ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2016, том 469, № 3, с. 1–4

МАТЕМАТИЧЕСКА ФИЗИКА

УДК 517.925.4

МОДЕЛИ С ВИРТУАЛЬНЫМИ ПЕРЕНОСЧИКАМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ ЧАСТИЦ

 В. А. Малышев

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 09.03.2016 г.
Поступило 18.03.2016 г.

Приводится математически строгая модель взаимодействия двух классических точечных частиц без полей и сил. При определенном скейлинге доказывается сходимость траекторий к классическим траекториям, получающимся при кулоновском или гравитационном взаимодействии двух частиц.

DOI: 10.7868/S0869565216210052

1. ЦЕЛИ РАБОТЫ

В физике элементарных частиц широко используется представление, что всякое взаимодействие частиц имеет виртуальную частицу – переносчика взаимодействия (называемых фотон, глюон, гравитон или бозон Хиггса). Однако такое представление не обрело пока статуса строгой математики. В частности, противоречие с законом сохранения энергии там объясняется с помощью произвольно вводимого соотношения неопределенности "энергия–время". Возникает естественный вопрос – насколько возможно распространить это представление на классическую физику частиц, причем на строгом математическом уровне.

Мы показываем такую возможность, по крайней мере, в одномерном случае. Именно, оказывается, что траектории частиц классической (нерелятивисткой) физики, которые управляются основными законами Ньютона и законом Кулона, можно получить, не вводя полей и сил, т.е. только на языке частиц – обычных и виртуальных. Интерпретация этой модели чрезвычайно проста (на уровне средней школы), но формулы выглядят достаточно сложно, и доказательство основного результата нетривиально и требует детального анализа этих формул. Более того, удивительно, что основой этой модели является простое соотношение между энергией (или силой) и временем, см. формулы (7) и (12).

В нерелятивистской классической физике имеет место принцип дальнодействия. Например, любая частица с ненулевой массой или зарядом влияет на все пространство вокруг себя. Иначе говоря, информация о присутствии частицы имеется заранее в любой точке пространства. При этом силы гравитации и электрические силы, описывающие такие разные физические явления, удивительным образом имеют одинаковый вид – обратного квадрата, отличаясь только константами. Эти законы связаны с гармоническими функциями и уравнением Пуассона. Более того, уже давно существует другой, геометрический, подход к законам Кеплера, см., например [2, 3]. Но главное, оказалось возможным вывести их из более общих (и намного более сложных) физических теорий – общей теории относительности Эйнштейна и электродинамики Максвелла соответственно, где поля играют основную роль. В данном сообщении законы Ньютона и Кулона выводятся (пока в частном случае) не из более сложных моделей, а наоборот, из более простых. При этом формально это не требует введения ни сил, ни полей.

Интерпретация самой системы (2)–(4) не может сейчас быть проверена никаким экспериментом. Но ее следствия являются хорошо известными физическими законами. По этому поводу физик Г. Хоофт [1] писал: "Физики, изучающие пространство, время и материю, должны работать с большей логической и математической строгостью, если теория недоступна экспериментальной проверке". Поэтому математическая строгость была одной из важнейших целей настоящей работы.

2. МОДЕЛЬ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Формальное определение модели. Модель, которую мы обозначаем $M_0(c, \gamma)$, имеет два параметра $c > 0, \gamma > 0$, и три последовательности чисел $t_n, w_n, y_n, n = 0, 1, \ldots$, определяемых начальными значениями

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: malyshev@mech.math.msu.su

$$t_0 = 0, y_0 \neq 0, w_0 \tag{1}$$

и нелинейными рекуррентными соотношениями (где обозначено $\alpha = \gamma c^{-2}$)

$$t_{n+1} - t_n = \Delta_n t = \frac{2y_n + \alpha}{c}\left(1 - \frac{w_n}{c}\right)^{-1}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} y_{n+1} - y_n = \Delta_n y = \alpha + w_n \Delta_n t = \\ = \alpha + w_n \frac{2y_n + \alpha}{c}\left(1 - \frac{w_n}{c}\right)^{-1} \end{gathered} \tag{3}$$

$$w_{n+1} - w_n = \Delta_n w = \frac{2\alpha}{\Delta_n t} = \frac{c\alpha\left(1 - \dfrac{w_n}{c}\right)}{y_n + \dfrac{\alpha}{2}}. \tag{4}$$

Интерпретация. Дадим простую интерпретацию формальной модели – движение частицы по прямой. Но начнем с более простой модели.

