15, 1978; Том 16, 1978; Том 17, 1979; Том 18, 1981
Современные проблемы математики. Том 1, 1973; Том 2, 1974; Том 3, 1974; Том 4, 1975; Том 5, 1975; Том 6, 1976; Том 7, 1975; Том 8, 1977; Том 9, 1976; Том 10, 1978; Том 11, 1978; Том 12, 1978; Том 13, 1979; Том 14, 1979; Том 15, 1980; Том 16, 1980; Том 17, 1981; Том 18, 1981
Проблемы геометрии. Том 7, 1975; Том 8, 1977; Том 9, 1979; Том 10, 1978; Том 11, 1980; Том 12, 1981



УДК 519.248.22

# ОБОБЩЕННЫЕ КОНТУРНЫЕ МОДЕЛИ

***В. А. Малышев, Р. А. Минлос, Е. Н. Петрова, Ю. А. Терлецкий***

Настоящая статья посвящена обзору и систематическому изложению техники получения кластерных разложений для решетчатых гиббсовских полей в низкотемпературной области в случае конечного или счетного числа основных состояний.

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{Z}^\nu$ — $\nu$-мерная целочисленная решетка, $\nu \geqslant 2$ и $\Lambda \subset \mathbf{Z}^\nu$ — куб с центром в начале координат. Пусть $S$ (для определенности) — замкнутое подмножество евклидова пространства $\mathbf{R}^N$ (далее чаще всего $N=1$). Конфигурацией на $\mathbf{Z}^\nu$ (или на $\Lambda$) будем называть произвольную функцию на $\mathbf{Z}^\nu$ (на $\Lambda$) со значениями в $S$. Иногда значение конфигурации $s_t$ в $t \in \mathbf{Z}^\nu$ называют спином в точке $t$ и говорят, что спин принимает значение в $S$.

Мы будем считать, что на $S$ задана неотрицательная мера $\mu^0$ (не обязательно вероятностная). В случае, если $S$ конечно или счетно, всегда считается, что $\mu^0$ приписывает каждой точке $s \in S$ меру единица. Если $S$ отрезок или вся ось $\mathbf{R}^1$, $\mu^0$ есть мера Лебега. В остальных случаях это будет оговариваться особо. Через $\mu^0_\Lambda$ будем обозначать меру на множестве конфигураций $S^\Lambda$, являющуюся произведением $|\Lambda|$ экземпляров мер $\mu^0$.

В настоящей работе изучается следующий класс гиббсовских вероятностных мер $\mu_\Lambda$ на $S^\Lambda$, задаваемых плотностью

$$\frac{d\mu_{\Lambda,s}}{d\mu^0_\Lambda} = \Xi^{-1}_{\Lambda,s} \exp(-\beta U_{\Lambda,s}) \tag{1.1}$$

для больших $\beta > 0$, где $U_{\Lambda,s}$ — функция на $S^\Lambda$, имеющая вид:

$$U_{\Lambda,s} = \sum_{|t-t'|=1} \Phi(s_t, s_{t'}), \tag{1.2}$$

причем либо $t$ либо $t'$ принадлежит $\Lambda$.

При этом считается, что $s_t \equiv s$ при $t \in \partial_e \Lambda$, где $\partial_e \Lambda$ — приграничный слой $\Lambda$, т. е. множество точек, не входящих в $\Lambda$ и отстоящих от $\Lambda$ на расстоянии 1.

Функция Ф всегда считается симметрической, другие ограничения на нее будут наложены ниже. Нормирующий множитель (статистическая сумма)

$$\Xi_{\Lambda,s}=\int_{S^\Lambda}\exp(-\beta U_{\Lambda,s})\,d\mu^0_\Lambda. \tag{1.3}$$

Таким образом, мы ограничиваемся двухчастичным взаимодействием ближайших соседей. Причина этого двоякая. Во-первых, в ряде случаев перенос на случай более общих финитных взаимодействий является простым упражнением. В то же время той завершенности (т. е. аналога «условия Пайерлса»), которую теория имеет в случае конечного $S$, здесь еще нет. Однако вводимые ниже общие контурные модели покрывают, по-видимому, и случай финитного потенциала в (1.1). Рассмотрим слабые пределы $\mu_s$ мер $\mu_{\Lambda,s}$ при $\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^\nu$, т. е. пределы в смысле сходимости конечномерных распределений. Мы сможем в ряде случаев описать все $\mu_s$, указать в деталях их свойства типа убывания корреляций и т. д.

Перейдем теперь к краткому историческому обзору.

Основная идея применяемой здесь контурной техники восходит к работе Пайерлса [37], где было намечено доказательство существования фазового перехода в модели Изинга при низких температурах (больших $\beta$) с помощью оценки распределения вероятностей длины границы конфигурации спинов (т. е. линии, разделяющей положительные и отрицательные спины). Окончательное доказательство существования фазового перехода в модели Изинга на основе этой идеи было дано в работе Гриффитса [29]. Р. Л. Добрушин также опубликовал доказательство существования фазового перехода в модели Изинга [3], использующее по существу оценку Пайерлса. Однако построения Добрушина, проводимые им для малого канонического ансамбля, а не для большого, как это делалось в работах Гриффитса и Пайерлса, были лишены достаточной наглядности.

В дальнейшем появились работы Березина—Синая, Добрушина и многие другие, где устанавливалось существование фазового перехода в случае конечного $S$ в более общих случаях в условиях «симметрии». Все эти работы были покрыты работой Герцика [1], где условие «симметрии» было сформулировано в наиболее общем виде.

Одновременно с доказательствами существования фазового перехода Минлос и Синай развили [10, 11] «контурный метод» исследования более тонких свойств получаемых случайных полей.

Следующий прорыв был достигнут в работе Пирогова—Синая [13], где была разработана технология исследования фазовой диаграммы в случае отсутствия симметрии.

Выше речь везде шла о случае конечного $S$. При выполнении так называемого условия Пайерлса эта теория во многом завершена, что отражено в монографии Синая [14]. Поэтому мы больше не будем говорить об этом случае.



В течение определенного времени казалось, что если спин принимает бесконечное множество значений, то техника исследования должна быть существенно сложнее. Это мнение базировалось отчасти на работе Бортца и Гриффитса, которые делали попытку перенести технику Пайерлса на случай непрерывного спина [19] на примере ферромагнитной модели Гейзенберга, однако получили весьма частный результат: существование фазового перехода при $|\alpha|<0{,}0298$ в размерности 2 и $|\alpha|<0{,}0198$ в размерности 3 ($\alpha$ — показатель анизотропии). В общем случае $\alpha<1$, доказательство существования фазового перехода было получено В. А. Малышевым [36]. Там же была сформулирована общая теорема, из которой следует, в частности, существование фазового перехода в случае нескольких гладких невырожденных минимумов в условиях симметрии, как это было показано в дипломной работе Е. Н. Петровой. В [35] с помощью этого метода была рассмотрена антиферромагнитная модель Гейзенберга, в [34] рассматривается случай непарного потенциала.

В дальнейшем к исследованию существования фазового перехода для этого же класса моделей применялся метод «положительности относительно отражения» и различные корреляционные неравенства [24, 25, 26].

Первой работой, в которой были получены низкотемпературные кластерные разложения в случае непрерывного множества значений, была работа Глимма, Джаффе, Спенсера [2]. В ней рассматривалась модель $\varphi_2^4$ квантовой теории поля. В работе Бриджеса эта техника была применена к одному случаю со счетным множеством основных состояний. Разложение Глимма, Джаффе, Спенсера развивалось также Гидасом [28], для несимметричного случая Имбри [31, 32, 33], Саммерсом [39, 40] и для модели Юкавы в размерности 2 Гавендзским и Балабаном [17].

В настоящей работе излагается общая технология исследования решетчатых гиббсовских случайных полей в низкотемпературной области в случае конечного (или счетного) числа трансляционно инвариантных основных состояний. Основным (и по существу единственным) предположением является достаточная острота минимума в основном состоянии. Случай неострого минимума, по-видимому, доступен современным методам только в квадратичном случае (т. е. гладкий невырожденный минимум). Здесь мы этого случая не рассматриваем, однако с помощью введения блоков на решетке он может быть исследован вполне аналогично (см. [2, 21, 6]).

Данная работа показывает, что случай непрерывного спина фактически лишь немногим сложнее случая дискретного спина и вся ранее разработанная технология переносима на этот случай. Он показывает также, что все получающиеся кластерные разложения являются экспоненциально регулярными, что дает ввиду общего метода [5] полное кластерное разложение для трансфер-матрицы. Это явилось важнейшим стимулом при написании настоящей работы.

Работа началась с совместных исследований В. А. Малышева и Ю. А. Терлецкого для случая единственного минимума, где ими была доказана единственность и получено экспоненциально регулярное кластерное разложение. Это составило содержание §§ 6, 7. Заметим, что здесь кластерное разложение получено не для контурных, а для обычных функционалов. В § 6 содержится некоторый новый прием доказательства единственности. Затем В. А. Малышев и Е. Н. Петрова ввели обобщенные контурные модели типа Минлоса—Синая и с их помощью изучили симметричный случай (§ 4). Несимметричный случай рассмотрен Р. А. Минлосом и Е. Н. Петровой (§ 5).

## § 2. МАРКИРОВАННЫЕ КОНТУРЫ

Множество $A\subset\mathbf{Z}^\nu$ назовем $d$-связным, если для любых двух точек $t$, $t'\in A$, существует конечная последовательность точек $t=t_1$, $t_2,\ldots$, $t_n=t'$ такая, что $|t_{i+1}-t_i|\leqslant d$ для $i=1,\ldots,n-1$. Пусть задан некоторый класс $\mathscr{K}$ 1-связных конечных множеств, инвариантный относительно сдвигов вдоль решетки: $A+t\in\mathscr{K}$ для всех $t$ и всех $A\in\mathscr{K}$. Множества из $\mathscr{K}$ будут называться геометрическими контурами или просто контурами. Пусть каждому контуру $\gamma\in\mathscr{K}$ сопоставлено некоторое конечное множество $\Theta_\gamma$, называемое множеством марок контура $\gamma$. При этом если $\gamma_1$ и $\gamma_2$ отличаются только сдвигом, то их множества марок совпадают. Более точно: существует каноническая система взаимно однозначных отображений $\psi_{\gamma,t}:\Theta_\gamma\to\Theta_{\gamma+t}$ такая, что

$$\psi_{\gamma+t_1,t_2}\psi_{\gamma,t_1}=\psi_{\gamma,t_1+t_2},\quad \psi^{-1}_{\gamma,t}=\psi_{\gamma+t,-t}.$$

Предположим также, что

$$|\Theta_\gamma|\leqslant C^{|\gamma|},\tag{2.1}$$

где константа $C>0$ не зависит от $\gamma$.

Пару $\Gamma=(\gamma,\theta)$, $\gamma\in\mathscr{K}$, $\theta\in\Theta_\gamma$, будем называть маркированным контуром. Совокупность маркированных контуров обозначим через $\mathfrak{M}$. Любой конечный или счетный набор $\alpha=\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m\}$ маркированных контуров $\Gamma_i=(\gamma_i,\theta_i)$ мы назовем конфигурацией контуров, если для любых $i\neq j$

$$(\partial_e\gamma_i\cup\gamma_i)\cap\gamma_j=\varnothing,\tag{2.2}$$

где $\partial_e\gamma$ есть множество точек $\mathbf{Z}^\nu-\gamma$, находящихся на расстоянии 1 от $\gamma$. Совокупность конфигураций маркированных контуров обозначим $\mathfrak{A}$, а совокупность конечных конфигураций $\mathfrak{A}_0$.

Пусть $\Lambda\subset\mathbf{Z}^\nu$, $\mathfrak{A}_\Lambda$ множество конфигураций таких, что для любого маркированного контура $\Gamma=(\gamma,\theta)$ этой конфигурации



$$\partial_e\gamma\cup\gamma\subset\Lambda.\tag{2.3}$$

В этом определении удобно далее везде предполагать $\Lambda$ односвязным, т. е. таким, что его дополнение 1-связно.

Пусть на $\mathfrak{M}$ определена вещественная функция $\Phi(\Gamma)$, $\Gamma\in\mathfrak{M}$, такая, что:

1) $\Phi(\Gamma)$ инвариантна относительно сдвигов контура,

2) существуют две положительные константы $k$ и $\tau$ такие, что для любого $\Gamma=(\gamma,\theta)$

$$\tau|\gamma|<\Phi(\Gamma)<k|\gamma|.\tag{2.4}$$

Далее везде предполагается, что $k>\tau>\tau_0$, где $\tau_0$ достаточно большая константа.

Введем распределение вероятностей $p_\Lambda$ на $\mathfrak{A}_\Lambda$ для конечных $\Lambda$, положив для любой конфигурации $\alpha\in\mathfrak{A}_\Lambda$

$$p_\Lambda(\alpha)=\Xi^{-1}\prod_{\Gamma\in\alpha}\exp(-\Phi(\Gamma)),\tag{2.5}$$

где

$$\Xi=\Xi(\Lambda\,|\,\Phi)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}_\Lambda}\prod_{\Gamma\in\alpha}\exp(-\Phi(\Gamma))\tag{2.6}$$

азовем статистической суммой ансамбля маркированных контуров в $\Lambda$. При этом в случае пустой конфигурации полагаем

$$\prod_{\Gamma\in\alpha}\exp(-\Phi(\Gamma))=1.$$

Для любого $\beta\in\mathfrak{A}_0$ положим

$$\rho_\Lambda(\beta)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}_\Lambda:\,\beta\subset\alpha}p_\Lambda(\alpha).\tag{2.7}$$

Эта функция на $\mathfrak{A}_0$ называется корреляционной функцией ансамбля контуров. Для каждого контура $\gamma\in\mathscr{K}$ обозначим $(r_1,\ldots,r_p)$ набор 1-связных компонент $\mathbf{Z}^\nu-\gamma$. Одна и только одна из этих компонент бесконечна; ее мы назовем внешней компонентой и обозначим $\mathrm{Ext}\,\gamma$. Остальные компоненты назовем внутренними и их объединение обозначим $\mathrm{Int}\,\gamma$. Заметим, что любая внутренняя компонента $\gamma$ (а также $\mathrm{Int}\,\gamma$) является односвязным множеством.

Пусть заданы два контура $\gamma_1$, $\gamma_2\in\mathscr{K}$ такие, что

$$\partial_e\gamma_2\cup\gamma_2\subset\mathrm{Int}\,\gamma_1.$$

В этом случае будем говорить, что контур $\gamma_1$ охватывает $\gamma_2$. Для заданной конфигурации маркированных контуров $\alpha\in\mathfrak{A}$ контур $\Gamma=(\gamma,\theta)\in\alpha$ назовем внешним, если для всякого другого маркированного контура $\Gamma'=(\gamma',\theta')\in\alpha$ контур $\gamma'$ не охватывает контур $\gamma$.

Совокупность всех внешних контуров конфигурации $\alpha\in\mathfrak{A}$ обозначим $\alpha^{\mathrm{ext}}$. Конфигурацию $\alpha\in\mathfrak{A}$ маркированных контуров, состоящую из внешних контуров, т. е. такую, что $\alpha^{\text{ext}}=\alpha$, назовем конфигурацией внешних маркированных контуров. Совокупность таких конфигураций обозначим $\mathfrak{A}^{\text{ext}}$; аналогичным образом определяются множества $\mathfrak{A}_0^{\text{ext}}$, $\mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}$. Распределение (2.5) на $\mathfrak{A}_\Lambda$ порождает распределение $p_\Lambda^{\text{ext}}$ на множестве $\mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}$, т. е.

$$p_\Lambda^{\text{ext}}(\alpha)=\sum_{\tilde{\alpha}\in\mathfrak{A}_\Lambda:\tilde{\alpha}^{\text{ext}}=\alpha} p_\Lambda(\tilde{\alpha}),\quad \alpha\in\mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}. \tag{2.8}$$

Это распределение назовем ансамблем внешних контуров в $\Lambda$. Обозначим для любого $\Gamma=(\gamma,\theta)\in\mathfrak{M}$

$$Z(\Gamma/\Phi)=\exp(-\Phi(\Gamma))\,\Xi(\operatorname{Int}\gamma/\Phi). \tag{2.9}$$

Из введенных определений следует, что для $\alpha\in\mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}$

$$p_\Lambda^{\text{ext}}(\alpha)=\frac{\prod_{\Gamma\in\alpha} Z(\Gamma/\Phi)}{\Xi(\Lambda/\Phi)}. \tag{2.10}$$

При этом

$$\Xi(\Lambda/\Phi)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}}\prod_{\Gamma\in\alpha} Z(\Gamma/\Phi). \tag{2.11}$$

Аналогично (2.7) определим корреляционную функцию ансамбля внешних контуров

$$\pi_\Lambda(\beta)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}:\beta\subset\alpha} p^{\text{ext}}(\alpha),\quad \beta\in\mathfrak{A}_0^{\text{ext}}. \tag{2.12}$$

Теорема 1. На $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{\text{ext}}$ существуют и притом единственные распределения вероятностей $p$ и $p^{\text{ext}}$, соответственно, определенные на цилиндрических $\sigma$-алгебрах множеств в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{\text{ext}}$, соответственно, и такие, что для любых $\beta\in\mathfrak{A}_0$ и $\beta\in\mathfrak{A}_0^{\text{ext}}$

$$p(\{\alpha\in\mathfrak{A}:\beta\subset\alpha\})\equiv\rho(\beta)=\lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu}\rho_\Lambda(\beta), \tag{2.13}$$

$$p^{\text{ext}}(\{\alpha\in\mathfrak{A}^{\text{ext}}:\beta\subset\alpha\})\equiv\pi(\beta)=\lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu}\pi_\Lambda(\beta),$$

где $\lim$ при $\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^\nu$ означает предел по любой возрастающей последовательности конечных подмножеств $\Lambda$, дающих в объединении всю $\mathbf{Z}^\nu$.

Цилиндрической $\sigma$-алгеброй в $\mathfrak{A}$ называется наименьшая $\sigma$-алгебра, содержащая множества вида $\{\alpha\in\mathfrak{A}:\beta\subset\alpha\}$. Аналогично определяется цилиндрическая $\sigma$-алгебра в $\mathfrak{A}^{\text{ext}}$. При этом для любого $A\subset\mathfrak{A}^{\text{ext}}$

$$p(\{\alpha\in\mathfrak{A}:\alpha^{\text{ext}}\in A\})=p^{\text{ext}}(A). \tag{2.14}$$



Дадим краткий набросок доказательства. В более частной ситуации эта теорема была доказана в [10, 11], см. также [5].

Корреляционная функция ансамбля контуров $\mathfrak{A}_\Lambda$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\rho_\Lambda(\alpha)=\exp(-\Phi(\Gamma_1))\Big[\rho_\Lambda(\alpha')+\sum_{\substack{\beta\supset\alpha'\\ \beta\in\mathfrak{A}_\Lambda}}\rho_\Lambda(\beta)(-1)^{|\beta-\alpha'|}\Big]. \tag{2.15}$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\Gamma_1=\Gamma_1(\alpha)=(\gamma_1,\theta_1)\in\alpha$ некоторый заранее выбранный контур конфигурации $\alpha\in\mathfrak{A}$, $\alpha'=\alpha-\{\Gamma_1\}$. Суммирование в (2.15) происходит по всем конфигурациям $\beta\in\mathfrak{A}_\Lambda$, содержащим в качестве своей части конфигурацию $\alpha'$ и таким, что для любого контура $\Gamma=(\gamma,\theta)\in\beta-\alpha'$ его геометрический контур $\gamma$ пересекается с множеством $\gamma_1\cup\partial_e\gamma_1$. Вывод уравнения (2.15) очень прост. Пусть $D(\alpha)\subset\mathfrak{A}_\Lambda$ — совокупность конфигураций, содержащих конфигурацию $\alpha$, а $D_{\Gamma_1}(\alpha)$ — совокупность конфигураций, получающихся из какой-нибудь конфигурации из $D(\alpha)$ «стиранием» контура $\Gamma_1$. Очевидно, что

$$\rho_\Lambda(\alpha)=\exp(-\Phi(\Gamma_1))\,p_\Lambda(D_{\Gamma_1}(\alpha)). \tag{2.16}$$

С другой стороны, используя формулу включения-исключения (см. [11]), мы получим, что

$$p_\Lambda(D_{\Gamma_1}(\alpha))=\rho_\Lambda(\alpha')+\sum_{\beta\supset\alpha'}\rho_\Lambda(\beta)(-1)^{|\beta-\alpha'|}, \tag{2.17}$$

где суммирование производится по тому же множеству конфигураций $\beta$, что и в (2.15). Из (2.16) и (2.17) вытекает (2.15).

Напишем — пока формально — аналогично (2.15) уравнение для предельной корреляционной функции $\rho(\alpha)$, $\alpha\in\mathfrak{A}_0$

$$\rho(\alpha)=\exp(-\Phi(\Gamma_1))\Big[\rho(\alpha')+\sum_{\beta}\rho(\beta)(-1)^{|\beta-\alpha'|}\Big]. \tag{2.18}$$

Здесь суммирование происходит по всем конечным конфигурациям маркированных контуров $\beta\in\mathfrak{A}_0$, таким, что каждый геометрический контур конфигурации «задевает» контур $\gamma_1$. Рассмотрим далее банахово пространство $\mathscr{H}$ функций $\varphi$, определенных на множестве непустых конечных конфигураций контуров и удовлетворяющих оценке

$$|\varphi(\alpha)|\leqslant C\prod_{\Gamma=(\gamma,\theta)\in\alpha}(K_0e^{-\tau})^{|\gamma|}, \tag{2.19}$$

где $K_0>1$ — некоторая абсолютная константа, а $C>0$ — некоторая константа, не зависящая от $\alpha$, но зависящая от $\varphi$. Норма $\|\varphi\|=\inf C$, где нижняя грань берется по всем $C$, для которых верно неравенство (2.19).

