МЕЖФАКУЛЬТЕТСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

В.А. Малышев

Случайные блуждания
Уравнения Винера-Хопфа в четверти-плоскости
Автоморфизмы Галуа

Препринт

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА, 1970

Оглавление

Глава 0

§ I. Введение и обзор 6
§ 2. Однородные блуждания на всей плоскости и метод Фурье 9
§ 3. Блуждания на полуплоскости и метод Винера-Хопфа . 10

Глава I.

Уравнения в производящих функциях

§ I. Случайные блуждания в четверти плоскости 15
§ 2. О возможности аналитического подхода 19
§ 3. Случайные блуждания с непрерывным временем 20
§ 4. "Чистые"уравнения Винера-Хопфа в четверти плоскости 22
§ 5. Задача о первом перескоке через прямолинейные границы 24

Глава II

Дискретные уравнения Винера-Хопфа в четверти плоскости

§ I. Теория нетеровости 27
§ 2. Факторизация 27
§ 3. Обратимость 30
§ 4. Случаи разрешимости методом Винера-Хопфа 31
§ 5. Операция проектирования на аналитическое множество 32
§ 6. Уравнения на римановой поверхности 35
§ 7. Точный тип (-I,I; -I,I). Род 0 38
§ 8. Точный тип (-I,I; -I,I). Род I 45
§ 9. Точный тип (-I,I; -I,I). Случай приводимости. . . 53
§ I0. Построение расширений Галуа на универсальной накрывающей 54
§ II. Теорема об аналитическом поведении решения. . . . 58

§ 12. Дискретность группы уравнения 61
§ 13. Задача Карлемана для фундаментального многоугольника и явный вид решения 63

Глава III

Основы аналитического метода

§ 1. Первый шаг – проектирование на алгебраическую кривую 67
§ 2. Алгебраическая кривая $Q(x,y)=0$ 68
§ 3. Перенос уравнений из риманову поверхность 80
§ 4. Группа случайного блуждания 83
§ 5. Поднятие на универсальную накрывающую 85
§ 6. Невырожденные блуждания с $M_x \geq 0$, $M_y \geq 0$ . . . 90

Глава IV

Интегральное представление решения

§ 1. Разделяющая гиперплоскость 102
§ 2. Краевая задача на торе. Простой случай 106
§ 3. Интегральное представление решения. Простой случай 113
§ 4. Случай перепутывания областей 118
§ 5. Аналитическая зависимость от параметров 120
§ 6. Другой метод получения интегрального представления 123

Глава V

Случайные блуждания с конечной группой

§ 1. Вычисление группы случайного блуждания 132
§ 2. Связь с классической задачей об интегрируемости абелевых дифференциалов в логарифмах 139
§ 3. Рациональные решения функционального уравнения с конечной группой 142
§ 4. Условия рациональности производящих функций. 147
§ 5. Явное представление рационального решения и когомологии Галуа 153

§ 6. Другое явное представление нерациональных решений: "Чистые" уравнения Винера-Хопфа 159
§ 7. Другое явное представление нерациональных решений: случайные блуждания с конечной группой 165

Глава VI

Асимптотическое поведение, некоторые применения и обобщения

§ 1. Простое случайное блуждание с косым отражением .171
Асимптотическое поведение коэффициентов функции с алгебраическими особенностями на границе круга сходимости 176
§ 2. Случайные блуждания без скокока с границы . . . 177
§ 3. Общий характер асимптотического поведения граничных вероятностей 180
§ 4. Интерпретация на языке массового обслуживания и некоторые другие приложения 185
§ 5. Блуждания в угле на дискретной решетке и другие обобщения 189
Дополнение. Сведения об алгебраических расширениях второго порядка 191
Библиография 195
Рисунки 199

1^x-1590

ГЛАВА 0

§ I. Введение и обзор

Хорошо известны связи между тремя областями математики:

I. Краевые задачи теории функций комплексного переменного.

2. Сингулярные интегральные уравнения и уравнения Винера-Хопфа.

3. Случайные блуждания на полупрямой, прогноз случайных процессов.

Теория в одномерном случае развивалась от основополагающих работ Ю.В. Сохоцкого, Д. Гильберта, И. Племельи, Т. Карлемана, Н. Винера и Э. Хопфа до завершающих исследований М.Г. Крейна, Н.И. Мусхелишвили, И.Н. Векуа, Ф. Гахова, Бакстера и др. После почти столетнего развития сейчас эту теорию можно считать в основном завершенной, что и отражено в ряде фундаментальных монографий (см., например, / I /, / 2 /,/ 3 /).

Вероятностная часть теории развивается уже примерно 30 лет, причем второе направление связано с именами Н. Винера, А.Н. Колмогорова, А.М. Яглома, Ю.А. Розанова, а первое - Ф. Спитцера, А.А. Боровкова и др.

Эта теория имеет удивительно много применений в казалось бы совершенно не связанных между собой областях, по большинству из которых имеется монографическая литература: теория упругости, диффракция, электромагнитные и акустические волноводы, квантовое взаимодействие и рассеяние частиц, теория переноса излучения, теория массового обслуживания, надежности, водохранилищ, страхования, математическая статистика и т.д.

Как же обстоит дело в многомерном случае?

Уравнения Винера-Хопфа в полупространстве по существу не отличаются от одномерного случая и решаются методом факторизации. Эти исследования были проделаны И.Ц. Гохбергом и Л.С. Гольденштейном (/ 4 /).

Дальнейшее развитие теории пошло по пути исследования нетеровости операторов и вычисления их индекса для очень общих псевдодифференциальных операторов на многообразиях.

Одним из наиболее известных результатов здесь является теорема Атья-Зингера об индексе (/ 5 /).

Для уравнений Винера-Хопфа в конусах и граничных задач теории функций многих комплексных переменных соответствующие результаты принадлежат И.Б. Симоненко (/ 6 /), / 7 /). Эти методы довольно общие. Однако они не приспособлены ни для доказательства существования или единственности решения ни тем более для получения его явного представления и исследования свойств.

Если ядро уравнения Винера-Хопфа (например, в четверти плоскости) вырождается в некотором смысле, то это уравнение решается методом факторизации. Примером является случай, когда символ $G(x,y)$ ядра допускает представление в виде

$$G(x,y)=G(x)\,\widetilde{G}(y).$$

В частности, краевая задача для функций двух комплексных переменных

$$G(x,y)\,F_{++}(x,y)=F_{+-}(x,y)+F_{-+}(x,y)+F_{--}(x,y)+H(x,y) \qquad (1)$$

при $G(x,y)\equiv 1$ решается с помощью обычного двумерного интеграла Коши. Другие случаи см. § 4 гл. II.(а также[28],[29]).

Многие вероятностные задачи сводятся к задаче (I). Иногда удается установить из априорных соображений, что F_{+-} или F_{-+} тождественно равны нулю. В этом случае задача может быть решена методом факторизации или некоторым другим методом. Примерами подобных случаев могут быть случайные блуждания в четверти плоскости с неотрицательными скачками в направлении одной из осей:

I. В задаче о первом перескоке, / 8 /, с применениями к математической статистике.

2. В задаче о стационарном распределении в теории массового обслуживания с приоритетами требований, (см., например, / I* /).

В настоящей работе приводится новый подход к решению краевых задач типа (I). Он состоит в проектировании уравнения (I) на алгебраическую кривую, определенную уравнением $G(x,y) = 0$. Аналитические продолжения проекций решения оказываются многозначными функциями на этой кривой и естественно поэтому перейти на ее универсальную накрывающую.

Основную роль в исследовании уравнений играют автоморфизмы Галуа. С их помощью и осуществляется аналитическое продолжение, а также получаются разного рода явные представления решения.

В данной работе этот метод развивается для некоторых частных случаев. Мы не формулировали результаты в максимальной возможной общности, а старались привести по возможности больше разных подходов к задаче.

Однако, используемые сведения из анализа на алгебраической кривой незначительны. Требуется владение самыми основными понятиями униформизации и теории Галуа на примере алгебраических кривых рода I. Необходимые алгебраические сведения приводятся в дополнении, причем те, которые неспециалисту трудно извлечь из существующей литературы. Необходимый материал другого рода покрывается ресурсами / 9 /, / 10 /, / 17 /.

Более трудной является лишь Глава II, особенно § 10-13. Тот, кто не хочет вдаваться в тонкости вычислений, может этой главой ограничиться. Следует подчеркнуть, однако, что вычисления не являются тривиальными (приходится делать вычисления для отдельного подмножества линейного семейства эллиптических кривых, а не для одной кривой). Последующие главы по существу не зависят от главы II и могут читаться независимо.

Глава I содержит постановки задач и их приведение к стандартному виду. Глава III – VI содержит развернутое исследование стационарных распределений для случайных блужданий в четверти-плоскости. Мы не рассматривали асимптотического поведения стационарных вероятностей π_{nm} при $n \to \infty$, $m \to \infty$ и вероятностей первого перескока, что требует дополнительной техники асимптотического анализа двумерных интегралов, на чем здесь мы не хотели останавливаться. В конце главы VI указаны некоторые применения и обобщения.

§ I. Метод Фурье и однородные блуждания на всей плоскости.

Метод Фурье, встречающийся в громадном количестве задач, в которых фигурируют интегро-дифференциальные операторы, инвариантные относительно сдвигов, применяется и в задаче нахождения распределения сумм двумерных случайных векторов. Рассмотрим двумерную решетку $\mathbb{Z}^2=\{(k,\ell) \; : k,\ell \text{ целые}\}$.

Пусть p_{ij} – вероятности перехода из (k,ℓ) в $(k+i,\ell+j)$ в однородной цепи Маркова с дискретным временем и множеством состояний $\mathbb{Z}^2$. Пусть $\pi_{ij}(t)$, $t=0,1,2,\dots$ – вероятность того, что в момент t состояние цепи есть (i,j). Стандартные уравнения для цепи Маркова в данном случае имеют вид

$$\pi_{ij}(t+1)=\sum_{k,\ell} p_{i-k,j-\ell}\,\pi_{k\ell}(t).$$

Переходя к производящим функциям

$$\pi_{ij}(z)=\sum_{t=0}^{\infty} \pi_{ij}(t)z^t \qquad (|z|<1),$$

будем иметь

$$\Pi_{ij}(z)=z\sum_{k,\ell} p_{i-k,j-\ell}\,\Pi_{k\ell}(z)+\Pi_{ij}(0). \qquad (1)$$

Уравнение (1) представляет собой уравнение в свертках и после введения производящих функций (преобразований Фурье, $|x|=|y|=1$)

$$\Pi(x,y,z)=\sum_{i,j}\Pi_{ij}(z)x^iy^j\ ,\ p(x,y)=\sum_{i,j}p_{ij}x^iy^j\ ,$$

приобретает вид

$$\Pi(x,y,z)=zp(x,y)\Pi(x,y,z)+\Pi(x,y,0)$$

или

$$\Pi(x,y,z)=\frac{\Pi(x,y,0)}{1-zp(x,y)}\ . \qquad (2)$$

Формула (2) выражает производящую функцию через производящую функцию начального распределения.

Существование и единственность решения (2) в данном случае очевидны.

§ 2. Метод Винера-Хопфа и блуждания в полуплоскости. Альтернативный подход.

Метод факторизации Винера-Хопфа также хорошо известен и применяется в задачах с псевдодифференциальными операторами в областях с одной границей. Следующий пример блуждания в полупространстве хорошо иллюстрирует идею метода.

Рассмотрим область $\mathbb{Z}_+^2=\{(i,j): i\geqslant 0,\ i$ и j целые $\}$. Однородная цепь Маркова с множеством состояний $\mathbb{Z}_+^2$ и дискретным временем имеет следующие переходные вероятности:

$$p_{ij}=P[(k,\ell)\longrightarrow(k+i,\ k+j)],\quad k\geqslant 1,$$

$$p'_{ij}=P[(0,\ell)\longrightarrow(i,\ \ell+j)]\ .$$

Будем считать при этом, что $p_{ij}=p'_{ij}=0$, если либо $|i|\geqslant 2$ либо $|j|\geqslant 2$. Пусть $\Pi_{ij}(t)$ определяется также как в § 1. Имеем

$$\Pi_{ij}(t+1)=\sum_{(k,\ell)\in\mathbb{Z}^2}p_{i-k,j-\ell}\Pi_{k\ell}(t)+\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}p'_{i,j-\ell}\,\Pi_{0\ell}(t)\ .$$

Также аналогично § 1 получим ($|z|<1$)

$$\Pi_{ij}(z)=z\sum_{k,\ell}p_{i-k,j-\ell}\,\Pi_{k\ell}(z)+z\sum_{\ell}p'_{i,j-\ell}\,\Pi_{0\ell}(z)+$$
$$+\Pi_{ij}(0)\ . \qquad (1)$$

Уравнение (1), однако, теперь не является "чистым" уравнением в свертках и после введения производящих функций

$$\Pi(x,y,z)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_j\Pi_{ij}x^iy^j,\ \widetilde{\Pi}(y,z)=\sum_j\Pi_{0j}(z)y^j\ ,$$

$$\Pi(x,y)=\sum_{i,j}\Pi_{ij}(0)x^iy^j,\ p'(x,y)=\sum p'_{ij}x^iy^j\ ,$$

имеет вид ($|x|\leqslant 1,|y|=1$)

$$\Pi(x,y,z)+\widetilde{\Pi}(y,z)=zp(x,y)\overset{\Pi(x,y,z)}{\cancel{z}}+zp'(x,y)\widetilde{\Pi}(y,z)+$$
$$+\Pi(x,y)$$

или

$$\Pi(x,y,z)\,\frac{1-zp(x,y)}{zp'(x,y)-1}=\widetilde{\Pi}(y,z)+\frac{\Pi(x,y)}{zp'(x,y)-1} \qquad (2)$$

Идея метода состоит в исключении одной из неизвестных функций. Это делается следующим образом.

Фиксируем y и z, причем $|y|=1$, $|z|\leqslant 1$.

Обозначим

$$\Phi(x)=\Phi_{y,z}(x)=\frac{1-zp(x,y)}{zp'(x,y)-1}.$$

$\Phi(x)$ есть рациональная функция от x. Как легко догадаться, возможно следующее представление

$$\Phi(x)=\Phi^{+}(x)\,\Phi^{-}(x),$$

где $\Phi^{+}(x)\,[\Phi^{-}(x)]$ - рациональная функция, не имеющая в области $|x|\leqslant 1\,[|x|\geqslant 1]$ ни нулей ни полюсов, $\Phi^{-}(x)$ причем не имеет полюса в бесконечности. Это легко выводится из двух свойств $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)\neq 0 \quad \text{при} \quad |x|=1,$$

$$\operatorname*{ind}_{|x|=1}\Phi(x)=0,$$

что в свою очередь следует из неравенств

$$|zp(x,y)|<1,\quad |zp'(x,y)|<1 \quad \text{при} \quad |x|=1.$$

Уравнение (2) теперь можно переписать так

$$\Phi^{+}_{y,z}(x)\,\Pi(x,y,z)=\frac{\widetilde{\Pi}(y,x)}{\Phi^{-}_{y,z}(x)}+\frac{\Pi(x,y)}{\Phi^{-}_{y,z}(x)(zp'(x,y)-1)} \qquad (3)$$

Проинтегрируем теперь обе части уравнения (3), умножив их предварительно на $\frac{dx}{x'-x}\cdot\frac{1}{2\pi i}$, по единичной окружности. Левая часть тогда останется без изменения при $|x'|<1$. Первый член правой части исчезает при $|x'|<1$ по известному свойству интеграла Коши, и мы получим (меняя x' на x)

$$\Phi^{+}(x)\,\Pi(x,y,z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|x'|=1}\frac{\Pi(x',y)\,dx'}{(x-x')\Phi^{-}(x')(zp'(x,y)-1)}$$

или явный вид функции

$$\Pi(x,y,z)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\Phi^{+}_{y,z}(x)}\oint\limits_{|x|=1}\frac{\Pi(x',y)\,dx'}{(x-x')\Phi^{-}(x')(zp'(x,y)-1)}.$$

Функция $\widetilde{\Pi}(x,y)$ может быть определена из уравнения (2). Это есть метод Винера-Хопфа решения уравнений (I).

На другом языке уравнение (2) представляет собой краевую задачу Римана в теории функций одного комплексного переменного. Ее решение (во многих случаях адекватное методу Винера-Хопфа) связано с именами Сохоцкого, Племельи, Гильберта, Карлемана, Гахова, Мусхелишвили и др.).

Альтернативно мы могли бы исключить $\Pi(x,y,z)$ взяв $|x'|>1$.

Возможен также другой метод исключения одной из неизвестных функций. При фиксированных $|y|=1$ и $|z|<1$ обозначим $x_0(y,z)$ корень уравнения

$$1-zp(x,y)=0$$

такой, что $|x_0(y,z)|\leqslant 1$. Подставляя x_0 вместо x, видим, что левая часть обращается в нуль и

$$\widetilde{\Pi}(y,z)=\frac{\Pi(x_0(y,z),y)}{1-zp'(x_0(y,z),y)} .$$

Оба эти метода не позволяют решать задачи в четверти-плоскости. Развиваемый далее метод включает в себя элементы обоих подходов, но в то же время содержит и ряд совершенно новых идей.

ГЛАВА I.

УРАВНЕНИЯ В ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЯХ.

§ I. Случайное блуждание в четверти-плоскости.

Рассмотрим однородную цепь Маркова с дискретным временем, множеством состояний которой является дискретная решетка $\mathbb{Z}^2_{++}=\{(i,j) : i,j \geqslant 0 \text{ целые}\}$ в четверти плоскости. Переходные вероятности $p(i',j'/i,j)$ за один шаг удовлетворяют следующим условиям:

I. Ограничение на скачки: $p(i',j'/i,j)=0$, если $(i,j)\neq(0,0)$ и либо $|i'-i|\geqslant 2$ либо $|j'-j|\geqslant 2$.

Только конечное число вероятностей $p(i',j'/0,0)\equiv p^0_{i'j'}$ отлично от нуля.

2. Однородность внутри четверть плоскости и на границах. При $i,j\geqslant 1$ вероятности $p(i',j'/i,j)$ зависят только от разностей $k=i'-i$, $\ell=j'-j$ и обозначаются $p_{k\ell}$. Вероятности $p(i',j'/i,0)$ также зависят лишь от $k=i'-i$, $\ell=j'$ и обозначаются $p'_{k\ell}$. Аналогично вводятся $p''_{k\ell}=p(k,\ell+j/0,j)$, $j\geqslant 1$.

Мы будем далее говорить о блуждании частицы по решетке и обозначим $\pi_{ij}(t)$ – вероятность того, что частица в момент t находится в точке (i,j). При этом считается, что задано некоторое начальное распределение положения частицы: $\{\pi_{ij}(0)\}$. Стандартные рекуррентные уравнения для $\pi_{ij}(t)$ имеют вид $(i,j\geqslant 1)$:

$$\pi_{ij}(t+1)=\sum_{k,\ell=1}^{\infty} p_{i-k,j-\ell}\,\pi_{k\ell}(t)+\sum_{k=1}^{\infty} p'_{i-k,j}\,\pi_{k,0}(t)+$$

$$+\sum_{\ell=1}^{\infty} p''_{i,j-\ell}\,\pi_{0\ell}(t)+\pi_{00}(t)\,p^0_{ij} , \qquad (I)$$

$$\pi_{i0}(t+1)=\sum_{k=1}^{\infty} p_{i-k,-1}\,\pi_{k1}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}p'_{i-k,0}\,\pi_{k0}(t)+$$
$$+\,p''_{1,-1}\,\pi_{01}(t)+\pi_{00}(t)\,p^{\circ}_{i0}\quad,$$

$$\pi_{0j}(t+1)=\sum_{l=1}^{\infty} p_{-1,j-l}\,\pi_{1l}(t)+p_{-1,1}\,\pi_{1,0}(t)+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}p''_{0,j-l}\,\pi_{0l}(t)+\pi_{00}(t)\,p^{\circ}_{0j}\quad,$$

$$\pi_{00}(t+1)=p_{-1,-1}\,\pi_{11}(t)+p'_{-1,0}\,\pi_{10}(t)+$$
$$+\,p''_{0,-1}\,\pi_{0,1}(t)+\pi_{00}(t)\,p^{\circ}_{00}\quad.$$

Вводя производящие функции при $|z|<1$:

$$\pi_{ij}(z)=\sum_{t=0}^{\infty}\pi_{ij}(t)\,z^{t}\quad,$$

получим систему уравнений

$$\pi_{ij}(z)-\pi_{ij}(0)=z\Big[\sum_{k,l=1}^{\infty}p_{i-k,j-l}\,\pi_{kl}(z)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}p'_{i-k,j}\,\pi_{k0}(z)+\sum_{l=1}^{\infty}p''_{i,j-l}\,\pi_{0l}(t)+p^{\circ}_{ij}\,\pi_{00}(z)\Big],\tag{2}$$

. . . .

и т.д.

В следующей производящей функции ($|x|,|y|\leqslant 1$)

$$\Pi(x,y,z)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\pi_{ij}(z)\,x^{i}y^{j}$$

содержится вся информация относительно интересующих нас вероятностей $\pi_{ij}(t)$. Нам понадобятся также производящие функции для вероятностей внутри четверть плоскости и на границах:

$$\pi(x,y,z)=\sum_{i,j=1}^{\infty}\pi_{ij}(z)\,x^{i-1}y^{j-1}\,,$$

$$\pi(x,z)=\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{i0}(z)\,x^{i-1},\quad \tilde{\pi}(y,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{0j}(z)\,y^{j-1}$$

Умножая каждое уравнение (2) на $x^{i}y^{j}$ соответственно и складывая почленно, после некоторых преобразований получим:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}\pi_{ij}(z)x^{i}y^{j}+\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{i,0}(z)x^{i}+\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{0j}(z)y^{j}+\pi_{00}(z)=$$
$$=zp(x,y)\sum_{i,j=1}^{\infty}\pi_{ij}(z)x^{i}y^{j}+zp'(x,y)\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{i0}(z)\,x^{i}+$$
$$+zp''(x,y)\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{0j}(z)x^{j}+zp^{\circ}(x,y)\,\pi_{00}(z)+\Pi(x,y,0),\tag{3}$$

где введем следующие производящие функции скачков:

2-1580

$$p(x,y)=\sum_{i,j=-1}^{1} p_{ij}x^iy^j,\quad p'(x,y)=\sum p'_{ij}x^iy^j,$$

$$p''(x,y)=\sum p''_{ij}x^iy^j,\quad p^0(x,y)=\sum p^0_{ij}x^iy^j.$$

Вводя многочлены

$$Q(x,y,z)=xy(1-zp(x,y)),\quad q(x,y,z)=x(zp'(x,y)-1),$$

$$\tilde q(x,y,z)=y(zp''(x,y)-1),\quad q_0(x,y,z)=zp^0(x,y)-1,$$

из (3) получаем наше основное уравнение

$$\boxed{\begin{aligned}&Q(x,y,z)\Pi(x,y,z)=q(x,y,z)\Pi(x,z)+\\&+\tilde q(x,y,z)\tilde\Pi(y,z)+q_0(x,y,z)\Pi_{00}(z)+\Pi(x,y,0)\end{aligned}} \tag{4}$$

Если существует стационарное распределение, то уравнения для стационарных вероятностей Π_{ij} получаются из (I), если заменить $\Pi_{ij}(t+1)$ и $\Pi_{ij}(t)$ на Π_{ij}. Аналогично получается уравнение для производящих функций :

$$\Pi(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\Pi_{ij}x^iy^j,\quad \Pi(x)=\frac{1}{x}(\Pi(x,0)-\Pi_{00}),$$

$$\tilde\Pi(y)=\frac{1}{y}(\Pi(0,y)-\Pi_{00}),\quad \Pi(x,y)=$$

$$=\frac{1}{xy}(\Pi(x,y)-x\Pi(x)-y\tilde\Pi(y)-\Pi_{00}), \tag{5}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&Q(x,y)\Pi(x,y)=q(x,y)\Pi(x)+\tilde q(x,y)\tilde\Pi(y)+\\&+q_0(x,y)\Pi_{00}\end{aligned}} \tag{6}$$

§ 2. О возможности аналитического подхода.

Очевидно, что решение $\Pi(x,y,z)$ уравнения (4) § I при заданном $\Pi(x,y,0)$ существует и единственно. Оно автоматически оказывается аналитическим при $|x|,|y|,|z|<1$ и непрерывным для $|x|,|y|\leqslant 1, |z|<1$.

Далее мы будем всегда предполагать, что в нашей цепи Маркова имеется один существенный класс состояний. Тогда известно /18/, что все состояния одновременно принадлежат к одному из следующих трех типов: I. транзиентному (невозвратному), 2. нулевому возвратному, 3. положительному.

Основным для нас будет случай 3. Следующее утверждение полностью определяет возможность аналитического подхода.

Лемма I. Стационарное распределение $\{\Pi_{ij}\}$ в нашей цепи Маркова существует тогда и только тогда, когда существуют функции $\Pi(x,y), \Pi(x), \tilde\Pi(y)$, аналитические при $|x|,|y|<1$ и непрерывные на границе этой области, а также константа Π_{00}, удовлетворяющие уравнению (6) § I.