В моменты времени $t \in [0, \infty)$ на прямой есть неподвижная частица *1* с координатой $z_1(t) \equiv 0$ и частица *2* с координатой $z_2(t) = y(t) > 0$. Также есть виртуальная частица *0*, переносчик взаимодействия, с координатой $z_0(t)$, причем для всех t

$$z_1(t) \equiv 0 \leq z_0(t) \leq z_2(t) = y(t).$$

Будем считать, что в начальный момент $t_0 = 0$

$$z_2(0) = z_0(0) = y_0 > 0,$$

где мы обозначили через $y_n = y(t_n)$ координату частицы *2* в момент t_n.

Частица *0* бегает взад-вперед между частицами *1* и *2* с постоянной достаточно большой скоростью c, отражаясь от каждой из них, причем в моменты столкновения меняет координату частицы *2*. В остальное время частица 2 стоит на месте. Обозначим

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots, \tag{5}$$

последовательные моменты, когда частица 0 сталкивается с частицей 2, т.е. когда $z_0(t) = z_2(t) = y(t)$. В эти моменты координата частицы *2* получает приращение $\alpha > 0$, т.е.

$$y(t_n) = y(t_n - 0) + \alpha.$$

При этом получается следующая система рекуррентных уравнений для $n \geq 0$:

$$\Delta_n y = y_{n+1} - y_n = \alpha, \quad \Delta_n t = t_{n+1} - t_n = \frac{2y_n + \alpha}{c}, \tag{6}$$

которая имеет очевидное решение

$$y_n = y_0 + n\alpha, \quad t_n = \frac{2y_0 + \alpha(1 + 2n)}{c}.$$

Но главное другое. Именно, если бы частица *2* на интервале времени $[t_n, t_{n+1})$ двигалась в потенциальном поле $E = \dfrac{\gamma}{y}$, то выйдя из точки $y = y_n$ с нулевой скоростью, она прошла бы расстояние α за время $\Delta t = \Delta_n t$, определяемое из уравнения

$$(F(y) + O(\Delta y))\frac{(\Delta t)^2}{2} = \alpha.$$

Откуда и из (6) получаем:

1) явное выражение для силы и энергии, имеющих ньютоновский или кулоновский вид:

$$F(y) \sim \frac{2\alpha}{(\Delta t)^2} = \frac{2\alpha c^2}{(2y_n + \alpha)^2} \sim \frac{\gamma}{2y_n^2} \Rightarrow E \sim \frac{\gamma}{2y_n};$$

2) соотношение между энергией и временем

$$E\Delta t \sim \frac{\gamma}{c}, \tag{7}$$

которое возможно как-то связано с непонятным пока соотношением между энергией и временем в квантовом случае.

Это объяснение работает только на очень малых временах, а для того, чтобы доказать сходимость этой модели к ньютоновской тректории на большом интервале времени, надо ввести еще скорость частицы, которая просто наследуется как эффективная скорость (пройденное расстояние на время) предыдущего движения и получает в каждый момент t_n положительное приращение, определяемое формулой (4). В остальные моменты можно считать скорость $w(t)$ частицы *2* постоянной и равной w_n на всем интервале $[t_n, t_{n+1})$. Координата частицы *2* линейно растет в этом интервале. В моменты t_n будем считать функции $y(t)$ и $w(t)$ непрерывными справа.

При этом очевидно, что

$$\Delta_n t = \frac{2y_n + \alpha + w_n \Delta_n t}{c},$$

откуда следует формула (2). Недоумение может вызвать цифра *2* в формуле (4) для скачка скорости. Мы считаем, что приращение α координаты на предыдущем этапе возникло не само по себе, а в результате линейного роста приращения скорости (от 0 до $\dfrac{2\alpha}{\Delta_n t}$) на предыдущем этапе. Но более полезной оказывается другая интерпретация.

Эта интерпретация отличается от простейшей только динамикой внутри промежутков (t_n, t_{n+1}). При этом $y(t) = z_2(t)$ и $w(t)$ станут непрерывными, т.е. нет скачка на α в моменты t_n и нет скачка скорости. Однако мы определим ускорение $a(t)$ со скачками в моменты t_n, как кусочно-постоянное, непрерывное слева, а на отрезке $(t_n, t_{n+1}]$ как постоянное и равное a_n.

Параметр α останется, но будет иметь другой смысл. Именно, предположим, что частица *2* на интервале времени (t_n, t_{n+1}), имея постоянное ускорение a_n (или постоянную силу $f_n = a_n$), должна пройти дополнительное расстояние длины α за время $\Delta_n t = t_{n+1} - t_n$, тогда

$$a_n \frac{(\Delta_n t)^2}{2} = \alpha \Rightarrow a_n = \frac{2\alpha}{(\Delta_n t)^2}.$$