Введем в $\mathscr{H}$ оператор $A$:

$$(A\varphi)(\alpha)=\exp(-\Phi(\Gamma_1))\Big(\varphi(\alpha')+\sum_{\beta\supset\alpha'}\varphi(\beta)(-1)^{|\beta-\alpha'|}\Big),$$
$$|\alpha|>1, \tag{2.20}$$
$$(A\varphi)(\Gamma)=\exp(-\Phi(\Gamma))\Big(\sum_{\beta}\varphi(\beta)(-1)^{|\beta|}\Big),\quad \alpha=\{\Gamma\}.$$

Тогда уравнение (2.18) примет вид:

$$\rho(\alpha)=\xi(\alpha)+A\rho,$$

где

$$\xi(\alpha)=\begin{cases}\exp(-\Phi(\Gamma)), & \alpha=\{\Gamma\},\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Уравнение (2.15) при этом можно записать в виде

$$\rho_\Lambda(\alpha)=\chi_\Lambda(\alpha)(\xi(\alpha)+A\rho_\Lambda), \tag{2.21}$$

где

$$\chi_\Lambda(\alpha)=\begin{cases}1, & \alpha\in\mathfrak{A}_\Lambda,\\ 0, & \alpha\notin\mathfrak{A}_\Lambda.\end{cases}$$

Лемма 1. При выполнении условий (2.1) и (2.4) оба уравнения (2.15) и (2.18) имеют единственное решение в пространстве $\mathscr{H}$, причем корреляционная функция $\rho_\Lambda\in\mathscr{H}$ при любом конечном $\Lambda\subset\mathbf{Z}^\nu$ и, следовательно, совпадает с единственным решением уравнения (2.15).

Кроме того, для любого $\alpha\in\mathfrak{A}_0$

$$|\rho_\Lambda(\alpha)-\rho(\alpha)|<C_0\prod_{\Gamma\in\alpha}(K_0e^{-\tau})^{|\gamma|}\exp(-g\delta(\alpha,\partial_e\Lambda)), \tag{2.22}$$

где

$$\delta(\alpha,\partial_e\Lambda)=\min_{\Gamma\in\alpha} d(\gamma,\partial_e\Lambda),$$

$d(A, B)$ — расстояние между множествами $A\subset\mathbf{Z}^\nu$ и $B\subset\mathbf{Z}^\nu$, $C_0>0$, $g>0$.

Доказательство этой леммы основано на исследовании свойств оператора $A$. Это делается в полной аналогии с работой [10]. Из леммы вытекает существование предельной корреляционной функции и ее положительность.

Обозначим для каждой конфигурации $\alpha\in\mathfrak{A}$ и конечного множества $\Lambda\subset\mathbf{Z}^\nu$ через $\alpha|_\Lambda\in\mathfrak{A}_\Lambda$ совокупность контуров $\Gamma=(\gamma,\theta)\in\alpha$ таких, что $\gamma\cup\partial_e\gamma\subset\Lambda$. Обычным образом (см., например, [10]) проверяем, что для любых конечных $\Lambda_0\subset\Lambda\subset\mathbf{Z}^\nu$

$$p_\Lambda^{(\Lambda_0)}(\bar\alpha)=p_\Lambda\{\alpha\in\mathfrak{A}_\Lambda:\ \alpha|_{\Lambda_0}=\bar\alpha\}=\sum_{\substack{\beta\supset\bar\alpha\\ \beta\in\mathfrak{A}_{\Lambda_0}}}\rho_\Lambda(\beta)(-1)^{|\beta-\bar\alpha|}, \tag{2.23}$$



где $\bar\alpha\in\mathfrak{A}_{\Lambda_0}$, $|\beta-\bar\alpha|$ — число контуров в конфигурации $\beta-\bar\alpha$. Из леммы 1 вытекает, что существует предел

$$\lim_{\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^\nu}p_\Lambda^{(\Lambda_0)}(\bar\alpha)=p^{(\Lambda_0)}(\bar\alpha)=\sum_{\substack{\beta\supset\bar\alpha\\ \beta\in\mathfrak{A}_{\Lambda_0}}}\rho(\beta)(-1)^{|\beta-\bar\alpha|}, \tag{2.24}$$

причем для каждого конечного $\Lambda_0\subset\mathbf{Z}^\nu$ $p^{(\Lambda_0)}(\bar\alpha)$ образуют распределение вероятностей на $\mathfrak{A}_{\Lambda_0}$. Эти распределения согласованы: для любых двух $\Lambda_0'\subset\Lambda_0''$

$$\sum_{\bar\alpha'':\bar\alpha''|_{\Lambda_0'}=\bar\alpha'}p^{(\Lambda_0'')}(\bar\alpha'')=p^{(\Lambda_0')}(\bar\alpha'). \tag{2.25}$$

Из условия согласованности (2.25) вытекает (см. [11]) существование единственного распределения на $\mathfrak{A}$, причем такого, что для любых $\Lambda_0$ и $\bar\alpha\in\mathfrak{A}_{\Lambda_0}$

$$p\{\alpha\in\mathfrak{A}:\ \alpha|_{\Lambda_0}=\bar\alpha\}=p^{(\Lambda_0)}(\bar\alpha).$$

При этом функция $\rho(\alpha)$, получаемая из решения уравнения (2.18), является корреляционной функцией распределения $p$. Равенства (2.13) вытекают из леммы 1. Таким образом, все утверждения теоремы 1, касающиеся ансамбля маркированных контуров, доказаны.

Изучение ансамбля внешних контуров основано на уравнении для корреляционной функции $\pi_\Lambda$ ансамбля $\mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}$

$$\pi_\Lambda(\alpha)=\exp(-\Phi(\Gamma_1))\Big[\pi_\Lambda(\alpha')+\sum\pi_\Lambda(\beta)(-1)^{|\beta-\alpha'|}-$$
$$-\sum_{\mathbf{\Gamma}}\pi(\{\Gamma\})\Big]. \tag{2.26}$$

Первая сумма в этом уравнении имеет тот же смысл, что и в (2.15), а суммирование $\sum_{\mathbf{\Gamma}}$ происходит по всем контурам $\Gamma=(\gamma,\theta)$ таким, что контур $\gamma$ охватывает контур $\gamma_1$. С помощью уравнения (2.26) устанавливаем существование предельного ансамбля внешних контуров и формулу (2.14), связывающую этот ансамбль с ансамблем всех контуров. Теорема 1 доказана.

Из приведенной теоремы легко вывести, что для $p$-почти всех конфигураций $\alpha\in\mathfrak{A}$ каждый контур $\Gamma\in\alpha$ является либо внешним, либо охватывается каким-нибудь внешним контуром этой конфигурации.

Теорема 2. Для любого односвязного конечного $\Lambda\subset\mathbf{Z}^\nu$ величина $\ln\Xi(\Lambda|\Phi)$ допускает представление

$$\ln\Xi(\Lambda|\Phi)=\chi(\Phi)|\Lambda|+\Delta(\Lambda|\Phi), \tag{2.27}$$

где $\chi(\Phi)$ — некоторый функционал, зависящий от веса $\Phi$, причем

$$|\chi(\Phi)|<c_1 e^{-\tau}, \qquad (2.28)$$

где $c_1$ зависит только от $\mathscr{K}$ и $C$ и не зависит от $\Phi$ и от $\Lambda$. Более того,

$$|\Delta(\Lambda/\Phi)|<c_2 e^{-\tau}|\partial_i\Lambda|, \qquad (2.29)$$

где $\partial_i\Lambda$ — множество точек $\Lambda$, находящихся на расстоянии 1 от $\mathbf{Z}^\nu-\Lambda$, причем $c_2$ также не зависит от $\Phi$ и от $\Lambda$. Слагаемое $\chi(\Phi)|\Lambda|$ называется объемным, а $\Delta(\Lambda/\Phi)$ граничным членом логарифма статистической суммы.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим семейство весов $\Phi_t=t\Phi$, $1\leqslant t<\infty$, и пусть $\Xi_\Lambda(t)$ — статистическая сумма ансамбля контуров с весом $\Phi_t$. Очевидно, что

$$\frac{d\ln\Xi_\Lambda(t)}{dt}=-\sum_{\Gamma=(\gamma,\theta)\ \gamma\subset\Lambda}\rho_\Lambda^t(\{\Gamma\})\Phi(\Gamma), \qquad (2.30)$$

где $\rho_\Lambda^t(\{\Gamma\})$ — значение корреляционной функции в ансамбле $\mathfrak{A}_\Lambda$ с весом $\Phi_t$ на конфигурации, состоящей из одного контура $\Gamma$. Далее,

$$-\sum\rho_\Lambda^t(\{\Gamma\})\Phi(\Gamma)=-\sum_{\Gamma=(\gamma,\theta);\gamma\cap\Lambda\neq\varnothing}\rho^t(\{\Gamma\})\Phi(\Gamma)+$$

$$+\sum_{\substack{\Gamma=(\gamma,\theta);\gamma\cap\Lambda\neq\varnothing\\ \gamma\cap\mathbf{Z}^\nu-\Lambda\neq\varnothing}}\rho^t(\{\Gamma\})\Phi(\Gamma)+\sum_{\substack{\Gamma=(\gamma,\theta)\\ \gamma\subset\Lambda}}(\rho^t(\{\Gamma\})-\rho_\Lambda^t(\{\Gamma\}))\Phi(\Gamma). \qquad (2.31)$$

Первое слагаемое, в силу трансляционной инвариантности корреляционной функции, равно $|\Lambda|\sum_\Gamma\rho^t(\Gamma)\frac{1}{|\gamma|}$. При этом, как следует из оценок (2.19),

$$\sum\rho^t(\{\Gamma\})\frac{\Phi(\Gamma)}{|\gamma|}<Ce^{-\tau t}. \qquad (2.32)$$

Далее, сумма второго и третьего члена в (2.31) не превосходит, в силу (2.19), (2.22),

$$C|\partial_e\Lambda|e^{-\tau t}. \qquad (2.33)$$

Таким образом,

$$\ln\Xi_\Lambda(1)=-\int_1^\infty\frac{d\ln\Xi}{dt}dt=\chi|\Lambda|+\Delta(\Lambda/\Phi),$$

где обозначено

$$\chi=\int_1^\infty\left(\sum\rho^t(\{\Gamma\})\frac{\Phi(\Gamma)}{|\gamma|}\right)dt, \qquad (2.34)$$



$$\Delta(\Lambda/\Phi)=\int_1^\infty\left(-\sum\rho^t(\{\Gamma\})\Phi(\Gamma)-\sum_\Gamma(\rho^t(\{\Gamma\})-\rho_\Lambda^t(\{\Gamma\}))\Phi(\Gamma)\right). \qquad (2.35)$$

Оценки (2.28) и (2.29) вытекают из (2.32) и (2.33). Воспользовавшись разложением (2.27), получаем:

$$\ln Z(\Gamma/\Phi)=-\Phi(\Gamma)+\Delta(\operatorname{Int}\gamma/\Phi)+\chi(\Phi)|\operatorname{Int}\gamma|,\quad \Gamma=(\gamma,\theta). \qquad (2.36)$$

Сделаем в заключение простое, но важное замечание. Из (2.9) и (2.11) вытекает, что

$$Z(\Gamma/\Phi)=\exp(-\Phi(\Gamma))\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}_{\operatorname{Int}\gamma}^{\mathrm{ext}}}\prod_{\Gamma'\in\alpha}Z(\Gamma'/\Phi),\quad \Gamma=(\gamma,\theta). \qquad (2.37)$$

Таким образом, вводя в пространстве $\mathfrak{M}$ упорядочение: $\Gamma'=(\gamma',\theta')<\Gamma=(\gamma,\theta)$, если существует контур $\tilde{\gamma}\in\mathscr{K}$, конгруэнтный контуру $\gamma'$ и охватываемый контуром $\gamma$, мы можем рассматривать (2.37), как систему рекуррентных соотношений, позволяющих восстановить функцию $Z(\Gamma/\Phi)$ на множестве $\mathfrak{M}$ по ее значениям на наименьших (в смысле введенного упорядочивания) контурах $\Gamma\in\mathfrak{M}$, равным, очевидно, $\exp(-\Phi(\Gamma))$. Таким образом, имеет место

Лемма 2. Пусть на пространстве маркированных контуров $\mathfrak{M}$ определена функция $\Phi(\Gamma)$, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Пусть, далее, функция $Z(\Gamma/\Phi)$ на $\mathfrak{M}$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям (2.37). Тогда такая функция единственна и ее логарифм представим в виде (2.36).

## § 3. МАРКИРОВАННЫЕ КОНТУРЫ С РАЗМЕТКОЙ

Мы введем здесь другой более сложный класс контурных моделей, в которых не любые конфигурации возможны.

Пусть в условиях предыдущего параграфа задано некоторое конечное или счетное множество $\mathscr{N}$ (можно его понимать как множество основных состояний). Пусть каждому контуру $\gamma\in\mathscr{K}$ поставлена в соответствие некоторая совокупность $\mathfrak{N}_\gamma$ функций $n=\{n(t),\ t\in\mathbf{Z}^\nu-\gamma\}$, принимающих значения в $\mathscr{N}$, определенных на дополнении к $\gamma$, постоянных на каждой 1-связной компоненте этого дополнения и принимающих одинаковые значения на 1-связных компонентах $D_i$ и $D_j$ в том случае, если существуют $t_1\in\gamma$, $t_2\in D_i$, $t_3\in D_j$ такие, что $|t_1-t_2|=1$ и $|t_1-t_3|=1$. Любую функцию $n\in\mathfrak{N}_\gamma$ будем называть разметкой $\gamma$. Мы предполагаем, что совокупность разметок трансляционно инвариантна в очевидном смысле этого слова. Значение разметки $n\in\mathfrak{N}_\gamma$ на внешней компоненте $\operatorname{Ext}\gamma$ обозначается $n^{\mathrm{ext}}$. Обозначим

$$\operatorname{Int}_{\bar{n}}(\gamma,n)=\{t\in\operatorname{Int}\gamma:n(t)=\bar{n}\}.$$

Очевидно, каждая разметка однозначно определяется своими значениями на внешнем приграничном слое $\partial_e\gamma$ контура $\gamma$.

Пусть для каждого контура $\gamma\in\mathscr{K}$ выделена некоторая совокупность $I_\gamma\subset\Theta_\gamma\times\mathfrak{N}_\gamma$ пар $(\theta, n)$ так, что $I_\gamma$ переходит в $I_{\gamma+t}$ при сдвиге $\gamma$ на вектор $t$. Тройки $\Gamma=(\gamma, \theta, n)$, где $(\theta, n)\in I_\gamma$, мы будем называть маркированными размеченными контурами, а их совокупность обозначим $\mathfrak{M}_{\text{разм}}$. Совокупность контуров $\Gamma=(\gamma, \theta, n)\in\mathfrak{M}_{\text{разм}}$ таких, что внешняя разметка $n^{\text{ext}}(\gamma)=\bar{n}$, $\bar{n}\in\mathscr{N}$, обозначим $\mathfrak{M}^{\bar{n}}$. Заметим, что если $\mathscr{N}$ конечно, то $I_\gamma$ можно рассматривать как новое пространство марок, причем

$$|I_\gamma|\leqslant(C|\mathscr{N}|)^{|\gamma|}. \tag{3.1}$$

Различать марки и разметки удобно при рассмотрении конкретных примеров. Конфигурацию $\alpha=\{\Gamma_i=(\gamma_i, \theta_i, n_i)\ i=1,\dots,l\}$ маркированных разменных контуров мы назовем согласованной конфигурацией, если существует такая функция $n_\alpha(t)$, $t\in\mathbf{Z}^\nu-\bigcup\limits_i\gamma_i$ со значениями в $\mathscr{N}$, определенная на дополнении к объединению всех контуров $\gamma_i$, постоянная на каждой 1-связной компоненте этого дополнения и на тех компонентах дополнения, которые находятся на расстоянии 1 от одной и той же $t\in\bigcup\limits_i\gamma_i$, что для каждого $\Gamma_i\in\alpha$ сужение $n_\alpha$ на внешний приграничный слой $\gamma_i$ совпадает с сужением на этот слой разметки $n_i$, т. е.

$$n_\alpha|_{\partial_e\gamma_i}=n_i|_{\partial_e\gamma_i}. \tag{3.2}$$

Очевидно, что если такая функция $n_\alpha$ существует, то она единственна. Для всякой согласованной конфигурации $\alpha$ функцию $n_\alpha$ будем называть разметкой $\alpha$. Положим для всех $\bar{n}\in\mathscr{N}$

$$I_{\bar{n}}(\alpha)=\{t\in\mathbf{Z}^\nu-\bigcup\gamma_i : n_\alpha(t)=\bar{n}\}.$$

Совокупность согласованных конфигураций маркированных размеченных контуров обозначим $\mathfrak{A}_{\text{разм}}$. Аналогично определяется $\mathfrak{A}^0_{\text{разм}}$, $\mathfrak{A}_{\text{разм}}(\Lambda)$, где $\Lambda$ — произвольное конечное односвязное множество.

Пусть задан вес $\Phi(\Gamma)$, $\Gamma\in\mathfrak{M}_{\text{разм}}$ на пространстве маркированных размеченных контуров, удовлетворяющий условиям 1) и 2) предыдущего параграфа, а также задана последовательность вещественных чисел $\lambda_n$, $n\in\mathscr{N}$.

Для каждого конечного односвязного множества $\Lambda$ определим на пространстве $\mathfrak{A}_{\text{разм}}(\Lambda)$ распределение вероятностей, положив

$$p_{\Lambda,\,\text{разм}}(\alpha)=\Xi^{-1}_{\text{разм}}(\Lambda\,|\,\Phi, \lambda)\times \times\prod_{\Gamma\in\alpha}\exp(-\Phi(\Gamma))\prod_{n\in\mathscr{N}}\exp(\lambda_n|I_n(\alpha)\cap\Lambda|). \tag{3.3}$$

Далее мы ограничиваемся случаем конечного $\mathscr{N}$, $\mathscr{N}=\{1, 2,\dots, N\}$. Это распределение назовем ансамблем маркированных размеченных контуров, при этом его статистическая сумма равна

$$\Xi_{\text{разм}}(\Lambda\,|\,\Phi, \lambda)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}_{\text{разм}}(\Lambda)}\prod_{\Gamma\in\alpha}e^{-\Phi(\Gamma)}\prod_n\exp(\lambda_n|I_n(\alpha)\cap\Lambda|). \tag{3.4}$$

Совокупность согласованных конфигураций маркированных размеченных контуров, состоящих лишь из внешних контуров, обозначим $\mathfrak{A}^{\text{ext}}_{\text{разм}}$. Аналогично вводятся $\mathfrak{A}^{0,\,\text{ext}}_{\text{разм}}$ и $\mathfrak{A}^{\text{ext}}_{\text{разм}}(\Lambda)$, где $\Lambda$ односвязно и конечно. Очевидно, для любой конфигурации $\alpha\in\mathfrak{A}^{\text{ext}}_{\text{разм}}$ внешние разметки всех контуров $\alpha$ одинаковы; обозначим это общее значение $n^{\text{ext}}_\alpha$. Соответственно этому

$$\mathfrak{A}^{\text{ext}}_{\text{разм}}=\bigcup_{n\in\mathscr{N}}\mathfrak{A}^{\text{ext},\,n}_{\text{разм}},$$

где $\mathfrak{A}^{\text{ext},\,n}_{\text{разм}}$ — совокупность согласованных конфигураций внешних маркированных размеченных контуров с внешней разметкой, равной $n$. Аналогично вводятся $\mathfrak{A}^{\text{ext},\,n}_{\text{разм}}(\Lambda)$ и $\mathfrak{A}^{0,\,\text{ext},\,m}_{\text{разм}}$.

Пусть $p^{\text{ext}}_{\Lambda,\,\text{разм}}(\cdot\,|\,m)\equiv p^{\text{ext},\,m}_{\Lambda,\,\text{разм}}$ — условное распределение на множестве $\mathfrak{A}^{\text{ext},\,m}_{\text{разм}}(\Lambda)$, определяемое распределением (3.3) и условием $n^{\text{ext}}_\alpha\equiv m$. Очевидно

$$p^{\text{ext},\,m}_{\Lambda,\,\text{разм}}(\alpha)=\frac{1}{p_{\Lambda,\,\text{разм}}\left(\mathfrak{A}^{\text{ext},\,m}_{\text{разм}}\right)}\sum_{\alpha'\in\mathfrak{A}_{\text{разм}}(\Lambda):(\alpha')^{\text{ext}}=\alpha}p_{\Lambda,\,\text{разм}}(\alpha'). \tag{3.5}$$

Если ввести величины

$$Z_{\text{разм}}(\Gamma/\Phi, \Lambda)=\exp(-\lambda_{n^{\text{ext}}}|\gamma\cup\operatorname{Int}\gamma|-\Phi(\Gamma))\times \times\prod_{m\in\mathscr{N}}\Xi_{\text{разм}}(\operatorname{Int}_m(\gamma)/\Phi, \Lambda),\quad \Gamma=(\gamma, \theta, n), \tag{3.6}$$

то распределение (3.5) можно записать в виде

$$p^{\text{ext},m}_{\Lambda,\text{разм}}(\alpha)=\frac{\prod\limits_{\Gamma\in\alpha}Z_{\text{разм}}(\Gamma/\Phi, \Lambda)}{\sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}^{\text{ext},m}_{\text{разм}}(\Lambda)}\prod\limits_{\Gamma\in\alpha}Z_{\text{разм}}(\Gamma/\Phi, \Lambda)}. \tag{3.7}$$

Распределение (3.5), (3.7) называется ансамблем внешних размеченных маркированных контуров в $\Lambda$ с внешней разметкой $m$.

Рассмотрим теперь для произвольного $m\in\mathscr{N}$ пространство $\mathfrak{A}_m$ конфигураций (не обязательно согласованных!) маркированных контуров $\Gamma=(\gamma, \theta, n)\in\mathfrak{M}^m$ с внешней разметкой $n^{\text{ext}}=m$. Пространством марок для каждого $\gamma\in\mathscr{K}$ служит здесь множество $I^m=\{(\theta, n)\in I_\gamma : n^{\text{ext}}=m\}$. Очевидно, что это пространство трансляционно-инвариантно и для него выполнена оценка (3.1). В дальнейшем контур $\Gamma\in\mathfrak{M}^m$ будем обозначать $\Gamma^m$. Мы приведем теперь основную идею метода Пирогова—Синая в нашей ситуации.