Необходимость очевидна. Далее мы докажем, что любое решение $\Pi(x,y)$ уравнения (6) § I, аналитическое при $|x|,|y|<1$ и непрерывное на границе этой области, будет в действительности принадлежать пространству L_1 (т.е. $\sum|\Pi_{ij}|<\infty$).

Применяя, например, интегральную формулу Коши для функций двух комплексных переменных к (6) § I, деленному на $x^{i+1}y^{j+1}$, получим, что Π_{ij} удовлетворяют стандартной системе уравнений для стационарного распределения. Из теоремы 7.I, /18/, следует тогда, что если $\Pi_{00}>0$, то и все $\Pi_{ij}>0$ и решение единственно при заданном Π_{00}.

Известно, кроме того, что в этом случае цепь Маркова будет эргодической, /13/.

Приведем кроме того следующее утверждение относительно периодов нашей цепи Маркова.

Лемма 2. В случае одного существенного класса все состояния имеют период $d \leqslant 4$.

Доказательство этого утверждения носит комбинаторный характер и мы его здесь не приводим.

§ 3. Случайные блуждания с непрерывным временем.

Рассмотрим цепь Маркова с непрерывным временем, с таким же множеством состояний и теми же возможными переходами, что и в дискретном времени. Пусть $\mu_{ij}, \mu'_{ij}, \mu''_{ij}, \mu^{\circ}_{ij} ((i,j)\neq(0,0))$ – соответствующие интенсивности переходов, т.е., например,

$$P(S(t+\Delta t)=(i,1)/S(t)=(i,0))=\mu'_{01}\Delta t+o(\Delta t),\ i\geqslant 1,$$

где $S(t)$ – состояние процесса в момент t. Выписывая стандартным образом дифференциальные уравнения и полагая в них $t\to\infty$, $\frac{d\pi_{ij}(t)}{dt}\to 0$, получим систему уравнений для стационарных вероятностей π_{ij}:

$$\left(\sum\mu_{ij}\right)\pi_{ij}=\sum_{k,\ell=1}^{\infty}\mu_{i-k,j-\ell}\,\pi_{k\ell}+\delta_1^j\sum_{k=1}^{\infty}\mu'_{i-k,1}\,\pi_{k0}$$

$$+\delta_1^i\sum_{\ell=1}^{\infty}\mu''_{1,j-\ell}\,\pi_{0\ell}+\delta_1^i\delta_1^j\,\pi_{00}\,\mu^{\circ}_{11}$$

и т.д. Уравнения эти отличаются от уравнений (I) § I лишь тем, что в правых частях вместо $p_{ij}, p'_{ij}, p''_{ij}, p^{\circ}_{ij}$ фигурируют соответственно $\mu_{ij}, \mu'_{ij}, \mu''_{ij}, \mu^{\circ}_{ij}$, а в левых частях перед $\pi_{ij}, \pi_{i0}, \pi_{0j}, \pi_{00}$ появляются соответственно множители

$$\sum\mu_{ij},\ \sum\mu'_{ij},\ \sum\mu''_{ij}\quad \sum\mu^{\circ}_{ij}.$$

После перехода к производящим функциям аналогично § I получим уравнения:

$$\left(\sum\mu_{ij}\right)\tilde{\pi}(x,y)+\left(\sum\mu'_{ij}\right)\pi(x)+\left(\sum\mu''_{ij}\right)\tilde{\pi}(y)+$$

$$+\left(\sum\mu^{\circ}_{ij}\right)\pi_{00}=\mu(x,y)\tilde{\pi}_1(x,y)+\mu'(x,y)\pi_1(x)+\mu''(x,y)\tilde{\pi}_1(y)+$$

$$+\mu^{\circ}(x,y)\pi_{00},$$

где $\mu(x,y)=\sum\mu_{ij}x^iy^j$ и т.д.,

$$\pi_1(x,y)=\sum_{i,j=1}^{\infty}\pi_{ij}x^iy^j,\ \pi_1(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\pi_{i0}x^i,\ \dots,$$

или

$$\pi_1(x,y)\left(\sum\mu_{ij}-\mu(x,y)\right)=\pi_1(x)\left[\mu'(x,y)-\sum\mu'_{ij}\right]+$$

$$+\tilde{\pi}_1(y)\left[\mu''(x,y)-\sum\mu''_{ij}\right]+\pi_{00}\left[\mu_0(x,y)-\sum\mu^{\circ}_{ij}\right]$$

Заменяя $\pi_1(x,y)$ на $\mu\pi_1(x,y)$, где $\mu=\sum\mu_{ij}$, $\pi_1(x)$ на $\mu'\pi_1(x)$, где $\mu'=\sum\mu'_{ij}$, и т.д. получим в точности уравнение (6) § 1, где

$$p_{ij}=\frac{\mu_{ij}}{\mu},\ p'_{ij}=\frac{\mu'_{ij}}{\mu'},\ p''_{ij}=\frac{\mu''_{ij}}{\mu''},\ p^{\circ}_{ij}=\frac{\mu^{\circ}_{ij}}{\mu^{\circ}}.$$

Мы видим таким образом, что задачи исследования (аналитического) таких уравнений для дискретного и непрерывного времени совершенно идентичны. Поэтому в дальнейшем мы говорим везде о дискретном времени, иллюстрируя однако изложение примерами также и для непрерывного времени.

2^x–1530

Нестационарный случай и задача, рассматриваемая в § 5, для непрерывного времени могут быть рассмотрены аналогично.

§ 4. "Чистые" уравнения Винера-Хопфа.

Дискретные уравнения Винера-Хопфа в четверти-плоскости представляют собой бесконечную систему линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_{i-k,j-\ell}\,\xi_{k\ell}=\eta_{ij}\ , \quad i,j=0,1,2,\dots \qquad (I)$$

При этом предполагается, что $\sum\limits_{i,j=0}^{\infty}|\eta_{ij}|<\infty$, $\sum\limits_{p,q=-\infty}^{\infty}|a_{pq}|<\infty$, и ищется решение, также принадлежащее пространству ℓ_1 последовательностей: $\xi\in\ell_1 \Leftrightarrow \sum\limits_{i,j=0}^{\infty}|\xi_{ij}|<\infty$.

Мы будем говорить, что уравнение (I) имеет тип (n_1, n_2; m_1, m_2), где $-\infty\leqslant n_1,m_1<\infty$, $-\infty<n_2,m_2\leqslant\infty$ целые, если a_{pq} могут быть отличны от нуля лишь при

$$n_1\leqslant p\leqslant n_2\ ,\quad m_1\leqslant q\leqslant m_2 \ . \qquad (2)$$

Мы будем говорить, что тип ($n_1,n_2;m_1,m_2$) точный, если область типа (2) невозможно сузить.

Замечание I. Существуют уравнения, удовлетворяющие условиям (2),(3) §1[A], произвольного точного типа ($n_1,n_2;m_1,m_2$). Например, можно положить

$$a(x,y)=a(x)\widetilde{a}(y)\ ,$$

где $x^{n_1}a(x)$ - многочлен от x степени n_1+n_2, имеющий n_1 нулей внутри единичного круга и n_2 вне его. Аналогично строится $y^{m_1}\widetilde{a}(y)$. Для получения нетривиальных примеров достаточно пошевелить коэффициенты $a(x,y)$.

Здесь мы будем рассматривать только уравнения типа ($-1,\infty$; $-1,\infty$).

Рассмотрим следующие функции-символы ($|x|=|y|=1$):

$$a(x,y)=\sum_{p,q=-\infty}^{\infty}a_{pq}x^py^q,\quad \eta(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\eta_{ij}x^iy^j\ ,$$

$$\xi(x,y)=\sum_{k,\ell=0}^{\infty}\xi_{k\ell}x^ky^\ell\ .$$

Умножая соотношения (I) § I на x^iy^j и суммируя, получим

$$\eta(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\ \sum_{k,\ell=0}^{\infty}a_{i-k,j-\ell}x^{i-k}y^{j-\ell}\xi_{k\ell}x^ky^\ell=$$

$$=\sum_{p,q}\ \sum_{\substack{k,\ell=0\\ p+k\geqslant0\\ q+\ell\geqslant0}}^{\infty}a_{pq}x^py^q\xi_{k\ell}x^ky^\ell\ ,$$

где положено $p=i-k$, $q=j-\ell$. Или

$$\eta(x,y)=a(x,y)\xi(x,y)-b_{+-}(x,y)-b_{--}(x,y)-b_{--}(x,y), \qquad (3)$$

где в нашем случае

$$b_{--}(x,y)=a_{-1,-1}\frac{1}{xy}\,\xi_{00}\ ,$$

$$b_{+-}(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_{k0}x^k\sum_{p\geqslant-k}a_{p,-1}\,x^p\frac{1}{y}\ ,$$

$$b_{-+}(x,y)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\xi_{0\ell}y^\ell\sum_{q\geqslant-\ell}a_{-1,q}\,y^q\frac{1}{x}\ .$$

Вводя функции

$$\Pi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_{k0}x^{k}\sum_{p\geq -k}a_{p,-1}x^{p+1}+a_{-1,-1}\xi_{00}\,, \qquad (3')$$

$$\tilde{\Pi}(y)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\xi_{0\ell}y^{\ell}\sum_{q\geq -\ell}a_{-1,q}y^{q+1}\,, \qquad (3'')$$

перепишем уравнение (3) следующим образом

$$\boxed{xya(x,y)\xi(x,y)-\Pi(x)-\tilde{\Pi}(y)=xy\eta(x,y)} \qquad (4)$$

Заметим, что все слагаемые в этом уравнении принадлежат пространству R_{++} (см. §2 Гл. II).

Замечание 2. Если известна $\Pi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\Pi_k x^k$, то ξ_{k0} получаются рекуррентным образом из системы уравнений

$$\Pi_0=a_{-1,1}\xi_{00}\,,$$

$$\Pi_1=\xi_{00}a_{0,1}+\xi_{10}a_{-1,-1}$$

и т.д.

§ 5. Задача о первом перескоке через прямолинейные границы.

Задача о первом перескоке частицы, начинающей однородное случайное блуждание из начала координат, через две удаленные перпендикулярные границы допускает следующую формулировку.

Пусть частица в момент $t=0$ выходит из точки (n,m), $n,m\geq 0$. Пусть $P_{n,m}(t)$ – вероятность того, что впервые в момент t частица попадет на границу $\{(x,y)$: $x=-1$ или $y=-1\}$. Рассматриваемое нами случайное блуждание однородно (до поглощения на границе) и определяется следующими переходными вероятностями за один шаг:

$$p_{ij}=P(x,y/x+i,y+j)\,,\ i,j=-1,0,1.$$

Очевидно

$$P_{n,m}(t)=\sum p_{ij}P_{n-i,m-j}(t-1)=$$

$$=\sum_{k,\ell=0}^{\infty}p_{n-k,m-\ell}P_{k\ell}(t-1) \qquad (I)$$

Через $P^A_{m,n}(t)$ будем обозначать вероятность, что частица впервые попадет на границу в точку из множества A, принадлежащего границе. Введем производящую функцию

$$q_A(x,y)=\sum_{n,m=0}^{\infty}P^A_{n,m}(1)x^n y^m,\quad |x|,|y|<1.$$

Например, если A есть вся граница, то

$$q_A(x,y)=q_0+q\frac{1}{1-x}+\tilde{q}\frac{1}{1-y}\,,$$

где $q_0=p_{11}+p_{10}+p_{1,-1}+p_{-1,1}$, $q=p_{-1,1}+p_{10}+p_{11}$,

$$\tilde{q}=p_{11}+p_{10}+p_{1,-1}\,.$$

Положив

$$P^A_{n,m}(z)=\sum_{t=1}^{\infty}P^A_{n,m}(t)z^t\,,\quad |z|<1,$$

имеем, заметив что и $P^A_{n,m}(t)$ удовлетворяют (I),

$$P^A_{n,m}(z)=z\sum_{k,\ell=0}^{\infty}p_{n-k,m-\ell}P^A_{k,\ell}(z)+P^A_{n,m}(1). \qquad (2)$$

Уравнения (2) при фиксированном z внешне напоминают "чистые" уравнения Винера-Хопфа из § 4.

Можно показать, что они и являются таковыми, если A - конечное множество. В этом случае $\sum\limits_{n,m} p_{n,m}(1)<\infty$.

Полагая теперь

$$P^A(x,y,z)=\sum_{n,m=0}^{\infty} P^A_{n,m}(z)x^n y^m,\ \eta^A(x,y)=$$

$$=xy\sum P^A_{n,m}(1)x^n y^m,$$

$$Q(x,y,z)=xy(1-z\sum p_{ij}x^i y^j),$$

$$\Pi_z(x)=z\sum_{n=0}^{\infty}P^A_{n,0}(z)x^n\sum_{i\geqslant -n}p_{i,-1}x^{i+1},$$

$$\tilde{\Pi}_z(y)=z\sum_{m=0}^{\infty}P^A_{0,m}(z)y^m\sum_{j\geqslant -m}p_{-1,j}y^{j+1},$$

аналогично § 4 имеем основное уравнение

$$\boxed{Q(x,y,z)P^A(x,y,z)=\Pi(x,z)+\tilde{\Pi}(y,z)+\eta^A(x,y)} \qquad (3)$$

ГЛАВА II.

ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА В ЧЕТВЕРТИ-ПЛОСКОСТИ.

§ 1. Теория Нетеровости.

Напомним, что ограниченный линейный оператор A в банаховом пространстве называется оператором Нетера (фредгольмовым оператором), если $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Coker} A$ являются конечномерными линейными пространствами (см. обзор по фредгольмовым операторам в / 5 /).

Рассмотрим оператор A в пространстве ℓ_1 последовательностей $\xi=\{\xi_{ij}\}$, соответствующий уравнению (I), § 4,I:

$$A\xi=\xi'=\Big\{\sum_{k,\ell=0}^{\infty}a_{i-k,j-\ell}\,\xi_{k\ell}\Big\}. \qquad (I)$$

Методом "замораживания коэффициентов" И.Б. Симоненко доказал следующее утверждение (/ 6 /, / 7 /).

Т е о р е м а I. Оператор A является оператором Нетера тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

$$a(x,y)=\sum_{p,q=-\infty}^{\infty}a_{pq}x^p y^q\neq 0 \qquad \text{при } |x|=|y|=1 \qquad (2)$$

$$\operatorname*{ind}_{|x|=1} a(x,1)=\operatorname*{ind}_{|y|=1} a(1,y)=0. \qquad (3)$$

Стандартным приемом доказывается следующее утверждение (см. / II /).

Лемма I. В условиях теоремы I $\operatorname{ind} A=0$.

§ 2. Факторизация.

Рассмотрим кольцо R абсолютно сходящихся рядов вида $z(x,y)=\sum\limits_{i,j=-\infty}^{\infty}z_{ij}x^i y^j$ при $|x|=|y|=1$. Мы будем рассматривать следующие подкольца этого кольца: $R_{++}=R_{\substack{++\\xy}}$ -

множество функций с $z_{ij}=0$, если либо $i<0$ либо $j<0$; R_{+-} – множество функций с $z_{ij}=0$, если либо $i<0$ либо $j\geqslant 0$ и т.д., R_{-+}, R_{+} , ... Введем операторы проектирования на эти подкольца: $P_{++}, P_{+-}, P_{\bar{y}}$ и т.д., где например,

$$P_{\bar{y}}\left[\sum_{i,j=-\infty}^{\infty} z_{ij}x^i y^j\right]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{-1} z_{ij}x^i y^j .$$

Лемма I. Если $z(x,y)\in R$, $z(x,y)\neq 0$ при $|x|=|y|=1$ и

$$\operatorname*{ind}_{|x|=1} z(x,1)=\operatorname*{ind}_{|y|=1} z(1,y)=0, \qquad (I)$$

то $\ln z(x,y)\in R$.

Доказательство. Условия (I) гарантирует возможность выделения однозначной ветви $\ln z(x,y)$. Далее, если например, $z(x,y)$ кусочно-гладкая функция, то доказательство проводится элементарно. В полной общности надо воспользоваться обобщенной теоремой Винера о локально аналитических функциях на пространстве максимальных идеалов кольца R (см. / I2 /).

Теперь можно положить

$$\ln a(x,y)=\sum_{i,j=-\infty}^{\infty} b_{ij}x^i y^j ,$$

$$a_{\underset{x}{+}}(x,y)=\exp\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{ij}x^i y^j\right],$$

$$a_{\bar{x}}(x,y)=\frac{a(x,y)}{a_{\underset{x}{+}}(x,y)},$$

$$a_{++}(x,y)=\exp\left[P_{++}\ln a(x,y)\right] \quad \text{и т.д.}$$

Пусть теперь уравнение (I) § 4 Главы I имеет точный тип $(-1,\infty;-1,\infty)$, причем выполняются условия теоремы I § I. Обозначим $A(x,y)=xy\,a(x,y)$. Тогда для любого $y,|y|=1$,

$$\operatorname*{ind}_{|x|=1} A(x,y)=1$$

и для любого $x,|x|=1$,

$$\operatorname*{ind}_{|y|=1} A(x,y)=1 .$$

Поэтому для любого y с $|y|=1$ существует единственный нуль $A(x,y)$ внутри единичного круга, обозначаемый далее $x_0(y)$. Он имеет первый порядок. Аналогично вводится $y_0(x)$.

Если $a(x,y)$ имеет тип $(-1,n;-1,m)$, где $n,m<\infty$, то $A(x,y)$ – многочлен. Пусть $A=A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_k$ – его разложение на простые множители в кольце $C[x,y]$. Пусть, например, $A_1(x_0(y),y)=0$. Тогда из приведенных выше соображений следует, что $A_i(x_0(y),y)\neq 0$ при $i>1$ для любого y, $|y|=1$.

При этом возможны два случая:

I. (далее называемый случаем неприводимости) для любого $x,|x|=1$,

$$A_1(x,y_0(x))=0 ,$$

2. (случай приводимости) для любого $x,|x|=1$,

$$A_1(x,y_0(x))\neq 0 .$$

Тогда пусть, например, $A_2(x,y_0(x))=0$.

Компоненты факторизации $a(x,y)$ имеют вид:

$$a_{\bar{x}}(x,y)=1-\frac{x_0(y)}{x},\quad a_{\bar{y}}(x,y)=1-\frac{y_0(x)}{y}.$$

§ 3. Обратимость.

Теорема I. Оператор A, соответствующий уравнению (I) § I точного типа $(-1,\infty;-1,\infty)$ является обратимым в пространстве ℓ_1.

Ввиду леммы I § I достаточно доказать, что $\ker A=0$. В § 2 определена для любого y с $|y|=1$ функция $x_0(y)$ такая, что $|x_0(y)|<1$ и $a(x_0(y),y)=0$.

Тогда из уравнения (4) § 4 Гл. I следует, что

$$|\Pi(x_0(y)|=|\widetilde{\Pi}(y)|. \qquad (1)$$

Аналогично,

$$|\Pi(x)|=|\widetilde{\Pi}(y_0(x))|. \qquad (2)$$

Пусть, например,

$$M=\max_{|x|=1}|\Pi(x)|\geqslant\max_{|y|=1}|\widetilde{\Pi}(y)|=\widetilde{M}.$$

Но тогда из принципа максимума модуля и соотношения (2) следует, что во-первых, $M=\widetilde{M}$, и во-вторых, $\widetilde{\Pi}(y)\equiv M$. Отсюда и $\Pi(x)\equiv M$. Но из явного вида (3) для $\widetilde{\Pi}(y)$ следует тогда, что $M=0$. Из (4) следует тогда, что $\xi(x,y)\equiv 0$.

Следствие I. Если операторы A и A_n, $n=1,2,3,\dots$, имеют тип $(-1,\infty;-1,\infty)$, причем $\|A_n-A\|\to 0$, то $\|A_n^{-1}-A^{-1}\|\to 0$, причем

$$\|A_n^{-1}-A^{-1}\|\leqslant\frac{\|A-A_n\|}{1-\|A-A_n\|\cdot\|A\|},$$

если $\|A-A_n\|\|A\|<1$.

Отсюда следует важное замечание, что решения уравнений с нерациональным ядром можно получать, используя уравнения с рациональными ядрами.

§ 4. Случаи разрешимости методом Винера-Хопфа

Теорема I. Если в предположениях теоремы I § I $a(x,y)$ допускает представление вида

$$a(x,y)=a_{++}(x,y)a_{+-}(x,y)a_{-+}(x,y)a_{--}(x,y),$$

где либо $a_{+-}(x,y)\equiv 1$, либо $a_{-+}(x,y)\equiv 1$, то уравнение (I) § 4 Главы I для любого $\eta(x,y)$ имеет единственное решение, задаваемое в явном виде следующим образом (если, например, $a_{+-}(x,y)\equiv 1$):

$$\xi(x,y)=\frac{1}{a_{++}(x,y)}P_{\underset{y}{+}}\left\{\frac{1}{a_{+-}(x,y)}P_{\underset{x}{+}}\left[\frac{\eta(x,y)}{a_{--}(x,y)}\right]\right\}. \qquad (1)$$

Доказательство. Легко получается, если для уравнения (3) § 4 Главы I последовательно осуществить операции правой части уравнения (I).

Примеры.

Условие теоремы I выполняется, если имеет место одно из следующих условий:

I. уравнение (I) § I имеет тип $(0,\infty;-\infty,\infty)$ либо $(-\infty,\infty;0,\infty)$;

2. уравнение (I) § I имеет тип $(-\infty,0;-\infty,\infty)$ либо $(-\infty,\infty;-\infty,0)$;

3. $a(x,y)$ допускает разделение переменных:

$$a(x,y)=a(x)\tilde{a}(y).$$

Легко видеть, что в общем случае формула (I) не дает решения уравнения (I) § 4 Главы I. Можно доказать даже, что формула (I) не дает решения при произвольном точном типе $(-1,m;-1,n)$ с $m,n\geqslant 1$.

§ 5. Операция проектирования на аналитическое множество.

Далее до конца работы будет предполагаться, что уравнение (I) § 4 Главы I имеет точный тип $(-1,n;\,-1,m)$ с $1\leqslant n,m<\infty$.

Обозначим $A=\{(x,y):|x|<1,|y|<1,\ xya(x,y)=0\}$.

Пусть $\bar{A}$ – замыкание главного аналитического множества A, лежащего в $D\times D$:

$$\bar{A}=\left\{(x,y):|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1,\ A(x,y)=0\right\}.$$

Ясно тогда, что решение уравнения (4) § 4 Главы I должно удовлетворять условию

$$xy\eta(x,y)+\Pi(x)+\tilde{\Pi}(y)=0 \qquad (I)$$

при $(x,y)\in\bar{A}$ и, в частности, на границе $\bar{A}\cap[(D\times\Gamma)\cup(\Gamma\times D)]$. Докажем обратное утверждение. Здесь Γ – единичная окружность, D – внутренность единичного круга.

Лемма I. Если существуют аналитические в единичном круге и непрерывные на его границе функции $\Pi(x)$ и $\tilde{\Pi}(y)$, удовлетворяющие соотношению (I) на $\bar{A}\cap[(D\times\Gamma)\cup(\Gamma\times D)]$, то решение уравнения (4) § 4 Главы I определится по формуле

$$\xi(x,y)=\frac{\Pi(x)+\tilde{\Pi}(y)+xy\eta(x,y)}{xya(x,y)}. \qquad (2)$$

Доказательство. Вводя функции $\Pi_1(x)=\dfrac{\Pi(x)-a_{-1,-1}\xi_{\infty}}{x}$ и $\tilde{\Pi}_1(y)=\dfrac{\tilde{\Pi}(y)}{y}$ перепишем уравнение (2) так

$$a(x,y)\xi(x,y)=\Pi_1(x)\frac{1}{y}+\tilde{\Pi}_1(y)\frac{1}{x}+\frac{a_{-1,-1}\xi_{\infty}}{xy}+\eta(x,y). \qquad (3)$$

Отсюда

$$a_{+x}(x,y)\xi(x,y)=\frac{1}{a_{-x}(x,y)}\left[\frac{\Pi_1(x)}{y}+\frac{\tilde{\Pi}_1(y)}{x}+\frac{a_{-1,-1}\xi_{\infty}}{xy}+\eta(x,y)\right] \qquad (4)$$

и

$$0=P_{-x}\left[\frac{1}{a_{-x}(x,y)}\left(\frac{\Pi_1(x)}{y}+\frac{\tilde{\Pi}_1(y)}{x}+\frac{a_{-1,-1}\xi_{\infty}}{xy}+\eta(x,y)\right)\right]. \qquad (5)$$

Аналогично получим

$$0=P_{-y}\left[\frac{1}{a_{-y}(x,y)}\left(\frac{\Pi_1(x)}{y}+\frac{\tilde{\Pi}_1(y)}{x}+\frac{a_{-1,-1}\xi_{\infty}}{xy}+\eta(x,y)\right)\right] \qquad (6)$$

Обратно, если выполнены условия (5) и (6), то функция в правой части формулы (4) принадлежит кольцу R_{+x}. Обозначив ее $\psi(x,y)$ и положив $\xi(x,y)=\dfrac{\psi(x,y)}{a_{+x}(x,y)}$, имеем формулу (2).