При этом скорость будет постепенно меняться от w_n до

$$w_{n+1} = w_n + \Delta_n w, \quad \Delta_n w = a_n \Delta_n t.$$

Таким образом, мы изменяем рекуррентные формулы (2)–(4) следующим образом:

$$\Delta_n t = \frac{2y_n + w_n\Delta_n t + a_n \frac{(\Delta_n t)^2}{2}}{c}, \tag{8}$$

$$\Delta_n y = w_n \Delta_n t + a_n \frac{(\Delta_n t)^2}{2}, \tag{9}$$

$$\Delta_n w = a_n \Delta_n t, \tag{10}$$

$$a_n = \frac{2\alpha}{(\Delta_n t)^2}, \tag{11}$$

что после исключения ускорения дает те же самые формулы (2)–(4). Но теперь мы еще получаем из этих формул выражение для силы на отрезке $[t_n, t_{n+1})$

$$\begin{gathered} f_n = a_n = \frac{2\alpha}{(\Delta_n t)^2} = \\ = \frac{2\gamma}{(2y_n + \alpha)^2}\left(1 - \frac{w_n}{c}\right)^2 = \frac{\gamma}{2y_n^2} + D_1 c^{-1}, \end{gathered} \tag{12}$$

$$D_1 = \frac{2\gamma}{(2y_n + \alpha)^2}\left(-2w_n + \frac{w_n^2}{c}\right) - c\gamma\alpha \frac{4y_n + \alpha}{2y_n^2(2y_n + \alpha)^2},$$

которая, с точностью до $O\left(\frac{1}{c}\right)$, имеет вид обратного квадрата и указывает на связь с динамикой ньютоновской частицы.

Возможное видоизменение модели состоит в том, чтобы ввести дополнительное ограничение – сохранение кинетической энергии при столкновении частиц *2* и *0*, но это также не дает ничего нового.

Заметим, что такой подход к задаче двух или более частиц не требует детальной структуры пространства, а только наличие расстояний между каждой парой частиц. Это сближает физику с системами взаимодействующих автоматов, см. ([4–7]).

В возможной будущей теории (с дискретным пространством-временем или вообще без оного) $\alpha, c > 0$ могли бы быть фундаментальными константами, такими что $\alpha > 0$ достаточно мало́ а c достаточно велико́. Мы докажем, что наша модель приводит к ньютоновской траектории частицы *2* в пределе при скейлинге

$$\alpha = \gamma c^{-2}, \quad c \to \infty \tag{13}$$

А с и м п т о т и ч е с к о е   п о в е д е н и е. Следующий результат показывает, что скорость частицы 2 не превосходит c, и значит виртуальная частица всегда догоняет частицу 2.

Л е м м а 1. *Если* $|w_0| < c$, *то существует единственное решение этой системы с конечными* t_n, w_n, y_n *для всех* $n > 0$. *При этом* $|w_n| < c$ *для всех* n.

Следующий результат качественно описывает асимптотическое поведение модели $M_0(c, \gamma)$ при $n \to \infty$.

Л е м м а 2. *Для любых фиксированных* $\gamma, y_0 > 0, w_0 \geq 0$, *и достаточно больших* $c > 0$ (*т.е.* $c > c_0$ *для некоторого* $c_0 = c_0(\gamma, w_0, y_0)$) *имеет место*:

1) $w_n < c$ *для всех* n;

2) *последовательности* $t_n, y_n, \Delta_n t, \Delta_n y$ *строго возрастают и стремятся к бесконечности при* $n \to \infty$. *Последовательность* $\Delta_n w$ *строго убывает до нуля, а последовательность* w_n *возрастает до некоторого конечного предела* $w_\infty \leq c$.

если же $\gamma, y_0 > 0, w_0 < 0$, *то*

3) *существует* $N < \infty$ *такое, что* $w_N > 0$, $y_N > 0$, *а при* $n < N$ *имеет место*: $y_n > 0$ *и убывают*, t_n *возрастают*, $w_n < 0$ *и возрастают*.

Однако сходимость к классической механике происходит при n порядка c.

Л е м м а 3. *Для произвольных* $y_0 > 0, w_0 \geq 0$, $n \leq Ac$ *существуют константы* $B_i = B_i(y_0, w_0, A) > 0$, $i = 1, 2$, *такие что имеют место, равномерно для всех* $n \leq Ac$, *оценки сверху*:

$$t_n, y_n, w_n \leq B_1 < \infty, \tag{14}$$

$$\Delta_n t, \Delta_n y, \Delta_n w \leq B_2 c^{-1}, \tag{15}$$

а также оценки снизу для произвольных $n > Ac$:

$$\Delta_n t \geq \frac{2y_0}{c} \Rightarrow t_n \geq 2y_0 A, \tag{16}$$

$$y_0 \leq y_n, \quad \alpha + w_0 \frac{2y_0}{c} \leq \Delta_n y, \tag{17}$$

$$w_0 \leq w_n, \quad \frac{2\alpha}{\Delta_n t} \leq \frac{2\alpha c}{B_2} = \frac{2\gamma}{B_2 c} \leq \Delta_n w. \tag{18}$$

Пусть теперь $w_0 < 0$. *Тогда определенное в лемме* 2, 3 *целое число* N *имеет оценку* $N \leq B_4 c$, *где*

$$B_4 = \frac{|w_0|}{\gamma}\left(y_0 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

Для моментов $n > N$ динамика идет как в случае положительной начальной скорости с начальными данными при $n = N$.