Пусть задан вес $\{\Phi(\Gamma),\ \Gamma\in\mathfrak{M}_{\text{разм}}\}$ и последовательность $\lambda=\{\lambda_n,\ n\in\mathcal{N}\}$. Предположим, что для любого $m\in\mathcal{N}$ можно выбрать вес $\Psi^m$ на пространстве $\mathfrak{M}^m$, удовлетворяющий условиям 1) и 2) с константой $\tau_0=\tau_0(c,\mathcal{N},\mathcal{K})$ так, что для любого $\Gamma^m\in\mathfrak{M}^m$, $m\in\mathcal{N}$

$$Z_{\text{разм}}(\Gamma^m/\Phi,\lambda)=Z(\Gamma^m/\Psi^m), \tag{3.8}$$

где правая часть определена формулой (2.9). Из формулы (3.7) видно, что в случае выполнимости (3.8) для каждого $m\in\mathcal{N}$ распределение $p^{\text{ext},m}_{\Lambda,\text{разм}}(\alpha)$ на пространстве $\mathfrak{A}^{\text{ext},m}_{\text{разм}}(\Lambda)=\mathfrak{A}^{\text{ext}\,m}_{m}(\Lambda)$ совпадает с распределением $p^{\text{ext}}_{\Lambda,m}$, порожденным распределением $p_{\Lambda,m}$ на пространстве $\mathfrak{A}_m(\Lambda)$ с весом $\Psi^m$. Это замечание вместе с теоремой I приводят нас к следующей важной теореме.

Теорема 3. Пусть вес $\{\Phi(\Gamma),\ \Gamma\in\mathfrak{M}_{\text{разм}}\}$ и последовательность $\{\lambda_n,\ n\in\mathcal{N}\}$ таковы, что выполнено (3.8). Тогда для каждого $m\in\mathcal{N}$ на пространстве $\mathfrak{A}^{\text{ext},m}_{\text{разм}}$ согласованных конфигураций внешних маркированных размеченных контуров с внешней разметкой $m$ существует распределение вероятностей $p^{\text{ext},m}_{\text{разм}}$ такое, что для любого $\beta\in\mathfrak{A}^{0\ \text{ext},m}_{\text{разм}}$

$$p^{\text{ext},m}_{\text{разм}}\{\alpha\in\mathfrak{A}^{\text{ext},m}_{\text{разм}}:\beta\subset\alpha\}\equiv\pi^m_{\text{разм}}(\beta)=\lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu}\pi^m_{\text{разм},\Lambda}(\beta),$$

где $\pi^m_{\text{разм}}(\beta)$, $\beta\in\mathfrak{A}^{0,\text{ext},m}_{\text{разм}}$ — корреляционная функция ансамбля (3.7). Каждое распределение $p^{\text{ext},m}_{\text{разм}}$ трансляционно инвариантно.

Таким образом, теорема 3 показывает, что в случае, когда предположение (3.8) выполнено, $\mathcal{N}$ условных распределений, порожденных ансамблем согласованных конфигураций размеченных контуров в $\Lambda$ на пространстве конфигураций с любой фиксированной внешней разметкой, имеют пределы при $\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^\nu$.

Перейдем теперь к исследованию соотношения (3.8). Воспользовавшись (3.4), представим (3.6) в виде

$$Z_{\text{разм}}(\Gamma^n/\Phi,\lambda)=\exp\{-\Phi(\Gamma)-\lambda_n|\gamma|\}\times$$
$$\times\prod_{m\in\mathcal{N}}\exp\{(\lambda_m-\lambda_n)|\operatorname{Int}_m\gamma|\}\times$$
$$\times\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}^{\text{ext},m}_{\text{разм}}(\operatorname{Int}_m\gamma)}\ \prod_{\Gamma'^m\in\alpha}Z_{\text{разм}}(\Gamma'^m/\Phi,\lambda). \tag{3.9}$$

Эти соотношения также можно рассматривать как рекуррентные соотношения, аналогичные соотношениям (2.37). Предположим теперь, что выполнено (3.8). Тогда для каждого $m\in\mathcal{N}$



$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}^{\text{ext},m}_{\text{разм}}(\operatorname{Int}_m\gamma)}\ \prod_{\Gamma'^m\in\alpha}Z_{\text{разм}}(\Gamma'^m/\Phi,\lambda)=$$
$$=\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}^{\text{ext},m}(\operatorname{Int}\gamma)}\ \prod_{\Gamma'\in\alpha}Z(\Gamma'^m/\Psi^m)=\Xi(\operatorname{Int}\gamma/\Psi^m).$$

Отсюда, из (3.9) и (2.27) получаем, что

$$Z_{\text{разм}}(\Gamma^n|\Phi,\lambda)=\exp\Big\{-\Phi(\Gamma)-\lambda_n|\gamma|+\sum_m(\lambda_m-\lambda_n)|\operatorname{Int}_m(\gamma)|+$$
$$+\sum_m\chi(\Psi^m)|\operatorname{Int}_m\gamma|+\sum_m\Delta(\operatorname{Int}_m\gamma|\Psi^m)\Big\}. \tag{3.10}$$

С другой стороны, из предположения (3.8) и равенства (2.36) находим, что

$$Z_{\text{разм}}(\Gamma^n|\Phi,\lambda)=$$
$$=\exp\Big\{-\Psi^n(\Gamma^n)+\chi(\Psi^n)\cdot|\operatorname{Int}\gamma|+\sum_m\Delta(\operatorname{Int}_m\gamma|\Psi^n)\Big\}. \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) получаем равенство

$$-\Psi^n(\Gamma^n)=-\Phi(\Gamma^n)-\lambda_n|\gamma|+$$
$$+\Big[\sum_{m\in\mathcal{N}}(\lambda_m-\lambda_n+\chi(\Psi^m)-\chi(\Psi^n))\cdot|\operatorname{Int}_m(\gamma)|\Big]+$$
$$+\sum_{m\in\mathcal{N}}(\Delta(\operatorname{Int}_m\gamma|\Psi^m)-\Delta(\operatorname{Int}_m\gamma|\Psi^n)).$$

Очевидно, что эти равенства будут удовлетворены, если мы положим, что

$$\Psi^n(\Gamma^n)=\Phi(\Gamma^n)+\lambda_n|\gamma|+\sum_{m\in\mathcal{N}}[-\Delta(\operatorname{Int}_m\gamma|\Psi^m)+\Delta(\operatorname{Int}_m\gamma|\Psi^n)]; \tag{3.12}$$

$$\lambda_m+\chi(\Psi^m)=\lambda_n+\chi(\Psi^n). \tag{3.13}$$

Написанные уравнения называются уравнениями Пирогова—Синая [13, 14]. Они имеют следующую структуру. Первая группа — уравнения (3.12) и при любом весе $\Phi$ — последовательности $\lambda$ однозначно определяют $N$ весов $\Psi^m=\Psi^m(\Phi,\lambda)$. Соотношения же (3.13), которые можно переписать в виде

$$\lambda_m+\chi(\Psi^m/\Phi,\lambda)\equiv R_m(\Phi,\lambda)=\text{const},$$

представляют собой $(N-1)$ условий относительно $\Phi$ и $\lambda$, при выполнении которых справедливо наше основное предположение (3.8). Сформулируем теперь основную теорему относительно решений уравнений (3.12), (3.13), с помощью которых мы будем исследовать рассмотренную в § 5 модель. Пусть на пространстве $\mathfrak{M}_{\text{разм}}$ задано семейство весов $\Phi(\Gamma,\beta,\mu_1,\dots,\mu_{N-1})$, зависящих от параметра $\beta$, принимающего достаточно большие значения $\beta\in(\beta_0,\infty)$ и от $(N-1)$ параметров $\mu_1,\dots,\mu_{N-1}$, меняющихся в некоторой окрестности нуля $U_\delta\subset\mathbf{R}^N$.

Мы предположим, что

1) Вес $\Phi(\Gamma,\beta,\mu_1,\dots,\mu_{N-1})$ зависит от параметров $\beta$, $\mu_1,\dots,\mu_{N-1}$ достаточно гладко. Точнее, пусть $E$ — банахово пространство функций на $\mathfrak{M}_{\text{разм}}$ таких, что

$$\sup_{\Gamma\in\mathfrak{M}_{\text{разм}}}\frac{|f(\Gamma)|}{|\gamma|}\equiv\|f\|_E<\infty, \tag{3.14}$$

где $\Gamma=(\gamma,\ \theta,\ n)$.

В силу нашего предположения, $\Phi(\Gamma,\ \beta,\ \mu_1,\dots,\ \mu_{N-1})$ принадлежит $E$ при любых $\beta$ и $\mu\in U_\delta$. Мы предполагаем также, что существуют все производные (в смысле нормы (3.14)) $\partial^k\Phi/\partial^{k_1}\beta\dots\partial^{k_N}\mu_{N-1}$ при $k_1\geqslant0,\dots,\ k_N\geqslant0$, $k=k_1+\dots+k_N<l$, где $l$ — некоторое фиксированное число.

2) Обозначим через $L_{\tau,k}\subset E$, $k>\tau>\tau_0$, область

$$L_{\tau,k}=\{\Phi\in E:\ \tau|\gamma|<\Phi(\Gamma)<k|\gamma|\},\qquad \Gamma=(\gamma,\ \theta,\ n)\in\mathfrak{M}_{\text{разм}}. \tag{3.15}$$

Мы предположим, что для каждого $\beta$ существуют такие $\tau=\tau(\beta)$ и $k=k(\beta)$, что

$$\Phi(\beta,\ \mu_1,\dots,\ \mu_{N-1})\equiv\Phi(\beta,\ \mu)\in L_{\tau(\beta),k(\beta)} \tag{3.16}$$

при всех $\mu\in U_\delta$. При всех $\tau(\beta)\to\infty$ при $\beta\to\infty$.

3) Последовательность

$$\lambda(\beta,\ \mu)=(\lambda_1(\beta,\ \mu),\dots,\ \lambda_N(\beta,\ \mu))\in\mathbf{R}^N$$

гладко зависит от $\beta$, $\mu$. При любом $\beta\in[\beta_0,\ \infty)$ последовательность

$$\lambda(\beta,\ 0)=(\bar\lambda(\beta,\ 0),\dots,\ \bar\lambda(\beta,\ 0))$$

постоянна, причем

$$\bar\lambda(\beta,\ 0)>c\tau(\beta), \tag{3.17}$$

где $c<1$ — некоторая константа.

4) Для каждого $\beta\in(\beta_0,\ \infty)$ существует такая $\delta(\beta)$, что отображение

$$Q:\mu\mapsto(q_1(\mu),\ \dots,\ q_{N-1}(\mu)),\quad \mu\in U_{\delta(\beta)},$$

где

$$q_i(\mu)=\lambda_i(\mu)-\lambda_N(\mu),\quad i=1,\dots,N-1,$$

переводит взаимно однозначно окрестность $U_\delta$ в некоторую окрестность нуля $QU_\delta\subset\mathbf{R}^{N-1}$, содержащую шар радиуса $ce^{-\tau(\beta)}$. При этом норма матрицы



$$\left\|\frac{\partial q_i}{\partial\mu_j}\right\|^{-1}$$

не превосходит

$$K_0e^{-\tau(\beta)}. \tag{3.18}$$

Теорема 4. Пусть семейство весов $\{\Phi(\beta,\mu)\}$ и последовательностей $\{\lambda(\beta,\mu)\}$, $\beta\in[\beta_0,\ \infty)$, $\mu\in U_\delta$, удовлетворяют перечисленным выше условиям. Тогда для каждого $\beta\in[\beta_0,\ \infty)$ найдутся такие значения параметров $\bar\mu=\bar\mu(\beta)$ из $U_\delta$, что для веса $\Phi_\beta=\Phi(\beta,\ \bar\mu(\beta))$ и последовательности $\lambda_\beta=\lambda(\beta,\ \bar\mu(\beta))$ выполнено предположение (3.8), т. е. уравнения (3.12), (3.13) имеют решения $\Psi^n$, $n=1,\dots,N$, удовлетворяющие основной оценке § 2.

Доказательство. Пространство $E$ можно представить себе как пространство последовательностей $\Psi=(\Psi^1,\dots,\Psi^N)$ функций, определенных, соответственно, на множествах $\mathfrak{M}^n$ размеченных контуров с внешней разметкой $n$, $n=1,\dots,N$. Определим оператор $A$ в $E$:

$$(A\Psi)(\Gamma^n)=-\sum_{m\in\mathcal{N}}(\Delta(\operatorname{Int}_m\gamma/\Psi^n)-\Delta(\operatorname{Int}_n\gamma/\Psi^m)),\quad \Gamma^n\in\mathfrak{M}^n.$$

Обозначим через $\tilde\Phi$ последовательность

$$\tilde\Phi^n(\Gamma^n)=\Phi(\Gamma^n)+\lambda_n|\gamma|,\quad \Gamma^n=(\gamma,\theta,n)\in\mathfrak{M}^n.$$

Таким образом, система уравнений (3.12) может быть представлена в виде

$$\Psi=\tilde\Phi+A\Psi. \tag{3.19}$$

Аналогичные уравнения изучались в работе [13]. Повторяя рассуждения из этой работы (см. также книгу [14]), мы получим, что при любом $\Phi\in L_{\tau,k}$ и $\lambda$, удовлетворяющей оценке (3.17), существует решение $\Psi=(\Psi^1,\dots,\Psi^N)$ этого уравнения такое, что

$$\|\Psi-\tilde\Phi\|<Ce^{-c\tau(\beta)}, \tag{3.20}$$

где $0<C$ — некоторая константа. Это решение, как нетрудно показать, является гладкой функцией параметров $\mu_1,\dots,\mu_{N-1}$, причем

$$\left\|\frac{\partial^k\Psi}{\partial\mu^k}\right\|<C\left\|\frac{\partial^k\tilde\Phi}{\partial\mu^k}\right\|, \tag{3.21}$$

где $C$ — абсолютная константа. Далее, обозначим через

$$g_m^\beta(\mu_1,\dots,\mu_{N-1})=\chi(\Psi^N(\beta,\ \mu))-\chi(\Psi^m(\beta,\ \mu)).$$

Из (2.28) можно вывести, что норма матрицы

$$\left\|\frac{\partial g_m}{\partial\mu_k}\right\|$$

не превосходит

$$Ce^{-\tau(\beta)}. \tag{3.22}$$

Соотношения (3.13) могут быть записаны в виде системы уравнений

$$q_m(\mu)-g_m(\mu)=0, \quad m=1,\ldots,N-1. \tag{3.23}$$

Поскольку $g=\{g_1(\mu),\ldots,g_{N-1}(\mu)\}\in QU_{\delta(\beta)}$, уравнения эквивалентны уравнению

$$\mu=Q^{-1}(g(\mu)). \tag{3.24}$$

В силу (3.18), (3.22), отображение

$$T_\mu=Q^{-1}(g(\mu))$$

переводит окрестность $U_{\delta(\beta)}$ в себя и является сжимающим. Отсюда вытекает, что существует, при этом единственное решение $\mu=\bar\mu(\beta)$ уравнений (3.24). Теорема 4 доказана.

## § 4. СИСТЕМЫ С ГРУППОЙ СИММЕТРИИ

Если система симметрична в определенном ниже смысле, то, как и в классической модели Изинга, все очень упрощается, и мы не будем пользоваться результатами § 3.

Пусть на $\mathcal{N}$ действует группа симметрии $G$, причем для любых $n_1$, $n_2\in\mathcal{N}$ существует единственный элемент $g=g(n_1,n_2)$, переводящий $n_1$ в $n_2$. Множество $\mathcal{N}_\gamma$ в данном случае будет состоять из всех функций $n(t)$, принимающих значения в $\mathcal{N}$, определенных на дополнении к $\gamma$ и постоянных на каждой 1-связной компоненте этого дополнения, причем $n(t_1)=n(t_2)$ для любых $t_1$, $t_2$ таких, что $|t_1-t|=1$, $|t_2-t|=1$ для некоторой $t\in\gamma$. Две такие функции $n_1(t)$ и $n_2(t)$ при заданном $\gamma$, будем называть симметричными (относительно $G$), если существует $g\in G$ такой, что $g\,n_1(t)\equiv n_2(t)$.

Мы будем рассматривать, таким образом, контурные модели § 3, где множеством разметок будет служить множество $\tilde{\mathfrak{N}}_\gamma$ классов эквивалентности функций $h(t)$ (относительно введенной выше симметрии). Поэтому любая конфигурация $\alpha$ различных контуров будет согласованной. В качестве множества марок $\Theta_\gamma$ будем рассматривать совокупность всевозможных наборов $\varkappa$ пар точек $(t,t')$, $|t-t'|=1$ таких, что $\tilde\varkappa=\bigcup_{(t,t')\in\varkappa}(\{t\}\cup\{t'\})\subset\gamma$. Остальная часть этого параграфа будет посвящена введению контуров для различных примеров и доказательству того, что эти примеры укладываются в введенную выше контурную модель.

1. $S$ — область в $\mathbf{R}^n$ или гладкое многообразие. $\Phi(s_1,s_2)$ — гладкая функция, имеющая точно два абсолютных минимума



на диагонали, т. е. в точках $(s_0,s_0)$, $(s_0',s_0')$. $G=\mathbf{Z}_2$, ее нетривиальный элемент $g$ является диффеоморфизмом $S$, переводящим одну точку минимума в другую. Граничные условия фиксированы и постоянны: $s_t\equiv s_0$, $t\notin\Lambda$ либо $s_t\equiv s_0'$, $t\notin\Lambda$. Основное требование состоит в следующем: если в окрестности $s_0$ ввести координаты $X=(x_1,\ldots,x_n)$ с центром в этой точке, то в окрестности точки $(s_0,s_0)$ $\Phi(X,Y)$ допускает представление:

$$\Phi(X,Y)=f(X)+f(Y)+\psi(X,Y)+\mathrm{const}, \tag{4.1}$$

причем $f(0)=0$, $f(X)>0$ при $X\neq0$ и

$$|\psi(X,Y)|\leqslant\eta\,|f(X)+f(Y)|, \tag{4.2}$$

где далее $\eta$ считается достаточно малым.

Такое же представление имеет место в окрестности $(s_0',s_0')$. Для определенности будем считать, что $f$ в окрестности минимума в координатах $(x_1,\ldots,x_n)$ является, с точностью до членов более высокого порядка, однородным многочленом степени $k$. Будем считать также, что константа в (4.1) равна нулю.

Предположим, кроме того, что

$$f(X)\geqslant\sum_{j=1}^{n}c_j\,|x_j|^k \tag{4.3}$$

в окрестности минимума, причем $c_j>0$ для $j=1,\ldots,n$. Фиксируем некоторую окрестность $O$ точки $s_0$ и определим

$$\bar\psi(s_1,s_2)=\begin{cases}\psi(s_1,s_2), & (s_1,s_2)\in(O\times O)\cup(gO\times gO),\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Можно считать $\bar\psi\leqslant0$, так как в противном случае можно рассмотреть $\bar\psi(X,Y)=-\eta f(X)-\eta f(Y)+\psi(X,Y)$. Определим для любой неупорядоченной пары $(t,t')$ ближайших соседей

$$k_{tt'}=\exp\{-\beta\bar\psi(s_t,s_{t'})\}-1.$$

Тогда

$$\exp\Bigg(-\beta\sum_{\substack{|t-t'|=1\\ t,t'\in\Lambda}}\bar\psi(s_t,s_{t'})\Bigg)=\sum_{\varkappa}K_\varkappa \tag{4.4}$$

где для неупорядоченного набора $\varkappa$ пар ближайших соседей мы определили

$$k_\varkappa=\prod_{(t,t')\in\varkappa}k_{tt'}.$$

Сумма в (4.4) берется по всем таким наборам, включая пустой, $k_\varnothing=1$.

Точку $t\in\Lambda$ назовем регулярной точкой (относительно фиксированной конфигурации $\{s_t,\ t\in\Lambda\}$), если для всех $t'$, $|t-t'|=1$, имеет место

$$(s_t,s_{t'})\in(O\times O)\cup(gO\times gO).$$

Остальные точки назовем нерегулярными. Пусть $s=(s_t)$ есть конфигурация на $\Lambda$ такая, что $k_\varkappa(s)\neq 0$. Пару $(s, \varkappa)$ будем называть расширенной конфигурацией. Пусть $B_s$ — множество нерегулярных точек конфигурации $s$. Определим класс $\mathscr{K}$ контуров как класс множеств, каждое из которых является 1-связной компонентой множества $B_s \cup \tilde{\varkappa}$ для какой-либо расширенной конфигурации $(s, \varkappa)$. Здесь $\tilde{\varkappa}=\{t: \exists t', (t, t')\in\varkappa\}$. Множество $\mathscr{N}$ будем считать состоящим из двух точек, $\mathscr{N}=\{0, 1\}$, соответствующих двум минимумам потенциала.

Обозначим

$$\bar{\Phi}(s_1, s_2)=\begin{cases} f(s_1)+f(s_2), & (s_1, s_2)\in(O\times O)\cup(gO\times gO), \\ \Phi(s_1, s_2), & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{4.5}$$

Тогда для всех $(s_1, s_2)$

$$\Phi(s_1, s_2)=\bar{\Phi}(s_1, s_2)+\bar{\psi}(s_1, s_2). \tag{4.6}$$

Воспользовавшись (4.4) и (4.6), получим, что статистическая сумма

$$\Xi_{\text{разм}, s}(\Lambda)=\int\limits_{S^\Lambda}\exp\{-\beta U_{\Lambda, s}\}\,d\mu_\Lambda^0=$$

$$=\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}_{\text{разм}}(\Lambda)}\Big(\prod_{\Gamma\in\alpha}\exp(\Phi(\Gamma))\Big)\cdot\lambda^{|\Lambda-\bigcup\limits_{\Gamma\in\alpha}\gamma|}, \quad \Gamma=(\gamma, \theta, n), \tag{4.7}$$

где суммирование ведется по всевозможным конфигурациям маркированных размеченных контуров в $\Lambda$, и введены следующие обозначения:

$$\lambda=\lambda(\beta)=\int\limits_O\exp\{-\beta 2\nu f(s)\}\,d\mu^0, \tag{4.8}$$

$$\exp(-\Phi(\Gamma))=\int\exp\Big\{-\beta\Big[\sum_{\substack{t, t'\in\gamma \\ |t-t'|=1}}\bar{\Phi}(s_t, s_{t'})+$$

$$+\sum_{t\in\partial_i\gamma}c_t f(s_t)\Big]\Big\}\,k_\varkappa d\mu_\gamma^0. \tag{4.9}$$

Здесь $c_t$ есть мощность множества $\{t': |t-t'|=1 \text{ и } t'\notin\gamma\}$, а интеграл берется по множеству конфигураций $s$ на $\gamma$ таких, что $k_\varkappa(s)\neq 0$, всякая $t\in\gamma-\tilde{\varkappa}$ является нерегулярной точкой, а для $t\in\partial_i\gamma$ $s_t$ принадлежит $gO$ либо $O$ в зависимости от значения $n(t')$ для $|t'-t|=1$, $t'\notin\gamma$, где $n(t')$ — любая функция из класса эквивалентных функций, составляющих разметку $\Gamma$.