Нам остается показать только, что операции проектирования в формулах (5) и (6) эквивалентны операции проектирования на аналитическое множество A.

Лемма 2. Соотношение (I) выполняется тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (5) и (6).

Докажем сначала формулу

$$P_{-y}\left[\frac{1}{1-\frac{y_0(x)}{y}}\omega(y)\right]=\omega(y_0(x))\frac{\frac{y_0(x)}{y}}{1-\frac{y_0(x)}{y}}, \qquad (7)$$

где $\omega(y)\in R_{+y}$.

Действительно, для любого $x,|x|=1$,

$$P_{-y}\left[\frac{1}{1-\frac{y_0(x)}{y}}y^i\right]=P_{-y}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{y_0(x)}{y}\right)^k y^i\right]=$$

3-1590

$$= y_0^i \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y_0(x)}{y} \right)^k .$$

Воспользовавшись теперь линейностью оператора $P_{\bar{y}}$, получим формулу (7).

Рассматривая теперь, например, формулу (6) имеем

$$\frac{\pi_1(x)}{y} \frac{1}{1-\frac{y_0(x)}{y}} + \frac{\tilde{\pi}_1(y_0(x))}{x} \cdot \frac{\frac{y_0(x)}{y}}{1-\frac{y_0(x)}{y}} +$$

$$+ \frac{a_{-1,-1}\xi_{00}}{xy\left(1-\frac{y_0(x)}{y}\right)} + \eta(x,y_0(x)) \frac{y_0(x)}{y} \frac{1}{1-\frac{y_0(x)}{y}} = 0,$$

что совпадает с (I) при $|x|=1, |y_0(x)|<1$.

Из леммы I следует, что все сводится к отысканию функций $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$. Приведем здесь один результат такого рода.

Следствие I. Пусть R_1 и R_2 - римановы поверхности функций $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ соответственно с выколотыми точками ветвления и естественными неразветвленными накрытиями $h_1 : R_1 \to P_x$ и $h_2 : R_2 \to P_y$ *). Предположим также, что $A(x,y)$ и $\eta(x,y)$ являются многочленами. Тогда связная риманова область R, являющаяся областью мероморфности функции $\xi(x,y)$, с естественным неразветвленным накрытием $h : R \to P_x \times P_y$ определяется выражением $R = R_1 \times R_2'$, причем $h(z_1,z_2) = (h_1 z_1, h_2 z_2), z_1 \in R_1, z_2 \in R_2$.

---

*) У P_x и P_y также выколоты соответствующие точки ветвления.

§ 6. Уравнения на римановой поверхности

Далее будет предполагаться, если не оговорено противное, что $a(x,y)$ рациональна и реализуется случай неприводимости (см. § 2). Пусть $A_1(x,y)$ - неприводимый многочлен, для которого $A_1(x_0(y),y) = A_1(x,y_0(x))$; n - степень $A_1(x,y)$ по x, m - степень $A_1(x,y)$ по y.

Уравнение

$$A_1(x,y)=0 \qquad (0)$$

определяет тогда алгебраические функции $y(x)$ и $x(y)$, римановы поверхности которых связны, компактны и конформно эквивалентны. Обозначим соответствующую абстрактную риманову поверхность через S. Как риманова поверхность алгебраической функции $y(x)$ S естественным образом реализуется как разветвленное m-листное накрытие $h_1 : S \to \mathbb{P}$ комплексной сферы $\mathbb{P}$. Аналогично определяется накрытие $h_2 : S \to \mathbb{P}$, соответствующее функции $x(y)$ и имеющее n листов.

Пусть $\mathbb{C}_A(x,y)$ - поле алгебраических функций, определенное уравнением (0). $\mathbb{C}_A(x,y)$ является конечным алгебраическим расширением поля $\mathbb{C}(x)$ рациональных функций от x, а также поля $\mathbb{C}(y)$ рациональных функций от y. $\mathbb{C}_A(x,y)$ естественно изоморфно $\mathbb{C}(S)$, полю мероморфных функций на римановой поверхности S. Функция $x(s)$, соответствующая при этом изоморфизме функции $x(y)$, обладает следующим свойством: если $x(s_1)=x(s_2)$, $s_1,s_2 \in S$, то $h_1 s_1 = h_2 s_2$ и наоборот. Аналогичным свойством (относительно накрытия h_2) обладает функция $y(s)$, соответствующая функции $y(x)$.

Очевидно, что $h_1^{-1}(\Gamma)$ является границей открытого множества $h_1^{-1}(D)$, а $h_2^{-1}(\Gamma)$ - границей для $h_2^{-1}(D)$. Если над Γ нет точек ветвления h_i, то $h_i^{-1}(\Gamma)$ состоит из простых аналитических замкнутых непересекающихся кривых. Точки самопересечения и недифференцируемости могут появляться в точках ветвления h_i на $h_i^{-1}(\Gamma)$. Ввиду наших предположений при $|x|=1$ множество $h_1^{-1}(x)\cap h_2^{-1}(D)$ состоит из одной точки. Следовательно, пересечение $h_1^{-1}(\Gamma)$ с $h_2^{-1}(D)$ не содержит точек ветвления накрытия h_1.

Заметим, что в силу условия (2) § I $h_1^{-1}(\Gamma)\cap h_2^{-1}(\Gamma)=0$ и, таким образом, $h_1^{-1}(\Gamma)\cap h_2^{-1}(D)$ является аналитической простой замкнутой кривой. Обозначим ее Γ_0.

Аналогично определяется $\widetilde{\Gamma}_0=h_2^{-1}(\Gamma)\cap h_1^{-1}(D)$. Положим $G=h_1^{-1}(D)\cap h_2^{-1}(D)$. Ясно, что $\Gamma_0\cup\widetilde{\Gamma}_0$ является границей G.

<u>Лемма I.</u> Пусть род римановой поверхности S не равен нулю и реализуется случай неприводимости. Тогда G является связной областью.

Здесь мы покажем только, что если G несвязна, то Γ_0 и $\widetilde{\Gamma}_0$ гомотопически эквивалентны нулю на G; окончание доказательства проводится также как в лемме I § 8. Действительно, мы уже заметили, что $h_1^{-1}(x)\cap h_2^{-1}(D)$ при $|x|=1$ состоит из одной точки. Кроме того, если G несвязна, то она состоит из двух связных компонент, ограничиваемых соответственно кривыми Γ_0 и $\widetilde{\Gamma}_0$. Компонента G_0, ограничиваемая Γ_0, накрывает единичный круг $\{x:|x|\leq 1\}$. Это накрытие в силу сделанного выше замечания однолистно на границе. Следовательно, оно однолистно везде. Отсюда и следует искомое утверждение.

Обозначим через Δ - объединение связных компонент множества $h_1^{-1}(D)\cup h_2^{-1}(D)$ таких, что они имеют с G непустое пересечение. Ясно, что в условиях леммы I Δ является связной областью. Пусть $\Gamma_1,\Gamma_2,\dots,\Gamma_k\subset h_1^{-1}(\Gamma)$ и $\widetilde{\Gamma}_1,\widetilde{\Gamma}_2,\dots,\widetilde{\Gamma}_\ell\subset h_2^{-1}(\Gamma)$ - связные компоненты границы области Δ. В

случае, если на них нет точек ветвления накрытий h_1 и h_2 соответственно, они являются простыми замкнутыми непересекающимися аналитическими кривыми.

<u>Поднятие функций на накрывающую поверхность.</u>

Пусть дана функция $f(x)$, мероморфная в некоторой области D комплексной сферы $\mathbb{P}$ и риманова поверхность S вместе с разветвленным накрытием $h: S\to\mathbb{P}$. Тогда функция $f(x)$ может быть поднята на область $h^{-1}(D)$ следующим образом:

$$f_h(S)=f(hS)\ ,\quad S\in h^{-1}(D)\ .$$

$f_h(S)$ (обозначаемая далее без индекса h) является мероморфной функцией в $h^{-1}(D)$), что для точек где накрытие разветвлено, проверяется, например, по теореме об устранимых особенностях.

Перенося $\pi(x)$ на $h_1^{-1}(D)$ посредством h_1^{-1}, а $\widetilde{\pi}(y)$ посредством h_2^{-1} на $h_2^{-1}(D)$, получим функции $\pi(S)$ и $\widetilde{\pi}(S)$, определенные на $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$ соответственно, аналитические в этих областях и непрерывные на границах.

Далее для возможности проведения аналитического исследования уравнений мы всегда, если не оговорено противное, будем предполагать, что $\eta(x,y)$ в уравнениях (4) § 4 Гл. I есть многочлен. Тогда можно считать функции $x(S), y(S)$, $\eta(S)=\eta(x(S),y(S))$ определенными на всей S.

Функции $\pi(S)$ и $\widetilde{\pi}(S)$ удовлетворяют на Γ_0 и $\widetilde{\Gamma}_0$ одному и тому же уравнению

$$\pi(S)+\widetilde{\pi}(S)+x(S)y(S)\eta(S)=0\ , \qquad (1)$$

которое получается применением h_1^{-1} и h_2^{-1} к уравнению (4) § 4 Гл. I.

Уравнение (1) допускает, очевидно, аналитическое продолже-

8^x-1590

ние на область G, где определены функции $\Pi(S)$ и $\tilde{\Pi}(S)$ одновременно. Используя уравнение (I) функции $\Pi(S)$ и $\tilde{\Pi}(S)$ можно аналитически продолжить на области $h_2^{-1}(D)\cap\Delta$ и $h_1^{-1}(D)\cap\Delta$ соответственно. Иначе говоря $\Pi(S)$ и $\tilde{\Pi}(S)$ мероморфны в области Δ, причем в этой области выполняется уравнение (I). Обратное утверждение также верно.

Лемма 2. Если в условиях леммы I существуют решения уравнения (I) $\Pi(S)$ и $\tilde{\Pi}(S)$, аналитические соответственно в областях $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$, непрерывные на границе этих областей и такие, что $\Pi(S_1)=\tilde{\Pi}(S_2)$ при $x(S_1)=x(S_2)$ и $\tilde{\Pi}(S_1)=\tilde{\Pi}(S_2)$ при $y(S_1)=y(S_2)$, то решение уравнения (4) § 4 Гл. I дается функциями $\Pi(x)=\Pi(x(s))$ и $\tilde{\Pi}(y)=\tilde{\Pi}(y(s))$.

Действительно, определим $\xi(x,y)$ по формуле (2) § 5. Тогда, заметив, что уравнение (I) § 5 выполняется, для доказательства достаточно использовать лемму I § 5.

§ 7. Точный тип (-I,I; -I,I). Род 0.

В этом и в двух следующих параграфах мы полностью решим уравнения (I) § 4 Гл. I точного типа (-I,I; -I,I). В этом случае, если многочлен $A(x,y)$ неприводим, то род римановой поверхности S равен нулю или единице. В этом параграфе мы разберем случай нулевого рода.

Представим $A(x,y)$ в виде $a(x)y^2+b(x)y+c(x)$. Тогда для того, чтобы S имела род 0 необходимо и достаточно, чтобы дискриминант

$$D(x)=b^2(x)-4a(x)c(x)$$

имел либо вторую степень по x либо имел кратный корень в $\mathbb{C}$.

Лемма I. На $h_i^{-1}(\Gamma)$ нет точек ветвления накрытия h_i, $i=1,2$, и множество $h_i^{-1}(\Gamma)$ несвязно, $i=1,2$, т.е. в D лежит четное число точек ветвления как накрытия h_1, так и накрытия h_2.

Таким образом, так как h_i двулистно, то $h_i^{-1}(\Gamma)$ состоит из двух непересекающихся аналитических простых замкнутых кривых.

Доказательство. Если бы множество $h_1^{-1}(\Gamma)$ было связным, то оно целиком принадлежало бы $h_2^{-1}(D)$ (ибо $h_1^{-1}(\Gamma)\cap h_2^{-1}(\Gamma)=\emptyset$), что в силу условия (3) § I невозможно.

Таким образом возможны следующие четыре случая взаимного расположения $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$.

A) в D лежит ровно две точки ветвления накрытия h_i, $i=1,2$, т.е. $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$ связны (рис. I).

B) в D нет точек ветвления накрытий h_1 и h_2, т.е. $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$ несвязны (рис. 2).

C) в D лежат две точки ветвления h_1 и нет точек ветвления h_2, т.е. $h_1^{-1}(D)$ связна, а $h_2^{-1}(D)$ несвязна.

D) в D есть две точки ветвления h_2, но нет точек ветвления h_1, т.е. $h_2^{-1}(D)$ связна, а $h_1^{-1}(D)$ несвязна (рис. 3). Приведем примеры, когда эти случаи имеют место.

A) $a_{10}=a_{11}=a_{01}=0$. B) $a_{-1,0}=a_{-1,-1}=a_{0,-1}=0$.

C) $a_{10}=a_{1,-1}=a_{0,-1}=0$. D) $a_{01}=a_{-1,1}=a_{-1,0}=0$.

При этом везде $a_{00}=-1$ и остальные a_{ij} положительны, причем их сумма меньше I.

Т е о р е м а I. В случаях C), D) решение $\xi(x,y)$ является рациональной функцией.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\Pi(x)$ и $\tilde{\Pi}(y)$ рациональны. Для этого в свою очередь достаточно показать, что одна из функций $\Pi(S)$ или $\tilde{\Pi}(S)$ может быть мероморфно продолжена на всю риманову поверхность S. Тогда и вторая оказывается мероморфной на S в силу основного уравнения (I) § 6.

Основной прием, которым мы здесь и далее будем пользоваться, это продолжение мероморфных функций с помощью автоморфизмов Галуа. В случае типа (-I,I; -I,I) поле $\mathbb{C}_A(x,y)\sim\mathbb{C}(S)$ является расширением Галуа как поля $\mathbb{C}(x)$ рациональных функций от x так и поля $\mathbb{C}(y)$ рациональных функций от y. Группа Галуа поля $\mathbb{C}_A(x,y)$ над $\mathbb{C}(x)$ является циклической группой второго порядка. Обозначим ее нетривиальный элемент через $\tilde{\xi}$. Аналогично пусть $\tilde{\eta}$ – нетривиальный элемент группы Галуа поля $\mathbb{C}_A(x,y)$ над $\mathbb{C}(y)$. Автоморфизмам Галуа поля $\mathbb{C}(S)$ соответствуют конформные автоморфизмы ξ и η римановой поверхности :

$$\tilde{\xi}f(S)=f(\xi S),\quad \tilde{\eta}f(S)=f(\eta S),\quad f\in\mathbb{C}(S).$$

Явный вид автоморфизмов Галуа ξ и η в случае точного типа (-I,I; -I,I) дается формулами

$$\xi y=\frac{a_{1,-1}x^2+a_{0,-1}x+a_{-1,-1}}{y(a_{11}x^2+a_{01}x+a_{-1,1})},\quad \eta x=\frac{a_{-1,1}y^2+a_{-1,0}y+a_{-1,-1}}{x(a_{11}y^2+a_{10}y+a_{1,-1})}$$

Перейдем к доказательству теоремы в случае C). Обозначим $\tilde{D}_0$ и $\tilde{D}_1$ – компоненты $h_2^{-1}(D)$, ограниченные соответственно $\tilde{\Gamma}_0$ и $\tilde{\Gamma}_1$. Область $\Delta=h_1^{-1}(D)\cup\tilde{D}_0$ связна и также как в § 6 получаем, что $\Pi(S)$ и $\tilde{\Pi}(S)$ мероморфны в Δ.

Заметим теперь, что $\xi_0\Gamma_0=\Gamma_1$. Поэтому $\xi(\Delta-\overline{h_1^{-1}(D)})=S\setminus\Delta$ и тогда $\Delta\cup\xi\Delta=S$. Из последнего соотношения вытекает, что так как $\Pi(\xi S)=\Pi(S)$, то $\Pi(S)$ продолжается на всю S. Случай D) рассматривается аналогично.

<u>Явный вид решения в случае C) (и D)).</u>

В случае C) обозначим $S_1,\dots,S_K$ ($K\leqslant 4$) – полюса функции $-xy\eta(x,y)$ правой части формулы (I) § 6 в области

$\Delta\setminus h_1^{-1}(D)$, а через $\varphi(S-S_i)$ – главные части этой функции в точках S_i (будем считать, что S – униформизирующая переменная на S). Тогда

$$\Pi(S)=\sum_{i=1}^{K}\varphi_i(S-S_i)+\sum_{i=1}^{K}\xi\varphi_i(S-S_i)+\mathrm{const},\qquad (1)$$

$$\tilde{\Pi}(S)=-x(S)\,y(S)\,\eta(S)-\Pi(S).\qquad (2)$$

Действительно, $\Pi(S)$ должна быть аналитична в $h_1^{-1}(D)$, но может иметь полюса в $\Delta\setminus h_1^{-1}(D)$, так как $\tilde{\Pi}(S)$ в этой области аналитична. Так как $h_1^{-1}(D)$ связна, то $\Pi(S)$ инвариантна относительно ξ (что и использовалось в доказательстве теоремы I), откуда и следует формула (I). Заметим что $\tilde{\Pi}(S)$ не обязана быть инвариантна относительно η.

Переходим к рассмотрению случая B).

Теорема 2. Выберем D_1 – одну из связных компонент области $h_1^{-1}(D)\cup h_2^{-1}(D)$, и пусть функции $\Pi(S)$ и $\tilde{\Pi}(S)$ определенные на этой компоненте, удовлетворяют уравнению (I) § 6. Тогда $\Pi(S)$ и $\tilde{\Pi}(S)$ мероморфно продолжимы на всю S с выколотой точкой S_1, являющейся неподвижной точкой автоморфизма $\xi\eta$ и не принадлежащей D_1. При этом (D_1 ограничена Γ_1):

$$\tilde{\Pi}(S)=\sum_{K=1}^{\infty}\left[A(\xi\delta^{-K}S)-A(\delta^{-K}S)\right]+\mathrm{const},$$

$$A(S)=-x(S)\,y(S)\,\eta(S),\qquad (3)$$

$$\Pi(S)=-x(S)\,y(S)\,\eta(S)-\tilde{\Pi}(S),\qquad (4)$$

причем ряд в правой части абсолютно сходится в любой конечной части плоскости $S\setminus\{S_1\}$ за исключением конечного числа точек в этой конечной части, которые являются полюсами одного из членов ряда.

Доказательство. Заметим сначала, что группа $\mathcal{H}$ автоморфизмов, порожденная ξ и η, является некоторой подгруппой группы дробнолинейных преобразований S. Обозначим $D_0, D_1, \tilde{D}_0, \tilde{D}_1$ – области, принадлежащие $h_1^{-1}(D) \cup h_2^{-1}(D)$ и ограниченные $\Gamma_0, \Gamma_1, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1$ соответственно. Имеем (см. рис. 2):

$$D_0 \subset \tilde{D}_1,\ \tilde{D}_0 \subset D_1,\ \xi D_0 = D_1,\ \eta \tilde{D}_0 = \tilde{D}_1 .$$

Построим индуктивно две последовательности областей:

$$D_0 \subset \tilde{D}_1 \subset \eta D_1 \subset \eta\xi\tilde{D}_1 \subset \dots \subset \eta(\xi\eta)^k D_1 \subset (\eta\xi)^{k+1}\tilde{D}_1 \subset \dots ,$$

$$\tilde{D}_0 \subset D_1 \subset \xi\tilde{D}_1 \subset \xi\eta D_1 \subset \dots \subset \xi(\eta\xi)^k \tilde{D}_1 \subset (\xi\eta)^{k+1} D_1 \subset \dots .$$

Отношения принадлежности в этих цепочках легко проверяются по индукции.

Заметим теперь, что преобразование $\xi\eta$ (а следовательно и $(\xi\eta)^n$) является либо гиперболическим либо локсодромическим. Действительно, при параболическом или эллиптическом преобразовании образ ограниченного связного открытого множества (им можно считать D_1) не может строго содержать свой прообраз. При этом одна неподвижная точка $\xi\eta$ – s_1, принадлежит D_0, а вторая $s_2 - \tilde{D}_0$; $\xi s_1 = \eta s_1 = s_2$.

Отсюда следует, что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (\eta\xi)^k \tilde{D}_1 = S \setminus \{s_2\} \quad \text{и} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} (\xi\eta)^k D_1 = S \setminus \{s_1\}.$$

Обозначим поднятие функций $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ на D_1 через $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$, а на $\tilde{D}_1$ через $\Pi(s)$ и $\tilde{\Pi}(s)$ соответственно. Тогда имеем $\pi(\xi s) = \Pi(s)$, $\tilde{\pi}(\eta s) = \tilde{\Pi}(s)$, $s \in \tilde{D}_1$. Используя эти соотношения и уравнение (I) § 6 по индукции мероморфно продолжаем $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ на области $(\xi\eta)^k D_1$, а Π и $\tilde{\Pi}$ на $(\eta\xi)^k \tilde{D}_1$, откуда и получается первое утверждение теоремы.

Для получения явного представления решения в случае B) рассмотрим уравнение

$$\pi(s) + \tilde{\pi}(s) = A(s),$$

или

$$\Pi(\xi s) + \tilde{\pi}(s) = A(s), \qquad (5)$$

Но

$$\Pi(\xi s) + \tilde{\Pi}(\xi s) = A(\xi s),$$

или

$$\Pi(\xi s) + \tilde{\pi}(\eta\xi s) = A(\xi s). \qquad (6)$$

Сравнивая уравнения (5) и (6), получим

$$\tilde{\pi}(\eta\xi s) - \tilde{\pi}(s) = A(\xi s) - A(s). \qquad (7)$$

Формальным решением последнего уравнения является ряд

$$\tilde{\pi}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A(\xi\delta^{-k}s) - A(\delta^{-k}s) \right] + \mathrm{const},$$

где $\delta = \eta\xi$. Докажем, что этот ряд определяет мероморфную функцию на $S \setminus \{s_1\}$. Для этого достаточно доказать, что этот ряд сходится в любой точке, отличной от полюса любого из членов этого ряда. Считая $\tilde{\pi}(s_2) = 0$, перепишем соотношение (7) следующим образом

$$\tilde{\pi}(s) - \tilde{\pi}(\delta^{-1}s) = A(\xi\delta^{-1}s) - A(\delta^{-1}s),$$

и т.д.,

$$\tilde{\pi}(s) - \tilde{\pi}(\delta^{-k}s) = \sum_{i=1}^{k} \left[A(\xi\delta^{-i}s) - A(\delta^{-i}s) \right].$$

Для любого $s \neq s_1$ имеем $\lim_{k \to \infty} \tilde{\pi}(\delta^{-k}s) = \tilde{\pi}(s_2) = 0$. Поэтому ряд в правой части (3) должен сходиться.

Заметим далее, что $A(\xi s)-A(s)$ не имеет полюсов в области $\tilde{D}_0$. Для $A(s)$ это следует из того, что ни π ни $\tilde{\pi}$ не могут иметь полюсов в $\tilde{D}_0$, а для $A(\xi s)$ - из того, что ни Π ни $\tilde{\Pi}$ не могут иметь полюсов в области $D_0=\xi D_1$. Положим $s_2=0,\ s_1=\infty$. Тогда если $B(s)=A(\xi s)-A(s)$, то $B(0)=0$, и так как $B(s)$ не имеет полюсов в точках 0 и ∞, то ее можно представить в виде линейной комбинации членов вида $\frac{cs^m}{(\delta-s)^n},\ n>m\geqslant 1$. Но тогда мероморфность ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} B(\varepsilon^{-k}s),\ |\varepsilon|>1$, очевидна.

Симметричным образом получаем

$$\Pi(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A(\eta\tilde{\delta}^{-k}s)-A(\tilde{\delta}^{-k}s)\right]+\mathrm{const},\ \tilde{\delta}=\xi\eta.$$

Полагая $\pi(s)=\Pi(\xi s)$ и $\tilde{\Pi}(s)=\tilde{\pi}(\eta s)$, проверка соотношения (I) § 6 производится очевидным образом.

Случай $A)$ рассматривается в основном аналогично предыдущему. Поэтому мы ограничимся формулировкой следующей теоремы.

<u>Теорема 3</u>. Обозначим через s_1 и s_2 - точки обладающие свойствами $\xi s_1=\eta s_1=s_2$ (или $A(x(s),y(s))=A_x(x(s),y(s))=A_y(x(s),y(s))$). Тогда $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ мероморфно продолжаются на $S\setminus\{s_1,s_2\}$.