Основной резул тат. Рассмотрим также траекторию $x(s) \in R_+$ ньютоновской частицы (при взаимодействии с находящейся в нуле другой частицей), определенную уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\gamma}{2x^2}$$

с начальными данными

$$x(0) = y_0 > 0, \quad v(0) = \frac{dx}{ds}(0) = w_0.$$

При этом $\gamma > 0$ (отталкивание). Поэтому при $s \to \infty$ монотонно

$$x(s) \to \infty, \quad v(s) \to \sqrt{v^2(0) + \frac{\gamma}{x(0)}}.$$

Теорема 1. *При заданном c пусть $y(t) = y(t,c)$ – произвольная кривая такая, что для всех n и всех $t_n \le t \le t_{n+1}$*

$$y_n \le y(t) \le y_{n+1}.$$

Тогда для любого интервала $I = [0, A]$ существует константа $B = B(A)$ такая, что для достаточно больших $c > c_0(A)$

$$|y(t) - x(t)| \le Bc^{-1}$$

равномерно по $t \le t_{[Ac]}$. И значит, для всех t при $c \to \infty$

$$y(t) \to x(t)$$

равмомерно на любом конечном интервале.

Более того, для произвольной функции $w(t)$ такой, что $w_n \le w(t) \le w_{n+1}$ для всех n, t:

$$|w(t) - v(t)| \le Bc^{-1}, \quad w(t) \to v(t)$$

Введенная динамика $y(t)$ частицы *2* не является гамильтоновой, так как сила f_n зависит от начальных данных y_0, w_0 (через значения y_n, w_n). Для доказательства приходится ввести пучок гамильтоновых систем $H = H_{y_0,w_o}$, которые зависят от y_0, w_o, и от c, γ, как от параметров. Для этого сначала определим силу $f(y)$ (зависящую от тех же начальных данных) на всем интервале времени, считая ее равной f_n на интервале (y_n, y_{n+1}). И по этой силе определим для любых $y \in (y_n, y_{n+1})$ потенциал $V(y)$

$$V(y) = -\int_0^y f(x)dx = -\sum_{k=0}^{n} f_k \Delta_k y - f_n(y - y_n). \quad (19)$$

Затем доказывается, что каждая H_{y_0,w_o} близка к ньютоновской с теми же начальными данными. Однако для других начальных данных H_{y_0,w_o} может себя вести совсем иначе.

О связи с теорией динамических систем и численными методами. Формальная система рекуррентных уравнений (2)–(4) определяет сильно нелинейную динамическую систему в трехмерном пространстве. Такие итерации рациональных функций изучались многими авторами и обычно достаточно трудны для изучения [8]. Однако задачи у нас другие, и мы не используем результаты этой большой науки.

Вычислительные методы в физике чрезвычайно развиты, и может показаться, что формальная система (2)–(4) является одним из вариантов подобных вычислительных схем (для уравнений Ньютона), которые гораздо проще. Однако это совсем не так, ибо основной параметр c может оказаться слишком велик, и тогда потребуется число шагов порядка c, чтобы добраться до времен порядка 1. Но главное отличие состоит в том, что временные шаги $\Delta_n t$ завязаны в одну рекуррентную систему с координатами и скоростями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gerard't Hooft*. Can there be Physics without Experiments? Challenges and Pitfalls. Revised version of Oscar Klein lecture // Intern. J. Modern Phys. A. 2001. V. 16. P. 2895–2908.
2. *Арнольд В.И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: Наука, 1989. 95 с.
3. *Hall R. W., Josic K.* Planetary Motion and the Duality of Force Laws // SIAM Rev. 2000. V. 42. № 1. P. 115–124.
4. *Schiff J.L.* Cellular Automata. A Discrete View of the World. New Jersey: Wiley–Intersci., 2008. 279 p.
5. *Ilachinski A.* Cellular Automata. A Discrete Universe. Singapore: World Sci., 2001. 808 p.
6. *Kantor F.W.* Information Mechanics. N.Y.: Wiley, 1977.
7. *Rajeev A., Dill D.* A Theory of Timed Automata // Theor. Comput. Sci. 1994. V. 126. P. 183–235.
8. *Beardon A.* Iteration of Rational Functions. Complex Analytic Dynamical Systems. B.: Springer–Verlag, 1990. 280 p.