В силу наличия симметрии, определение $\exp(-\Phi(\Gamma))$ корректно. В качестве множества $I_\gamma\subset\Theta_\gamma\times\mathfrak{N}_\gamma$ мы рассматриваем множество таких пар $(\varkappa, n)$, для которых описанное множество конфигураций не пусто.



Рассмотрим для определенности граничные условия $s_t\equiv s_0$, $t\notin\Lambda$. Пусть $\alpha=(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l)$ — конфигурация маркированных размеченных контуров, $\Gamma_i=(\gamma_i, \varkappa_i, n_i)$, $i=1, \ldots, l$. Пусть $\alpha^{\text{ext}}=(\Gamma_{j_1}, \ldots, \Gamma_{j_p})$. Для каждого $i=j_1, \ldots, j_p$ выберем среди функций, составляющих разметку $n_i$, ту, для которой $n^{\text{ext}}=0$. Далее, пусть $\Gamma_k\in\alpha$ охватывается каким-либо $\Gamma\in\alpha^{\text{ext}}$, причем $\Gamma$ является единственным контуром из $\alpha$, охватывающим $\Gamma_k$. Из совокупности функций, составляющих разметку $n_k$, выберем ту, для которой $n^{\text{ext}}$ совпадает со значением выбранной нами функции $n(t)$ для контура $\Gamma$ при $t\in\gamma_k$. Указанным способом для каждого из контуров конфигурации $\alpha$ выберем одну из функций, составляющих разметку, при этом $\alpha$ станет согласованной конфигурацией в смысле § 3, причем $n^{\text{ext}}=0$. В случае, когда для всех $t\notin\Lambda s_t=s_0'$, процедура та же, но в результате получим согласованную конфигурацию с $n^{\text{ext}}=1$.

Лемма 3. Существует константа $\tau=\tau(\beta)$, $\tau(\beta)>\tau_0$ для достаточно больших $\beta$, такая, что для любого геометрического контура $\gamma$

$$\sum_{(\varkappa, n)\in I_\gamma}\lambda^{-|\gamma|}\exp(-\Phi(\Gamma))\leqslant e^{-\tau|\gamma|}, \tag{4.10}$$

где $\Gamma=(\gamma, \varkappa, n)$.

Доказательство. Поскольку число слагаемых в (4.10) не превосходит $C^{|\gamma|}$ для некоторой константы $C$, то оценку (4.10) достаточно доказать для каждого слагаемого. Пусть $\xi^{-1}$ есть диффеоморфизм окрестности точки $s_0\in S$ на окрестность нуля в $\mathbf{R}^n$. Пусть $\tilde{O}$ есть стандартная $\varepsilon$-окрестность нуля в $\mathbf{R}^n: \tilde{O}=\{X\in\mathbf{R}^n: |x_j|\leqslant\varepsilon, j=1, \ldots, n\}$. В качестве окрестности $O$ точки $s_0$ будем рассматривать $\xi\tilde{O}$. Положим $\varepsilon=\beta^{-\omega}$, где $0<\omega<\frac{1}{k}$. Оценим снизу $\lambda(\beta)$. Из (4.8) следует, что

$$\lambda(\beta)=\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp\{-\beta 2\nu f(\xi(X))\}\,dX\geqslant\int\limits_{-\beta^{-1/k}}^{\beta^{-1/k}}\exp\{-\beta 2\nu f(\xi(X))\}\,dX.$$

При $|x_j|\leqslant\beta^{-1/k}$, $j=1, \ldots, n$, $f\leqslant\text{const}\cdot\beta^{-1}$ и, следовательно,

$$\lambda(\beta)\geqslant 2^n\exp\{-2\nu c\}\beta^{-n/k},$$

т. е.

$$\lambda^{-|\gamma|}\leqslant C\beta^{\frac{n}{k}|\gamma|}, \tag{4.11}$$

где константа $C$ зависит от размерности решетки $\nu$. Зафиксируем множество $B\subset\gamma$ и рассмотрим интеграл в (4.9) по множеству конфигураций $s(B)$ таких, что $B$ совпадает с множеством нерегулярных точек для каждой из них. Интеграл в (4.9) равен, очевидно, сумме по всевозможным $B\subset\gamma$ интегралов по множеству конфигураций $s(B)$. Обозначим $R$ число способов выбрать $B\subset\gamma$ такое, что $\gamma-B\subset\tilde{\varkappa}$. Так как $R$ не превосходит $C^{|\gamma|}$ для некоторой константы $C$, то для доказательства леммы достаточно получить оценку каждого слагаемого. Итак, зафиксируем $B\subset\gamma$ и оценим соответствующий интеграл. Заметим, что $\bar{\Phi}(s_1, s_2)=\Phi(s_1, s_2)\geqslant c\varepsilon^k$ при $(s_1, s_2)\notin(O\times O)\cup\cup(gO\times gO)$. Но число пар точек $(t, t')$ таких, что $(s_t, s_{t'})\notin(O\times O)\cup(gO\times gO)$, не меньше, чем $\frac{|B|}{2}$. Поэтому интеграл не превосходит

$$\exp\left(-\beta c\varepsilon^k\frac{|B|}{2}\right)\int\left(\int\prod_{\substack{t\in\gamma-B\\ t\notin\partial_i(\gamma-B)}} e^{-\beta 2\nu f(s_t)}\prod_{\substack{(t,t')\in\varkappa\\ t,t'\in\gamma-B}} k_{tt'}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{t\in\partial_i(\gamma-B)}\exp\left(-\beta\left(2\nu-\frac{b_t}{2}\right)f(s_t)\right)d\mu^0_{\gamma-B}\right)d\mu^0_B. \qquad (4.12)$$

Здесь для каждой $t\in\partial_i(\gamma-B)$ $b_t$ означает число пар $(t, t')\in\varkappa$, $t'\notin\gamma-B$; для пар $(t, t')$ таких, что $t$ либо $t'$ (либо обе) принадлежит $B$, мы воспользовались оценкой

$$k_{tt'}\exp\{-\beta(f(s_t)+f(s_{t'}))\}\leqslant\exp\left\{-\frac{\beta}{2}(f(s_t)+f(s_{t'}))\right\}, \qquad (4.13)$$

которая следует из определения $k_{tt'}$ и (4.2). В результате, подынтегральная функция разбилась в произведение двух функций, одна из которых зависит от конфигурации на $B$, а другая на $\gamma-B$. Зафиксируем конфигурацию на $B$ и оценим внутренний интеграл, а затем проинтегрируем по $B$. Поскольку внутренний интеграл в [4.12] разбивается в произведение интегралов, соответствующих 1-связным компонентам $\gamma-B$, мы будем для простоты считать $\gamma-B$ 1-связным множеством. Поскольку $\gamma-B$ состоит из регулярных точек, то либо $s_t\in O$ для всех $t\in\gamma-B$, либо $s_t\in gO$ для всех $t\in\gamma-B$. Для определенности выберем первую возможность.

Пусть $\tilde{I}\subset\tilde{O}$ есть $n$-мерный стандартный куб с центром в нуле и ребром $2M\beta^{-1/k}$, где $M$ — достаточно большое число. Воспользовавшись заменой переменных, запишем интеграл в (4.12) по множеству $\mathop{\times}\limits_{t\in\gamma-B}\tilde{O}$ по мере Лебега. Воспользуемся, далее, следующим разбиением:

$$\mathop{\times}_{t\in\gamma-B}\tilde{O}=\sum_{A\subset\gamma-B}(\mathop{\times}_{t\in A}\tilde{I})\times(\mathop{\times}_{t\in(\gamma-B)-A}(\tilde{O}-\tilde{I})), \qquad (4.14)$$

где суммирование (объединение) берется по всевозможным (включая пустое) подмножествам множества $\gamma-B$, и представим интеграл как сумму интегралов, соответствующих каждому слагаемому в (4.14). Оценим произвольное слагаемое этой



суммы. Заметим, что если множество $(t, t')\in\varkappa$ таких, что $t\in\gamma-B$, $t'\in\gamma-B$, пусто, то для любой $t\in\gamma-B$ найдется $t'\in B$ такая, что $|t-t'|=1$, следовательно, существует константа $c$ такая, что $|B|\geqslant c|\gamma|$. В этом случае требуемая оценка следует из (4.12) очевидным образом.

Фиксируем $A\subset\gamma-B$. Пусть $t, t'\in\gamma-B$, и $(t, t')\in\varkappa$. Пусть к тому же $t, t'\in A$. Тогда

$$|k_{tt'}|\leqslant\beta|\psi|\leqslant\beta\eta(f(s_t)+f(s_{t'}))\leqslant cM^k\eta. \qquad (4.15)$$

Обозначим $T$ множество внутренних точек $A$, т. е. множество $t\in A$ таких, что любая $t'$, $|t-t'|=1$, принадлежит $A$. Число пар $(t, t')$ таких, что $t\in A$, $t'\in A$ и $(t, t')\in\varkappa$, больше $|T|/2$. Учитывая это и (4.14), получаем, что интеграл, соответствующий слагаемому с фиксированным $A$ в (4.14), не превосходит

$$(cM^k\eta)^{|T|/2}\prod_{t\in A}\left(\int_{\tilde{I}}\exp\{-\beta\nu f(\xi(X))\}\,dX\right)\times$$

$$\times\prod_{t\in(\gamma-B)-A}\left(\int_{\tilde{O}-\tilde{I}}\exp\{-\beta\nu f(\xi(X))\}\,dX\right). \qquad (4.16)$$

Мы вновь воспользовались оценкой (4.13) для $(t, t')\in\varkappa$, $t\notin A$ либо $t'\notin A$.

Заметим, что

$$\lambda^{-1}\int_{\tilde{I}}\exp\{-\beta\nu f(\xi(X))\}\,dX\leqslant\text{const}. \qquad (4.17)$$

Оценим теперь интеграл по множеству $\tilde{O}-\tilde{I}$ (4.16). Для каждого подмножества $J\subset\{1,\ldots,n\}$, $J\neq\{1,\ldots,n\}$, определим $\tilde{O}(J)\subset\tilde{O}-\tilde{I}$ следующим образом:

$\tilde{O}(J)=\{X\in\tilde{O}-\tilde{I}: x_j\in[-M\beta^{-1/k}, M\beta^{-1/k}]$ при $j\in J$ и $x_j\in[-\varepsilon, \varepsilon]\setminus[-M\beta^{-1/k}, M\beta^{-1/k}]$ при $j\notin J\}$.

Тогда $\tilde{O}-\tilde{I}=\bigcup\limits_{J\neq\{1,\ldots,n\}}\tilde{O}(J)$ и интеграл по множеству $\tilde{O}-\tilde{I}$ есть сумма интегралов по $\tilde{O}(J)$. Воспользовавшись (4.3), получим

$$\int_{\tilde{O}(J)}\exp\{-\beta\nu f(X)\}\,dX\leqslant\prod_{j\in J}\left(\int_{-M\beta^{-1/k}}^{M\beta^{-1/k}}\exp\{-\beta\nu c_jx_j^k\}\,dx_j\right)\times$$

$$\times\prod_{j\notin J}\left(\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]-[-M\beta^{-1/k},M\beta^{-1/k}]}\exp\{-\beta\nu c_jx_j^k\}\,dx_j\right). \qquad (4.18)$$

Оценим интеграл во второй скобке. Воспользуемся заменой переменных $y_j=\beta^{1/k}x_j$

$$\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]-[-M\beta^{-1/k},M\beta^{-1/k}]}\exp\{-\nu\beta c_jx_j^k\}\,dx_j\leqslant$$

$$\leqslant 2\beta^{-1/k}\int_M^\infty \exp\{-\nu c_j y_j^k\}\,dy_j \leqslant \beta^{-1/k}e^{-M} \tag{4.19}$$

для достаточно больших $M$. С учетом (4.19) правая часть (4.18), а следовательно, и интеграл по $\tilde O-\tilde I$ не превосходят

$$2^n(2M\beta^{-1/k})^{|J|}(\beta^{-1/k}e^{-M})^{n-|J|}\leqslant(4M\beta^{-1/k})^n e^{-M}.$$

Отсюда и из (4.17) с учетом (4.11) получаем, что (4.16), умноженное на $\lambda^{-|\gamma-B|}$, не превосходит

$$(CM^k\eta)^{|T|/e}(e^{-M/2})^{|(\gamma-B)-A|}. \tag{4.20}$$

Поскольку для любой $t\in\partial_i A$ найдется $t'\in(\gamma-B)-A$ такая, что $|t-t'|=1$, то

$$|\gamma-B-A|\geqslant\frac{1}{2\nu}|\partial_i A|.$$

Таким образом,

$$|\partial_i A|=|\gamma-B|-|((\gamma-B)-A)\cup T|\leqslant 2\nu|(\gamma-B)-A|,$$

или

$$(2\nu+1)(|(\gamma-B)-A|+|T|)\geqslant|\gamma-B|;$$

$$|(\gamma-B)-A|+|T|\geqslant\frac{1}{2\nu+1}|\gamma-B|.$$

Следовательно, для достаточно больших $M$ и достаточно малых $\eta=\eta(M)$ (4.20) не превосходит $e^{-\tau|\gamma-B|}$. Кроме того,

$$\lambda^{-|B|}\exp\left\{-\beta c\varepsilon^k\frac{|B|}{2}\right\}\leqslant\left(C\beta^{\frac{n}{k}}\exp\{-c\beta^{1-k\omega}\}\right)^{|B|}\leqslant e^{-\tau|B|}$$

для достаточно больших $\beta$, что завершает доказательство леммы 3.

Пример II. $S$ есть $\boldsymbol{R}^1$,

$$\Phi(s_1,s_2)=\frac{1}{m}\psi(s_1-s_2)+\varphi(s_1)+\varphi(s_2); \tag{4.21}$$

где $m>0$ достаточно велико, а функции $\varphi$ и $\psi$ являются непрерывными и удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi$ является периодической (для определенности будем считать, что период $\varphi$ равен единице).

2. Для любого целого $j$ на отрезке $\left[j-\frac{1}{2},\ j+\frac{1}{2}\right]$ функция $\varphi$ имеет ровно один минимум в точке $j$, и в окрестности минимума имеет место представление:

$$\varphi(s)=c_\varphi|s-j|^n+o((s-j)^n), \tag{4.22}$$

где $n>1$, $c_\varphi>0$ — константа.



3. $\psi(s)=\psi(|s|)$, $\psi(s)$ имеет единственный абсолютный строгий минимум в нуле, $\psi(0)=0$ и

$$\psi(s_1-s_2)<\varphi(s_1)+\varphi(s_2), \tag{4.23}$$

если $s_1$ и $s_2$ принадлежат одновременно некоторой окрестности точки $j$, $j\in\boldsymbol{Z}$ любое.

4. Обозначим

$$F(\beta)=\int_{-\infty}^{-\delta}\exp\{-\beta\psi(s)\}\,ds+\int_\delta^\infty\exp\{-\beta\psi(s)\}\,ds,$$

где $\delta>0$ — некоторая константа.

Мы будем предполагать, что $F(\beta)<\infty$ при всех $\beta>\beta_0>0$. Заметим, что из условия 4 и непрерывности $\psi$ следует, что для любого $p\geqslant0$ $\lim\limits_{\beta\to\infty}\beta^pF(\beta)=0$. Функция $\Phi(s_1,s_2)$ имеет, таким образом, счетное число минимумов, находящихся в точках $s_1=s_2=j$, где $j$ — любое целое число. Фиксируем некоторое $\varepsilon>0$ и обозначим через $O$ $\varepsilon$-окрестность точки $s=0$, а через $O_j$ ее целый сдвиг, $j\in\mathbf{Z}$. Обозначим

$$Q=(O\times O)\cup\Big(\bigcup_j(O_j\times O_j)\Big)\subset\mathbf{R}^2.$$

Рассмотрим гиббсовское поле в объеме $\Lambda$ с потенциалом (4.21) и постоянными граничными условиями $s_t\equiv k$, $t\notin\Lambda$, $k\in\mathbf{Z}$. Точку $t\in\Lambda$ назовем регулярной точкой (относительно конфигурации $\{s_t,\ t\in\Lambda\}$), если для всех $t'$, $|t-t'|=1$, имеет место $(s_t,s_{t'})\in Q$. Остальные точки назовем нерегулярными. Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{m}\tilde\psi(s_1,s_2)=\frac{1}{m}[\psi(s_1-s_2)-\varphi(s_1)-\varphi(s_2)],$$
$$\tilde\varphi(s)=\left(1+\frac{1}{m}\right)\varphi(s). \tag{4.24}$$

В силу неравенства (4.23), $\tilde\psi(s_1,s_2)\leqslant0$, если $(s_1,s_2)\in Q$. Обозначим также

$$\overline{\Phi}(s_1,s_2)=\begin{cases}\tilde\varphi(s_1)+\tilde\varphi(s_2), & (s_1,s_2)\in Q,\\ \Phi(s_1,s_2), & (s_1,s_2)\notin Q;\end{cases}$$
$$\overline{\Psi}(s_1,s_2)=\begin{cases}\frac{1}{m}\tilde\psi(s_1,s_2), & (s_1,s_2)\in Q,\\ 0, & (s_1,s_2)\notin Q.\end{cases} \tag{4.25}$$

Таким образом, для любых $s_1$, $s_2$ $\Phi(s_1,s_2)=\overline{\Phi}(s_1,s_2)+\overline{\Psi}(s_1,s_2)$. Нам, по-прежнему, понадобится разложение (4.4). Как и в примере 1, определим класс $\mathscr{K}$ контуров как класс множеств, каждое из которых является 1-связной компонентной объединения $\tilde\varkappa$ и множества нерегулярных точек для какой-либо расширенной конфигурации. Подчеркнем, что класс $\mathcal{K}$ контуров определяется при фиксированных граничных условиях. Таким образом, при фиксированных постоянных граничных условиях $s_t\equiv k$, $t\notin\Lambda$, рассматриваемая модель является контурной моделью. Маркой контура будем считать набор $\varkappa$, $\tilde{\varkappa}\subset\gamma$. Разметку контура определим как класс эквивалентных функций $n(t)\in\mathfrak{N}_\gamma$ (см. начало этого параграфа). В качестве множества $\mathcal{N}$ следует рассмотреть множество всех целых чисел $\mathbf{Z}$. Группа симметрии $G$ есть, очевидно, группа всех целочисленных сдвигов. Обозначим

$$\lambda=\lambda(\varepsilon, \beta)=\int\limits_O \exp\{-\beta 2\nu\tilde{\varphi}(s)\}\,ds=\int\limits_{O_j}\exp\{-\beta 2\nu\tilde{\varphi}(s)\}\,ds, \tag{4.26}$$

$$\exp(-\Phi(\Gamma))=\int\exp\left\{-\beta\left[\sum_{t,t'\in\gamma}\overline{\Phi}(s_t, s_{t'})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{t\in\partial_i\gamma}c_t\tilde{\varphi}(s_t)\right]\right\}k_\varkappa(s)\prod_{t\in\gamma}dx_t, \tag{4.27}$$

где интеграл берется по множеству конфигураций $s$ на $\gamma$ таких, что $k_\varkappa(s)\neq 0$, всякая $t\in\gamma-\tilde{\varkappa}$ является нерегулярной точкой, а для всякой $t\in\partial_i\gamma$ $s_t$ принадлежит окрестности того из минимумов функции $\varphi$, номер которой совпадает со значением функции $n(t')$ для $|t'-t|=1$, $t'\in\gamma$, где $n(t)$ — любая функция из класса эквивалентных функций, являющегося разметкой $\Gamma$ (сказанное корректно в силу наличия симметрии). $I_\gamma$ определяется так же, как в примере 1. Процедура выбора для каждого контура конкретной функции из класса эквивалентных функций, составляющих разметку данного контура, описана в 1; эта процедура определяется требованием согласованности конфигурации размеченных контуров и граничными условиями.

С учетом введенных обозначений, статистическая сумма в объеме $\Lambda$ с граничными условиями $s_t\equiv k$, $t\notin\Lambda$, равна

$$\Xi_{\text{разм},k}(\Lambda)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}_{\text{разм}}(\Lambda)}\left[\prod_{\Gamma\in\alpha}\exp(-\Phi(\Gamma))\right]\lambda^{\left|\Lambda-\bigcup\limits_{\Gamma\in\alpha}\gamma\right|},$$

где сумма по всевозможным согласованным конфигурациям в $\Lambda$ маркированных размеченных контуров.

Лемма 4. Существует константа $\tau=\tau(\beta)$ такая, что для достаточно больших $\beta$ $\tau(\beta)>\tau_0$ и

$$\sum_{(\varkappa,n)\in I_\gamma}\exp(-\Phi(\Gamma))\leqslant\exp(-\tau|\gamma|)\lambda^{|\gamma|}. \tag{4.28}$$

Доказательство. Положим, как и прежде, $\varepsilon=\beta^{-\omega}$, $0<\omega<\frac{1}{n}$, $\varepsilon$ — диаметр окрестности $O$. В силу симметрии без



ограничения общности, можно считать, что сумма по всевозможным разметкам есть сумма по всевозможным функциям $n(t)\in\mathfrak{N}_\gamma$ таким, что $n^{\text{ext}}=0$. Всевозможных марок $\varkappa$ не более чем $\text{const}^{|\gamma|}$, поэтому оценку достаточно доказать при фиксированном $\varkappa$. Зафиксируем произвольное $B\subset\gamma$, $B\supset\gamma-\tilde{\varkappa}$, и обозначим $S(\varkappa, B)$ множество конфигураций $s$ на $\gamma$ таких, что $k_\varkappa(s)\neq 0$, множество нерегулярных точек совпадает с $B$, всякая $t\in\partial_i\gamma$ принадлежит $O\cup\left(\bigcup\limits_j O_j\right)$, причем для любых $t_1$, $t_2\in\partial_i\gamma$, для которых существует $t'\in\operatorname{Int}\gamma$, $|t_1-t'|=1$, $|t_2-t'|=1$, $s_{t_1}$ и $s_{t_2}$ принадлежат одной и той же окрестности, а для $t\in\partial_i\gamma$ такой, что существует $t'\in\operatorname{Ext}\gamma$, $|t-t'|=1$ $s_t\in O$. Тогда $\sum\limits_{n:n^{\text{ext}}=0}\exp(-\Phi(\Gamma))$ есть сумма по всевозможным $B\subset\gamma$ интегралов (4.27) по множествам $S(\varkappa, B)$.