Для приведенного выше примера $A)$ с $a_{10}=a_{11}=a_{01}=0$ отметим также следующий факт. В этом случае $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ рациональны (более того, являются многочленами от x и y соответственно). Действительно, уравнение

$$\pi(x)+\tilde{\pi}(y)=x^ny^m \mod (a_{-1,-1}+a_{-1,0}y+a_{0,1}x+a_{00}xy+a_{-1,1}y^2+a_{1,-1}x^2)$$

разрешимо для любых $m,n\geqslant 0$. Будем проводить индукцию по $k=n+m$. Пусть это утверждение доказано для всех n,m таких, что $n+m<k$. Докажем, что тогда x^ny^m с $n+m=k$

можно выразить линейно через x^k,y^k и члены x^ny^m с $n+m<k$ *) по $\mod A(x,y)$. Для этого запишем

$$a_{1,-1}x^{n+1}y^{k-n-1}+a_{00}x^ny^{k-n}+a_{-1,1}x^{n-1}y^{k-n-1}=O(k). \qquad (8)$$

Для данного $n=n_0$, кроме соотношения (8) для $n=n_0$, из соотношений (8) для $n>n_0$ можно получить

$$x^{n_0}y^{k-n_0}+c_1x^{n_0-1}y^{k-n_0+1}=O(k)+y^k,$$

а из соотношений (8) для $n<n_0$

$$x^{n_0}y^{k-n_0}+c_1x^{n_0+1}y^{k-n_0-1}=O(k)+x^k,$$

Из соотношения (8) и двух последних соотношений непосредственно следует утверждение. Особый случай возникает при $n=2,3$, который, однако, рассматривается также без труда.

§ 8. <u>Точный тип (-I,I; -I,I). Род I.</u>

Если S имеет род I, то на P имеется четыре точки ветвления как накрытия h_1 так и h_2.

Лемма I. У накрытия h_i ($i=1,2$) ровно две точки ветвления лежат внутри D и ровно две - вне D. При этом для любого i $h_i^{-1}(\Gamma)$ состоит из двух непересекающихся аналитических простых замкнутых кривых.

Доказательство. То, что внутри D лежит четное число точек ветвления h_i, а также вторая часть леммы, доказывается также как лемма I § 7.

Если внутри D нет ни одной точки ветвления h_1, то обе компоненты $h_1^{-1}(\Gamma)$, обозначаемые Γ_0 и Γ_1, ограничивают стягиваемые области D_0 и D_1 на торе соответственно.

---

*) Обозначаемые далее через $O(k)$.

При этом у h_2 могут быть следующие возможности для числа точек ветвления внутри D.

I. Две точки ветвления внутри D. Но тогда, как следует из построения накрывающей римановой поверхности $h_2: S \to P$, $\tilde{\Gamma}_0$ и $\tilde{\Gamma}_1$ негомотопны нулю и ни одна из них не может целиком принадлежать D_0 или D_1.

2. Ни одной точки ветвления внутри D. Тогда

$$D_0 \subset \tilde{D}_1, \tilde{D}_0 \subset D_1, \xi D_0 = D_1, \eta \tilde{D}_0 = \tilde{D}_1. \qquad (I)$$

Введем на торе риманову метрику, индуцированную метрикой на универсальной накрывающей. Тогда автоморфизмы Галуа ξ и η должны сохранять площади, что противоречит соотношениям (I).

3. Четыре точки ветвления внутри D. Тогда $\tilde{\Gamma}_0$ и $\tilde{\Gamma}_1$ также гомотопны нулю и ограничивают стягиваемые области $\tilde{D}_0'$ и $\tilde{D}_1'$, причем $\tilde{D}_0' \cup \tilde{D}_1' = S \setminus h_2^{-1}(D)$. Аналогично должно быть $\tilde{\Gamma}_0 \subset D_0, D_1 \subset \tilde{D}_1'$, и, следовательно, $\tilde{D}_0' \subset D_0$, $D_1 \subset \tilde{D}_1'$, и мы приходим к противоречию также как и в случае 2.

Остается случай, когда h_1 и h_2 имеют внутри D четыре точки ветвления. В очевидных обозначениях тогда должно быть $D_1' \subset D_0, D_1 \subset D_0'$ и далее аналогично случаю 2.

Следствие I. Кривые $\Gamma_0, \Gamma_1, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1$ гомотопны одному из элементов нормального базиса гомологий на торе.

Таким образом, расположение областей $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$ имеет вид рис. 4.

Доказательство. То, что Γ_0 и Γ_1 гомотопны одному из элементов нормального базиса гомологий, очевидно из построения накрывающей римановой поверхности. Аналогичное утверждение верно для $\tilde{\Gamma}_0$ и $\tilde{\Gamma}_1$. Докажем, что Γ_0 гомотопно $\tilde{\Gamma}_0$. Но это следует из того, что Γ_0 не пересекается с $\tilde{\Gamma}_0$, и, следовательно, не может быть гомотопно другому элементу нормального базиса гомологий на торе.

Напомним, что также как и в случае рода 0, группы Галуа расширений $\mathbb{C}_A(x,y)$ над $\mathbb{C}(x)$ и $\mathbb{C}_A(x,y)$ над $\mathbb{C}(y)$ являются циклическими второго порядка, причем явный вид их задается формулами на стр. 40.

Универсальной накрывающей для S является комплексная плоскость $\mathbb{C}$. Пусть при этом фиксировано некоторое неразветвленное накрытие $\lambda: \mathbb{C} \to S$. Из теории униформизации известно, что S можно рассматривать как комплексную группу Ли, являющуюся фактор-группой аддитивной группы $\mathbb{C}$ по дискретной подгруппе $\{n\omega_1 + m\omega_2\}$, где периоды ω_1 и ω_2 линейно независимы над полем вещественных чисел R, n и m – целые.

При накрытии λ любой отрезок длины $|\omega_i|$ и параллельный вектору ω_i проектируется в замкнутую кривую на S, класс гомологий которой является одним из элементов нормального базиса на S. Мы предположим без ущерба для общности, что $\lambda([0,\omega_1])$ гомологична Γ_0, а, следовательно, по следствию I и всем $\Gamma_1, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1$. Рассмотрим некоторую полосу

$$\Pi = \{\omega : \omega = \mu\omega_1 + \nu\omega_2, \mu, \nu \in R, 0 \leq \mu < 1\}.$$

Прообраз $\lambda^{-1}\Delta$ будет состоять из счетного числа связных криволинейных полос, сдвинутых друг относительно друга на вектора, кратные ω_2, а $\lambda^{-1}\Delta \cap \Pi$ состоит из некоторой связной области $(\lambda^{-1}\Delta)_0 \cap \Pi$ и ее сдвигов $[(\lambda^{-1}\Delta)_0 \cap \Pi] + n\omega_2$, где n – любое целое число. Область $(\lambda^{-1}\Delta)_0$ мы далее фиксируем и обозначаем Δ_0. $\Delta_0 \cap \Pi$ является одной из связных компонент $\lambda^{-1}\Delta$ в полосе Π (она изображена на рис. 5; далее везде, где это не будет вести к недоразумениям, обозначаем прообразы кривых и областей в Δ_0, опуская λ^{-1}).

Любая функция, заданная в области Δ, может быть поднята на область Δ_0 по формуле

$$f_\lambda(\omega) = f(\lambda\omega)\ , \quad \lambda\omega \in \Delta .$$

Перенесем этим способом функции $x(s), y(s), \Pi(s), \tilde{\Pi}(s)$ на Δ_0. Функции $x(\omega), y(\omega)$ и $\eta(\omega) = \eta(x, y)$ оказываются при этом эллиптическими с периодами ω_1 и ω_2, мероморфными на всем $\mathbb{C}$ (индекс λ у перенесенных таким образом функций будем в дальнейшем опускать). При этом $\Pi(\omega)$ и $\tilde{\Pi}(\omega)$ определены в действительности на Δ_0, где они удовлетворяют уравнениям

$$\Pi(\omega) = \Pi(\omega + \omega_1)\ , \tag{I}$$

$$\tilde{\Pi}(\omega) = \tilde{\Pi}(\omega + \omega_1)\ , \tag{2}$$

$$\Pi(\omega) + \tilde{\Pi}(\omega) = -x(\omega)y(\omega)\eta(\omega) . \tag{3}$$

Пусть x_1 и x_2 - точки ветвления алгебраической функции $y(x)$, лежащие внутри единичного круга. Прообразы точек $h_1^{-1}(x_1)$ и $h_2^{-1}(x_2)$ в области Δ_0 обозначим a_1 и a_2. Произвольный конформный автоморфизм $\tilde{\varsigma}$ римановой поверхности S может быть продолжен до конформного автоморфизма $\varsigma = \lambda^{-1}\varsigma\lambda$ универсальной накрывающей (см. / 9 /). Это продолжение конечно, неоднозначно. Однако, оно становится однозначным, если фиксировать образ некоторой точки $\omega \in \mathbb{C}$ при автоморфизме ς (этот образ должен принадлежать множеству $\{\lambda^{-1}\varsigma\lambda\omega\}$).

Для автоморфизма Галуа ξ ввиду этого мы потребуем, чтобы точка a_1 была неподвижной точкой этого автоморфизма: $\xi a_1 = a_2$. Тогда в системе координат с началом в точке a_1

$$\xi\omega = -\omega .$$

Действительно, известно, что самый общий конформный автоморфизм ς комплексной плоскости $\mathbb{C}$ представляется в виде: $\varsigma\omega = a\omega + b$. Так как начало координат является неподвижной точкой, то $b = 0$.

Но $\xi^2 = 1$, откуда $a^2 = 1$ и $a = -1$.

Аналогично определим $b_i = \Delta_0 \cap \Pi \cap \{\lambda^{-1} h_2^{-i}(y_i)\}$, $i = 1, 2$, где y_1, y_2 - точки ветвления алгебраической функции $x(y)$, лежащие внутри единичного круга, и поднятие автоморфизма Галуа η на универсальную накрывающую: $\eta\omega = -\omega$ в системе координат с началом в точке b_1.

Лемма 2.

$$\xi\eta\omega = \omega + \omega_3\ , \quad \text{где } \omega_3 = 2(a_1 - b_1),$$

т.е. произведение автоморфизмов Галуа есть сдвиг на вектор, равный удвоенному расстоянию между их неподвижными точками.

Замечание. Аналогично можно доказать, что

$$a_1 - a_2 = \pm\frac{\omega_1}{2}\ , \quad b_1 - b_2 = \pm\frac{\omega_1}{2} .$$

Теорема I. Функции $\Pi(\omega)$ и $\tilde{\Pi}(\omega)$ мероморфно продолжаются на всю универсальную накрывающую.

Доказательство. Ввиду соотношений (I) и (2) достаточно ограничиться полосой Π или рассматривать некомпактную риманову поверхность S', являющуюся фактором $\mathbb{C}$ по $\{n\omega_1\}$, топологически эквивалентную бесконечному цилиндру. Так как $\eta\Gamma_0 \subset h_2^{-1}(D)$, то $\eta\xi\Gamma_1 \subset \Delta_0$, и, следовательно, $\Delta_0 \cap (\eta\xi)\Delta_0 \neq 0$. Ввиду того, что $\eta\xi$ есть сдвиг на $-\omega_3$, объединение областей $(\eta\xi)^n\Delta_0, n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots,$ покрывает все $\mathbb{C}$. Отсюда можно показать, что $\Pi(\omega)$ и $\tilde{\Pi}(\omega)$ продолжаются вдоль любого пути на $\mathbb{C}$ и с помощью теоремы о монодромии завершить доказательство теоремы.

Рассмотрим риманову поверхность $\tilde{S}$, являющуюся фактором $\mathbb{C}$ по $\{n\omega_1 + m\omega_3\}$, т.е. область $\tilde{\Delta}_0$ между Γ_1 и $\eta\Gamma_0$, принадлежащую $\Delta_0 \cap \Pi$, с отождествленными границами. Будем далее отождествлять Γ_1 и $\eta\Gamma_0$. Определим кусочно-аналитическую функцию на $\widetilde{S}$:

$$\Pi(\omega)=\begin{cases}\mathcal{T}(\omega), & \omega\in h_1^{-1}(D)\setminus\widetilde{G},\\ -\widetilde{\mathcal{T}}(\omega), & \omega\in\widetilde{\Delta}_0\cap h_2^{-1}(D).\end{cases}$$

Таким образом, получаем краевую задачу Римана на римановой поверхности $\widetilde{S}$ (см. например, / I4 /): найти кусочно аналитическую функцию $\Pi(\omega)$ со скачками

$$\Pi_+(\omega)-\Pi_-(\omega)=x(\xi\omega)y(\xi\omega)\eta(\xi\omega),\omega\in\Gamma_1; \qquad (4)$$

$$\Pi_+(\omega)-\Pi_-(\omega)=-x(\omega)y(\omega)\eta(\omega),\quad \omega\in\widetilde{\Gamma}_0.$$

(Мы выбираем направление обхода $\Gamma_1=\eta\Gamma_0$ и $\widetilde{\Gamma}_0$ на $\widetilde{S}$ по направлению ω_1 и через Π_+ обозначаем значения Π слева, а через Π_- - справа от соответствующей кривой).

Рассмотрим теперь ζ - функцию Вейерштрасса

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum_{n^2+m^2\neq 0}\left[\frac{1}{u-n\omega_1-m\omega_3}+\frac{1}{n\omega_1+m\omega_3}+\frac{u}{(n\omega_1+m\omega_3)^2}\right].$$

Выберем при этом начало координат в точке a_1, тогда $\zeta(u)$ нечетна относительно a_1,a_2,b_1,b_2.

Теорема 2.

$$\Pi(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1\cup\widetilde{\Gamma}_0}\zeta(\omega-\tau)A(\tau)d\tau; \qquad (5)$$

$$\mathcal{T}(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\left[-\zeta(\omega-\tau)+\zeta(\omega+\tau)\right]x(\tau)y(\tau)\eta(\tau)d\tau, \qquad (6)$$

где

$\omega\in h_1^{-1}(D)\setminus\overline{G}$ и

$$A(\tau)=\begin{cases}x(\xi\tau)y(\xi\tau)\eta(\xi\tau), & \tau\in\Gamma_1,\\ -x(\tau)y(\tau)\eta(\tau), & \tau\in\widetilde{\Gamma}_0.\end{cases}$$

Доказательство. Функция $\Pi(\omega)$, даваемая выражением (5), является кусочно аналитической, имеет разрывы на кривых $\Gamma_1+n\omega_3$, $\widetilde{\Gamma}_0+n\omega_3$, скачки на которых согласуются с формулами (4), что легко проверяется, используя формулы Сохоцкого. Достаточно доказать таким образом, что $\Pi(\omega)$ имеет периоды ω_1 и ω_3. Так как

$$\zeta(\omega+\omega_1)=\zeta(\omega)+\eta_1,\quad \zeta(\omega+\omega_3)=\zeta(\omega)+\eta_3,$$

где η_1,η_3 - константы, то для этого достаточно доказать, что из первого интегрального представления в формуле (5) следует второе(6), так как ядро второго выражения есть эллиптическая функция.

Заметим, что $z(\tau)=x(\tau)y(\tau)\eta(\tau)$ не имеет полюсов в G имеем

$$\int_{\widetilde{\Gamma}_0}\zeta(\omega-\tau)A(\tau)d\tau=-\int_{\widetilde{\Gamma}_0}\zeta(\omega-\tau)z(\tau)d\tau=-\int_{\Gamma_0}\zeta(\omega-\tau)z(\tau)d\tau,$$

$$\int_{\Gamma_1}\zeta(\omega-\tau)z(\xi\tau)d\tau=-\int_{\Gamma_1}\zeta(-\omega-\xi\tau)z(\xi\tau)d\tau=$$

$$=-\int_{\Gamma_0}\zeta(-\omega-\tau)z(\tau)d\tau=\int_{\Gamma_0}\zeta(\omega+\tau)z(\tau)d\tau.$$

Мы должны заметить также, что решение задачи (4) единственно с точностью до константы, ибо разность двух подобных решений аналитична на всей $\widetilde{S}$.

Константа в формуле (5) определяется из условия $\widetilde{\mathcal{T}}(y(s))=0$ при $y(s)=0$.

§ 9. Точный тип (-I,I; -I,I).

Случай приводимости.

Пусть $A(x,y)$ приводим. Тогда с точностью до перестановки x и y возможны следующие случаи.

I. $A(x,y)=A(x)\tilde{A}(y)$, где $A(x)$ и $\tilde{A}(y)$ зависят лишь от x и от y соответственно. Этот случай разобран в § 4.

2. $A(x,y)=B(x,y)C(y)$, где $C(y)$ зависит лишь от y и имеет по y первую степень.

Этот случай также сводится к разобранному в § 4. Действительно, если $C(y)=y+c$, где $|c|>1$, то $B(x,y)=b_1(x)y+b_2(x)$ и можно выбрать факторизацию так, чтобы $a_{-+}(x,y)\equiv 1$. Случай $|c|<1$ разбирается аналогично.

3. $A(x,y)=A_1(x,y)A_2(x,y)$, где A_1 и A_2 - многочлены первой степени как по x, так и по y.

Пусть сначала

3А) $A_1(x_0(y),y)=A_1(x,y_0(x))=0$

Если $A_1(x,y)=(cx+d)y+ax+b$, то это возможно, например, когда $|c|$ велико по сравнению с модулями остальных коэффициентов.

Предложение I. В случае 3А) $\Pi(x)$ и $\tilde{\Pi}(y)$ рациональны.

Доказательство. Рассмотрим риманову поверхность S рода 0, определенную уравнением $A_1(x,y)=0$, с однолистными неразветвленными накрытиями $h_1: S\to\mathbb{P}$ и $h_2: S\to\mathbb{P}$. Области $h_i^{-1}(D)$ однолистно накрывают D, и так как $h_1^{-1}(\Gamma)\subset h_2^{-1}(D)$, $h_2^{-1}(\Gamma)\subset h_1^{-1}(D)$, то $h_1^{-1}(D)\cup h_2^{-1}(D)=S$.

Отсюда и следует рациональность Π и $\tilde{\Pi}$.

Явный вид решения в случае 3А).

Функция $-xy\eta(x,y)$ должна иметь ровно два полюса на S, причем один $y(s)=y_0$ - в области $h_1^{-1}(D)$, а второй $x(s)=x_0$ - в области $h_2^{-1}(D)$. Обозначая главные части в этих полюсах через $\Pi(y)$ и $\Pi(x)$ соответственно будем иметь решение с точностью до констант, причем константа определяется, например, из условия $\Pi(0)=0$.

3Б) $A_1(x_0(y),y)=A_2(x,y_0(x))=0$

В этом случае рассмотрим две римановы поверхности:

S_1, определяемую уравнением $A_1(x,y)=0$, с накрытиями $h_{11}: S_1\to\mathbb{P}$ и $h_{12}: S_2\to\mathbb{P}$;

S_2, определяемую $A_2(x,y)=0$ с накрытиями $h_{21}: S_2\to\mathbb{P}$ и $h_{22}: S_2\to\mathbb{P}$.

Имеем, очевидно, $h_{12}(D)\subset h_{11}^{-1}(D)$, $h_{21}^{-1}(D)\subset h_{22}^{-1}(D)$.

Поднятия $\Pi(x)$ и $\tilde{\Pi}(y)$ на S_1 обозначим $\Pi(S)$ и $\tilde{\Pi}(S)$, а на S_2 - $\Pi(t)$ и $\tilde{\Pi}(t)$ соответственно. $h_{11}^{-1}(D)$ и $h_{21}^{-1}(D)$ естественно конформно эквивалентны (как прообразы D).

Обозначим этот изоморфизм через $\xi: h_{11}^{-1}(D)\to h_{21}^{-1}(D)$.

Аналогично вводится $\eta: h_{22}^{-1}(D)\to h_{12}^{-1}(D)$. Будем считать ξ и η продолженными до конформных изоморфизмов $\xi: S_1\to S_2$ и $\eta: S_2\to S_1$.

Так же, как и в случае В) § 7 $\xi\eta$ оказывается гиперболическим или локсодромическим и строится последовательность областей

$$D_1=h_{11}^{-1}(D)\subset D_2\subset \ldots \subset D_K\subset \ldots ,$$

где $D_K=(\eta\xi)^K D_1$.

При этом функции $\Pi(S)$ и $\tilde{\Pi}(S)$ мероморфно продолжаются на $S_1\setminus\{s_1\}$, где s_1 - неподвижная точка автоморфизма $\eta\xi$, лежащая вне D_1.

Явный вид функций получается аналогично случаю В) § 7 и мы не будем его здесь выписывать.

4^x-1590

§ 10. Построение расширений Галуа на универсальной накрывающей.

Далее всегда будет предполагаться, что реализуется случай неприводимости (см. § 2) и род римановой поверхности S $g \geq 2$. Далее используются терминология и результаты монографии / 4* / (см. также / 9 /, / 13 /).

Пусть $\mathbb{D}$ - неевклидова плоскость Лобачевского, реализованная как внутренность единичного круга. $\mathbb{D}$ является универсальной накрывающей для S с фиксированным накрытием $\lambda : \mathbb{D} \to S$ и группой преобразований наложения $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ является дискретной фуксовой группой первого рода движений плоскости Лобачевского, состоящей лишь из гиперболических элементов.

Рассмотрим прообраз $\lambda^{-1}\Delta$ связной (см. лемму I § 6) области Δ. Рассмотрим одну из связных компонент Δ. Именно, фиксируем прообраз ω_0 некоторой точки $S_0 \in \Delta$ и рассмотрим компоненту $\Delta_0 \subset \lambda^{-1}\Delta$, содержащую ω_0.

Пусть точка ω_1 такова, что $\lambda\omega_1 = \lambda\omega_0 = S_0$, а C_{01} - произвольная кривая на $\mathbb{D}$, соединяющая ω_0 и ω_1. Тогда обозначим через $[\lambda C_{01}]$ - элемент фундаментальной группы $\pi_1(S, S_0)$, соответствующий кривой λC_{01}. Очевидно, что этот элемент не зависит от C_{01} при данном ω_1, но различен для разных ω_1. Таким образом, получаем изоморфизм $\varphi : \mathcal{F} \to \pi_1(S, S_0)$, причем если $\omega_1 = f\omega_0, f \in \mathcal{F}$, то $\varphi(f) = [\lambda C_{01}]$.

Рассмотрим теперь всевозможные точки $\omega_i \in \Delta_0$ такие, что $\lambda\omega_i = S_0$. Множество $f_i \in \mathcal{F}$ таких, что $f_i\omega_0 = \omega_i$ образует подгруппу $\mathcal{F}_0 < \mathcal{F}$, причем имеется канонический гомоморфизм $\psi : \mathcal{F}_0 \to \pi_1(\Delta, S_0)$, и коммутативна следующая диаграмма :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_0 & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(\Delta, S_0) \\ \cap\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \pi_1(S, S_0) \end{array}$$

(Очевидно, что $\mathcal{F}_0$ не зависит от выбора точки S_0). Граница области Δ_0 состоит из кусочно-аналитических кривых, являющихся прообразами $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_\ell$ (см. § 6).

Эти прообразы мы будем обозначать $\lambda_0^{-1}\Gamma_1, \dots, \lambda_0^{-1}\Gamma_k, \dots, \lambda_0^{-1}\tilde{\Gamma}_\ell$ соответственно. Если на $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k, \dots, \tilde{\Gamma}_\ell$ нет точек ветвления накрытий h_1 или h_2 соответственно, то $\lambda_0^{-1}\Gamma_1, \dots, \lambda_0^{-1}\Gamma_k, \lambda_0^{-1}\tilde{\Gamma}_1, \dots, \lambda_0^{-1}\tilde{\Gamma}_\ell$ аналитичны.

Лемма I. Если Γ_i аналитична, то существует неевклидово движение g_i такое, что $g_i(\lambda_0^{-1}\Gamma_0) = \lambda_0^{-1}\Gamma_i$. Если же Γ_i не аналитична, то существует конечное число неевклидовых движений (гиперболических или эллиптических) $g_{i1}, \dots, g_{in}$, что $\bigcup_{j=1}^{n} g_{ij}\lambda_0^{-1}\Gamma_0 = \lambda_0^{-1}\Gamma_i$.

Для доказательства построим наименьшее расширение Галуа $G_x(S)$ поля $\mathbb{C}(x)$, содержащее расширение $\mathbb{C}(S)$ этого поля. Тогда $G_x(S)$ является расширением Галуа также и поля $\mathbb{C}(S)$. Пусть $\mu = G_x(S) : \mathbb{C}(S)$ - степень этого расширения.

Тогда (см. / 4* /, стр. 263-265) существует нормальный делитель $\mathcal{F}_x$ группы $\mathcal{F}$ индекса μ такой, что поле автоморфных функций для группы $\mathcal{F}_x$ изоморфно $G_x(S)$. Соответствующая риманова поверхность $S_x = \mathbb{D}/\mathcal{F}_x$ является (вообще говоря разветвленным) μ -листным накрытием римановой поверхности $S = \mathbb{D}/\mathcal{F}$.

Группа Галуа J'_x поля $G_x(S)$ над $\mathbb{C}(S)$ изоморфна $\mathcal{F}/\mathcal{F}_x$

(/ 4 * /, стр. 265) и имеет порядок μ , а группа Галуа $\mathfrak{J}_x$ поля $G_x(S)$ над $\mathbb{C}(x)$ имеет порядок μm , если S есть m -листное накрытие $\mathbb{P}$. Действительно, S_x есть тогда $m\mu$ -листное накрытие $\mathbb{D}$ и группа монодромии этого накрытия совпадает с группой Галуа $\mathfrak{J}_x$. Иначе говоря, если s_1 и s_2 - две точки на S_x такие[ж)], что $x(s_1)=x(s_2)$, то существует и единственен конформный автоморфизм $\tilde{g}$ такой, что $\tilde{g}s_1 = s_2$. Далее под $\mathfrak{J}_x$ мы будем понимать этим способом реализованную изоморфную группе Галуа $G_x(S)$ над $\mathbb{C}(x)$ группу конформных автоморфизмов S_x .

Естественным образом определяются накрытия h_x и λ_x , связанные следующей коммутативной диаграммой накрытий:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D} \arrow[rr, "\lambda_x"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & S_x \arrow[dl, "h_x"'] \arrow[dr, "h_{x1}"] & \\
& S \arrow[rr, "h_1"'] & & \mathbb{P}
\end{tikzcd}$$

Произвольный конформный автоморфизм $\tilde{g}$ поверхности S_x может быть поднят на универсальную накрывающую $\mathbb{D}$: $g=\lambda^{-1}\tilde{g}\lambda$. Это перенесение неоднозначно, но становится однозначным, если фиксировать образ $g\omega$ одной точки $\omega\in\mathbb{D}$. При этом должно выполняться только условие $g\omega\in\{\lambda^{-1}\tilde{g}\lambda\omega\}$. Автоморфизм g является неевклидовым движением плоскости Лобачевского (см. / 9 /).

Докажем, что g является либо гиперболическим либо эллиптическим. Если $\tilde{g}$ имеет неподвижную точку на S_x , то можно поднять его на $\mathbb{D}$ так, чтобы g имел неподвижную точку внутри $\mathbb{D}$. Тогда g является эллиптическим. Пусть теперь g не имеет неподвижных точек в $\mathbb{D}$. Это будет иметь место, в

ж) Не являющиеся точками ветвления накрытия $S_x \longrightarrow \mathbb{P}$.

частности, когда $\tilde{g}$ не имеет неподвижных точек на S_x. Докажем, что тогда

$$d=\inf_{\omega\in\mathbb{D}}\rho(\omega,g\omega)>0 , \qquad \text{(I)}$$

где $\rho(\omega,\omega')$ - расстояние между двумя точками на плоскости Лобачевского.

Пусть сначала $\tilde{g}$ не имеет неподвижных точек на S_x . Введем на S_x риманову метрику, порожденную неевклидовой метрикой на $\mathbb{D}$. Из компактности S_x следует, что

$$\inf_{s\in S_x}\rho(s,\tilde{g}s)>0 \qquad (2)$$

Отсюда легко следует и формула (I). Пусть теперь $\tilde{g}$ имеет неподвижную точку на S_x , а g не имеет неподвижных точек на $\mathbb{D}$. Тогда проведем для каждой неподвижной точки s_i на S_x достаточно малую неевклидову окружность с центром в этой точке. Ограничиваемую ею открытую окрестность этой точки обозначим через O_i . Тогда $S_x\setminus[\bigcup_i O_i]$ инвариантна относительно $\tilde{g}$ и так же, как и в предыдущем случае можно доказать, что

$$\inf_{\omega\in\lambda_x^{-1}[S_x\setminus\{\bigcup_i O_i\}]}\rho(\omega,g\omega)>0 . \qquad (3)$$

Точки же из любой компоненты O множества $\lambda_x^{-1}O_i$ под действием g могут перейти лишь в точки конгруэнтного множества fO для некоторого $f\in\mathfrak{F}_x, f\neq 1$, откуда

$$\inf_{\omega\in\lambda_x^{-1}O_i}\rho(\omega,g\omega)>D . \qquad (4)$$

Ввиду конечности множества индексов i из (3) и (4) следует формула (I).

Нам осталось доказать таким образом, что если выполнено неравенство (I), то g – гиперболический элемент. Легко доказывается теперь, что существует z такой, что $\rho(z,gz)=d$. Если мы докажем теперь, что точки z, gz, g^2z лежат на некоторой неевклидовой прямой ℓ, то эта прямая инвариантна относительно g и, таким образом, g – неевклидов перенос (гиперболический элемент). Для доказательства обозначим ζ – середину неевклидова сегмента $[z,gz]$. Тогда $g\zeta$ является серединой сегмента $[gz,g^2z]$ и $\rho(\zeta,g\zeta)\leqslant\rho(\zeta,gz)+$ $+\rho(gz,g\zeta)=d$. Но в то же время $\rho(\zeta,g\zeta)\geqslant d$, откуда и следует утверждение.

Для окончания доказательства леммы I остается заметить, что для любого i и произвольной точки $\omega\in\lambda_0^{-1}\Gamma_i$ найдется такая точка $\omega'\in\lambda_0^{-1}\Gamma_0$, что $x(\omega)=x(\omega')$ и воспользоваться приведенными выше построениями. При этом g_i оказывается поднятием на $\mathbb{D}$ соответствующего автоморфизма Галуа.

Аналогично определяется наименьшее расширение Галуа $G_y(S)$ поля $\mathbb{C}(y)$, содержащее $\mathbb{C}(S)$, группа Галуа J_y и автоморфизм $\tilde{g}_{j\ell}$ такие, что $\bigcup_\ell \tilde{g}_{j\ell}\lambda_0^{-1}\tilde{\Gamma}_0\supset\lambda_0^{-1}\tilde{\Gamma}_j$.

<u>Определение.</u> Группой уравнения (I) § 4 Гл. I риманова поверхность S для которого имеет род $g\geqslant 2$, будем называть группу $\mathcal{H}$ неевклидовых движений плоскости Лобачевского, порожденную группой $\mathcal{F}_0$ и автоморфизмами $g_{ik}, \tilde{g}_{j\ell}$.

§ II. <u>Теорема об аналитическом поведении решения</u>.

Функции $x(S), y(S), \pi(S)$ и $\tilde{\pi}(S)$, определенные на $\Delta\subset S$, поднимем на Δ_0 по формуле $\pi_\lambda(\omega)=\pi(\lambda\omega)$, $\lambda\omega\in\Delta, \omega\in\Delta_0$ (в дальнейшем индекс λ у π опускаем).

Очевидно,

$$\pi(h\omega)=\pi(\omega),$$

$$\tilde{\pi}(h\omega)=\tilde{\pi}(\omega),\ \omega\in\Delta_0,\ h\in\mathcal{F}_0,$$

$$\pi(\omega)+\tilde{\pi}(\omega)=-x(\omega)\,y(\omega)\,\eta(x(\omega),y(\omega)). \tag{I}$$

Т е о р е м а I. Функции $\pi(\omega)$ и $\tilde{\pi}(\omega$ допускают мероморфное продолжение на всю универсальную накрывающую $\mathbb{D}$.

Докажем сначала следующую

Лемму I. Объединение областей $h\Delta_0$, где $h\in\mathcal{H}$, покрывает всю неевклидову плоскость $\mathbb{D}$.

Доказательство. Заметим, что $\lambda_0^{-1}\Gamma_0\cup\lambda_0^{-1}\tilde{\Gamma}_0$ лежит на положительном неевклидовом расстоянии ε от границы $\dot{\Delta}_0$ в плоскости Лобачевского. Выберем произвольным образом точку $\omega_0\in\Delta_0$. Область Δ_0 обладает следующими свойствами.

I. Граница области Δ_0 принадлежит объединению конечного числа аналитических кривых;

2. Пусть ℓ – одна из таких граничных аналитических кривых (мы не требуем, чтобы $\ell\cap\dot{\Delta}_0$ было связным). Тогда существует $h\in\mathcal{H}$ такой, что любая точка $\ell\cap\dot{\Delta}_0$ принадлежит $\Delta_0\cup h\Delta_0$ вместе со своей неевклидовой ε^0 – окрестностью.

По лемме I § 10 в качестве h можно выбрать одну из образующих группы $\mathcal{H}$: g_{ik} или $\tilde{g}_{j\ell}$.

Построим теперь по индукции последовательность областей

$$\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots$$

и последовательность аналитических кривых

$$\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n, \dots$$

следующим образом. Положим $\ell_0=\Gamma_0,\ \ell_1=\tilde{\Gamma}_0$; далее в произвольном порядке расположим аналитические кривые, имеющие общую дугу с границей Δ_0, затем аналитические кривые, имеющие общую дугу с границей $\dot{\Delta}_1$, не совпадающие с ранее построенными и т.д.

Выберем $h_0=g_{ik}$ или $\tilde{g}_{j\ell}$ так, чтобы $\ell_2=g_{ik}\ell_0$ или $\tilde{g}_{j\ell}\ell_1$. Положим $\Delta_1=\Delta_0\cup h_0\Delta_0$. Пусть мы уже построили Δ_n. Тогда существует $h_n=g_{ik}$ или $\tilde{g}_{j\ell}$ такой, что $\ell_{n+2}=h_n\ell_{i_n}$ для некоторого $i_n\leqslant n+1$. Полагаем $\Delta_{n+1}=\Delta_n\cup h_n\Delta_n$. При этом ℓ_{n+2} принадлежит Δ_{n+1} вместе со своей неевклидовой ε -окрестностью. Выполнение свойств I и 2 для Δ_{n+1} очевидно. Кроме того, по построению для любого n существует $N>n$ такое, что $\rho(\omega_0,\dot{\Delta}_N)\geqslant\rho(\omega_0,\dot{\Delta}_n)+\varepsilon$. Отсюда и следует, что объединение возрастающей последовательности связных областей Δ_n совпадает со всей $\mathbb{D}$.

Вернемся теперь к доказательству теоремы I. Имеем в силу сделанных в § I0 построений:

$$\Pi(g_{ik}\omega)=\Pi(\omega),\quad \tilde{\Pi}(\tilde{g}_{j\ell}\omega)=\tilde{\Pi}(\omega), \qquad (2)$$

если $g_{ik}\omega,\ \omega\in\Delta_0$, и $\tilde{g}_{j\ell}\omega,\ \omega\in\Delta_0$, соответственно. По индукции функции $\Pi(\omega)$ и $\tilde{\Pi}(\omega)$ мероморфно продолжаются на области Δ_n. Пусть они определены в области Δ_n. Теперь, если $h_n=g_{ik}$, то продолжаем $\Pi(\omega)$ на область Δ_{n+1} с помощью соотношения $\Pi(h_n\omega)=\Pi(\omega)$. Функция $\tilde{\Pi}(\omega)$ определяется тогда из уравнения (I); аналогично поступаем, если $h_n=\tilde{g}_{j\ell}$. Теперь можно легко доказать, что $\Pi(\omega)$ и $\tilde{\Pi}(\omega)$ могут быть продолжены вдоль любой кривой на $\mathbb{D}$, и следовательно, они оказываются однозначными на $\mathbb{D}$ (по теореме о монодромии).

Из теоремы I и следствия I § 5 получается полное описание возможности аналитического продолжения решения.

§ I2. Дискретность группы уравнения

Здесь мы изучим группу $\mathcal{H}$ уравнения в случае рода $g\geqslant 2$ и случая неприводимости.

Лемма I. Если род римановой поверхности S $g\geqslant 2$ и реализуется случай неприводимости, то группа $\mathcal{H}$ уравнения (I) § I дискретна.

Доказательство. По теореме Пуанкаре (см. / 4 [*]/, стр. 99) для групп движений неевклидовой плоскости дискретность и разрывность эквивалентны. Таким образом, если $\mathcal{H}$ не дискретна, то она не может быть разрывной. Следовательно, каждая точка $\omega\in\mathbb{D}$ является предельной точкой $\mathcal{H}$. Но по теореме 4А Гл. 3 / 4 [*]/, стр. I03, множество $\mathcal{H}z$ плотно тогда в любой (предельной) точке $\omega\in\mathbb{D}$ для любого $z\neq\omega$, кроме может быть одного значения $z=z_0$ для которого $\{\mathcal{H}z_0\}=\{z_0\}$, т.е. в нашем случае для любого $z\in\mathbb{D}$.

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{X}\in\mathbb{D}$ точек, для которых обращается в ∞ одна из автоморфных функций $x(\omega)$ или $y(\omega)$. Множество $\mathfrak{X}$ дискретно и для $\omega\notin\mathfrak{X}$ любой многочлен $x(\omega)y(\omega)\eta(\omega)$ не обращается в ∞. Тогда для любой области $\mathcal{O}\subset\mathbb{D}$ существует $\omega_0\in\mathfrak{X}$ и последовательность $h_1,$ $h_2,\dots,h_n$ образующих $g_{ik},\tilde{g}_{j\ell}$ или $f\in\mathfrak{F}_0$ группы $\mathcal{H}$ таких, что $h_n\dots h_2h_1\omega_0\in\mathcal{O}$, $h_k\dots h_1\omega_0\notin\mathfrak{X}$ и $\notin\mathcal{O}$ ни для какого $k<n$. Действительно, существование $\omega'\in\mathfrak{X}$ и последовательности $h'_m,\dots,h'_1$ таких, что $h'_m\dots h'_1\omega'\in\mathcal{O}$, следует из вышеприведенных рассуждений, после чего в качестве ω_0 надо взять последнюю точку в последовательности $\{h'_k\dots h'_1\omega'\}$, которая принадлежит $\mathfrak{X}$.

В качестве области $\mathcal{O}$ рассмотрим теперь область $\lambda_0^{-1}G\subset\Delta_0$, в которой ни $\Pi(\omega)$ ни $\widetilde{\Pi}(\omega)$ не могут обращаться в ∞. Но в силу уравнения (I) § II либо $\Pi(\omega_0)=\infty$ либо $\widetilde{\Pi}(\omega_0)=\infty$, если выбрать правую часть так, чтобы она обращалась в ∞ в точке ω_0. Но тогда, используя инвариантность одной из функций Π или $\widetilde{\Pi}$ относительно h_i и уравнение (I) § II по индукции легко доказать, что обе функции $\Pi(\omega)$ и $\widetilde{\Pi}(\omega)$ орашаются в ∞ во всех точках $h_k\dots h_1\omega_0$, что приводит к противоречию. Лемма I доказана.

Лемма 2. $\mathcal{H}$ может состоять лишь из эллиптических и гиперболических элементов.

Фиксируем некоторую точку $S_0\in\Delta\subset S$ и один из ее прообразов $\omega_0\in\{\lambda^{-1}s_0\}\cap\Delta_0\subset\mathbb{D}$. Для любой точки $S\in\Delta$ обозначим

$$\rho_\Delta(S_0,S)=\inf_{\ell}\rho(\ell),$$

где $\rho(\ell)$ - длина спрямляемой кривой $\ell\subset\Delta$, соединяющей точки S_0 и S_1, в римановой метрике, индуцированной метрикой плоскости Лобачевского на Δ, а $\inf$ берется по всем таким спрямляемым кривым. Аналогично определяется $\rho_{\Delta_0}(\omega_0,\omega)$ для любой точки $\omega\in\Delta_0$. Легко видеть, что существует такая константа C_0, что для любой точки $\omega\in\Delta_0$

$$\inf_{1\neq h\in\mathcal{F}_0}\rho_{\Delta_0}(\omega,h\omega)<C_0\,. \qquad (I)$$

Рассмотрим нормальный фундаментальный многоугольник N (см. / 9 /) относительно точки ω_0 в предположении, что ω_0 не является неподвижной точкой для $\mathcal{H}$. Докажем, что N компактен. Действительно, в противном случае существовала бы точка $\omega\in\Delta_0$, удаленная от ω_0 на как угодно большое расстояние, что противоречит условию (I).

Из компактности нормальной фундаментальной области следует (см. / 4 ж/, теорема 7E, стр. I49), что $\mathcal{H}$ не содержит параболических элементов.

При этом группа $\mathcal{H}$ имеет образующие $h_1,h_2,\dots,h_\ell,a_1,b_1,\dots,a_m,b_m$ и определяющие соотношения

$$h_1\dots h_\ell a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}\dots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1}=1,$$
$$h_i^{k_i}=1,\quad i=1,\dots,\ell$$

(см. / 4 ж/, стр. 24I).

Лемма 3. Для некоторого n существует нормальный делитель $\mathcal{H}_0$ группы $\mathcal{H}$ с образующими $A_1,B_1,\dots,A_n,B_n$ и единственным определяющим соотношением:

$$A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\dots A_nB_nA_n^{-1}B_n^{-1}=1$$

Доказательство. Сельберг ж) доказал (см. / 7 ж/), что в любой матричной группе над полем комплексных чисел с конечным числом образующих существует нормальный делитель конечного индекса не содержащий элементов конечного порядка. Этот результат, очевидно, можно применить к нашей группе $\mathcal{H}$. Тогда такой нормальный делитель оказывается состоящим лишь из гиперболических элементов, а в силу конечности индекса, его фундаментальная область компактна. Откуда (см. / 4 ж/) и следует, что он имеет единственное указанное выше определяющее соотношение.

§ I3. Задача Карлемана для фундаментального многоугольника и явный вид решения.

Несмотря на получаемое ниже явное представление для решения очень важную роль играет метод аналитического продолжения

ж) На работу Сельберга автору указал И.И.Пятецкий-Шапиро, за что автор искренне ему благодарен.

в § II. В частности, с его помощью мы получаем все полюса функций $\Pi(\omega)$ и $\tilde{\Pi}(\omega)$ на $\mathbb{D}$ и их главные части в этих полюсах. Процедура выделения главных частей очевидна из доказательства теоремы I § II.

Замечание I. В частности отсюда и из следствия I § 5 вытекает, что асимптотическое поведение коэффициентов $\Pi(x), \tilde{\Pi}(y)$ определяется либо ближайшими к единичному кругу полюсами функций $\Pi(x)$ и $\tilde{\Pi}(y)$ либо ближайшими к единичному кругу их алгебраическими точками ветвления и может быть вычислено в конкретных случаях (то, что других особых точек у Π и $\tilde{\Pi}$ нет, следует из теоремы 1 § II).

Рассмотрим нормальный делитель $\mathcal{H}_0$ леммы 3 § 12. Используя соотношения (I) и (2) § II, для его образующих $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n$ и функций $\Pi(\omega), \tilde{\Pi}(\omega)$ получаем

$$\Pi(A_i\omega)-\Pi(\omega)=\alpha_i(\omega),$$

$$\tilde{\Pi}(B_i\omega)-\tilde{\Pi}(\omega)=\beta_i(\omega),\ i=1,\ldots,n, \qquad (I)$$

где $\alpha_i(\omega)$ и $\beta_i(\omega)$ – линейные комбинации автоморфных функций относительно группы $\mathcal{F}$ (см. § 10), сдвинутых на элементы группы $\mathcal{H}$.

Соотношения (I) представляют собой задачу Карлемана для фундаментального многоугольника N: $A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\ldots A_nB_nA_n^{-1}B_n^{-1}=1$ который мы в дальнейшем фиксируем и который можно выбрать так, чтобы $\alpha_i, \beta_i, \Pi, \tilde{\Pi}$ не имели полюсов на его границе. (Относительно задачи Карлемана см. библиографию в / 14 /).

Рассмотрим ядро Беенке-Штейна $\mathfrak{A}(\omega,\omega')$ (/ 14 /) для римановой поверхности $\mathbb{D}/\mathcal{H}_0$, явную конструкцию которого по существу приводил еще Вейерштрасс (/ 6 [x] /). На $\mathbb{D}$ $\mathfrak{A}(\omega,\omega')$

представляет собой автоморфную функцию по ω и автоморфную форму по ω'.

Одно из мероморфных в $\mathbb{D}$ решений задачи (I) представляется в виде

$$\Pi(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\sum_i\Big[\int_{A_i}\mathfrak{A}(\omega,\omega')\alpha_i(\omega')\,d\omega'+$$

$$+\int_{B_i}\mathfrak{A}(\omega,\omega')\beta_i(\omega')\,d\omega'\Big]. \qquad (2)$$

Обозначим $\Pi'(\omega)$ – сумму главных частей в полюсах $\Pi(\omega)$ в N, а через $\Pi''(\omega)$ – такую же сумму главных частей для $\Pi(\omega)$ (см. замечание в начале параграфа).

Разность $\Pi(\omega)$ и частного решения $\Pi(\omega)$ неоднородной задачи (I) должна совпадать в N с автоморфной функцией относительно группы $\mathcal{H}_0$: $\tilde{\Pi}(\omega)=\Pi(\omega)-\Pi(\omega)$, – не имеющей полюсов на границе N. При этом, очевидно, сумма главных частей $\tilde{\Pi}(\omega)$ для полюсов, лежащих в N, должна совпадать с $\Pi''(\omega)-\Pi'(\omega)$. Сформулируем полученный результат.

Т е о р е м а I. В фундаментальном многоугольнике N функция $\Pi(\omega)$ имеет следующее явное представление:

$$\Pi(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\sum_i\Big(\int_{A_i}\mathfrak{A}(\omega,\omega')\alpha_i(\omega')\,d\omega'+$$

$$+\int_{B_i}\mathfrak{A}(\omega,\omega')\beta_i(\omega')\,d\omega'\Big)+\tilde{\Pi}(\omega)+\mathrm{const},$$

где $\tilde{\Pi}(\omega)$ – автоморфная относительно группы $\mathcal{H}_0$ функция, определяемая выше. Аналогичное представление имеет функция $\tilde{\Pi}(\omega)$, а константы в их правых частях определяются из условия $\tilde{\Pi}(y)=0$ при $y=0$.

Замечание 2. Можно было бы построить аналогичное интегральное представление непосредственно для группы $\mathcal{H}$. При этом выражение стало бы "более явным", но в виду наличия эллиптических элементов формулы были бы более громоздкими.

Мы опускаем здесь рассмотрение случая приводимости и рода $g = 0,1$ для уравнений типа $(-1, n; -1, m)$, $n \geq 2$ в виду того, что этот случай не доставляет новых принципиальных трудностей, а также потому, что подобные случаи "очень редки" в пространстве всех уравнений и ввиду следствия I § 3 их можно аппроксимировать как угодно точно разобранными типами уравнений.

ГЛАВА III.

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА

§ I. Первый шаг – проектирование на алгебраическую кривую.

Введем следующие обозначения, которые далее везде используются: $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\mathbb{P}$ – комплексная сфера (одномерное проективное пространство), Γ – единичная окружность в $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ – внутренность единичного круга в $\mathbb{C}$.

Пусть $\mathcal{A} = \{(x,y) : |x|,|y| \leqslant 1,\ Q(x,y) = 0\}$.

Очевидно, что если существуют аналитические в $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ и непрерывные на $\bar{\mathbb{D}}\times\bar{\mathbb{D}}$ функции $\pi(x,y), \pi(x), \tilde{\pi}(y)$, удовлетворяющие уравнению (6) § I Гл. I, то при $(x,y) \in \mathcal{A}$

$$\pi(x) q(x,y) + \tilde{\pi}(y)\tilde{q}(x,y) + \pi_{00} q_0(x,y) = 0$$

Докажем обратное утверждение.

Лемма I. Для любых функций $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$, аналитических в $\mathbb{D}$ и непрерывных на границе, а также константы π_{00}, удовлетворяющих уравнению

$$q(x,y)\pi(x) + \tilde{q}(x,y)\tilde{\pi}(y) + q_0(x,y)\pi_{00} = 0 \qquad (1)$$

при $(x,y) \in \mathcal{A}$, существует решение уравнения (6) § I Гл. I, если только многочлен $Q(x,y)$ неприводим в кольце $\mathbb{C}[x,y]$; при этом можно положить

$$\pi(x,y) = \frac{\pi(x) q(x,y) + \tilde{\pi}(y)\tilde{q}(x,y) + q_0(x,y)\pi_{00}}{Q(x,y)}, \qquad (2)$$

а $\Pi(x,y)$ находится по формулам (5) § I Гл. I.

Доказательство.

В § 5 будет доказано, что при выполнении условия (I) функции $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ допускают аналитическое продолжение в некоторую окрестность $\mathcal{U}$ замыкания $\bar{D}$. Под $\mathcal{A}$ будем понимать главное аналитическое множество в $\mathcal{U}$ – множество нулей уравнения $Q(x,y)=0$, а под $\mathcal{B}$ – главное аналитическое множество в $\mathcal{U}$, множество нулей уравнения

$$\xi(x,y)=\Pi(x)q(x,y)+\tilde{\Pi}(y)\tilde{q}(x,y)+\Pi_{00}q_0(x,y)=0$$

для заданных $\Pi(x)$ и $\tilde{\Pi}(y)$. Очевидно, что для любой точки $u\in\mathcal{U}$ для ростков главных аналитических множеств имеем: $\mathcal{A}_u\subset\mathcal{B}_u$. Поэтому (см., например, / 15 /, теорема 6, стр. 41), $\xi(x,y)/Q(x,y)$ аналитична в некоторой окрестности $\bar{D}$.