Докажем необходимую оценку при фиксированном $B$. Воспользуемся оценкой, аналогичной (4.13) для пар $(t, t')\in\varkappa$, $t\in B$, $t'\in\gamma-B$, (либо наоборот), после чего подынтегральная функция разбивается в произведение двух функций, одна из которых зависит от конфигурации на $B$, а другая — на $\gamma-B$. Для каждой 1-связной компоненты $\gamma-B$ $s_t$ принадлежит какой-либо из окрестностей $O_j$, $t\in\gamma-B$, причем номер окрестности $j$ определяется конфигурацией на $B$. Пусть $P\subset\gamma-B$ — какая-либо из 1-связных компонент $\gamma-B$. В силу симметрии, интеграл по $\mathop{\times}\limits_{t\in P}O_j$ не зависит от $j$, поэтому интеграл (4.27) по множеству $S(\varkappa, B)$ не превосходит

$$\left[\int\limits_{\mathop{\times}\limits_{t\in\gamma-B}O}\prod_{\substack{t\in\gamma-B\\ t\notin\partial_i(\gamma-B)}}\exp\{-\beta 2\nu\tilde{\varphi}(s_t)\}\prod_{\substack{t\in\gamma-B\\ t'\in\gamma-B\\ (t,t')\in\varkappa}}k_{tt'}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{t\in\partial_i(\gamma-B)}e^{-\beta\left(2\nu-\frac{b_t}{2}\right)\tilde{\varphi}(s_t)}\,ds_{\gamma-B}\right]\times$$

$$\times\left[\int\limits_{S_B}\exp\left\{-\beta\sum_{\substack{t,t'\in B\\ |t-t'|=1\\ (t,t')\notin\varkappa}}\overline{\Phi}(s_t, s_{t'})\right\}\times\right.$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{t,t'\in B\\ |t-t'|=1\\ (t,t')\in\varkappa}}(\tilde{\varphi}(s_t)+\tilde{\varphi}(s_{t'}))\right\}\prod_{t\in\partial_i B}\times$$

$$\left.\times\exp\left\{-\beta\left(2\nu-\frac{b_t}{2}\right)\tilde{\varphi}(s_t)\right\}ds_B\right]. \tag{4.29}$$

Здесь мы воспользовались (4.13) для пар $(t, t')\in\varkappa$, $t\in B$ $t'\in B$; $b_t$, как и в примере 1, для $t\in B$ есть число $t'$ таких, что $(t, t')\in\varkappa$, $t'\notin B$; для $t\in\partial_i(\gamma-B)$ $b_t$ есть число $t'$ таких, что $(t, t')\in\varkappa$, $t'\notin\gamma-B$; $S_B$ есть ограничение множества конфигураций $S(\varkappa, B)$ на $B$, а $ds_B$ есть мера Лебега на $(\mathbb{R}^1)^B$. Заметим, что множество конфигураций $S_B$ обладает следующим свойством: для $t\in\partial_i B$ $s_t\in O_j$ для какого-либо $j$, причем если $t$, $t'\in\partial_i B$ находятся на расстоянии 1 от одной и той же 1-связной компоненты $\gamma-B$, то $s_t$ и $s_{t'}$ принадлежат окрестности с одним и тем же номером $j$. Кроме того, для $t\in\partial_i B$, находящейся на расстоянии 1 от $\operatorname{Ext}\gamma$ либо от той 1-связной компоненты $\gamma-B$, которая находится на расстоянии 1 от $\operatorname{Ext}\gamma$, $x_t\in O$. Первая скобка в (4.29) оценивается в точности так же, как интеграл в (4.12) в примере 1. Оценка имеет вид:

$$e^{-\tau|\gamma-B|}\lambda^{|\gamma-B|}. \qquad (4.30)$$

Оценим вторую скобку. Среди множества пар $(t, t')$, $t\in B$, $t'\in B$, $|t-t'|=1$, фиксируем подмножество $R$ такое, что для всякой $t\in B$ найдется $(t, t')\in R$, и рассмотрим множество $S_B(R)\subset\subset S_B$ конфигураций, для которых $R$ совпадает с множеством пар $(t, t')$ таких, что $(s_t, s_{t'})\notin Q$. Очевидно, достаточно оценить интеграл по $S_B(R)$. Зафиксируем некоторое число $\delta$, $2\varepsilon<\delta<<1-2\varepsilon$. Зафиксируем произвольное $M\subset R$ и пусть $S_B(R, M)\subset\subset S_B(R)$ — подмножество конфигураций таких, что $|s_t-s_{t'}|>\delta$ в том и только в том случае, когда $(t, t')\in M$. Перейдем в интеграле по множеству $S_B(R, M)$ к новым переменным: $\{u_{tt'}=s_t-s_{t'}\}$, $|t-t'|=1$ либо $t$, $t'$ находятся на расстоянии 1 от одной и той же 1-связной компоненты множества $\gamma-B$ и $u_t=s_t$ для $t\in\partial_i B$, находящихся на расстоянии 1 от $\operatorname{Ext}\gamma$, либо от той 1-связной компоненты $\gamma-B$, которая находится на расстоянии 1 от $\operatorname{Ext}\gamma$. Интеграл лишь увеличится, если по каждой из переменных $u_{tt'}$, $u_t$ мы проинтегрируем независимо. При этом если $(t, t')\notin R$, то $|u_{tt'}|\leqslant\varepsilon$, если $(t, t')\in R-M$, то $|u_{tt'}|\leqslant\delta$, а если $t$, $t'$ находятся на расстоянии 1 от одной и той же 1-связной компоненты множества $\gamma-B$, то $s_t$ и $s_{t'}$ принадлежат одной и той же окрестности и, следовательно, $|u_{tt'}|\leqslant\varepsilon$. Кроме того, оценим во второй скобке (4.29) подынтегральную функцию следующим образом:

$$\exp\{-\beta\overline{\Phi}(s_t, s_{t'}\}\leqslant\begin{cases}1 \text{ для } (t, t')\notin R,\\ \exp\left\{-\dfrac{\beta}{m}\psi(s_t-s_{t'})\right. \text{ для } (t, t')\in M,\\ \exp\{-\beta c\varepsilon^n\} \text{ для } (t, t')\in R-M.\end{cases} \qquad (4.31)$$

Во втором случае мы воспользовались тем, что $\varphi(s)\geqslant 0$, а для $(t, t')\in R-M$ $|s_t-s_{t'}|<\delta$, но $(s_t, s_{t'})\notin Q$ и поэтому либо $s_t$, либо $s_{t'}$ не принадлежит $O\cup(\bigcup_j O_j)$ и, следовательно, $\varphi(s_t)$



(либо $\varphi(s_{t'})$) не меньше, чем $C\varepsilon^n$. С учетом (4.31), интеграл по множеству $S_B(R, M)$ не превосходит

$$\exp(\{-c\beta^{1-n\omega}\}|R-M|)\prod_{(t,t')\in M}\int\limits_{(-\infty,-\delta)\cup(\delta,\infty)}\exp\{-\beta\psi(u_{tt'})\}du_{t-t'}\leqslant$$

$$\leqslant\exp(\{-c\beta^{1-n\omega}\}|R-M|)(F(\beta))^{|M|}. \qquad (4.32)$$

Отметим, что $|R-M|+|M|=|R|\geqslant|B|/2$, поскольку для каждой нерегулярной точки $t$ существует $t'$, $|t'-t|=1$, такая, что $(s_t, s_{t'})\notin Q$. Так же, как в примере 1, имеет место оценка:

$$\lambda\geqslant c\beta^{-1/n}.$$

Поэтому правая часть (4.32), умноженная на $\lambda^{-|B|}$, не превосходит

$$(c\beta^{2/n}e^{-c\beta^{1-n\omega}})^{|R-M|}(c\beta^{2/n}F(\beta))^{|M|}\leqslant e^{-\tau|B|} \qquad (4.33)$$

для достаточно больших $\beta$. Поскольку число способов выбрать $R$ и $M$ не превосходит $(C(\nu))^{|\gamma|}$, где $C(\nu)$ — константа, зависящая от размерности, то неравенство (4.33) вместе с (4.30) завершает доказательство леммы 4.

Теорема 5. Существует $\beta_0>0$ такое, что для любого $\beta>\beta_0$ для моделей, описанных в примерах I и II, существует кластерное разложение для корреляционных функций. Более того, это кластерное разложение экспоненциально регулярно (см. [5]).

Доказательство. Для доказательства теоремы мы, воспользовавшись корреляционными уравнениями, выпишем в явном виде кластерное разложение.

Пусть $\alpha$ — согласованная конфигурация маркированных размеченных контуров, $\rho_\Lambda(\alpha)$ — корреляционная функция ансамбля (3.3) при наличии симметрии:

$$\rho_\Lambda(\alpha)=\Xi^{-1}_{\text{разм}}(\Lambda)\sum_{\substack{\alpha'\supset\alpha\\ \alpha'\in\mathfrak{A}_{\text{разм}}(\Lambda)}}\lambda^{|\Lambda-\bigcup_{\Gamma\in\alpha'}\gamma|}\prod_{\Gamma\in\alpha'}e^{-\Phi(\Gamma)}.$$

Корреляционные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases}\rho_\Lambda(\alpha)=\dfrac{\exp\{-\Phi(\Gamma_1(\alpha))\}}{\lambda^{|\gamma_1(\alpha)|}}\sum\limits_{\sigma}(-1)^{|\sigma|}\rho_\Lambda(\alpha-\Gamma_1(\alpha)\cup\sigma),\\ \rho_\Lambda(\varnothing)=1.\end{cases} \qquad (4.34)$$

Здесь $\Gamma_1(\alpha)$ — какой-либо (заранее выбранный) внешний контур конфигурации $\alpha$, суммирование ведется по всевозможным конфигурациям $\sigma$ (включая пустую) таким, что для всякого $\Gamma'\in\sigma$ $(\gamma'\cup\partial_e\gamma')\cap\gamma_1(\alpha)\neq\varnothing$. Вывод уравнений (4.34) полностью аналогичен описанному в § 2 для маркированных контуров. Аналогично лемме 1 (см. также [5]) можно доказать, что при выполнении оценок (4.10) или, соответственно, (4.28) существует единственное решение $\rho(\alpha)$ корреляционных уравнений в бесконечном объеме, причем $\rho_\Lambda(\alpha)\to\rho(\alpha)$ при $\Lambda\nearrow \mathbf{Z}^\nu$. Выпишем явное решение корреляционных уравнений в бесконечном объеме в виде ряда. Полагая в (4.34) $\Lambda=\mathbf{Z}^\nu$ и итерируя систему, получим:

$$\rho(\alpha)=\sum_w a_w, \tag{4.35}$$

где суммирование ведется по всевозможным конечным последовательностям $w=(\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_n)$ конфигураций маркированных размеченных контуров таким, что

$$\begin{aligned}
&1)\ \sigma_1=\alpha;\\
&2)\ \sigma_j\neq\varnothing \text{ для } j<n;\ \sigma_n=\varnothing;\\
&3)\ \sigma_{j+1}\supset\sigma_j-\Gamma_1(\sigma_j);\\
&4)\ \text{для каждого } \Gamma\in(\sigma_{j+1}-(\sigma_j-\Gamma_1(\sigma_j)))\ (\gamma\cup\partial_e\gamma)\cap\gamma_1(\sigma_j)\neq\varnothing;
\end{aligned}\tag{4.36}$$

$$a_w=\prod_{j=1}^{n-1}\left[(-1)^{|\sigma_{j+1}-(\sigma_j-\Gamma_1(\sigma_j))|}\frac{\exp\{-\Phi(\Gamma_1(\sigma_j))\}}{\lambda^{|\gamma_1(\sigma_j)|}}\right]. \tag{4.37}$$

Докажем, что при выполнении (4.10) (соответственно, (4.28)) ряд (4.35) абсолютно сходится. Рассмотрим вектор $r=r(w)=(r_1^{(1)}, r_1^{(2)},\ldots, r_n^{(1)}, r_n^{(2)})$, где

$$r_j^{(1)}=|\gamma_1(\sigma_j)|,$$

$$r_j^{(2)}=\sum_{\Gamma\in\sigma_{j+1}-(\sigma_j-\Gamma_1(\sigma_j))}|\gamma|.$$

Обозначим $\overline{w}$ последовательность конфигураций геометрических контуров, удовлетворяющую условиям 1)—4). Тогда

$$\sum_{w:\overline{w}}|a_w|=\prod_j\sum_{(\varkappa,n)\in I\gamma_1(\sigma_j)}\frac{\exp\{-\Phi(\Gamma_1(\sigma_j))\}}{\lambda^{|\gamma_1(\sigma_j)|}}. \tag{4.38}$$

В левой части суммирование ведется по всевозможным последовательностям $w$ конфигураций маркированных размеченных контуров, отвечающим последовательности $\overline{w}$. Воспользовавшись (4.10), (4.28), оценим правую часть (4.38)

$$\prod_j 2e^{-\tau|\gamma_1\sigma_j)|}\leqslant(2e^{-\tau})^{\sum_j r_j^{(1)}}. \tag{4.39}$$

Заметим, что число всевозможных $\overline{w}$, отвечающих фиксированному вектору $r$, не превосходит $C^{\sum_j(r_j^{(1)}+r_j^{(2)})}$ для некоторой константы $C$ (зависящей лишь от $\nu$). Кроме того, из условий (4.36) следует, что $\sum_j r_j^{(2)}\leqslant\sum_j r_j^{(1)}$. Отсюда, учитывая (4.38) и (4.39), получаем



$$\sum_w|a_w|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r:\ \sum r_j^{(1)}=k}(Ce^{-\tau})^{\sum r_j^{(1)}}\leqslant Ce^{-\tau}.$$

Обозначим $\tilde{w}=\bigcup_{\sigma_j\in w}\gamma_1(\sigma_j)$. Положим для любого конечного $R\subset\mathbf{Z}^\nu$

$$b_R(\alpha)=\sum_{w:\tilde{w}=R}a_w, \tag{4.40}$$

где суммирование по всевозможным $w$, удовлетворяющим (4.36) и таким, что $\tilde{w}=R$. Коэффициенты $b_R^{(\Lambda)}(\alpha)$ определяются аналогичным образом из ряда, соответствующего разложению корреляционных функций $\rho_\Lambda(\alpha)$ в объеме $\Lambda$. Существование кластерного разложения следует из абсолютной сходимости ряда (4.35). Докажем теперь экспоненциальную регулярность полученного кластерного разложения. Заметим, что для любого $R\subset\mathbf{Z}^\nu$

$$|b_R(\alpha)|\leqslant(Ce^{-\tau})^{|R|}. \tag{4.41}$$

Это неравенство доказывается так же, как и сходимость ряда (4.35).

Обозначим $\tilde{\alpha}=\bigcup_{\Gamma\in\alpha}\gamma$. Заметим, что, в силу (4.40), $b_R(\alpha)\neq0$, лишь если $R\supset\tilde{\alpha}$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2\in\mathfrak{A}^0_{\text{разм}}$, причем $(\tilde{\alpha}_1\cup\partial_e\tilde{\alpha}_1)\cap\tilde{\alpha}_2=\varnothing$. Рассмотрим коэффициент $b_R(\alpha_1\cup\alpha_2)$ в разложении $\rho(\alpha_1\cup\alpha_2)$. Из (4.41) следует неравенство

$$\Big|b_R(\alpha_1\cup\alpha_2)-\sum_{\substack{R_1\supset\tilde{\alpha}_1, R_2\supset\tilde{\alpha}_2\\ R_1\cup R_2=R\\ R_1\cap R_2=\varnothing}}b_{R_1}(\alpha_1)\,b_{R_2}(\alpha_2)\Big|\leqslant(Ce^{-\tau})^{|R|}. \tag{4.42}$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ систему всевозможных пар ближайших соседей $\mathcal{M}=\{(t, t');\ |t-t'|=1\}$, а через $\delta_R(\mathcal{M}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ мощность наименьшего набора $\varkappa$ множеств из $\mathcal{M}$ такого, что $\tilde{\varkappa}=R$ и набор множеств $(\varkappa, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ является связным. Набор множеств $(A_1, \ldots, A_n)$ называется связным, если для любых $A_l$, $A_m$ существует последовательность множеств из набора $A_{l_1}=A_l$, $A_{l_2}, \ldots, A_{l_p}=A_m$ таких, что $A_{l_j}\cap A_{l_{j+1}}\neq\varnothing$, $j=1, \ldots, p-1$.

Если существует набор $\varkappa\subset\mathcal{M}$ такой, что $\tilde{\varkappa}=R$, и набор $\{\varkappa, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2\}$ связен, то, очевидно,

$$c_1|R|\leqslant\delta_R(\mathcal{M}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)\leqslant c_2|R|.$$

для некоторых $c_1$ и $c_2$. Следовательно, в этом случае экспоненциальная регулярность следует из (4.42). В случае же, когда не существует набора $\varkappa \subset \mathscr{M}$ такого, что $\tilde{\varkappa} = R$, и набор $(\varkappa, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ связен, $R$ единственным образом представимо в виде объединения $R = R_1 \cup R_2$; $R_1 \cap R_2 = \varnothing$; $R_1 \supset \tilde{\alpha}_1$, $R_2 \supset \tilde{\alpha}_2$. Нетрудно убедиться, воспользовавшись (4.37) и (4.40) для $b_R(\alpha_1 \cup \alpha_2)$; $b_{R_1}(\alpha_1)$ и $b_{R_2}(\alpha_2)$, что

$$b_R(\alpha_1 \cup \alpha_2) = b_{R_1}(\alpha_1) \cdot b_{R_2}(\alpha_2),$$

что вместе с (4.42) завершает доказательство экспоненциальной регулярности кластерного разложения. Теорема 5 доказана.

## § 5. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Пусть $S = [0, 1] \subset R^1$. Рассмотрим семейство гиббсовских случайных полей в объеме $\Lambda$ со значениями в $S$, задаваемое $(N-1)$-параметрическим семейством потенциалов $\Phi(s_1, s_2, \mu_1, \ldots, \mu_{N-1})$, определенных для $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{N-1}) \in U \subset \mathbf{R}^{N-1}$, меняющихся в малой окрестности нуля в $R^{N-1}$. Мы предполагаем, что семейство $\Phi(s_1, s_2, \mu)$ удовлетворяет следующим условиям.

1. Функция $\Phi(s_1, s_2, \mu)$, $s_1, s_2 \in S$, $\mu \in U$, является достаточно гладкой функцией всех своих переменных.

2. При $\mu = 0$ функция $\Phi(s_1, s_2, 0)$ имеет $N$ абсолютных минимумов в точках, расположенных на диагонали квадрата $S \times S$:

$$\Phi(\xi_i, \xi_i, 0) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \quad 0 \leqslant \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_N \leqslant 1,$$

$$\Phi(s_1, s_2, 0) > 0 \text{ при } (s_1, s_2) \neq (\xi_i, \xi_i).$$

3. В любой точке минимума $(\xi_i, \xi_i)$ второй дифференциал функции $\Phi(s_1, s_2, 0)$ строго положителен. При этом

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_{s_1 = s_2 = \xi_i} \right| < \eta \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_1^2} \Big|_{s_1 = s_2 = \xi_i}, \tag{5.1}$$

где $\eta$ достаточно малая константа.

4. В точках $(\xi_i, \xi_i)$ дифференциалы функции $\Phi(\xi_i, \xi_i, \mu)$ при $\mu = 0$ отличны от нуля.

Для каждого $\mu \in U$ и $\beta > 0$ семейство потенциалов $\Phi(s_1, s_2, \mu)$ порождает некоторую непустую совокупность предельных распределений Гиббса (см., например, [14]). Наш основной результат заключен в следующей теореме.

Теорема 6. При введенных выше предположениях относительно семейства потенциалов $\Phi(s_1, s_2, \mu)$ для любого достаточно большого значения $\beta$ существует точка $\mu_0 = \mu_0(\beta) \in U$ такая, что у системы, описываемой потенциалом $\Phi(s_1, s_2, \mu_0)$, существует, по крайней мере, $N$ различных предельных распределений Гиббса.



Доказательство. Покажем, что рассматриваемая модель является моделью размеченных маркированных контуров. Рассмотрим $\delta(\beta) = \beta^{-1}$ и будем предполагать, что $\mu \in U_{\delta(\beta)}(0) \subset \subset \mathbf{R}^{N-1}$. Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_1^2} \Big|_{(\xi_i, \xi_i, 0)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_2^2} \Big|_{(\xi_i, \xi_i, 0)} = c_i,$$

$$\frac{1}{2} \sim \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_{(\xi_i, \xi_i, 0)} = b_i,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu_j} \Big|_{(\xi_i, \xi_i, 0)} = d_{ji}, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu_j \partial s_1} \Big|_{(\xi_i, \xi_i, 0)} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu_j \partial s_2} \Big|_{(\xi_i, \xi_i, 0)} = h_{ji}.$$

Воспользовавшись гладкостью $\Phi$, представим ее в окрестности точки $(\xi_i, \xi_i, 0)$ в виде

$$\Phi(s_1, s_2, \mu) = c_i [(s_1 - \xi_i)^2 + (s_2 - \xi_i)^2] + b_i (s_1 - \xi_i)(s_2 - \xi_i) + \\ + \sum_{j=1}^{N-1} d_{ji} \mu_j + \sum_j h_{ji} \mu_j [(s_1 - \xi_i) + (s_2 - \xi_i)] + \tilde{\Phi}(s_1, s_2, \mu). \tag{5.3}$$

Фиксируем некоторое $\omega$, $0 < \omega < \frac{1}{2}$. Пусть $O_1 = [\xi_1 - \beta^{-\omega}, \xi_1 + \beta^{-\omega}] \subset \mathbf{R}^1$. Пусть $O_i = [\xi_i - C^{(i)} \beta^{-\omega}, \xi_i + C^{(i)} \beta^{-\omega}]$, $i = 2, \ldots, N$. Выберем константы $C^{(i)}$ таким образом, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\int_{\xi_1 - \beta^{-\omega}}^{\xi_1 + \beta^{-\omega}} \exp\{-\beta c_1 2\nu (s - \xi_1)^2\} \, ds = \\ = \int_{\xi_i - C^{(i)} \beta^{-\omega}}^{\xi_i + C^{(i)} \beta^{-\omega}} \exp\{-\beta c_i 2\nu (s - \xi_i)^2\} \, ds. \tag{5.4}$$

Обозначим $Q = \left( \bigcup_{j=1}^{N} (O_j \times O_j) \right) \subset [0, 1] \times [0, 1]$. Обозначим

$$\psi(s_1, s_2, \mu) = \eta c_i [(s_1 - \xi_i)^2 + (s_2 - \xi_i)^2] + b_i (s_1 - \xi_i)(s_2 - \xi_i) + \\ + \sum_{j=1}^{N-1} h_{ij} \mu_j ((s_1 - \xi_i) + (s_2 - \xi_i)) + \tilde{\Phi}(s_1, s_2, \mu), \tag{5.5}$$

если $(s_1, s_2, \mu) \in O_i \times O_i \times U_\delta(0)$. При этом $\tilde{\Phi}(s_1, s_2, \mu) = o(\psi(s_1, s_2, \mu)) - \tilde{\Phi}(s_1, s_2, \mu)$ при $\mu \to 0$, $s_1 \to \xi_i$, $s_2 \to \xi_i$.