§2. Алгебраическая кривая $Q(x,y)=0$

Дальнейшее исследование существенно зависит от характера алгебраической функции, определяемой уравнением

$$Q(x,y)=0 \tag{I}$$

Здесь собраны необходимые результаты относительно ветвей алгебраических функций $y(x)$ и $x(y)$, определенных уравнением (I)

Определение. Случайное блуждание, определенное в § I, назовем вырожденным, если по крайней мере из одного состояния $(i,j), i,j\geqslant 1$, нельзя придти в такое же другое не заходя на границу. В противном случае блуждание назовем невырожденным. Вырожденное случайное блуждание называется особым, если по крайней мере три из вероятностей $p_{ij}; i,j=+1,-1$, отличны от нуля.

Лемма I. Многочлен $Q(x,y)$ неприводим (в $\mathbb{C}[x,y]$) для невырожденного случайного блуждания.

Доказательство. Пусть $Q(x,y)=f_1(x,y)f_2(x,y)$. Многочлен f_1 может иметь по x: 1. вторую степень, 2. первую степень, 3. нулевую степень. В первом случае f_2 не может зависеть от x и, следовательно, имеет по y либо 1а. вторую степень, либо 1б. первую степень.

В случае 1а. Q должен иметь вид $f_1f_2=C_2x^2f_2(y)+C_1xf_2(y)+C_0f_2(y)$, что очевидно, невозможно.

В случае 1б. если $f_2=a+by$, то Q имеет вид

$$x^2(c_1+c_2y)(a+by)+x(c_3+c_4y)(a+by)+(c_5+c_6y)(a+by).$$

Но в то же время коэффициент при x у этого многочлена равен $p_{0,-1}+p_{00}y+p_{01}y^2-1$, и так как $p_{0,-1}+p_{00}+p_{01}<1$, то этот коэффициент имеет два положительных корня. Следовательно, $-\frac{a}{b}$ положительно. Однако, коэффициенты при x^2 и x^0 как многочлены от y имеют все коэффициенты положительными и, поэтому, не могут иметь положительных корней.

Случай 3. Рассматривается симметричным образом. Остается рассмотреть случай 2., когда f_1 и f_2 линейны по x и по y:

$$f_1=x(ay+b)+cy+d=a(y)x+c(y),$$

$$f_2=x(a_1y+b_1)+c_1y+d_1=a_1(y)x+c_1(y).$$

Следовательно,

$$f_1f_2=a(y)a_1(y)x^2+x(a(y)c_1(y)+a_1(y)c(y))+c(y)c_1(y).$$

Но $a(y)c_1(y)+a_1(y)c(y)$ по тем же причинам, что и выше, имеет положительный корень y_0, если $p_{01}+p_{0,-1}\neq 0$. Откуда,

$$a(y_0)=-\frac{a_1(y_0)c(y_0)}{c_1(y_0)},\quad a(y_0)a_1(y_0)=-\frac{a_1^2(y_0)c(y_0)}{c_1(y_0)}\neq 0$$

так как $a(y)a_1(y)$ не имеет положительных корней. Из пос-

5^x–1590

леднего равенства следует, что $a(y_0)a_1(y_0)$ имеет разный знак с $c(y_0)c_1(y_0)$, что невозможно, так как коэффициенты у $a(y)\,a_1(y)$ и $c(y)\,c_1(y)$ положительны.

Случай $p_{10}+p_{-1,0}\neq 0$ симметричен, а в остальных случайное блуждание вырождено.

Лемма 2. Для особого случайного блуждания $Q(x,y)$ неприводим тогда и только тогда, когда

$$p_{10}=p_{01}=p_{0,-1}=p_{-1,0}=0 \tag{2}$$

и

$$p_{11}=p_{-1,-1}\,,\quad p_{-1,1}=p_{1,-1}\,. \tag{3}$$

Доказательство. Если по крайней мере одна из вероятностей $p_{01},p_{10},p_{-1,0},p_{0,-1}$ отлична от нуля, то доказательство проводится так же, как в лемме I. Пусть таким образом условие (2) выполнено. Дискриминант $Q(x,y)=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$ равен:

$$\frac{1}{4}D(x)=p_{11}p_{1,-1}x^4+\left(p_{-1,1}p_{1,-1}+p_{11}p_{-1,-1}-\frac{1}{4}\right)x^2+p_{-1,1}\,p_{-1,-1}$$

Предположим, что все вероятности p_{ij}, $i,j=1,-1$ отличны от нуля. Q приводим тогда и только тогда, когда $D(x)$ является квадратом, а для этого в свою очередь необходимо и достаточно чтобы многочлен $p_{11}p_{1,-1}\xi^2+(p_{-1,1}p_{1,-1}+p_{11}p_{-1,-1}-\frac{1}{4})\xi+p_{-1,1}\,p_{-1,1}$ имел кратные корни, т.е. дискриминант

$$\Delta=\left(p_{1,-1}p_{-1,1}+p_{11}p_{-1,-1}-\frac{1}{4}\right)^2-4p_{11}p_{1,-1}p_{-1,1}\,p_{-1,-1}$$

был равен нулю. Обозначив $p_{-1,1}\,p_{1,-1}=\alpha$ и $p_{11}\,p_{-1,-1}=\beta$ будем иметь $\Delta=(\alpha-\beta)^2-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{16}$. Докажем, что $\Delta\geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполняется (3). Действительно, при данном β выражение

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2 \tag{4}$$

возрастает на интервале $[0,\beta+\frac{1}{4}]$ и если обозначить $x=p_{11}+p_{-1,-1}$, $1-x=p_{-1,1}+p_{1,-1}$, то оно достигает максимума при максимально возможном α, т.е. при $\alpha=\frac{(1-x)^2}{4}$, так как $\alpha\leqslant\frac{1}{4}$. Аналогично, при данном α выражение (4) достигает максимума при $\beta=\frac{x^2}{4}$. Простое вычисление показывает, что выражение (4) при $\alpha=\frac{(1-x)^2}{4},\beta=\frac{x^2}{4}$ равно $\frac{1}{16}$. Из вышеприведенных рассуждений видно, что в остальных случаях в формуле $\Delta\geqslant 0$ имеет место строгое неравенство.

В силу леммы I риманова поверхность S алгебраической функции $y(x)$, определенной уравнением $Q(x,y)=0$, связна и имеет род I или 0, если случайное блуждание невырождено.

Пусть $\mathcal{P}$ есть симплекс: $\mathcal{P}=\{(p_{-1,-1},\cdots,p_{11}):\sum p_{ij}=1,p_{ij}\geqslant 0\}$. Точка симплекса однозначно определяется параметрами случайного блуждания внутри четверти плоскости, и наоборот. При такой параметризации множество точек $\mathcal{P}_B\subset\mathcal{P}$, соответствующих вырожденным случайным блужданиям, целиком принадлежит границе $\mathcal{P}$. Множество $\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}_B$ является объединением двух непересекающихся множеств: $\mathcal{P}_0$ – множества точек, для которых соответствующая риманова поверхность имеет род 0, и $\mathcal{P}_1$ – соответствующих роду I. Далее мы полностью опишем $\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P}_1$.

Введем вектор $(M_x,M_y)=(p'_x(1,1),p'_y(1,1))$ математических ожиданий скачка за один шаг соответственно по направлениям x и y.

Лемма 3. Пусть для невырожденного случайного блуждания

$M_y \neq 0$. Тогда алгебраическая функция $y(x)$ имеет на множестве Γ две ветви: $y_0(x)$ и $y_1(x)$.

Если $M_y < 0$, то $|y_0(x)| \leq 1$ при $|x|=1$, причем равенство имеет место лишь при $x=1$; а $|y_1(x)|>1$. Если же $M_y > 0$, то $|y_1(x)| \geq 1$ при $|x|=1$, причем равенство имеет место лишь при $x=1$; а $|y_0(x)|<1$. Таким образом, в обоих случаях при $x \in \Gamma$, $y_0(x)$ и $y_1(x)$ описывают аналитические кривые, расположенные соответственно внутри и вне единичного круга при $x \neq 1$.

Аналогичное утверждение имеет место и для алгебраической функции $x(y)$ при условии, что $M_x \neq 0$.

<u>Доказательство</u>. Нам понадобятся следующие простые утверждения:

I. $p(1,1)=1$. За исключением этого случая равенство $|p(x,y)|=1$ не может выполняться при $|x|=|y|=1$. Это утверждение просто следует из геометрических соображений относительно соответствующей суммы комплексных чисел.

2. $p''_{yy}(1,y)>0$ при $y>0$. Отсюда следует, что при $M_y<0$ уравнение $p(1,y)=1$ имеет два корня: $y_0(1)=1$ и $y_1(1)>1$; если же $M_y>0$, то оно имеет два корня: $0<y_0(1)<1$ и $y_1(1)=1$.

Образ $y(\Gamma)$ состоит не более чем из двух связных компонент. В силу свойства I. $y(\Gamma)$ может пересекать Γ лишь в точке $z=1$. При $M_y<0$ из свойства 2. следует, что если $y(\Gamma)$ связен, то $y(\Gamma)$ не пересекается с множеством D. Действительно, если $y(\Gamma)$ пересекается с D и с $\mathbb{C}\setminus\bar{D}$, то она имеет в точке $x=1$ ветвление, что невозможно в силу свойства 2. и двузначности $y(x)$.

Таким образом, если мы докажем, что $y(\Gamma)\cap D \neq 0$, то $y(x)$ на Γ действительно имеет две ветви ($y(\Gamma)$ состоит из двух компонент), одна из которых, $y_0(\Gamma)$, принадлежит $\bar{D}$, а вторая, $y_1(\Gamma)$, принадлежит $\mathbb{C}\setminus\bar{D}$. При этом как $y_0(\Gamma)$, так и $y_1(\Gamma)$ являются простыми замкнутыми аналитическими кривыми, что соответствует тому, что $y(x)$ не имеет точек ветвления на Γ. Последнее имеет место ввиду того, что $y(x)$ в точке ветвления принимает одно значение которое должно принадлежать Γ, что невозможно, в силу свойств I. и 2.

Нам осталось доказать, что существуют такие точки x и y, причем $|x|=1, |y|<1$, что $p(x,y)=1$. Для произвольного простого случайного блуждания [*)] это легко проверить, полагая $x = -1$.

В симплексе $\mathcal{P}$ рассмотрим множество точек A, для которых $M_y=\sum_{i,j} jp_{ij}=0$. Это множество разбивает $\mathcal{P}$ на два связных выпуклых множества A_+ и A_-, для которых соответственно $M_y>0$ и $M_y<0$. Любую точку $\pi \in A_-$ можно соединить непрерывным путем ℓ, целиком лежащим в A_-, с некоторой точкой $\pi_0 \in A_-$, соответствующей простому блужданию, причем ℓ проходит лишь по невырожденным случайным блужданиям. При изменении точки π вдоль пути ℓ ввиду непрерывности зависимости корней уравнения от коэффициентов и в силу свойств I. и 2. корень $y_0(-1)$ не может выйти из D, т.е. уравнение $p(-1,y)=1$ для любой точки множества $A_-\cap(\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}_6)$ имеет корень, лежащий внутри единичного круга, что и требовалось доказать. Случай $M_y>0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

<u>Лемма 4</u>. Если для невырожденного простого случайного блуждания $M_y \neq 0$, то $y(x)$ имеет две точки ветвления x_1 и x_2

---

*) Т.е. $p_{10}=p_{01}=p_{-1,0}=p_{0,-1}=0$

внутри единичного круга и две точки ветвления, x_3 и x_4 вне единичного круга. Эти четыре точки ветвления положительны и равны

$$x_{1,2}=\frac{1\pm 2\sqrt{p_{01}p_{0,-1}}-\sqrt{1\pm 4\sqrt{p_{01}p_{0,-1}}+4p_{01}p_{0,-1}-4p_{10}p_{-1,0}}}{2p_{10}}$$

$$x_{3,4}=\frac{1\pm 2\sqrt{p_{01}p_{0,-1}}+\sqrt{1\pm 4\sqrt{p_{01}p_{0,-1}}+4p_{01}p_{0,-1}-4p_{10}p_{-1,0}}}{2p_{10}}$$

В случае $M_y=0$, $M_x\neq 0$ также имеется четыре положительных точки ветвления, одна из которых равна I, вторая больше I, третья меньше I, а четвертая больше I при $M_x<0$ и меньше I при $M_x>0$.

Доказательство. Разлагая дискриминант $D(x)$ уравнения

$$p_{01}y^2+y\left(p_{10}x+p_{-1,0}\frac{1}{x}-1\right)+p_{0,-1}=0$$

на множители получаем два уравнения для определения точек ветвления

$$g(x)=p_{10}x+p_{-1,0}\frac{1}{x}=1+2\sqrt{p_{01}p_{0,-1}}\,, \qquad (5)$$

$$g(x)=1-2\sqrt{p_{01}p_{0,-1}}\,. \qquad (6)$$

Так как $g(1)=p_{10}+p_{-1,0}<1-2\sqrt{p_{01}p_{0,-1}}$ и $g''(x)>0$, то уравнение (5) имеет два положительных корня, один из которых меньше, а другой больше I. То же самое верно и относительно второго уравнения. При этом корни одного уравнения не могут совпадать с корнями другого, т.е. все точки ветвления различны, откуда и следует лемма. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Лемма 5. Для невырожденных случайных блужданий S связна и имеет род 0 тогда и только тогда, когда $M_x=M_y=0$. Для особого случайного блуждания S связна и имеет род 0 тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

$$p_{10}=p_{11}=p_{01}=0, \qquad (7)$$

$$p_{10}=p_{1,-1}=p_{0,-1}=0, \qquad (8)$$

$$p_{-1,0}=p_{-1,-1}=p_{0,-1}=0, \qquad (9)$$

$$p_{-1,0}=p_{-1,1}=p_{0,1}=0. \qquad (10)$$

Лемма 6. Если для невырожденного случайного блуждания $M_y\neq 0$, то $y(x)$ имеет две точки ветвления x_1 и x_2 внутри единичного круга и две, x_3 и x_4, вне его. При этом все точки ветвления действительны.

Если $p_{10}>2\sqrt{p_{11}p_{1,-1}}$, то x_3 и x_4 положительны; если $p_{10}=2\sqrt{p_{11}p_{1,-1}}$, то одна из этих точек равна ∞ (вторая положительна); если же $p_{10}<2\sqrt{p_{11}p_{1,-1}}$, то одна из этих точек ветвления положительна, а другая отрицательна.

Аналогично, если $p_{-1,0}>2\sqrt{p_{-1,1}p_{-1,-1}}$, то x_1 и x_2 положительны; если $p_{-1,0}=2\sqrt{p_{-1,1}p_{-1,-1}}$, то одна из этих точек равна 0, а вторая положительна; при $p_{-1,0}<2\sqrt{p_{-1,1}p_{-1,-1}}$ одна из точек x_1 и x_2 положительна, вторая отрицательна.

Эта лемма с очевидными изменениями верна и для алгебраической функции $x(y)$.

Лемма 7. Если для невырожденного случайного блуждания $M_y=0$, $M_x\neq 0$, то одна из точек ветвления $y(x)$ равна I.

При $M_x<0$ две другие больше единицы по модулю, а одна меньше единицы по модулю. При $M_x>0$, наоборот, две точки ветвления меньше единицы по модулю, а одна больше. Условия положительности этих точек переносятся из леммы 6 без изменений.

Переходим к доказательству этих лемм.

S имеет род 0 тогда и только тогда, когда дискриминант

$$D(x)=b^2(x)-4a(x)c(x)=a_4x^4+a_3x^3+\ldots+a_0$$

уравнения $Q(x,y)=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$ имеет кратный корень (возможно в ∞). При условии $M_x=M_y=0$ $D(x)$ имеет кратный корень, равный I. Действительно

$$D(1)=\big(b(1)-2a(1)\big)\big(b(1)+2a(1)\big)=0,$$

$$D'(1)=-4a(1)[b'(1)+a'(1)+c'(1)]=$$

$$=-4a(1)[2(p_{11}+p_{10}+p_{1,-1})+(p_{01}+p_{00}+p_{0,-1})-1]=0.$$

Кратный корень в ∞ реализуется тогда и только тогда, когда $a_3=a_4=0$. Легко видеть, что эта система уравнений

$$a_3=p_{10}^2-4p_{11}p_{1,-1}=0,$$

$$a_4=2p_{10}(p_{00}-1)-4(p_{11}p_{0,-1}+p_{01}p_{1,-1}),$$

относительно p_{ij} в особом случае может иметь решения тогда и только тогда, когда выполняется либо (7) либо (8), а в невырожденном случае не может иметь решений. Аналогично, условия (9) и (10) соответствуют кратному корню в точке 0.

В силу выпуклости множества $\mathcal{A}$ — любую его точку можно соединить отрезком ℓ прямой с точкой π_0, соответствующей невырожденному простому случайному блужданию. Используя непрерывную зависимость корней дискриминанта при изменении точки по этому отрезку, а также тот факт, что корни при этом не могут пересекать Γ, получаем первое утверждение леммы 5 и 6 для $M_y<0$. Случай $M_y>0$ рассматривается аналогично. Для того, чтобы этим же способом доказать утверждение леммы 5 относительно особого случайного блуждания, достаточно убедиться в справедливости следующей

Лемма 8. Точка -1 может быть точкой ветвления $y(x)$ для особого блуждания тогда и только тогда, когда $M_y=0$.

Доказательство.

$$D(-1)=(1+p_{10}-p_{00}+p_{-1,0})^2-4(p_{11}-p_{01}+p_{-1,1})\cdot$$

$$\cdot(p_{1,-1}-p_{0,-1}+p_{-1,-1})\geqslant(a(1)+c(1))^2-4a(1)c(1)\geqslant0,$$

причем равенство во втором случае имеет место тогда и только тогда, когда $a(1)=c(1)$, а в первом случае, когда либо

$$p_{10}=p_{01}=p_{1,-1}=p_{-1,1}=0 \quad \text{либо} \quad p_{11}=p_{1,-1}=p_{-1,1}=p_{-1,-1}=$$

$$=p_{10}=p_{-1,0}=0.$$

Нам понадобится также следующая легко доказываемая

Лемма 9. Гиперповерхность $p_{10}^2-4p_{11}p_{1,-1}=0$ разбивает $\mathcal{A}_-$ на две линейно связные области $\mathcal{A}_{-+}$ и $\mathcal{A}_{--}$, где соответственно $p_{10}^2>4p_{11}p_{1,-1}$ и $p_{10}^2<4p_{11}p_{1,-1}$.

Аналогичное утверждение верно для гиперповерхности $p_{-1,0}^2-4p_{-1,1}p_{-1,-1}=0$, а также для области $\mathcal{A}_+$.

Вернемся к доказательству леммы 6. Произвольную точку $\pi\in\mathcal{A}_{-+}$ соединим непрерывным путем ℓ, целиком лежащим в $\mathcal{A}_{-+}$, с некоторой точкой $\pi_0\in\mathcal{A}_{-+}$, соответствующей невырожденному простому случайному блужданию. Ввиду леммы 4 все корни дискриминанта в точке π_0 действительны и различны. При движении по ℓ корни будут оставаться действительными и различными (каждому корню дискриминанта соответствует комплексно сопряженный корень), если не произойдет слияния некоторых корней. Слияние корней x_3 и x_4, например, соответствует тому, что $D(x)$ имеет в этой точке кратный корень. Но дискриминант можно записать в следующем виде:

$$D(x) = [b(x)-2\sqrt{a(x)c(x)}][b(x)+2\sqrt{a(x)c(x)}].$$

В точке π_0 корни x_3 и x_4 являются корнями разных уравнений $b(x)-2\sqrt{a(x)c(x)}=0$ и $b(x)+2\sqrt{a(x)c(x)}=0$. При перемещении точки вдоль ℓ корни остаются корнями разных уравнений и не могут совпасть, так как в этом случае

$$b(x)-2\sqrt{a(x)c(x)} = b(x)+2\sqrt{a(x)c(x)} = 0$$

что возможно лишь при $x=0$ или $x=\infty$, что соответствует уже разобранным случаям.

Перейдем к рассмотрению множества A_{--}. Рассмотрим точку $\pi_0 \in P$, соответствующую особому случайному блужданию, для которого лишь вероятности $p_{11}, p_{1,-1}, p_{-1,1}, p_{-1,-1}$ отличны от 0. Корни $D(x)$ в этом случае удовлетворяют соотношению

$$x^2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 64 p_{11} p_{1,-1} p_{-1,1} p_{-1,-1}}}{8 p_{11} p_{1,-1}},$$

где $b = 1 - 4p_{11}p_{-1,-1} - 4p_{-1,1}p_{1,-1}$. Можно доказать (см. лемму 2), что если либо $p_{11} \neq p_{-1,-1}$ либо $p_{1,-1} \neq p_{-1,1}$, то $b^2 - 64 p_{11} p_{-1,1} p_{1,-1} p_{-1,1} > 0$. Далее очевидно, что

$$b \pm \sqrt{b^2 - 64 p_{11} p_{1,-1} p_{-1,1} p_{-1,-1}} > 0,$$

и поэтому два корня $D(x)$ положительны и два отрицательны. То, что два из них лежат внутри D, а два вне, следует из ранее доказанного факта, что в произвольной окрестности есть точки, соответствующие невырожденным блужданиям, для которых эти свойства выполняются. Далее доказательство проводится так же, как и в предыдущем случае с тем упрощением, что корни x_3 и x_4 не могут слиться, так как один из них все время >1, а второй все время <-1. Для множеств A_{+-} и A_{++} доказательство проводится аналогично. Леммы 5 и 6 доказаны.

Для доказательства леммы 7 рассмотрим выпуклое множество A_0, состоящее из тех точек $\pi \in P \setminus P_b$, для которых $M_y=0$. Гиперповерхность, определенная уравнением $M_x=0$, делит это множество на две выпуклые области A_{0+} и A_{0-}, для которых $M_x>0$ и $M_x<0$ соответственно. Точка $x=1$ всегда будет точкой ветвления $y(x)$. Для простого невырожденного блуждания утверждение леммы выполняется (см. лемму 4). Далее доказательство проводится совершенно аналогично доказательству леммы 6.

Теперь мы можем восполнить пропущенное в § 2 Гл. I доказательство утверждения о принадлежности L_1.

Лемма 10. Если выполнены условия леммы I § I, то $\pi(x)$, $\tilde{\pi}(y)$, $\pi(x,y)$ как функции на $\{(x,y): |x|=|y|=1\}$ разлагаются в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд, т.е. $\sum|\pi_{ij}|<\infty$.

Доказательство. В уравнении (I) § I положим $y=y_0(x)$:

$$\pi(x)q(x,y_0(x)) + \tilde{\pi}(y_0(x))\tilde{q}(x,y_0(x)) + \pi_{00}q_0(x,y_0(x)) = 0.$$

Так как при $|x|=1$ $|y_0(x)|<1$, кроме точки $x=1$, и $q(x,y_0(x)) \neq 0$ при $x \neq 1$, то отсюда следует, что $\pi(x)$

есть аналитическая функция везде кроме точки $x=1$ и непрерывная в этой точке. Отсюда, как легко видеть, и следует утверждение леммы.

§ 3. Перенос уравнений на риманову поверхность.

Пусть $\mathbb{C}_Q(x,y)$ – поле алгебраических функций, определенное уравнением $Q(x,y)$, и являющееся конечным алгебраическим расширением (второго порядка) поля $\mathbb{C}(x)$ рациональных функций от x, а также поля $\mathbb{C}(y)$ рациональных функций от y. Пусть S – риманова поверхность этого поля, которую мы здесь будем считать связной, компактной и имеющей род 0 или I.

Римановы поверхности S_1 и S_2 функций $y(x)$ и $x(y)$ естественным образом реализуются как разветвленные накрытия $h_1: S\to P$ и $h_2: S\to P$ комплексной сферы P.

Известно, см. например /17/, что S_1 и S_2 конформно эквивалентны, причем конформный изоморфизм $\psi: S_1\to S_2$ устроен следующим образом: функциональный элемент $S_1(x)$ функции $y(x)$, лежащий над точкой x, переводится в функциональный элемент $S_2(y)$ функции $x(y)$, лежащий над y, причем $S_2(S_1(x))\equiv x$ в некоторой окрестности U точки x, т.е. коммутативна следующая диаграмма отображений (с учетом многозначности $y(x)$):

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{\psi} & S_2 \\ h_1\downarrow & & \downarrow h_2 \\ P & \xrightarrow{y(x)} & P \end{array}$$

$\mathbb{C}_Q(x,y)$ естественно изоморфно $\mathbb{C}(S)$, – полю мероморфных функций на S. Функция $x(S)$, соответствующая при этом изоморфизме функции $x(y)$, обладает следующим свойством:

если $x(S_1)=x(S_2)$, $S_1,S_2\in S$, то $h_1S_1=h_1S_2$. Аналогичным свойством обладает и функция $y(S)$, соответствующая функции $y(x)$ (относительно накрытия h_2).

Очевидно, что $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$ являются связными областями на римановой поверхности S с границей $h_1^{-1}(\Gamma)$ и $h_2^{-1}(\Gamma)$ соответственно. Действительно, из леммы § 2 следует, что внутри D имеется по крайней мере одна точка ветвления функции $y(x)$, и поэтому $h_1^{-1}(D)$ связна.

Лемма I. Пересечение областей $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$ непусто, если случайное блуждание невырождено.

Это утверждение следует из леммы § 2, где доказано, что как $y(x)$, так и $x(y)$ всегда принимают значения внутри единичного круга.

Пусть дана некоторая функция $f(z)$, мероморфная в некоторой области D комплексной сферы P, и риманова поверхность S вместе с разветвленным накрытием $h: S\to P$. Тогда функция $f(z)$ может быть поднята на область $h^{-1}(D)$ посредством формулы $f_h(S)=f(hS)$, $S\in h_1^{-1}(D)$. $f_h(S)$ является мероморфной функцией в $h^{-1}(D)$, что для точек, где накрытие неразветвлено, может быть проверено, например, по теореме об устранимых особенностях.

Перенося теперь $\pi(x)$ на S посредством h_1^{-1}, а $\tilde{\pi}(y)$ посредством h_2^{-1}, получим функции $\pi(S)$ и $\tilde{\pi}(S)$, определенные на $h_1^{-1}(\bar{D})$ и $h_2^{-1}(\bar{D})$ соответственно, аналитические в этих областях и непрерывные на границах. Функции $q(S)=q(x(S),y(S))$, $\tilde{q}(S)=\tilde{q}(x(S),y(S))$ и $q_0(S)=q_0(x(S),y(S))$ являются мероморфными функциями на всей римановой поверхности S.

Обозначим Γ_0 – часть границы $h_1^{-1}(\Gamma)$ области $h_1^{-1}(D)$,

8-1590

на которой $|x(s)|=1$ и $|y(s)|\leqslant 1$; $\Gamma_1=h_1^{-1}(\Gamma)\setminus\Gamma_0$.

Если $M_y\neq 0$, то Γ_0 и Γ_1 в силу лемм § 2 представляют собой непересекающиеся замкнутые аналитические кривые без самопересечений. Аналогично вводятся $\widetilde{\Gamma}_0$ и $\widetilde{\Gamma}_1$: $\widetilde{\Gamma}_0\subset h_2^{-1}(\Gamma)$, причем на ней $|y(s)|=1$ и $|x(s)|\leqslant 1$.

<u>Лемма 2.</u> Предположим, что для невырожденного случайного блуждания $M_y\neq 0$ и $M_x\neq 0$. Тогда класс гомологий гомотопически эквивалентных кривых $\Gamma_0,\Gamma_1,\widetilde{\Gamma}_0,\widetilde{\Gamma}_1$ определяется одним из элементов нормального базиса одномерной группы гомологий тора с коэффициентами в кольце целых чисел.

Доказательство. То, что Γ_0 и Γ_1 гомотопически эквивалентны, следует из метода построения римановой поверхности S , если учесть, что внутри и вне D лежат ровно две точки ветвления $y(x)$. Отсюда же следует, что их класс гомологий определяется одним из элементов нормального базиса гомологий (см. / 9 /). Аналогичное утверждение имеет место для $\widetilde{\Gamma}_0$ и $\widetilde{\Gamma}_1$. Но очевидно, что замкнутые кривые на торе, определяющие разные элементы нормального базиса обязательно пересекаются. В то же время при $M_y<0$ Γ_1 не пересекается с $\widetilde{\Gamma}_1$, а при $M_y>0$ Γ_0 не пересекается с $\widetilde{\Gamma}_0$, что следует из результатов § 2. Это и дает доказательство леммы.

Мы будем далее различать три случая.

1. $M_y<0$, $M_x<0$. Здесь $\Gamma_0\subset h_2^{-1}(\bar{D})$, $\widetilde{\Gamma}_0\subset h_1^{-1}(\bar{D})$, $\Gamma_1\cap h_2^{-1}(D)=\widetilde{\Gamma}_1\cap h_1^{-1}(D)=0$ и $h_1^{-1}(\Gamma)\cap h_2^{-1}(\Gamma)=\Gamma_0\cap\widetilde{\Gamma}_0$ состоит лишь из одной точки $(x,y)=(1,1)$.

2. $M_y<0, M_x=0$. При этом $\widetilde{\Gamma}_1\not\subset h_1^{-1}(D)$, $\Gamma_1\not\subset h_2^{-1}(D)$ и $h_1^{-1}(\Gamma)\cap h_2^{-1}(\Gamma)=\Gamma_0\cap\widetilde{\Gamma}_1$ состоит из одной точки $(x,y)=(1,1)$.

3. $M_y<0, M_x=0$ Кривые Γ_0 и Γ_1 гомологичны и не пересекаются, а две кривые $\widetilde{\Gamma}_0=h_1^{-1}(\bar{D})\cap h_2^{-1}(\Gamma)$ и $\widetilde{\Gamma}_1=h_2^{-1}(\Gamma)\cap(S\setminus h_1^{-1}(D))$ пересекаются в одной точке $x=y=1$ и гомологичны кривым Γ_0 и Γ_1 . Доказательство этого проводится также как и в лемме 2. Гомологичность же Γ_0 и $\widetilde{\Gamma}_0$ можно показать, рассматривая предельный переход при $\varepsilon\to 0$ от $h_2^{-1}(\Gamma_\varepsilon)$ к $h_2^{-1}(\Gamma)$, где $\Gamma_\varepsilon=\{x:|x|=1+\varepsilon\}$.

Эта ситуация наглядно изображена соответственно на рис. 6,7,8. Случай, когда $M_y\geqslant 0, M_x\geqslant 0$ нам не понадобится (см. § 6). Остальные случаи симметричны предыдущим.

Очевидно (см. § I), что функции $\pi(s)$ и $\widetilde{\pi}(s)$ удовлетворяют на Γ_0 и $\widetilde{\Gamma}_0$ соответственно одному и тому же уравнению

$$q(s)\pi(s)+\widetilde{q}(s)\widetilde{\pi}(s)+q_0(s)\pi_{00}=0 \qquad (I)$$

Это уравнение допускает аналитическое продолжение на область $G=h_1^{-1}(D)\cap h_2^{-1}(D)$, где π и $\widetilde{\pi}$ определены одновременно. Кроме того, $\pi(s)$ и $\widetilde{\pi}(s)$ допускают мероморфное продолжение на $h_2^{-1}(D)$ и $h_1^{-1}(D)$ соответственно, если использовать соответственно выражения

$$\pi(s)=-\frac{\widetilde{q}\widetilde{\pi}+\pi_{00}q_0}{q}\ ,\quad \widetilde{\pi}(s)=-\frac{q\pi+\pi_{00}q_0}{\widetilde{q}}$$

Иначе, $\pi(s)$ и $\widetilde{\pi}(s)$ мероморфны в области $h_1^{-1}(D)\cup h_2^{-1}(D)$, причем в этой области выполняется уравнение (I).

§ 4. Группа случайного блуждания.

Будем предполагать далее, что случайное блуждание невырождено. Тогда поле $C_Q(x,y)$ является расширением Галуа поля

$\mathbb{C}(x)$, причем группа Галуа этого расширения циклическая второго порядка. Обозначим ее нетривиальный элемент через ξ. Аналогично вводится нетривиальный элемент η группы Галуа $\mathbb{C}_Q(x,y)$ над $\mathbb{C}(y)$. Легко доказывается

Лемма I. (см. Дополнение)

$$\boxed{\xi y = \frac{p_{1,-1}x^2 + p_{0,-1}x + p_{-1,-1}}{y(p_{11}x^2 + p_{01}x + p_{-1,1})}, \quad \eta x = \frac{p_{-1,1}y^2 + p_{-1,0}y + p_{-1,-1}}{x(p_{11}y^2 + p_{10}y + p_{1,-1})}}$$

Определение. Группу $\mathcal{H}$ автоморфизмов поля $\mathbb{C}_Q(x,y)$, порожденную ξ и η будем называть группой случайного блуждания (зависящую таким образом только от $Q(x,y)$).

Лемма 2. Положим $\delta = \xi\eta$. Тогда $\mathcal{H}$ имеет нормальный делитель $\mathcal{H}_0 = \{\delta^n\}$, который является циклической группой (конечной или бесконечной), фактор-группа по которому есть циклическая группа второго порядка.

Доказательство. Надо доказать, что $x\delta^n x^{-1} \in \mathcal{H}_0$ для любого $x \in \mathcal{H}$ и любого целого n. Но так как $\eta = \eta^{-1}$ и $\xi = \xi^{-1}$, то $(a_1 \dots a_n)^{-1} = a_n \dots a_2 a_1$, где $a_i = \xi$ или η. Следовательно, достаточно проверить это свойство для $x = \xi$ и $x = \eta$. Можно ограничиться кроме того $n = 1$, так как $x\delta^n x^{-1} = (x\delta x^{-1})^n$. Но для этих случаев проверка производится непосредственно. Эта лемма показывает, какими вообще могут быть группы с двумя образующими ξ, η такими, что $\xi^2 = \eta^2 = 1$.

Известно (см. / 9 /), что произвольный автоморфизм ζ поля $\mathbb{C}(S)$ мероморфных функций на S порождается некоторым конформным автоморфизмом $\tilde{\zeta}$ римановой поверхности S по формуле $(\zeta f)(s) = f(\tilde{\zeta}^{-1}s)$, где $f(s) \in \mathbb{C}(S)$. Пусть $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ – конформные автоморфизмы, соответствующие автоморфизмам Галуа ξ и η. Автоморфизм $\tilde{\xi}$ просто переставляет точки s_1 и s_2, проектирующиеся в одну точку x при накрытии h_1, причем точки ветвления h_1 являются его неподвижными точками.

Лемма 3. Для невырожденного случайного блуждания уравнение (6) § I Главы I имеет решение тогда и только тогда, когда существуют такие функции $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ на $h_1^{-1}(D) \cup h_2^{-1}(D)$, аналитические соответственно в областях $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$, непрерывные на границах этих областей, удовлетворяющие уравнению (I) § 3 и уравнениям

$$\pi(s) = \pi(\tilde{\xi}s), \qquad (1)$$

$$\tilde{\pi}(s) = \tilde{\pi}(\tilde{\eta}s). \qquad (2)$$

Необходимость уже была нами показана. Достаточность следует из леммы I § I и того, что $\tilde{\xi}$ оставляет инвариантными $h_1^{-1}(D)$ и $h_1^{-1}(\Gamma)$, а $h_2^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(\Gamma)$ инвариантны относительно η.

§ 5. Поднятие на универсальную накрывающую.

Пусть S имеет род I. Тогда универсальной накрывающей для нее является комплексная плоскость $\mathbb{C}$. Пусть при этом фиксировано некоторое неразветвленное накрытие

$$\lambda : \mathbb{C} \to S.$$

Из теории униформизации известно, что любую такую поверхность можно рассматривать как комплексную группу Ли, являющуюся фактор-группой аддитивной группы $\mathbb{C}$ по дискретной подгруппе $\{m\omega_1 + n\omega_2\}$, где периоды ω_1 и ω_2 линейно независимы над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, m и n – целые.

6^x-1590

При накрытии λ любой отрезок длины $|\omega_i|$ и параллельный вектору ω_i проектируется в замкнутую кривую на S, класс гомологий которой является одним из элементов нормального базиса на S. Можно предположить, что $\lambda([0,\omega_1])$ гомологична Γ_0, а следовательно, по лемме 2 § 3, и всем Γ_1, Γ_0, Γ_1. Рассмотрим некоторую полосу $\Pi=\{\omega:\omega=\mu\omega_1+\nu\omega_2;\mu,\nu\in R, 0\leq\mu<1\}$. Прообраз $\lambda^{-1}\Delta$ области $\Delta=h_1^{-1}(D)\cup h_2^{-1}(D)$ состоит из счетного числа криволинейных полос, сдвинутых на вектора кратные ω_2; а $\lambda^{-1}\Delta\cap\Pi$ состоит из некоторой связной компоненты Δ_0, которую мы далее фиксируем, и ее сдвигов $\Delta_0+n\omega_2$. (При $M_x<0, M_y<0$ эта компонента изображена на рис. 9).

Любая функция $f(S)$, заданная на Δ, может быть поднята на $\Delta_0\subset\mathbb{C}$ по формуле $f_\lambda(\omega)=f(\lambda\omega), \omega\in\Delta_0$; свойства аналитичности f при этом не меняются. (Далее мы везде, где это не приведет к недоразумениям опускаем индексы λ и λ^{-1} у кривых, областей и функций, поднятых на Δ_0; аргумент у функций при этом будем обозначать через ω, имея ввиду, что, например, $\Pi(\omega)=\Pi(S), S=\lambda\omega$).

Из теории униформизации известно, что $x(\omega), y(\omega)$ (а, следовательно, и $\widehat{q}(\omega), q(\omega), q_0(\omega)$) являются эллиптическими функциями, мероморфными на всей $\mathbb{C}$. Заметим еще раз, что $\Pi(\omega)$ и $\widetilde{\Pi}(\omega)$ определены пока лишь на Δ_0. Они могут быть аналитически продолжены на $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\{\Delta_0+n\omega_1\}$, где они являются периодическими с периодом ω_1, т.е.

$$\Pi(\omega+\omega_1)=\Pi(\omega),\ \widetilde{\Pi}(\omega+\omega_1)=\widetilde{\Pi}(\omega), \qquad (1)$$

а потом

$$q(\omega)\Pi(\omega)+\widehat{q}(\omega)\widetilde{\Pi}(\omega)+q_0(\omega)\Pi_{00}=0. \qquad (2)$$

Пусть x_1 и x_2 (y_1 и y_2) – точки ветвления $y(x)$ ($x(y)$), лежащие внутри единичного круга. Прообразы точек $h_1^{-1}(x_1)$ и $h_1^{-1}(x_2)$ ($h_2^{-1}(y_1)$ и $h_2^{-1}(y_2)$) в Δ_0 обозначим a_1 и a_2 (b_1 и b_2).

Произвольный конформный автоморфизм $\widetilde{\xi}$ римановой поверхности S может быть продолжен до конформного автоморфизма $\xi=\lambda^{-1}\widetilde{\xi}\lambda$ универсальной накрывающей (см. / 9 /). Это продолжение неоднозначно, но становится однозначным, если фиксировать для некоторой точки $a\in\mathbb{C}$ ее образ $\xi a\in\in\{\lambda^{-1}\widetilde{\xi}\lambda\}$. Для автоморфизма Галуа $\widetilde{\xi}$ мы потребуем таким образом, чтобы a_1 была его неподвижной точкой, т.е. $\xi a_1=a_1$.

<u>Лемма I.</u> В системе координат с началом в точке a_1: $\xi\omega=-\omega$.

Действительно, самый общий конформный автоморфизм $\mathbb{C}$ представляется в виде: $\omega\longrightarrow\alpha\omega+\beta$. Но так как начало координат есть неподвижная точка, то $\beta=0$, а так как $\xi^2=1$, то $\alpha^2=1$ и $\alpha=-1$.

Аналогично, поднятие автоморфизма Галуа $\widetilde{\eta}$ на $\mathbb{C}$ определим формулой: $\eta\omega=-\omega$ в системе координат с началом в b_1.

<u>Лемма 2.</u> $\xi\eta\omega=\omega+\omega_3$, где $\omega_3=2(a_1-b_1)$, т.е. произведение автоморфизмов Галуа есть сдвиг на вектор, равный удвоенному расстоянию между их неподвижными точками.

<u>Доказательство.</u> В системе координат с началом в точке a_1 имеем $\eta\omega=-(\omega+\frac{\omega_3}{2})-\frac{\omega_3}{2}$, откуда и следует лемма.

Замечание. Применяя эту лемму к одному автоморфизму $\widetilde{\xi}$, но по разному поднятому на универсальную накрывающую (имеющему разные неподвижные точки на ней) можно доказать, что расстояние между любыми двумя прообразами $\lambda^{-1}h_1^{-1}(x_i)$ и $\lambda^{-1}h_1^{-1}(x_j)$ произвольных неподвижных точек $h_1^{-1}(x_i)$ и $h_1^{-1}(x_j)$ автоморфизма $\widetilde{\xi}$ на S должно быть равно $m\frac{\omega_1}{2}+n\frac{\omega_2}{2}$ для некоторых целых чисел m и n. Так для точек a_1, a_2 и b_1, b_2 имеем

$$a_1-a_2=\pm\frac{\omega_1}{2}, \quad b_1-b_2=\pm\frac{\omega_1}{2}. \tag{3}$$

Действительно, рассмотрим отрезок ℓ, соединяющий точки x_1 и x_2 внутри единичного круга и накрывающую его замкнутую кривую $h_1^{-1}(\ell)$ на S. Эта кривая инвариантна относительно $\widetilde{\xi}$ на S и гомологична Γ_1. Пусть $\widetilde{\ell}_1=\lambda^{-1}(\ell_1)\cap\Delta_0$ и $\widetilde{\ell}_2=\lambda^{-1}(\ell_2)\cap\Delta_0$ – прообразы в области Δ_0 двух кривых ℓ_1 и $\ell_2\subset S$, соединяющих точки $h_1^{-1}(x_1)$ и $h_1^{-1}(x_2)$ и таких, что $h_1(\ell_i)=\ell, \ell_1\cap\ell_2=\{h_1^{-1}(x_1), h_1^{-1}(x_2)\}$.

Пусть, кроме того, $\widetilde{\xi}a_1=a_1$. Так как $\ell_2=\widetilde{\xi}\ell_1$, то кривая $\widetilde{\ell}_1\cup\widetilde{\ell}_2$ соединяет точки a_2 и ξa_2 в области $h_1^{-1}(D)$ и в силу гомологичности ее Γ_1, расстояние между ними должно быть $\pm\omega_1$, так как $\widetilde{\xi}a_2=a_2\pm\omega_1$, что и требовалось доказать.

<u>Т е о р е м а I.</u> Функции $\Pi(\omega)$ и $\widetilde{\Pi}(\omega)$ мероморфно продолжаются на всю универсальную накрывающую, где они удовлетворяют уравнениям (I), (2) и

$$\Pi(\xi\omega)=\Pi(\omega), \widetilde{\Pi}(\eta\omega)=\widetilde{\Pi}(\omega) \tag{4}$$

<u>Доказательство.</u> Ввиду соотношений (I) достаточно ограничиться полосой Π или рассматривать некомпактную риманову поверхность $\widetilde{S}$, являющуюся фактором $\mathbb{C}$ по $\{n\omega_1\}$.

Докажем сначала, что объединение областей $(\xi\eta)^n\Delta_0$, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, покрывает всю $\mathbb{C}$. Для этого заметим, что $\xi\Gamma_1=\Gamma_0$, $\eta\Gamma_0\subset\Delta_0$. Следовательно, $\Delta_0\cup\eta\xi\Delta_0$ является связной односвязной областью. Так как $\eta\xi$ на $\mathbb{C}$ есть просто сдвиг, то отсюда и следует требуемое утверждение. Очевидно, что при $\omega\in\Gamma_1$ выполняются следующие соотношения.

$$q(\xi\omega)\Pi(\xi\omega)+\widetilde{q}(\xi\omega)\widetilde{\Pi}(\xi\omega)+\Pi_{00}q_0(\xi\omega)=0 \tag{5}$$

$$q(\xi\omega)\Pi(\omega)+\widetilde{q}(\xi\omega)\widetilde{\Pi}(\eta\xi\omega)+\Pi_{00}q_0(\xi\omega)=0. \tag{6}$$

Но ввиду (4) из (2) и (6) следует

$$\widetilde{\Pi}(\eta\xi\omega)=\frac{q(\xi\omega)\widetilde{q}(\omega)}{\widetilde{q}(\xi\omega)q(\omega)}\widetilde{\Pi}(\omega)+$$

$$+\Pi_{00}\frac{q(\xi\omega)}{\widetilde{q}(\xi\omega)}\left(-\frac{q_0(\xi\omega)}{q(\xi\omega)}+\frac{q_0(\omega)}{q(\omega)}\right) \tag{7}$$

Если мы докажем теперь, что $\widetilde{\Pi}(\omega)$ продолжается вдоль любого пути ℓ на $\mathbb{C}$, то по теореме о монодромии доказательство теоремы будет завершено. Пусть уже доказано, что $\widetilde{\Pi}(\omega)$ можно продолжить вдоль любого пути, принадлежащего объединению областей $(\eta\xi)^k\Delta_0$ для $k=-n,\dots,-1,0,\dots,n$. Пусть например, $\ell\subset\left[\bigcup_{|k|\le n}\delta^k\Delta_0\right]\cup\delta^{-(n+1)}\Delta_0$. Но тогда, используя тот факт, что $\delta\left[\ell\cap(\eta\xi)^{n+1}\Delta_0\right]\subset(\eta\xi)^n\Delta_0$, и соотношение (7), очевидно доказывается, что $\widetilde{\Pi}(\omega)$ можно продолжить вдоль ℓ. Теорема доказана.

<u>Следствие I.</u> $\Pi(x)$ и $\widetilde{\Pi}(y)$ допускают аналитическое продолжение в некоторую окрестность единичного круга.

По своему вероятностному смыслу $\pi(x)$ не может иметь полюсов в $\bar{D}$. Поэтому $\pi(\omega)$ не имеет полюсов в $\bar{\Delta}_0 \cap \lambda^{-1} h_1^{-1}(\bar{D})$, а так как $\pi(\omega)$ мероморфна, то и в некоторой окрестности этого множества. Следовательно, $\tilde{\pi}(s)$ аналитична в некоторой окрестности $h_1^{-1}(\Gamma)$. Если $M_y \neq 0$, то в некоторой окрестности $h_1^{-1}(\Gamma)$ нет точек ветвления накрытия h_1, и для этого случая, опуская $\tilde{\pi}(s)$ на $\mathbb{P}$, получаем искомое доказательство. Пусть $M_y = 0$. Случай $M_x \geq 0$, как уже указывалось в § 5, нам не понадобится. Пусть $M_x < 0$. Тогда накрытие h_1 имеет, кроме точки $x = 1$, одну точку ветвления в $\bar{D}$. Эти две точки соответствуют точкам a_1, a_2 введенным выше. Пользуясь соотношениями (3) замечания можно показать, что если $\pi(\omega)$ четна относительно одной из точек a_i, то она четна и относительно другой. Отсюда и следует, что $\pi(x)$ не может иметь точки ветвления при $x = 1$.

§ 6. Невырожденные блуждания с $M_x \geq 0, M_y \geq 0$

В этом параграфе будет доказана

Т е о р е м а I. Если у невырожденного случайного блуждания имеется один существенный класс состояний, причем $M_x \geq 0$ и $M_y \geq 0$, то вне зависимости от вероятностей $p'_{ij}, p''_{ij}, p^{\circ}_{ij}$ стационарного распределения у такой цепи Маркова не существует.

В то же время при доказательстве этой теоремы видны как общие технические идеи, так и специфика для поверхностей рода нуль.

Рассмотрим множество $\mathcal{P}_{++} \subset \mathcal{P}$, определяемое условиями $\mathcal{P}_{++} = \{p : p \in \mathcal{P};\ M_x, M_y \geq 0\}$. Для любой точки $p \in \mathcal{P}_{++}$, соответствующей невырожденному случайному блужданию, существует

точка $\tilde{p} \in \mathcal{P}_{00} = \{p : M_x = M_y = 0\}$, также соответствующая невырожденному случайному блужданию и такая, что ее компоненты $\tilde{p}_{ij}$ связаны с компонентами p_{ij} точки p следующим образом: $\tilde{p}_{ij} = p_{ij} - \varepsilon_{ij}$ для некоторых $\varepsilon_{ij} \geq 0$ и

$$(i,j) = (-1,1), (1,1), (1,0), (0,1), (1,-1);\ \tilde{p}_{-1,0} = p_{-1,0} + \varepsilon_{-1,1} + \varepsilon_{10},$$

$$\tilde{p}_{0,-1} = p_{0,-1} + \varepsilon_{1,-1} + \varepsilon_{0,1},\ \tilde{p}_{-1,-1} = p_{-1,-1} + \varepsilon_{11},\ \tilde{p}_{00} = p_{00}.$$

Лемма I. Пусть $m(p)$ – среднее время возвращения из точки (I,I) в (0,0) для случайного блуждания, определяемого точкой $p \in \mathcal{P}_{++}$ и вероятностями $p'_{-1,0} = p''_{0,-1} = p^{\circ}_{11} = 1$. Тогда, если $m(p, p'_{ij}, p''_{ij}, p^{\circ}_{ij})$ – среднее время возвращения из (I,I) в (0,0), определяемое этой же точкой и произвольными другими вероятностями $p'_{ij}, p''_{ij}, p^{\circ}_{ij}$, то

$$m(p) \leq m(p, p'_{ij}, p''_{ij}, p^{\circ}_{ij}).$$

Лемма 2. В обозначениях леммы I : $m(p) \geq m(\tilde{p})$.