Обозначим

$$f(\mu)=\min_{(s_1, s_2)\in Q} \psi(s_1, s_2, \mu). \tag{5.6}$$

Введем, далее, следующие обозначения:

$$\varphi(s, \mu)=$$
$$=\begin{cases}(1-2\eta)\, c_i(s-\xi_i)^2+\frac{1}{2}\sum d_{ji}\mu_j+\frac{1}{2} f(\mu), & \text{если } s\in O_i,\\ 0, & \text{если } s\notin \bigcup\limits_i O_i;\end{cases} \tag{5.7}$$

$$\overline{\Phi}(s_1, s_2, \mu)=\begin{cases}\varphi(s_1, \mu)+\varphi(s_2, \mu), & \text{если } (s_1, s_2)\in Q,\\ \Phi(s_1, s_2, \mu), & \text{если } (s_1, s_2)\notin Q;\end{cases} \tag{5.8}$$

$$\overline{\psi}=\begin{cases}\psi(s_1, s_2, \mu)-f(\mu)+\\ +\eta c_i[(s_1-\xi_i)^2+(s_2-\xi_i)^2], & \text{если } (s_1, s_2)\in Q,\\ 0, & \text{если } (s_1, s_2)\notin Q.\end{cases} \tag{5.9}$$

Таким образом,

$$\Phi(s_1, s_2, \mu)=\overline{\Phi}(s_1, s_2, \mu)+\overline{\psi}(s_1, s_2, \mu)$$

при всех $(s_1, s_2, \mu)$. Заметим, что $\overline{\psi}\geqslant 0$ при всех $(s_1, s_2, \mu)$. Нам по-прежнему, понадобится разложение (4.4). Обозначим

$$e^{\lambda_i(\mu)}=\int_{O_i} \exp\{-\beta 2\nu\varphi(s, \mu)\}\, ds. \tag{5.10}$$

Точку $t\in\Lambda$ назовем регулярной (относительно конфигурации $\{s_t,\ t\in\Lambda\}$), если для любой $t'$: $|t-t'|=1$ $(s_t, s_{t'})\in Q$. В противном случае точка $t$ называется нерегулярной. Класс геометрических контуров $\mathscr{K}$ определим, по-прежнему, как класс множеств, каждое из которых является I-связной компонентой объединения множества нерегулярных точек $B_s$ и $\tilde{\varkappa}$ для какой-нибудь расширенной конфигурации $(s, \varkappa)$. Множество марок контура $\gamma$ есть множество всевозможных наборов $\varkappa$ таких, что $\tilde{\varkappa}\subset\gamma$. Таким образом, всевозможных марок контура $\gamma$ не больше, чем $C^{|\gamma|}$, где $C$ — некоторая константа. Множество $\mathscr{N}$, с помощью которого определяется разметка контура, состоит из $N$ элементов, каждый из которых соответствует одному из минимумов функции $\Phi(s_1, s_2, 0)$: $\mathscr{N}=\{1, \ldots, N\}$. С учетом введенных определений и обозначений статистическую сумму в объеме $\Lambda$ с граничными условиями $s_i\equiv\xi_i$, $t\notin\Lambda$ можно представить в виде

$$\Xi_{\Lambda, i}=\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{A}_{\text{разм}}(\Lambda):\\ \alpha^{\text{ext}}\in\mathfrak{A}^{\text{ext}, i}_{\text{разм}}(\Lambda)}} \prod_{\Gamma\in\alpha} e^{-\Phi(\Gamma)} \prod_{n\in\mathscr{N}} e^{\lambda_n(\mu)\,|I_n(\alpha)\cap\Lambda|}, \tag{5.11}$$

где сумма по всевозможным согласованным конфигурациям размеченных маркированных контуров с внешней разметкой $n^{\text{ext}}_{\alpha}=i$, и по определению



$$e^{-\Phi(\Gamma)}=e^{-\Phi(\Gamma, \beta, \mu)}=\int_{S_\Gamma} \exp\Bigg\{-\beta \sum_{\substack{t, t'\in\gamma\\ |t-t'|=1}} \overline{\Phi}(s_t, s_{t'}, \mu)\Bigg\} k_{\varkappa(\Gamma)}\times$$
$$\times\prod_{t\in\partial_i\gamma} \exp\{-\beta c_t\varphi(s_t)\} \prod_{t\in\gamma} ds_t. \tag{5.12}$$

Здесь $c_t$ есть мощность множества $\{t'\notin\gamma,\ |t'-t|=1\}$, а $S_\Gamma$ есть множество конфигураций на $\gamma$ таких, что $\Gamma=(\gamma, \varkappa, n)$ является размеченным маркированным контуром, где $\varkappa$ и $n$ фиксированы. В отличие от примеров I и II, рассмотренных в § 4, $k_\varkappa$ может быть и отрицательным, поэтому вес $\Phi(\Gamma\ \beta, \mu)$ следует считать комплексным.

Мы докажем теперь выполнение предположений (3.14)—(3.18) относительно веса $\Phi(\Gamma, \beta, \mu)$ и последовательности $\{\lambda_n(\mu)\}$, $n=1, \ldots, N$. Утверждение основной теоремы будет следовать тогда из теорем 1—4.

При $\mu=0$ последовательность $\lambda_n(\beta, 0)$ постоянна, в силу нашего выбора окрестностей $O_n$. Положим $\tau(\beta)=\frac{1}{2}\ln\beta$. Тогда оценка (3.17) доказывается в точности как (4.11). При этом $C=e^{-2\nu c_1}$. Из (5.10) и (5.7)

$$q_i(\mu)=\lambda_i(\mu)-\lambda_N(\mu)=-\beta\nu\sum_j (d_{ji}-d_{jN})\,\mu_j.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial q_i(\mu)}{\partial\mu_j}=\beta\nu(d_{jN}-d_{ji})$$

И норма матрицы $\|\partial q_i/\partial\mu_j\|^{-1}$ не превосходит $k_0\beta^{-1}$, где $k_0$ некоторая константа (зависящая от $\nu$). Таким образом, условие (3.18) выполнено.

Лемма 5.

$$|\exp\{-\Phi(\Gamma, \beta, \mu)\}|\leqslant(\eta\exp(-\tau(\beta)))^{|\gamma|},$$

где $\eta$ — достаточно малая константа.

Доказательство. В силу того, что $\overline{\psi}\geqslant 0$,

$$|k_{tt'}|=|\exp\{-\beta\overline{\psi}\}-1|\leqslant 2. \tag{5.13}$$

Фиксируем множество $B\subset\gamma$ такое, что $\gamma-B\subset\tilde{\varkappa}$, и оценим интеграл (5.12) по множеству конфигураций $S_\Gamma(B)\subset S_\Gamma$ таких, что множество нерегулярных точек совпадает с $B$. Воспользуемся оценкой (5.13) для $(t, t')$ таких, что $t\in B$, $t'\in\gamma-B$ либо $t\in\gamma-B$, $t'\in B$, после чего подынтегральная функция представляется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит лишь от конфигурации на $B$, а другая — на $\gamma-B$.

Дальнейшие рассуждения полностью повторяют рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 3. При этом используются следующие оценки.

1. Пусть $(s_1, s_2)\notin Q$. Тогда

$$\Phi(s_1, s_2, \mu)=\Phi(s_1, s_2, 0)+\sum_j d_{j,(s_1,s_2)}\mu_j+o(\sum\mu_j),$$

где

$$d_{j,(s_1,s_2)}=\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_j}\bigg|_{(s_1,s_2,0)}.$$

Поскольку $(s_1, s_2)\notin Q$, то $\Phi(s_1, s_2, 0)\geqslant C\beta^{-2\omega}$, где $C$ — некоторая константа. Но так как $|\Phi(s_1, s_2, \mu)-\Phi(s_1, s_2, 0)|\leqslant \mathrm{const}\,\beta^{-1}$, то существует константа $c'$ такая, что

$$\Phi(s_1, s_2, \mu)\geqslant c'\beta^{-2\omega}. \tag{5.14}$$

2. Пусть $|s_t-\xi_i|\leqslant M\beta^{-1/2}$ и $|s_{t'}-\xi_i|\leqslant M\beta^{-1/2}$. Тогда

$$|k_{tt'}|\leqslant\beta\overline{\psi}(s_t, s_{t'}, \mu).$$

Но $\psi(s_t, s_{t'}, \mu)\leqslant\eta'\beta^{-1}$, где $\eta'$ достаточно мало. Это следует из (5.5) и того, что $|b_i|\leqslant\eta c_i$, где $\eta$ достаточно мало. Далее, в силу (5.6), $|f(\mu)|\leqslant\eta'\beta^{-1}$ и, следовательно, $|\overline{\psi}|\leqslant\eta\beta^{-1}$, где $\eta$ мало. Итак, $|k_{tt'}|\leqslant\eta$.

3.

$$\int\limits_{\xi_i-M\beta^{-1/2}}^{\xi_i+M\beta^{-1/2}}\exp\{-\beta2\nu\varphi(s, \mu)\}\,ds\leqslant K_1\beta^{-1/2} \tag{5.15}$$

для любого $i=1, \ldots, N$,

где $K_1$ — некоторая константа (зависящая от $\nu$ и $M$).

4.

$$\int\limits_{M\beta^{-1/2}\leqslant|s-\xi_i|\leqslant C^{(i)}\beta^{-\omega}}\exp\{-\beta\nu\varphi(s, \mu)\}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant K_2\int\limits_{M\beta^{-1/2}}^{\infty}\exp\{-\beta\nu c_i s^2\}\,ds=K_3\beta^{-1/2}\int\limits_{M\sqrt{\nu c_i}}^{\infty}e^{-y^2}dy\leqslant$$

$$\leqslant\beta^{-1/2}r(M), \tag{5.16}$$

где $r(M)\to0$ при $M\to\infty$.

Лемма 6. Существует $k=k(\beta)$ такое, что

$$|\exp\{-\Phi(\Gamma, \beta, \mu)\}|\geqslant\exp\{-K(\beta)\,|\gamma|\}.$$

Доказательство. В силу того, что для любых $(t, t')$, $s_t$ и $s_{t'}$ $k_{tt'}\leqslant0$, подынтегральная функция в (5.12) знакопо-



стоянна, и мы можем оценивать интеграл от модуля этой функции. Поскольку существует константа $C_\Phi$ такая, что

$$|\overline{\Phi}(s_1, s_2, \mu)|\leqslant C_\Phi \quad \text{и} \quad |\varphi(s, \mu)|\leqslant C_\Phi,$$

то

$$\exp\left\{-\beta\left[\sum_{\substack{(t,t')\\ t\in\gamma,t'\in\gamma}}\overline{\Phi}(s_t, s_{t'})+\sum_{t\in\partial_i\gamma}c_t\varphi(s_t)\right]\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\exp\{-\beta(C_\Phi2\nu|\gamma|+C_\Phi|\partial_i\gamma|\cdot2\nu)\}\geqslant\exp\{-\beta C_\Phi4\nu|\gamma|\}.$$

Таким образом,

$$\exp\{-\Phi(\Gamma, \beta, \mu)\}\geqslant\exp\{-\beta C_\Phi4\nu|\gamma|\}\int\limits_{S_\Gamma}|k_\varkappa|. \tag{5.17}$$

Множество конфигураций $S_\Gamma$ можно представить в следующем виде:

$$S_\Gamma=\sum_R\Big(\Big(\mathop{\times}_{t\in\tilde\varkappa}O_{R(t)}\Big)\times S_{\gamma-\tilde\varkappa,R}\Big).$$

Здесь сумма берется по всевозможным функциям $R$ на $\tilde\varkappa$ со значениями в множестве $\mathcal{N}$ таким, что существует хоть одна конфигурация $s\in S_\Gamma$, для которой $s_t\in O_{R(t)}$ для всех $t\in\tilde\varkappa$. $S_{\gamma-\tilde\varkappa,R}$ обозначает множество конфигураций на $\gamma-\tilde\varkappa$ таких, что всякая $t\in\gamma-\tilde\varkappa$ является нерегулярной и, кроме того, если существует $t'$: $|t'-t|=1$ и $t'\notin\gamma-\tilde\varkappa$, то $s_t$ принадлежит той же окрестности $O_i$, что и $s_{t'}$. Зафиксируем какую-нибудь $R$. Тогда

$$\int\limits_{S_\Gamma}|k_\varkappa|\geqslant\int\limits_{\left(\mathop{\times}_{t\in\tilde\varkappa}O_{R(t)}\right)\times S_{\gamma-\tilde\varkappa,R}}|k_\varkappa|. \tag{5.18}$$

Обозначим

$$L=\min_{t\in\mathcal{N}}\min(c_t, C^{(t)}).$$

Проинтегрировав (5.18) по переменным $s_t$, $t\in\gamma-\tilde\varkappa$, получим оценку

$$(L\beta^{-\omega})^{|\gamma-\tilde\varkappa|}\int\limits_{\mathop{\times}_{t\in\tilde\varkappa}O_{R(t)}}|k_\varkappa|, \tag{5.19}$$

поскольку $S_{\gamma-\tilde\varkappa,R}$ содержит множество конфигураций таких, что для каждой $t\in\gamma-\tilde\varkappa$ $s_t\in O_{i(t)}$ для некоторого фиксированного набора $\{i(t)\}$, $i(t)\in\mathcal{N}$, $t\in\gamma-\tilde\varkappa$.

Оценим теперь $k_{|\varkappa|}$.

$$|k_{tt'}| \geqslant \frac{1}{2}\beta\bar{\psi} \geqslant \frac{1}{2}\beta\eta L((s_t-\xi_i)^2+(s_{t'}-\xi_i)^2)$$

для $(s_t, s_{t'}) \in O_i$, в силу (5.9) и того, что $\psi(s_1, s_2, \mu) - f(\mu) \geqslant 0$. Таким образом,

$$|k_\varkappa| \geqslant \left(\frac{1}{2}\beta\eta L\right)^{|\varkappa|} \prod_{(t,t')\in\varkappa} ((s_t-\xi_{R(t)})^2+(s_{t'}-\xi_{R(t)})^2).$$

Раскроем произведение в сумму, каждое слагаемое (следовательно, и сумма) не меньше, чем

$$\prod_{t\in\tilde{\varkappa}} (s_t-\xi_{R(t)})^{4\nu},$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\times_{t\in\tilde{\varkappa}} O_{R(t)}} |k_\varkappa| \geqslant \left(\frac{1}{2}\beta\eta L\right)^{|\varkappa|} \prod_{t\in\tilde{\varkappa}} \int\limits_{\xi_{R(t)}-C^{(R(t))}\beta^{-\omega}}^{\xi_{R(t)}+C^{(R(t))}\beta^{-\omega}} (s_t-\xi_{R(t)})^{4\nu} ds_t \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{2}\beta\eta L\right)^{|\varkappa|} \left(\frac{2}{4\nu+1} L^{(4\nu+1)} \cdot \beta^{-(4\nu+1)\omega}\right)^{|\tilde{\varkappa}|}.$$

Поскольку $|\tilde{\varkappa}| \leqslant |\gamma|$, эта оценка вместе с (5.19) и (5.17) дает нам $|e^{-\Phi(\Gamma,\beta,\mu)}| \geqslant e^{-\beta c|\gamma|}$ для некоторой константы $C$. Таким образом, лемма 6 доказана; $k(\beta)=c\beta$. Доказательство основной теоремы окончено.

## § 6. ОДНО ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ: КЛАСТЕРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Пусть $S=[-1, 1]\subset\mathbf{R}^1$, а функция $\Phi(s_1, s_2)$ является гладкой в окрестности точки (0, 0) и достигает на $S\times S$ единственного абсолютного минимума в (0, 0); для определенности примем $\Phi(0, 0)=0$. Пусть, кроме того, разложение $\Phi(s_1, s_2)$ в некоторой окрестности (0, 0) имеет вид:

$$\Phi(s_1, s_2) = s_1^2+2\eta s_1 s_2+s_2^2+O(s_1^3+s_2^3), \tag{6.1}$$

$\eta$ — малая константа.

Теорема 7. Существует такое $\beta_0=\beta_0(\Phi, \nu)>0$, что при $\beta>\beta_0$ предельное гиббсовское поле существует, единственно и зависит от $\beta$ аналитически.

Заметим, что теорема 7 может быть перенесена без принципиального изменения основных этапов доказательства на случай, когда $\Phi(s_1, s_2)$ представима в окрестности (0, 0) в виде положительно определенной формы $Q_{2k}(s_1, s_2)=s_1^{2k}+as_1^{2k-1}s_2+ +bs_1^{2k-2}s_2^2+\ldots+bs_1^2s_2^{2k-2}+as_1s_2^{2k-1}+s_2^{2k}$, $k\geqslant 1$, а смешанные



производные $a, b, \ldots$ малы*. Кроме того, можно отказаться от требования гладкости $\Phi$: теорема может быть доказана, например, для случая $\tilde{\Phi}(s_1, s_2)=\Phi(s_1^\lambda, s_2^\lambda)$, где $0<\lambda<1$, а $\Phi$ гладкая.

Остальная часть этого параграфа и § 7 посвящена доказательству теоремы 7. Доказательство проводится в два этапа: сначала утверждение о единственности доказывается при дополнительном предположении о близости граничных условий к основному состоянию, затем это ограничение снимается.

Рассмотрим последовательность объемов $\Lambda\uparrow Z^\nu$ и последовательность функций $S(t)$, $t\in\partial_e\Lambda$ таких, что $|s_t|\leqslant\varepsilon$ для всех $t\in\partial_e\Lambda$ и всех $\Lambda$. Такие функции будем называть $\varepsilon$-граничными условиями. В этом параграфе мы докажем единственность предельного гиббсовского распределения, в случае $\varepsilon$-граничных условий, если, кроме того, $\varepsilon$ таково, что выполнено следующее неравенство:

$$\beta\varepsilon^2 > c_1 \ln\frac{1}{\varepsilon}, \tag{6.2}$$

где $c_1>0$ — некоторая константа (зависящая от $\Phi$ и $\nu$).

Пусть $T\subset\mathbf{Z}^\nu$ — конечное множество, $\tilde{s}_T$ — конфигурация на $T$ и $p_\Lambda(\tilde{s}_T)$ — плотность вероятности конфигурации $\tilde{s}_T$, определяемая гиббсовской мерой в объеме $\Lambda\supset T$:

$$p_\Lambda(\tilde{s}_T) = \Xi_\Lambda^{-1} \int \exp\{-\beta U_\Lambda(s)\}\, d\mu^0_{\Lambda-T}. \tag{6.3}$$

Здесь интегрирование ведется по множеству конфигураций на $\Lambda$, ограничение которых на $T$ совпадает $\tilde{s}_T$, $\Xi_\Lambda$ — статистическая сумма в объеме $\Lambda$.

Мы докажем существование и единственность предела (6.3) при $\Lambda\nearrow\mathbf{Z}^\nu$. Представим квадратичную форму (6.1) в виде

$$s_1^2+2\eta s_1 s_2+s_2^2 = (1-|\eta|)(s_1^2+s_2^2)+|\eta|(s_1+s_2\operatorname{sgn}\eta)^2.$$

Для упрощения изложения далее полагаем $\eta>0$. Обозначим $O_\varepsilon=\{(s_1, s_2)\in S\times S: |s_1|\leqslant\varepsilon,\ |s_2|\leqslant\varepsilon\}$. Введем следующие обозначения:

$$\Phi'(s_1, s_2) = \begin{cases} (1-\eta)(s_1^2+s_2^2) \text{ при } (s_1, s_2)\in O_\varepsilon, \\ \Phi(s_1, s_2) \text{ при } (s_1, s_2)\notin O_\varepsilon; \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\Phi''(s_1, s_2) = \begin{cases} \eta(s_1+s_2)^2 \text{ при } (s_1, s_2)\in O_\varepsilon, \\ 0 \text{ при } (s_1, s_2)\notin O_\varepsilon, \end{cases}$$

$$\Phi''' = \Phi-\Phi'-\Phi''.$$

Таким образом, $\Phi'''=0$ при $(s_1, s_2)\notin O_\varepsilon$. Пусть $\gamma\subset\Lambda$. Сбо-

---

* При анонсировании этого результата [17], теорема 1, допущена неточность, а именно, не указано на малость констант $a, b, \ldots$

значим $S_{\gamma,\Lambda}\subset S^{\Lambda}$ множество конфигураций на $\Lambda$ таких, что $|s_t|>\varepsilon$ при $t\in\gamma$ и $|s_t|\leqslant\varepsilon$ при $t\in\Lambda-\gamma$. Тогда $S^{\Lambda}=\bigcup\limits_{\gamma\subset\Lambda} S_{\gamma,\Lambda}$. Воспользуемся теперь разложением (6.4), а затем для функций $\Phi''$ и $\Phi'''$ разложением (4.4) и запишем плотность (6.3) в виде

$$p_\Lambda(\tilde{s}_T)=\Xi_\Lambda^{-1}\sum_{\gamma,\Gamma,D}\ \int\limits_{S_{\gamma,\Lambda}\bigcap\{s:s_T=\tilde{s}_T\}}\exp\{-\beta U'_\Lambda(s)\}\,k''_\Gamma(s)\,k'''_D(s)\,d\mu^0_{\Lambda-T}. \tag{6.5}$$

Здесь суммирование ведется по всевозможным подмножествам $\gamma\subseteq\Lambda$ и наборам $\Gamma$ и $D$ пар ближайших соседей, а интегрирование ведется по множеству конфигураций из $S_{\gamma,\Lambda}$, совпадающих на $T$ с $\tilde{S}_T$. Интеграл по пустому множеству полагается равным нулю. Для упрощения изложения будем считать $T$ 1-связным множеством. Обозначим для $A\subset Z^\nu$ $A_+=A\bigcup\partial_e A$; $A_-=A-\partial_i A$.

Определение. Связной компонентой $R$ для тройки $(\gamma,\Gamma;D)$ назовем максимальное (в смысле включения) 1-связное множество $R$, для которого выполняется условие

$$T\subseteq R\subseteq T\bigcup\gamma_+\bigcup\tilde{\Gamma}\bigcup D.$$

Отметим, что $\gamma\bigcap\tilde{\Gamma}=\gamma\bigcap\tilde{D}=\varnothing$, поскольку $\Phi''$ и $\Phi'''$ отличны от нуля, лишь если $(s_1,s_2)\in O_\varepsilon$. Кроме того, из данного определения следует, что $|s_t|\leqslant\varepsilon$ для $t\in\partial_i R\bigcup\partial_e R$, и взаимодействие $R$ с $\mathbf{Z}^\nu-R$ осуществляет лишь потенциал $\Phi'$, который, по построению, дает независимость в области, где $|s_t|\leqslant\varepsilon$. Воспользовавшись определением связной компоненты, запишем (6.5) в виде

$$p_\lambda(\tilde{s}_T)=\Xi_\Lambda^{-1}\sum_{R\supseteq T}\ \sum_{(\gamma,\Gamma,D):R\,S_{\gamma,\Lambda}\bigcap\{s:s_T=\tilde{s}_T\}}\int k''_\Gamma(s)\cdot k'''_D(s)\times$$
$$\times\exp\{-\beta U'_\Lambda(s)\}\,d\mu^0_{\Lambda-T},$$

Суммирование ведется по всем 1-связным множествам $R$, $T\subseteq R\subseteq\Lambda_+$, а во внутренней сумме по всевозможным тройкам $(\gamma,\Gamma,D)$, имеющим $R$ своей связной компонентой. Использование условий независимости позволяет каждый из интегралов, фигурирующих в (6.6), записать в виде произведения двух интегралов, соответствующих $R$ и $\Lambda-R$. В самом деле, для $(\gamma,\Gamma,D)$, имеющих $R$ связной компонентой, обозначим $\Gamma_1$ $(D_1)$ максимальный поднабор набора $\Gamma$ (соответственно, $D$) такой, что $\tilde{\Gamma}_1\subset R$ (соответственно, $D_1\subset R$). Обозначим $\gamma_1=\gamma\cap R$, $\gamma_2=\gamma-\gamma_1$, $\Gamma_2=\Gamma-\Gamma_1$, $D_2=D-D_1$. Тогда

$$\int\limits_{S_{\gamma,\Lambda}\bigcap\{s:s_T=\tilde{s}_T\}}\exp\{-\beta U'_\Lambda(s)\}\,k''_\Gamma(s)\,k'''_D(s)\,d\mu^0_{\Lambda-T}=$$



$$=\Bigg[\int\limits_{S_{\gamma_1,R}\bigcap\{s:s_T=\tilde{s}_T\}}k''_{\Gamma_1}(s)\,k'''_{D_1}(s)\exp\Bigg\{-\beta\Bigg[\sum_{\substack{t,t'\in R\\|t-t'|=1}}\Phi'(s_t,s_{t'})+$$
$$+\sum_{t\in\partial_i R}(1-\eta)\,c_t s_t^2\Bigg]\Bigg\}\,d\mu^0_R\Bigg]\times$$
$$\times\Bigg[\int\limits_{S_{\gamma_2,\Lambda-R}}k''_{\Gamma_2}(s)\,k'''_{D_2}(s)\exp\Bigg\{-\beta\Bigg[\sum_{\substack{|t-t'|-1\\(t,t')\bigcap\Lambda-R\neq\varnothing\\(t,t')\bigcap R\neq\varnothing}}\Phi'(s_t,s_{t'})+$$
$$+\sum_{t\in\partial_i(\Lambda-R)-\partial_i\Lambda}c_t(1-\eta)\,s_t^2\Bigg]\Bigg\}\,d\mu^0_{\Lambda-R}\Bigg].$$

Здесь для $t\in\partial_i R$ $c_t$ есть мощность множества $\{t'\notin R:|t-t'|=1\}$, а для $t\in\partial_i(\Lambda-R)-\partial_i\Lambda$ $c_t$ есть мощность множества $(t'\in R:|t-t'|=1\}$. Внутреннюю сумму в (6.6) представим в виде двойного суммирования: по всевозможным $(\gamma_2,\Gamma_2,D_2)$, $\gamma_2\subset\Lambda-R_+$, $\tilde{\Gamma}_2\subset\Lambda-R_+$, $\tilde{D}_2\subset\Lambda-R_+$ и по всевозможным $(\gamma_1,\Gamma_1,D_1)$ таким, что $R$ есть связная компонента для $(\gamma_1,\Gamma_1,D_1)$ и $(\gamma_1)_+\subset R$, $\tilde{\Gamma}_1\subset R$, $\tilde{D}_1\subset R$. Воспользовавшись (6.7) и обозначив сумму по $(\gamma_2,\Gamma_2,D_2)$ интегралов, стоящих в (6.7) во второй скобке, через $\Xi_{\Lambda,R}$, а сумму по $(\gamma_1,\Gamma_1,D_1)$ интегралов, стоящих в (6.7) в первой скобке, через $k^T_R$, получим

$$p_\Lambda(\tilde{s}_T)=\Xi_\Lambda^{-1}\sum_{\Lambda_+\supseteq R\supseteq T}k^T_R\,\Xi_{\Lambda,R}.$$

Заметим, что в случае $R=\varnothing$ $\Xi_{\Lambda,R}=\Xi_\Lambda$. Положим для $R=\Lambda$ $\Xi_{\Lambda,\Lambda}=0$. Обозначим $f_{\Lambda,R}=\Xi_{\Lambda,R}/\Xi_\Lambda$.

Тогда

$$p_\Lambda(\tilde{s}_T)=\sum_{T\subseteq R\subseteq\Lambda_+}k^T_R\,f_{\Lambda,R}. \tag{6.8}$$

Фиксируем для каждого $A\subset\mathbf{Z}^\nu$ некоторую точку $t_A\in\partial_i A$. В случае $A=\varnothing$ $t_A$ можно выбрать произвольно. Рассмотрим $\Xi_{\Lambda,A-t_A}$ и, принимая в определении связной компоненты $T=\{t_A\}$, проделаем преобразования, описанные выше. Получим

$$\Xi_{\Lambda,A-t_A}=\sum_{t_A\in R\subset((\Lambda_+-(A-t_A)_+)\bigcup\{t_A\})}k_R\,\Xi_{\Lambda,A\bigcup R}, \tag{6.9}$$

где

$$k_R=\sum_{(\gamma,\Gamma,D):R}\ \int\limits_{S_{\gamma,R}}\exp\Bigg\{-\beta\Bigg[\sum_{\substack{t,t'\in R\\|t-t'|=1}}\Phi'(s_t,s_{t'})+$$
$$+\sum_{t\in\partial_i R}(1-\eta)\,c_t s_t^2\Bigg]\Bigg\}\,k''_\Gamma(s)\,k'''_D(s)\,d\mu^0_R, \tag{6.10}$$

причем суммирование ведется по всем тройкам $(\gamma, \Gamma, D)$ таким, что $R$ есть связная компонента для них и $\gamma_+ \subset R$, $\tilde{\Gamma} \subset R$, $\tilde{D} \subset R$.

Поскольку $k_{\{t_A\}}$ не зависит от $t_A$, обозначим $h = k_{\{t_A\}}$.

Из (6.9) получим:

$$h \Xi_{\Lambda, A} - \Xi_{\Lambda, A - t_A} + \sum'_{\substack{t_A \in R \subseteq (\Lambda_+ - (A - t_A)_+) \cup \{t_A\} \\ R \neq \{t_A\}}} k_R \Xi_{\Lambda, A \cup R} = 0.$$

Разделив почленно на $\Xi_\Lambda$, получаем так называемые уравнения Кирквуда—Зальцбурга:

$$\begin{cases} h f_{\Lambda, A} - f_{\Lambda, A - t_A} + \sum k_R f_{\Lambda, A \cup R} = 0, & |A| > 1, \\ h f_{\Lambda, A} + \sum k_R f_{\Lambda, A \cup R} = 1, & |A| = 1. \end{cases} \tag{6.11}$$

Рассмотрим банахово пространство $\mathscr{B}$ векторов $f = (f_A)$ с компонентами, занумерованными всеми конечными непустыми $A \subset \boldsymbol{Z}^\nu$; норму в $\mathscr{B}$ зададим так: $\|f\| = \sup_A b^{|A|} |f_A|$, где $0 < b < 1$ некоторая константа, которую мы выберем в зависимости от $\beta$, $\varepsilon$. Мы будем также рассматривать конечномерные подпространства $\mathscr{B}_\Lambda \subset \mathscr{B}$, образованные векторами $f = (f_A)$, для которых $f_A = 0$ при $A \not\subset \Lambda$. Определим операторы $M$ и $K$ в $\mathscr{B}$ следующим образом:

$$Mf = g, \quad g = (g_A), \quad Kf = h, \quad h = (h_A),$$

где

$$g_A = \begin{cases} 0, & |A| = 1, \\ f_{A - t_A}, & |A| > 1, \end{cases} \quad h_A = \sum k_R f_{A \cup R},$$

где суммирование по всем 1-связным $R \ni t_A$, отличным от $t_A$ и принадлежащим $(\boldsymbol{Z}^\nu - (A - t_A)_+) \cup t_A$. Система (6.11) запишется в операторном виде

$$(hI - M + K) f|_\Lambda = \delta|_\Lambda = \delta_\Lambda, \tag{6.12}$$

где $\delta = (\delta_{|A|, 1})$ — вектор из $\mathscr{B}$, $\delta_{ij}$ символ Кронекера, $I$ единичный оператор.

Если оператор $hI - M + K$ обратим в $\mathscr{B}_\Lambda$, то вектор $f|_\Lambda = (f_{\Lambda, A}) = (hI - M + K)^{-1} \delta_\Lambda$ дает явные выражения для величин $f_{\Lambda, A}$, $A \subset \Lambda$; исследование плотности $p_\Lambda(\tilde{s}_T)$ при $\Lambda \nearrow \boldsymbol{Z}^\nu$ использует свойства $f_{\Lambda, A}$. Ниже будет показано, что существует предел $f_{\Lambda, A}$ при $\Lambda \nearrow \boldsymbol{Z}^\nu$ и $\lim\limits_{\Lambda \nearrow \boldsymbol{Z}^\nu} f_{\Lambda, A} = f_A$, где $f_A$ соответствующая компонента вектора $f = (f_A)$,

$$f = (hI - M + K)^{-1} \delta, \tag{6.13}$$



являющегося решением уравнения Кирквуда—Зальцбурга во всем $\mathscr{B}$.

Мы докажем, что оператор $hI - M + K$ обратим в любом $\mathscr{B}_\Lambda$ и в $\mathscr{B}$, а также дадим оценку для компонент соответствующих векторов $f_\Lambda$ и $f$. Естественным оказывается изучать оператор $hI - M + K$ во всем пространстве $\mathscr{B}$; выводы для $(hI - M + K)|_{\mathscr{B}_\Lambda}$ следуют из нашего рассмотрения очевидным образом.

Лемма 7. Если $\beta$ и $\varepsilon$ связаны соотношением

$$c_1 \beta \varepsilon^2 > \frac{3}{2} (2\nu + 1) \ln \frac{1}{\varepsilon}, \tag{6.14}$$

а норма в $\mathscr{B}$ определяется с помощью $b = q\beta^{-1/2}$, где $c_1$, $q$ — некоторые константы, не зависящие от $\beta$ и $\varepsilon$, то оператор $hI - M + K$ обратим в соответствующем банаховом пространстве $\mathscr{B}$, а компоненты $f_A$ вектора $f = (f_A) = (hI - M + K)^{-1} \delta$ допускают оценку $|f_A| < c_2^{|A|} \beta^{|A|/2}$. Здесь $c_2$ — положительная константа, не зависящая от $\beta$, $\varepsilon$. Обозначим $N = h^{-1}(M - K)$. Тогда $hI - M + K = h(I - N)$. Обратимость оператора $hI - M + K$ будет, очевидно, доказана, если удастся доказать, что $\|N\| < 1$, т. е. $\|M - K\| < h$. В дальнейшем нам потребуется оценка $h = k_t$.

Утверждение. При $\beta \varepsilon^2 \gg 1$ $h = k_t \sim \left( \frac{\pi}{2\nu (1 - \eta) \beta} \right)^{1/2}$.

Доказательство. Ясно, что единственная тройка $(\gamma, \Gamma, D)$, имеющая своей связной компонентой $R = t$, есть $(\varnothing, \varnothing, \varnothing)$. Поэтому

$$h = k_t = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\{-2\nu (1 - \eta) \beta x^2\} dx.$$

Положим $y = 2\nu (1 - \eta) \beta x^2$. При $\beta \varepsilon^2 \gg 1$ получаем:

$$h = (2\nu (1 - \eta) \beta)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-2\nu (1 - \eta) \beta \varepsilon^2}^{2\nu (1 - \eta) \beta \varepsilon^2} y^{-1/2} e^{-y} dy \sim$$

$$\sim (2\nu (1 - \eta) \beta)^{-1/2} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left( \frac{\pi}{2\nu (1 - \eta) \beta} \right)^{1/2}.$$

Докажем, что

$$\|M\| \leqslant b. \tag{6.15}$$

В самом деле,

$$\|M\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|Mf\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \sup_A b^{|A|} |f_{A - t_A}| \leqslant$$

$$\leqslant b \sup_{\|f\| \leqslant 1} \sup_A b^{|A| - 1} |f_{A - t_A}| \leqslant b.$$

Лемма 8. При выполнении условия

$$c_1\beta\varepsilon^2 > \frac{3}{2}(2\nu+1)\ln\frac{1}{\varepsilon}$$

величины $k_R$ допускают оценку $|k_R| < \xi^{|R|}$, где

$$\xi = \begin{cases} c_2(\eta/\beta)^{1/2} & \text{при } \eta>0, \\ c_3\varepsilon^{3/2} & \text{при } \eta=0, \end{cases}$$

а константы не зависят от $\beta$, $\varepsilon$.

Доказательство утверждения весьма громоздкое, и здесь не воспроизводится. Оно основано на непосредственной оценке слагаемых, образующих $k_R$ (см. (6.10)) и оценке числа троек $(\gamma, \Gamma, D)$, имеющих $R$ своей связной компонентой и принадлежащих $R$. Именно, справедлива оценка:

$$\int\limits_{S_{\gamma,R}} \exp\left\{-\beta\left[\sum_{\substack{t,t'\in R\\ |t-t'|=1}} \Phi'(s_t, s_{t'}) + \sum_{t\in\partial_i R}(1-\eta)c_t s_t^2\right]\right\} k''_\Gamma(s)\,k'''_D(s)\Bigg| <$$

$$< (c_4\beta\varepsilon^3)^{|D|}\exp\{-c_5\beta\varepsilon^2|\gamma|\}(c_6\eta)^{|\Gamma|}\left(\frac{c_7}{\beta}\right)^{\frac{|R|-|\gamma_+|}{2}},$$

а число троек $(\gamma, \Gamma, D)$, имеющих $R$ своей связной компонентой, не превосходит

$$\sum_{|\gamma|=0}^{|R_-|} C_{|R_-|}^{|\gamma|} \sum_{|\tilde\Gamma\cup\tilde D|=k=R-\gamma_+}^{|R-\gamma|} \sum_{|\tilde\Gamma|=0}^{k} 2^{|\tilde\Gamma|} \sum_{|\tilde D|=k-|\tilde\Gamma|}^{k} 2^{|\tilde D|}.$$

Лемма 9. Существуют константы $c_8, c_9>0$ такие, что норма оператора $K$ допускает оценку

$$\|K\| < c_8(\eta/\beta)\cdot\frac{1}{b} \quad \text{при } \eta>0,$$

$$\|K\| < c_9\frac{\varepsilon^3}{b} \quad \text{при } \eta=0.$$

Доказательство леммы 9 основано на прямом вычислении нормы оператора $K$:

$$\|K\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1}\|Kf\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1}\sup_A b^{|A|}\Bigg|\sum_{\substack{R\neq t_A\\ t_A\in R\subset t_A\cup(Z^\nu-(A-t_A)_+)}} k_R f_{A\cup R}\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_A b^A \sum |k_R|\, b^{-|A\cup R|} < b\sup_{t\in Z^\nu}\sum_{\substack{R\ni t\\ R\neq t}} |k_R|\, b^{-|R|}.$$

и использует лемму 8, соотношение $|A\cup R| = |A|+|R|-1$, а также следующий известный результат [5]: число 1-связных множеств мощности $N$, содержащих наперед заданную точку, не превосходит $\tilde c^N$, где $\tilde c = \tilde c(\nu) > 0$ — константа, зависящая от



размерности решетки $\nu$. Доказательство леммы 7 использует (6.15) и результат леммы 9. Доказательство теоремы 7 для класса $\varepsilon$-граничных условий следует из теоремы Колмогорова о конечномерных распределениях и использует результаты лемм 7—9. Это доказательство повторяет, фактически, аналогичное доказательство в [5].

## § 7. ОДНО ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ: ЕДИНСТВЕННОСТЬ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Зафиксируем достаточно большое число $N$ и рассмотрим семейство кубов $\Lambda_\omega = \{t : |t^i| \leqslant \omega N,\ i=1,\ldots,\nu\}$, $0\leqslant\omega\leqslant 1$. Пусть $\Lambda = \Lambda_1$ и $s$ — некоторая конфигурация на $\Lambda$. Для любого измеримого $A\subset S$ точку $t\in\Lambda$ будем называть $A$-точкой конфигурации $s$, если $s_t\in A$. Обозначим $D=D(s)\subset\Lambda$ множество $[-1, -\varepsilon]\cup[\varepsilon, 1]$-точек конфигурации $s$. 1-путем называется последовательность $L=\{t_1; t_2, \ldots, t_n\}$, $t_t\in\mathbf{Z}^\nu$ такая, что $t_i\neq t_j$ при $i\neq j$ и $|t_i - t_{i+1}| = 1$ для всех $i$.

Пусть фиксированы $s$ и $\omega$, $0<\omega<\frac{1}{2}$. 1-путь $L=\{t_1, \ldots, t_n\}\subset(\Lambda-\Lambda_\omega)\cap D(s)$ назовем неправильным (относительно $s$), если $t_1\in\partial_i\Lambda$, $t_n\in\partial_e\Lambda_\omega$, $t_j\in(\Lambda-\Lambda_\omega)-\partial_i(\Lambda-\Lambda_\omega)$ для остальных $j$. Неправильный путь имеет длину не менее $(1-\omega)N$, и для любой $t\in L$ $|x_t|\geqslant\varepsilon$. Мы покажем, что при больших $N$ вероятность существования неправильного пути убывает по $N$ экспоненциальным образом.

Теорема 8. При $\beta$, $\varepsilon$, удовлетворяющих условию

$$\beta\varepsilon^2 > c_1\ln\frac{1}{\varepsilon},$$

вероятность $p$ существования хотя бы одного неправильного пути в $\Lambda-\Lambda_\omega$ допускает оценку

$$p < \exp\{-cN\}, \tag{7.1}$$

где $c>0$ некоторая константа.

Следствие. С вероятностью $1-p$ существует $\tilde\Lambda$ такое, что $\Lambda_\omega\subset\tilde\Lambda\subset\Lambda$ и для любой $t\in\partial_e\tilde\Lambda$ $|x_t|\leqslant\varepsilon$.

Доказательство теоремы 8. Заметим, что существует константа $c>0$ (зависящая от $\Phi$) такая, что при достаточно малых $\varepsilon$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \Phi(s_1, \varepsilon s_2) \leqslant \Phi(s_1, s_2) \ \text{при}\ |s_1|<\varepsilon,\ |s_2|\geqslant\varepsilon, \\ \Phi(\varepsilon s_1, \varepsilon s_2) \leqslant \Phi(s_1, s_2) - c\varepsilon^2 \ \text{при}\ |s_1|\geqslant\varepsilon,\ |s_2|\geqslant\varepsilon. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Первое неравенство следует непосредственно из (6.1), а во втором в качестве константы $c$ можно взять, очевидно, любое число, удовлетворяющее условию

$$0 < c < \inf_{\varepsilon>0}\ \inf_{|s_1|>\varepsilon;\,|s_2|>\varepsilon}[\varepsilon^{-2}(\Phi(s_1, s_2) - \Phi(\varepsilon s_1, \varepsilon s_2))].$$

Пусть $s$ произвольная конфигурация на $\Lambda$, допускающая неправильные пути и $L$ один из них. Обозначим через $\tilde{Z}^\nu$ все $R^\nu$ при $\nu=2$ и замкнутое множество всех двумерных граней единичных кубов с вершинами в $Z^\nu$ при $\nu>2$. Мы будем отождествлять 1-путь $L\subset Z^\nu$ с непрерывным путем $\tilde{L}\subset\tilde{Z}^\nu$, являющимся объединением отрезков $[t_i, t_{i+1}]$, $t_i\in L$. Два 1-пути $L$ и $L'$ (с общими концами) назовем гомотопными на $B$, $B\subset Z^\nu$, если на $\tilde{Z}^\nu-(Z^\nu-B)$ гомотопны соответствующие им пути $\tilde{L}$ и $\tilde{L}'$. Каждой точке $t_i\in L$ сопоставим множества $T(t_i)$, удовлетворяющие двум условиям:

1. $T(t_i)$ 1-связно и содержит $t_i$;

2. не существует неправильного пути $L'$, не проходящего через $T(t_i)$ и гомотопного $L$ на $D$.

Множества $T(t_i)$ всегда существуют и удовлетворяют включению $T(t_i)\subseteq D$. Мы будем называть множества $T(t_i)$ перегородками. Выберем константы $\lambda$ и $w$, удовлетворяющие условиям:

$$\lambda<\omega/(\nu+1);\quad w>c'/(c\varepsilon^2(\theta-\theta^2)),$$

где $c'=\sup_{s\times s'}\Phi$ константа, фигурирующая в (7.2), а $\theta$ (7.3) некоторая константа, $0<\theta<1$.

Лемма 10. Пусть $s$ конфигурация, допускающая неправильный путь. Существует множество-перегородка $D_1$, для которого справедливы условия

$$|D_1|>\lambda N,\quad |D\cap\partial_e D_1|<\frac{|D_1|}{w}. \tag{7.4}$$

Доказательство. Пусть $T(t_i)$ — одно из множеств-перегородок, для которого условия (7.4), возможно, не выполняются. Обозначим $\tilde{T}_m=\{t\neq t_i : |t-t_i|\leqslant m\}$. Очевидно, что с ростом $m$ мощность $\tilde{T}_m$ растет как $m^\nu$, в то время как мощность $\tilde{T}_m-\tilde{T}_{m-1}$ — как $m^{\nu-1}$. В случае, когда $\tilde{T}_m$ может расширяться на $Z^\nu$ произвольным образом, этого соображения достаточно для получения оценок (7.4). В случае, когда расширение множества $T(t_i)$ должно лежать внутри $D$, требуемое множество строится с помощью следующего алгоритма.

1. Если среди $m$, лежащих в промежутке $\lambda N<m<2\lambda N$ найдется такое, что $|D\cap(\tilde{T}_{m+1}-\tilde{T}_m)|<\frac{\lambda N}{w}$, то положим $D_1=\tilde{T}_m\cap D$ с минимальным таким $m$. Если такого $m$ не существует, то переходим к шагу 2, и т. д. $n$. Если среди $m$, лежащих в промежутке $n\lambda N<m\leqslant(n+1)\lambda N$, найдется такое, что $|D\cap(\tilde{T}_{m+1}-\tilde{T}_m)|<\left(\frac{\lambda N}{w}\right)^n$ то положим $D_1=\tilde{T}_m\cap D$ с минимальным таким $m$.



Предложенный алгоритм дает нам $D_1$ не более чем за $\nu$ шагов. В самом деле, условие на $n$-том шаге состоит в том, что $|D\cap(\tilde{T}_{m+1}-\tilde{T}_m)|<\left(\frac{\lambda N}{w}\right)^n$, при $n=\nu$ получаем

$$|D\cap(\tilde{T}_{m+1}-\tilde{T}_m)|<(\lambda N/w)^\nu=(\lambda/w)^\nu N^\nu.$$

Такое неравенство обязательно выполняется при больших $N$. Действительно, при $n=\nu$ и больших $m$ справедливо соотношение $|D\cap(\tilde{T}_{m+1}-\tilde{T}_m)|<\left(\frac{m}{w(\nu+1)}\right)^\nu<\left(\frac{(\nu+1)\lambda N}{w(\nu+1)}\right)^\nu=\left(\frac{\lambda N}{w}\right)^\nu$. Это следует из сделанного выше замечания о скорости роста мощности $\tilde{T}_{m+1}-\tilde{T}_m$.

Заметим, что константа $\lambda$ выбрана удовлетворяющей условию $\lambda<\omega/(\nu+1)$ для того, чтобы множество $D_1$ было не слишком большим; в самом деле, $m$ ограничено величиной $m\leqslant(\nu+1)\lambda N<\omega N$.

Первое из соотношений (7.4) выполняется очевидным образом, а второе доказывается так. Пусть множество $D_1$ выделено на $n$-том шаге. Это означает, что $|D\cap(\tilde{T}_{m_1+1}-\tilde{T}_{m_1})|<\left(\frac{\lambda N}{w}\right)^n$ при некотором $m_1$, удовлетворяющем соотношению $n\lambda N<m_1<(n+1)\lambda N$. Для оценки мощности $|D\cap\tilde{T}_{m_1}|=|D_1|$ просуммируем мощности границ множеств $D\cap\tilde{T}_m$ при $(n-1)\lambda N<m\leqslant n\lambda N$ — на $(n-1)$-ом шаге, на котором выделить $D_1$ не удалось. При всех этих $m$ мощность границ удовлетворяла неравенству $|D\cap(\tilde{T}_{m+1}-\tilde{T}_m)|\geqslant\left(\frac{\lambda N}{w}\right)^{n-1}$, поэтому суммирование позволит учесть мощность $\lambda N$ «наружных слоев» $D_1$:

$$|D_1|=|D\cap\tilde{T}_{m_1}|>\lambda N\cdot(\lambda N/w)^{n-1}=w(\lambda N/w)^N.$$

Отсюда получаем $|D_1|/w>(\lambda N/w)^n>|D\cap(\tilde{T}_{m_1+1}-\tilde{T}_{m_1})|=|D\cap\partial_e D_1|$ — второе соотношение доказано. Лемма 10 доказана.

После выделения множества $D_1$ мы берем другой неправильный путь, лежащий в $\Lambda-D_1$, и строим аналогичным образом множество $D_2$. Последовательность $D_1, D_2,\ldots,D_M$ строим до тех пор, пока в $\Lambda-\bigcup_{j=1}^{M}D_j$ существует хоть один неправильный путь.

Таким образом, для рассматриваемой конфигурации $s$ существуют множества $D_1, D_2,\ldots,D_M$, удовлетворяющие условиям

$$|D_j|>\lambda N,\quad |D\cap\partial_e D_j|<\frac{|D_j|}{w},\quad j=1,\ldots,M,$$

такие, что не существует неправильных путей, не проходящих через $\bigcup_{j=1}^{M}D_j$. Обозначим $D_0=\bigcup_{j=1}^{M}D_j$. При зафиксированной мощности $D_0$ число способов выбора $D_0$ не превосходит

$$(2N)^{\frac{\nu|D_0|}{\lambda N}}\tilde{c}^{|D_0|}, \tag{7.5}$$

где $\tilde{c}$ — некоторая константа.

В самом деле, поскольку каждое из множеств $D_j$ 1-связно, а число способов выбора $D_i$ не превосходит $(2N)^{\nu}\tilde{c}^{|D_i|}$, то число способов выбора $D_0$ оценивается величиной $(2N)^{\nu M}c^{|D_0|}$. Для числа $M$ справедлива оценка $M\lambda N \leqslant M\cdot\min|D_i| \leqslant |D_0|$, откуда $M \leqslant |D_0|/\lambda N$ и, следовательно, способов выбора $D_0$ существует не более $(2N)^{(\nu|D_0|)/\lambda N}\tilde{c}^{|D_0|}$.

Доказательство теоремы 8 использует прямую оценку вероятности

$$p = \Xi_\Lambda^{-1}\int \exp\{-\beta U_\Lambda(s)\}\, d\mu_\Lambda^0, \tag{7.6}$$

где интеграл по множеству конфигураций, допускающих неправильный путь.

Пусть $s$ — конфигурация, допускающая некоторый неправильный путь $L$, и пусть $D_0$ множество, выделяемое с помощью леммы 10. Пусть $r_i$ обозначает число пар ближайших соседей в $D_i$. Для любой, как угодно близкой к единице, константы $0<\theta<1$ можно указать такое $N$, начиная с которого будет справедлива равномерная по всем $D_i$ оценка $r_i>\theta|D_i|$. Это следует из очевидного неравенства $r_i \geqslant |D_i|-1$ и того, что $|D_i|\geqslant\lambda N$. Поэтому при достаточно больших $N$ справедлива оценка $r_0>\theta|D_0|$, где $r_0$ — число пар ближайших соседей в $D_0$. Определим преобразование $G$ множества конфигураций $S^\Lambda$ в себя, $Gs=g$:

$$g_t = \begin{cases} s_t, & \text{если } t \notin D_0, \\ \varepsilon s_t, & \text{если } t \in D_0. \end{cases}$$

Преобразование $G$ ликвидирует неправильные пути. Оценим $U_\Lambda(Gs)$. Воспользуемся оценками (7.2) для пар $(t, t')$ таких, что $t\in D_0$, $t'\in D_0$ либо $t\in D_0$, $t'\notin D_0$ и $t'$ есть $[-\varepsilon, \varepsilon]$-точка. Для пар $(t, t')$, $t\in D_0$, $t'\in D-D_0$ $\Phi(g_t, g_{t'})-\Phi(s_t, s_{t'}) \leqslant c' = \sup\limits_{S\times S}\Phi$. С учетом (7.3) и (7.4) получаем

$$U_\Lambda(Gs) < U_\Lambda(s) - r_0 c\varepsilon^2 + c'|D\cap\partial_e D_0| < U_\Lambda(s) - \theta|D_0|c\varepsilon^2 + \\ + c'\frac{|D_0|}{w} < U_\Lambda(s) - \theta|D_0|c\varepsilon^2 + c'\cdot\frac{c\varepsilon^3(\theta-\theta^2)}{c'}\cdot|D_0| = \\ = U_\Lambda(s) - c\varepsilon^2\theta^2|D_0|,$$

откуда

$$\beta U_\Lambda(s) > \beta U_\Lambda(Gs) + \beta\varepsilon^2 c\theta^2|D_0|. \tag{7.7}$$

Множество всех конфигураций, допускающих неправильные пути, естественно разбить на подмножества, объединяющие конфигурации с фиксированной мощностью $D_0=D_0(s)$. Такая факторизация и использование (7.7) позволяют выписать для (7.6) оценку



$$p = \Xi_\Lambda^{-1}\sum_l\int \exp\{-\beta U_\Lambda(s)\}\, d\mu_\Lambda^0 \leqslant \\ \leqslant \sum_l \exp\{-\beta\varepsilon^2 c\theta^2 l\}\,\Xi_\Lambda^{-1}\int\exp\{-\beta U_\Lambda(Gs)\}\, d\mu_\Lambda^0, \tag{7.8}$$

где интегралы по множеству конфигураций, допускающих неправильный путь и таких, что $|D_0(s)|=l$.

Далее, для любого $D_0$ произведем в соответствующем интеграле замену переменных $g=Gs$. Получим

$$\int\exp\{-\beta U_\Lambda(Gs)\}\, d\mu_\Lambda^0 = \varepsilon^{-l}\int\exp\{-\beta U_\Lambda(g)\}\, d\mu_\Lambda^0 < \varepsilon^{-l}\Xi_\Lambda.$$

Отсюда и из (7.5) имеем

$$\int\exp\{-\beta U_\Lambda(Gs)\}\, d\mu_\Lambda^0 < (2N)^{\nu l/\lambda N}\tilde{c}^l\varepsilon^{-l}\Xi_\Lambda.$$

Учитывая то, что $l>\lambda N$, получаем

$$p < \sum_l \exp\{-\beta\varepsilon^2 C\theta^2 l\}(2N)^{\nu l/\lambda N}\tilde{c}^l\varepsilon^{-l} < \\ < 2[\exp\{-\beta\varepsilon^2 c\theta^2\}(2N)^{\nu/\lambda N}\tilde{c}\varepsilon^{-1}]^{\lambda N} < \\ < \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}N\left[\beta\varepsilon^2 c\theta^2 - \ln\frac{\tilde{c}}{\varepsilon}\right]\right\} = \exp\{-c^4 N\},$$

где

$$c'' = \frac{\lambda}{2}\left[\beta\varepsilon^2 c\theta^2 - \ln\frac{\tilde{c}}{\varepsilon}\right] > 0.$$

Таким образом, условие, обеспечивающее справедливость теоремы 8, таково:

$$\beta\varepsilon^2 > c_1\ln\frac{\tilde{c}}{\varepsilon},$$

где

$$c_1 = 1/c\theta^2.$$

Теорема 8 доказана.

Продолжим теперь доказательство теоремы 7. В § 6 доказано, что для любых $\varepsilon$-граничных условий и любой конфигурации $\tilde{s}_T$ последовательности $\{p_\Lambda(\tilde{s}_T)\}$ имеют единственную предельную точку $p(\tilde{s}_T)$. В случае произвольных граничных условий последовательности $\{p_\Lambda(\tilde{s}_T)\}$ имеют не менее одной предельной точки. Если бы кроме предельной точки $p(\tilde{s}_T)$ существовала еще некоторая $p'(\tilde{s}_T)\neq p(\tilde{s}_T)$, то это значило бы, что существует последовательность объемов $\{\Lambda(N)\}_{N=1}^{\infty}$, $\Lambda(N)\nearrow \mathbf{Z}^{\nu}$, с не ε-граничными условиями такая, что $p_{\Lambda(N)}(\tilde{s}_T)\to p'(\tilde{s}_T)$. Этой последовательности $\Lambda(N)$ отвечает, согласно теореме 8, последовательность $\{\tilde{\Lambda}(N)\}$ объемов с ε-граничными условиями; следовательно, $p_{\tilde{\Lambda}(N)}(\tilde{s}_T)\to p(\tilde{s}_T)\neq p'(\tilde{s}_T)$. Из двух последовательностей $\Lambda(N)$ и $\tilde{\Lambda}(N)$ мы построим последовательность $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\Lambda_n\nearrow \mathbf{Z}^{\nu}$ следующим образом. Положим $\Lambda_{2i}=\Lambda(N_i)$, $\Lambda_{2i-1}=\tilde{\Lambda}(N_i)$, $i\geqslant 1$, причем $N_1$ любое достаточно большое число, а $\omega N_{i+1}>N_i$. Здесь $0<\omega<\frac{1}{2}$ — константа, введенная в теореме 8. Объемы $\Lambda_n$ берутся с не ε-граничными условиями при $n$ четном, и с любыми ε-граничными условиями при $n$ нечетном. Условие $\omega N_{i+1}>N_i$ вводится для того, чтобы были справедливы включения $\Lambda_1\subset\Lambda_2\subset\Lambda_3\subset\ldots\subset\Lambda_k\subset\Lambda_{k+1}\subset\ldots$

Из приведенных выше рассуждений следует, что предположение $p'(\tilde{s}_T)\neq p(\tilde{s}_T)$ влечет за собой несуществование предела для построенной последовательности $\{\Lambda_n\}$.

Теорема 7 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Герцик В. М.*, Условия неединственности гиббсовского состояния для решетчатых моделей с финитным потенциалом взаимодействия. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, *40*, № 2, 448—462 (РЖМат, 1976, 11В248)
2. *Глимм Дж., Джаффе А., Спенсер Т.*, Фазовые переходы в моделях $\varphi_2^4$ квантовой теории поля. Евклидова квант. теория поля. Марковск. подход. М., 1978, 46—131 (РЖМат, 1979, 1В267)
3. *Добрушин Р. Л.*, Существование фазового перехода в двумерной и трехмерной моделях Изинга. Теория вероятностей и ее применения, 1965, *10*, № 2, 209—230 (РЖМат, 1967, 12В164)
4. *Малышев В. А.*, Солитонные секторы в решетчатых моделях с непрерывным временем. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 1, 31—41 (РЖМат, 1979, 10Б626)
5. —, Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 2, 3—53 (РЖМат, 1980, 7В257)
6. —, Возмущения гиббсовских полей. — В кн.: Многокомпонентные случайные системы. М. Наука, 1978, 258—276 (РЖМат, 1979, 6В226)
7. —, *Минлос Р. А.*, Спектр трансфер-матрицы гиббсовского поля при низких температурах. В сб. «Тезисы докл. III Междунар. Вильнюсской конференции по теории вероятностей». Вильнюс, 1981, *2*, 21—22
8. —, *Петрова Е. Н.*, Преобразование двойственности для гиббсовских случайных полей. В сб. «Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика». Т. 18. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1981, 3—51
9. —, —, Обобщенные контурные модели. В сб. «Тезисы докл. III Междунар. Вильнюсской конференции по теории вероятностей»: Вильнюс, 1981, *2*, 23—24
10. *Минлос Р. А., Синай Я. Г.*, Явление «разделения фаз» при низких температурах в некоторых решетчатых моделях газа. I. Мат. сб., 1967, *73*, № 3, 375—448 (РЖМат, 1968, 11В164)
11. —, —, Явление «разделения фаз» при низких температурах в некоторых решетчатых моделях газа. II. Тр. Моск. мат. о-ва, 1968, *19*, 113—178 (РЖМат, 1969, 7В122)
12. *Петрова Е. Н.*, Низкотемпературные разложения в Z-модели. Тр. Коорд. совещания по теории многокомпонентных случайных систем. Тюмень, 1980
13. *Пирогов С. А., Синай Я. Г.*, Фазовые переходы первого рода для малых возмущений модели Изинга. Функц. анализ и его прилож., 1974, *8*, № 1, 25—31 (РЖМат, 1974, 6Б587)
14. *Синай Я. Г.*, Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М., Наука, 1980
15. *Терлецкий Ю. А.*, Гиббсовские случайные поля с непрерывными значениями в низкотемпературной области. Взаимодействующ. марковск. процессы и их применение в биол. Пущино, 1979, 49—64 (РЖМат, 1980, 8В140)
16. —, Гиббсовские случайные поля в низкотемпературной области. Докл. АН СССР, 1979, *246*, № 3, 540—544 (РЖМат, 1979, 9В214)
17. *Balaban T., Gawendzki K.*, A low temperature expansion for the pseudoscalar Yukawa model of quantum fields in two space-time dimensions. Preprint, 1980
18. *Beijeren Henk, Sylvester Garret S. van*, Phase transitiins for continuousspin Ising ferromagnets. J. Funk. Anal., 1978, *28*, № 2, 145—167 (РЖМат, 1979, 1В257)
19. *Bortz Alfred B., Griffiths Robert B.*, Phase transitions in anisotropic classical Heisenberg ferromagnets. Commun. Math. Phys., 1972, *26*, № 2, 102—108 (РЖМат, 1973, 2Б491)
20. *Bricmont J., Lebowitz J. L., Pfister C. E.*, Low temperature expansion for continuousspin Ising models. Commun. Math. Phys., 1980, *78*, № 1, 117—135 (РЖМат, 1981, 5В250)
21. *Brydges David C.*, A rigorous approach to Debye screening in dilute classical Coulomb systems. Commun. Math. Phys., 1978, *58*, 313—350 (РЖМат, 1978, 10В128)
22. —, *Federbush Payl*, Debye screening in classical statistical mechanics. Mathematical problems in theoretical physics. Proc. Int. Conf. Lausanne, 20—25 Aug., 1979. Lect. Notes Phys., 1980, *116*, 151—155 (РЖМат, 1981, 2В232)
23. —, —, Debye screening. Commun. Math. Phys., 1980, *73*, 197—246
24. *Fröhlich Jürg, Israel Robert, Lieb Elliott H., Simon Barry*, Phase transitions and reflection positivity. I. General theory and long range lattice models. Commun. Math. Phys., 1978, *62*, № 1, 1—34 (РЖМат, 1979, 3В210)
25. —, —, —, —, Phase transitions and reflection positivity. II. Latice systems with short-range and Coulomb interactions. J. Statist. Phys., 1980, *22*, № 3, 297—347 (РЖМат, 1981, 1В276)
26. —, *Lieb Elliott H.*, Phase transitions in anisotropic lattice spin systems. Commun. Math. Phys., 1978, *60*, № 3, 233—267 (РЖМат, 1979, 3В213)
27. *Gawedzky K.*, Existence of three phases for a $P(\varphi)_2$ model of quantum field. Commun. Math. Phys., 1978, *59*, 117—142
28. *Gidas Basilis*, The Glimm—Jaffe—Spencer expansion for the classical boundary conditions and coexistance of phases in the $\lambda\varphi_2^4$ Euclidean (quantum) field theory. Ann. Phys. (USA), 1979, *118*, № 1, 18—83 (РЖМат, 1980, 1В408)
29. *Griffiths R. B.*, Peierls proof of spontaneous magnetization in a two-dimensional Ising ferromagnet. Phys. Rev., 1964, *136A*, 437—439
30. *Holsztynski W., Slawny J.*, Phase transitions in ferromagnetic spin systems at low temperatures. Commun. Math. Phys., 1979, *66*, № 2, 147—166 (РЖМат, 1979, 10В158)
31. *Imbrie John Z.*, Mass spectrum of the two-dimensional $\lambda\varphi^4-{}^1/_4\varphi^2-\mu\varphi$

quantum field model. Commun. Math. Phys., 1980, *78*, № 2, 169—200 (РЖМат, 1981, 7В260)
32. —, Cluster expansions and mass spectrum for $P(\varphi)_2$ models possessing many phases. Harvard University thesis, 1980
33. —, Phase diagrams and cluster expansions for low temperature $P(\varphi)_2$-models. I. Phase diagrams. II. The Schwinger functions Harvard Univ. Preprint, 1981
34. *Kuroda Koji*, Phase transitions in classical Heisenberg models. Tsukuba J. Math., 1978, *2*, 135—143 (РЖМат, 1979, 10В175)
35. *Lage Campelo Calheiros F. J.*, Systems de spin vectoriel: existens doune transition de phase pour le modile d'Heisenberg antiferromagnetique et anisotrope. Thise docteur en physique. 1980, Marseille
36. *Malyshev V. A.*, Phase transitions in classical Heisenberg ferromagnets model with abitrary parameter of anisotropy. Commun. Math. Phys., 1975, *40*, № 1, 75—82 (РЖМат, 1975, 9Б457)
37. *Peierls R. E.*, On Ising's model of ferromagnetism. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1936, *32*, part 3, 477—481
38. *Spencer T.*, The mass gap for the $P(\varphi)_2$ quantum field model with a strong external field. Commun. Math. Phys., 1974, *39*, 63—76
39. *Summers S.*, The phase diagram for a two dimensional Bose quantum field model. Harvard Univ. thesis, 1979
40. —, On the phase diagram of a $P(\varphi)_2$ quantum field model. Ann. Inst. Henri Poincaré, 1981, *34*, 173—229

---

УДК 517.248.21

# УРАВНЕНИЕ КОЛМОГОРОВА — ФЕЛЛЕРА И ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

***В. П. Маслов***

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Дисперсия случайной величины дает один из возможных способов количественно охарактеризовать ошибку, допускаемую при измерении случайных величин. Она характеризует квадрат нормы отклонения случайной величины от среднего. Для случайных величин со значениями в $\mathbf{R}^n$ эта норма — евклидова норма вектора $\xi - M\xi$ (см. [6, 11]):

$$\mathcal{D}(\xi) = M|\xi - M\xi|^2 = \int |\xi - M\xi|^2 P(d\xi) \tag{1.1}$$
$$M\xi = \int \xi P(d\xi).$$

С точки зрения физических приложений, использование фиксированной метрики в формулах (1.1) неестественно, поскольку события в системе и ее метрические свойства имеют различную природу и определяются различными факторами [7]. Наконец, ошибка может вноситься измерительным прибором, которому свойственны собственная метрика и собственная статистика ошибок (см. [4]).

Следует также отметить, что для описания физических систем с помощью функции состояния могут использоваться различные представления: в одном случае система описывается функцией распределения вероятностей $P$, в другом — характеристической функцией распределения $\tilde{P}$ (т. е. Фурье-образом распределения $P$), в третьем — полным набором моментов распределения случайной величины $\{m_k\}_0^\infty$ и т. д.

Хотя в приведенных выше примерах при переходе от $P$ к $\tilde{P}$ или к $\{m_k\}_0^\infty$ свойство неотрицательности плотности $P$ не сохраняется, тем не менее можно утверждать, что если $\tilde{P}$ — характеристическая функция распределения, а $\{m_k\}_0^\infty$ — полный набор моментов случайной величины, то $-\tilde{P}$ не может