Доказательство. Введем следующее вероятностное пространство Ω. Рассмотрим всевозможные траектории точки, вышедшей из (I,I), двух типов: траектории бесконечной длины, нигде не попадающие на границу, и траектории конечной длины, оканчивающиеся в (0,0) при первом попадании в эту точку. При этом переходы типа (-I,I), (0,I), (I,I), (I,0), (I,-I) могут быть отмечены или нет. Множество таких траекторий с отметками образует пространство Ω. Вероятность каждой траектории подсчитывается перемножением вероятностей переходов в ней. При этом вероятность "отмеченного" перехода равна ε_{ij}, а "неотмеченного" $p_{ij} - \varepsilon_{ij}$. Каждой траектории с отметкой сопоставим траекторию без отметки следующим образом: траектория-образ строится последовательно шаг за шагом до ее попадания на границу. m – тому переходу в отмеченной траектории сопоставим такой же переход в новой траектории, если он не был отмечен, а если был, то вместо переходов типа (-I,I) и (I,0) делаем переход типа (-I,0), вместо (I, -I) и (0,I) - переход типа (0, -I), и вместо (I,I) - переход (-I, -I). Ясно, что в любой момент обе координаты точки новой траектории будут не больше координат точки старой траектории. Отсюда легко получается соотношение между средними временами возвращения в лемме 2.

Таким образом ввиду лемм I и 2 достаточно доказать утверждение теоремы для случая $M_x = M_y = 0,\ p'_{-1,0} = p''_{0,-1} = p^{0}_{11} = 1$

Это и будет сделано с помощью нашего аналитического метода. Отсюда и будет следовать, что для всех случаев

$$m(p, p'_{ij}, p''_{ij}, p^{0}_{ij}) = \infty$$

Лемма 3. Если $M_x = M_y = 0$, то $\left.\dfrac{d^2 D(x)}{dx}\right|_{x=1} < 0$.

Доказательство. Имеем $D''(1) = 2bb'' - 4a''c + 2b'^2 - 8a'c'$, где $a = a(1), a'' = a''(1), b = b(1)$ и т.д. Учитывая, что $b = -2a$, $c = a$, получим

$$\frac{D''(1)}{2} = -2a(a'' + b'' + c'') + b'^2 - 4a'c' = -4(p_{11} + p_{01} + p_{-1,1}) \cdot$$

$$\cdot (p_{11} + p_{10} + p_{1,-1}) + (1 - p_{00} - 2p_{10})^2 - 4(2p_{11} + p_{01})(2p_{1,-1} + p_{0,-1}) =$$

$$= -4a\tilde{a} + (p_{-1,0} - p_{10} + 2a)^2 - 4(a + p_{11} - p_{-1,1})(a + p_{1,-1} - p_{-1,-1}),$$

где $\tilde{a} = p_{11} + p_{10} + p_{1,-1}$. Полагая $\beta = p_{11} - p_{-1,1}$, $\gamma = p_{1,-1} - p_{-1,-1}$,

получаем

$$\frac{D''(1)}{2} = (\beta + \gamma + 2a)^2 - 4(a + \beta)(a + \gamma) - 4a\tilde{a} = \beta^2 + \gamma^2 -$$

$$-2\beta\gamma - 4a\tilde{a} = p_{11}^2 + p_{-1,1}^2 + p_{1,-1}^2 + p_{-1,-1}^2 - 2p_{11}p_{1,-1} +$$

$$+ 2p_{11}p_{-1,-1} + 2p_{-1,1}p_{1,-1} - 2p_{-1,1}p_{-1,-1} - 2p_{11}p_{-1,1} - 2p_{1,-1}p_{-1,-1} - 4a\tilde{a}. \tag{I}$$

Заменяем $4a\tilde{a}$ на $a\tilde{a} + a\tilde{c} + c\tilde{a} + c\tilde{c}$ и раскрываем скобки в формуле (I). После этого в выражении (I) остаются лишь отрицательные члены, что и доказывает лемму.

В § 2 было отмечено, что при $M_x = M_y = 0$ род римановой поверхности S равен 0, т.е. S является комплексной сферой.

<u>Лемма 4.</u> Функция $y(x)$ имеет две точки ветвления, одна из которых, x_1, лежит строго внутри единичного круга, а вторая, x_2, строго вне его. Аналогичное утверждение имеет место конечно, и для функции $x(y)$.

Действительно, $\left.\dfrac{D(x)}{(1-x)^2}\right|_{x=1} < 0$ по лемме 3, а $\left.\dfrac{D(x)}{(1-x)^2}\right|_{x=-1} > 0$ по лемме 8 § 2.

Поэтому существует корень $D(x)$ внутри отрезка [-I,I] и корень (конечный или бесконечный) на его дополнении к вещественной оси.

Ввиду леммы 4 $h_1^{-1}(\Gamma)$ и $h_2^{-1}(\Gamma)$ (см. § 3) являются связными аналитическими кривыми, пересекающимися в двух точках $h_1^{-1}(1)$ или $h_2^{-1}(1)$, т.е. точках где $x = y = 1$ (см.рис.I0).

Обозначим их α_1 и α_2.

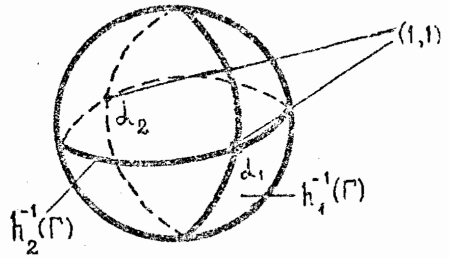

Рис. 10

Произвольный автоморфизм комплексной сферы S является дробнолинейным преобразованием. Так как $\tilde{\xi}^2=\tilde{\eta}^2=1$, то $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ – эллиптические преобразования с неподвижными точками $h_1^{-1}(x_1), h_1^{-1}(x_2)$ и $h_2^{-1}(y_1), h_2^{-1}(y_2)$ соответственно. При этом $\tilde{\xi}\alpha_1=\tilde{\eta}\alpha_1=\alpha_2$, $\tilde{\xi}\alpha_2=\tilde{\eta}\alpha_2=\alpha_1$, что ясно из определения $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$. Отсюда следует, что α_1 и α_2 являются неподвижными точками преобразования $\tilde{\xi}\tilde{\eta}$.

Лемма 5. $\tilde{\xi}\tilde{\eta}$ является эллиптическим дробно-линейным преобразованием, если случайное блуждание невырождено и

$$M_x = M_y = 0.$$

Для доказательства разложим обе ветви алгебраической функции $1-y(x)$ в точке $x=1$ по степеням $1-x$:

$$1+y(x)=\left(-\frac{\beta-\gamma}{2a(1)}\pm\frac{1}{2a(1)}\,i\sqrt{\left|\frac{D''(1)}{2}\right|}\right)(1-x)+ \qquad (2)$$

$$+\ \dots\ .$$

Действительно, $D''(1)<0$ (лемма 3) и

$$-\frac{b'(1)a(1)+a'(1)b(1)}{2a^2(1)}=\frac{-b'(1)a(1)+a'(1)(-2a(1))}{2a^2(1)}=$$

$$=-\frac{b'(1)+2a'(1)}{2a(1)}=\frac{1-2p_{10}-p_{00}-4p_{11}-2p_{01}}{2a(1)}=\frac{\gamma-\beta}{2a(1)}$$

(см. доказательство леммы 3).

Далее воспользуемся следующим приемом доказательства эллиптичности преобразования $\tilde{\xi}\tilde{\eta}$. Возьмем некоторую функцию $f(s)$ аналитическую в некоторой окрестности U точки $\alpha_1\in S$ с отличной от нуля производной в точке α_1. Очевидно, что отношение производных функций $f(\tilde{\xi}\tilde{\eta}s)$ и $f(s)$ в точке $s=\alpha_1$ характеризует вид преобразования $\tilde{\xi}\tilde{\eta}$. В частности, оно эллиптично, если это отношение по модулю равно I. Заметим, что эти вычисления можно делать в любых конформных координатах (одних для $f(\tilde{\xi}\tilde{\eta}s)$ и $f(s)$).

Возьмем теперь в качестве $f(s)$ функцию $y(s)$, а вычисления будем производить в конформных координатах, задаваемых проекцией $h_1(U)$ на комплексную плоскость (будем считать, что в формуле (2) имеет место, например, знак +). По лемме I § 4

$$y(\tilde{\xi}\tilde{\eta}s)=\xi\eta y=\frac{c(x)}{a(x)y}.$$

Но $\dfrac{c(x)}{a(x)}=1+\dfrac{\beta-\gamma}{a}(1-x)+\cdots$ (3)

Поэтому

$$\frac{c(x)}{a(x)y}=1+\frac{\beta-\gamma}{a(1)}(1-x)+(1-y)+\ldots=$$

$$=1+\left(\frac{\beta-\gamma}{2a(1)}+\frac{1}{2a(1)}\, i\sqrt{\left|\frac{D''(1)}{2}\right|}\right)(1-x)+\ldots \tag{4}$$

Из формул (2) и (4) следует теперь, что

$$\left|\frac{d\left(\frac{c(x)}{a(x)y(x)}\right)}{dx}\right|=\left|\frac{dy(x)}{dx}\right| \quad \text{при } x=1,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь уравнения (I), (2) § 4 и (I) § 3 в области $\bar{\Delta}=h_1^{-1}(\bar{D})\cup h_2^{-1}(\bar{D})$. В случае, когда $p'_{-1,0}=p''_{0,-1}=$ $=p_{11}^{0}=1$ уравнение (I) § 3 выглядит следующим образом:

$$(1-x(s)\pi(s)+\tilde{\pi}(s)(1-y(s))+\pi_{00}\cdot(x(s)y(s)-1)=0 \tag{5}$$

Лемма 6. Функции $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ могут быть мероморфно продолжены на всю риманову поверхность S.

Доказательство. Перепишем уравнение (5) так

$$R(s)+\tilde{R}(s)=(1-x(s)y(s))\pi_{00}\stackrel{\text{def}}{=}\psi(s), \tag{6}$$

где $R(s)=\pi(s)(1-x(s)$ инвариантна относительно ξ,

а $\tilde{R}(s)=\tilde{\pi}(s)(1-y(s))$ инвариантна относительно η.

Предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 7. Положим $\Delta=\Delta_0$, $\Delta_n=\delta^n\Delta_0$. Тогда система множеств $\Delta_n;\ n=\ldots,-1,0,1,\ldots,$ образует покрытие римановой поверхности S.

Для доказательства рассмотрим $h_1^{-1}(\Gamma)$, состоящую из двух кривых $\Gamma_0=\{s:|y(s)|<1,|x(s)|=1\}$ и $\Gamma_1=\{s:|y(s)|>1,$ $|x(s)|=1\}$.

Аналогично определяются $\tilde{\Gamma}_0=\{s:|y(s)|=1,|x(s)|<1\}$ и

$$\tilde{\Gamma}_1=\{s:|y(s)|=1,\ |x(s)|>1\}.$$

Докажем, что $\Gamma_1\subset\Delta_1$. Для этого заметим, что $\xi\Gamma_1=\Gamma_0$. Так как Γ_0 лежит внутри $h_2^{-1}(D)$, то и $\tilde{\eta}\Gamma_0\subset h_2^{-1}(D)$. Иначе говоря, $\tilde{\eta}\xi\Gamma_1=(\xi\tilde{\eta})^{-1}\Gamma_1\subset\Delta_0$, откуда и следует, что $\Gamma_1\subset\Delta_1$. Аналогично доказывается, что $\tilde{\Gamma}_1\subset\Delta_{-1}$.

Рассмотрим теперь некоторую инвариантную окружность γ эллиптического преобразования $\tilde{\delta}=\tilde{\xi}\tilde{\eta}$ на S. Обозначим через γ_n пересечение γ и Δ_n. На γ преобразование $\tilde{\delta}$ сводится к простому повороту на некоторый угол φ. Множество γ_0 во всяком случае является объединением конечного числа непересекающихся отрезков, концы которых принадлежат либо Γ_1 либо $\tilde{\Gamma}_1$. В силу доказанного выше любой конец такого отрезка принадлежит либо γ_1 либо γ_{-1}.

Остается доказать, что из последнего утверждения следует, что множества $\gamma_n=\delta^n\gamma_0$, $n=\ldots,-1,0,1,\ldots,$ покрывают всю окружность. Действительно, множество $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}\gamma_n$ открыто. Обозначим через a некоторую не принадлежащую ему ее предельную точку.

Тогда как угодно близко к a существует конец b одного из отрезков множества γ_n для некоторого n.

Однако, существует такое число $\varepsilon>0$, что любой конец одного из отрезков множества γ_0 принадлежит либо γ_1

7-1590

либо γ_{-1} вместе со всеми точками ε -окрестности. Это же свойство (с этим же ε) выполнено тогда и для произвольного конца любого из отрезков множества γ_n для любого n. Тогда b, а следовательно, и a покрывается одним из множеств γ_{n+1} или γ_{n-1}. Лемма доказана.

Для завершения доказательства леммы 6 надо доказать теперь, что $R(S)$ может быть мероморфно продолжена вдоль любого пути $C\subset S$ (что можно сделать так же, как при доказательстве основной теоремы § 5) и воспользоваться теоремой о монодромии.

Заметим теперь, что из вероятностных соображений ясно, что существование стационарного распределения не зависит от поведения точки в (0,0), если например, только конечное число вероятностей перехода p^{0}_{ij} отлично от нуля, причем имеется один существенный класс состояний. При этом легко показать, что уравнение (6) принимает вид ж)

$$R(x)+\widetilde{R}(y)=\psi(x,y)\pmod{Q(x,y)}, \qquad (7)$$

где $\psi(x,y)$ многочлен с положительными коэффициентами, а и $R(x)$ - многочлены соответственно от y и x.

Таким образом для доказательства несуществования решения уравнения (7) мы можем произвольно выбирать многочлен $\psi(x,y)$ с положительными коэффициентами при $x^i y^j, i,j\geqslant 1$ (так как члены вида $a_i x^i, b_j y^j$ можно сразу перенести в левую часть и они не влияют на существование решения).

ж) То, что $R(S)$ можно представить в виде функции от $x(S)$ в силу инвариантности относительно ξ следует, например, из основной теоремы теории Галуа.

Для доказательства теоремы мы будем пользоваться следующим достаточным условием несуществования решения уравнения (7).

Лемма 8. Если существует такой полюс нечетного порядка K функции $\psi(S)$ в точке S_0, что на орбите $\mathcal{H}S_0$ нет полюсов порядка $n\geqslant K$, то решения уравнения (7) не существует.

Доказательство. Чтобы удовлетворялось уравнение (7) необходимо, чтобы одна из функций R или $\widetilde{R}$ имела в точке S_0 полюс порядка K. Пусть это будет, например, $R(x)$.

Предположим сначала, что орбита бесконечна. Тогда $\widetilde{R}(S)$ имеет также полюс порядка K и в точке ξS_0, а для того, чтобы удовлетворялось уравнение (7) необходимо, чтобы и имела полюс в точке ξS_0. Но тогда $\widetilde{R}(S)$ имеет полюс и в точке $\eta\xi S_0$ и т.д. Возможны два варианта: I. либо так мы по индукции сможем доказать, что $R(S)$ и $\widetilde{R}(S)$ имеют полюса в бесконечном числе точек орбиты, что невозможно, или 2. в конце концов мы встретим неподвижную точку относительно одного из автоморфизмов, например, ξ. Это есть точка ветвления относительно накрытия h_1. Но тогда мы приходим к противоречию, ибо инвариантная относительно ξ функция не может иметь полюса нечетного порядка в неподвижной точке этого автоморфизма.

Рассмотрим теперь случай, когда орбита $\mathcal{H}S_0$ конечна. Случай, когда на орбите встречаются неподвижные точки относительно ξ или η исключается также, как и раньше (кроме самой точки S_0). Если S_0 не есть, например, точка ветвления относительно ξ, то так же, как и выше можно доказать, что R и $\widetilde{R}$ имеют полюса во всех точках $S\in\mathcal{H}S_0, S\neq S_0$. При этом однако, мы приходим к противоречию с тем, что в силу леммы 7 $\mathcal{H}S_0$ обязательно пересекается с областью Δ. Действительно, если например, $S_0 \in \Delta$, то в точке ξS_0 обе функции R и $\widehat{R}$ имеют полюс, что невозможно. Случай же когда точка неподвижна относительно ξ и η из вышеприведенных рассуждений невозможен (см. рис. 10).

В соответствии с этой леммой подберем теперь $\psi(x,y)$.

Пусть сначала ∞ не является ни точкой ветвления $x(y)$ (т.е. накрытия h_2), ни точкой ветвления $y(x)$ (т.е. h_1). Пусть S_1 и S_2 - точки, где $x(S)=\infty$. Если $y(S_i)\neq\infty$, $i=1,2$, то достаточно положить

$$\psi(x,y)=x^3(y-y(S_1)).$$

При $y(S_1)=\infty$, $y(S_2)\neq\infty$ положим $\psi(x,y)=x^2y$; тогда $\psi(x,y)$ имеет единственный полюс третьего порядка в точках S_2 и S_1 соответственно.

Случай, когда $y(S_1)=y(S_2)=\infty$ невозможен, так как в противном случае функции $x(y)$ и $y(x)$ были бы целыми, т.е. $p_{10}=p_{11}=p_{01}=0$.

Пусть теперь, например, $\tilde{\eta} S_1=S_1$. Тогда $y(S_1)\neq\infty$ по сказанному только что, и можно положить $\psi(x,y)= x^3(y-y(S_1))$, если $y(S_2)\neq\infty$. Если же $y(S_2)=\infty$, то $\eta S_2\neq S_2$ и можно положить $\psi(x,y)=xy$.

В последнем случае ψ будет иметь в точке S_2 полюс третьего порядка.

Пусть, наконец, точка ∞ есть точка ветвления для $y(x)$, т.е. $S_1=S_2=S$. Заметим, что тогда $\eta S\neq S$. Если $y(S)=\infty$, то этот случай симметричен предыдущему, а если $y(S)\neq\infty$, то следует положить $\psi(x,y)= x^2(y-y(S))$. Тогда ψ будет иметь полюс третьего порядка в S.

Доказательство окончено.

ГЛАВА IУ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ.

Введение.

В этой главе мы получим важное для дальнейшего интегральное представление для производящих функций, а тем самым и для самих стационарных вероятностей. Из этого интегрального представления будет следовать в частности

Т е о р е м а I. Если $M_x<0$ и $M_y<0$, то стационарное распределение у невырожденного случайного блуждания существует тогда и только тогда когда выполняются следующие два условия

$$M_x M_y' - M_y M_x' < 0, \tag{1}$$

$$M_y M_x'' - M_x M_y'' < 0. \tag{2}$$

(при $M_x<0$, $M_y\geq 0$ имеют место такие же условия).

Интегральное представление в ряде случаев имеет вид эллиптического интеграла, а в общем случае является его обобщением. Интегральное представление не является единственно возможным (см. последние два параграфа следующей главы). Интегральное представление может использоваться как для фактического вычисления стационарных вероятностей, так и для получения важных следствий (например, об аналитической зависимости стационарных вероятностей от переходных).

В дальнейшем мы будем часто говорить о параметризации пространства параметров. Мы уже ввели ранее симплекс $\mathcal{P}$. Аналогично введем

7^x-1590

$$\mathcal{P}' = \left\{ p'_{ij} : \sum p'_{ij} = 1,\ p'_{ij} \geq 0 \right\},$$

$$\mathcal{P}'' = \left\{ p''_{ij} : \sum p''_{ij} = 1,\ p''_{ij} \geq 0 \right\},$$

$$\mathcal{P}^{\circ} = \left\{ p^{\circ}_{ij} : \sum p^{\circ}_{ij} = 1,\ p^{\circ}_{ij} \geq 0 \right\}.$$

§ I. Разделяющая гиперплоскость.

Существование стационарного распределения зависит кроме M_x и M_y также от средних скачков за один шаг из точек на осях x и y соответственно, т.е. от величин

$$M'_x = \frac{d}{dx} p'(x,y)\Big|_{x=y=1}, \quad M'_y = \frac{d}{dy} p'(x,y)\Big|_{x=y=1},$$

$$M''_x = \frac{d}{dx} p''(x,y)\Big|_{x=y=1}, \quad M''_y = \frac{d}{dy} p''(xy)\Big|_{x=y=1}$$

(здесь при дифференцировании подразумевается, что переменные x и y независимы).

Функции $q(x,y)$ и $\tilde{q}(x,y)$ имеют нуль в точке $x(s)=y(s)=1$.

Лемма I. Функция $q(x,y)$ имеет в точке $x(s)=y(s)=1$ нуль не менее второго порядка тогда и только тогда, когда

$$M'_y M_x = M_y M'_x \tag{I}$$

Аналогичное утверждение имеет место для функции $\tilde{q}(x,y)$ с заменой условия (I) на

$$M''_y M_x = M_y M''_x \tag{2}$$

Доказательство. Если $M_y \neq 0$, то $x(S)-1$ имеет в точке (I, 1) нуль первого порядка и, следовательно, q имеет в этой точке нуль не менее второго порядка тогда и только тогда, когда

$$\frac{dp'(x,y)}{dx} = 0 \qquad \text{при } x=y=1 \tag{3}$$

(дифференцирование в поле алгебраических функций).

Но при $x=y=1$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p_x(x,y)}{p_y(x,y)} = -\frac{M_x}{M_y}, \tag{3'}$$

и в то же время

$$\frac{dp'(x,y)}{dx} = (p'(x,y))'_y \frac{dy}{dx} + (p'(x,y))'_x =$$

$$= -M'_y \frac{M_x}{M_y} + M'_x \qquad \text{при } x=y=1.$$

Откуда условие (3) эквивалентно (1).

В случае когда $M_y = 0$, $M_x \neq 0$ следует использовать производную $\frac{dx}{dy}$.

Нам понадобится также более тонкое утверждение.

Для заданного $p \in \mathcal{P}$ обозначим $\mathcal{P}'_0$ – подмножество симплекса $\mathcal{P}$, на котором выполняется (I). Это есть пересечение гиперплоскости (I)с $\mathcal{P}'$. Аналогично вводится $\mathcal{P}''_0$.

Лемма 2. Функция $q(x,y)$ имеет в точке (I,I) нуль не менее третьего порядка на гиперплоскости (I) тогда и только тогда, когда выполняется условие (если $M_y \neq 0$)

$$C_1(p'_{-1,1}+p'_{-1,0})+C_2(p'_{11}-p'_{-1,1})=C_3 M'_y , \quad (4)$$

где $C_1=M_y^3$, $C_2=-M_x M_y^2$ и $C_3=-\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}M_y^3$

определяется формулой (5).

Симметричное условие имеет место при $M_x \neq 0$.

Аналогичное утверждение с очевидными заменами имеет место и для функции $\tilde{q}(x,y)$.

<u>Доказательство.</u> Последовательным дифференцированием равенства $p(x,y)$ = I получим в точке (I,I)

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}M_y^3=M_y^2(p_{-1,1}+p_{-1,0}+p_{-1,-1})+M_x^2(p_{1,-1}+$$

$$+p_{0,-1}+p_{-1,-1})-M_x M_y(p_{11}+p_{-1,-1}-p_{1,-1}-p_{-1,1}) . \quad (5)$$

При использовании (3 ') равенство q''_x (I,I) = 0 превращается в

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}M'_y M_y^2-M_y^2(p'_{-1,1}+p'_{-1,0})-$$

$$-M_x M_y(p'_{11}-p'_{-1,1}) . \quad (6)$$

Из двух последних равенств вытекает условие (4).

<u>Следствие I</u>. Множество точек на гиперплоскости (I), для которых функция $q(x,y)$ в точке (I,I) имеет нуль более второго порядка, является линейным многообразием (при фиксированном $p \in \mathcal{P}$) меньшей размерности, причем возможно пустым.

Действительно, легко проверяется, что соотношение (4) ни для каких $p \in \mathcal{P}$ не может вырождаться.

<u>Лемма 3</u>. Если выполняется хотя бы одно из условий (I) или (2), то стационарного распределения не существует.

Доказательство. Пусть сначала $M_x \leqslant 0$ и $M_y < 0$. Если выполняется только одно из условий, например, (I), то подберем $q_0(x,y)$ так, чтобы она имела нуль не менее второго порядка в точке (1,I). Для этого достаточно выполнение соотношения

$$\frac{(q_0(1,1))'_x}{(q_0(1,1))'_y} = \frac{M_x}{M_y} ,$$

что всегда выполнимо, так как $\frac{M_x}{M_y} \geqslant 0$.

При этом, заметив, что $\dot{\Pi}(1)>0$ и $\dot{\tilde{\Pi}}(1)>0$, мы видим, что левая часть уравнения

$$q\Pi+\tilde{q}\tilde{\Pi}=-\Pi_{00}q_0 \quad (7)$$

имеет нуль первого порядка, в то время как правая – не менее второго. Следовательно, удовлетворяющего нас решения не существует.

Если же выполняются оба условия (I) и (2), то получается противоречие с тем, что нуль левой части – всегда не менее 2-го порядка, в то время как в правой – может быть I-го порядка.

Пусть теперь $M_x>0$, $M_y<0$ и выполнено только условие (2). Тогда, если

$$M_x M_y' > M_y M_x' \, ,$$

то сравнивая разложения в ряд по $(1-x)$ левой и правой частей, мы видим, что коэффициенты при $1-x$ у $q\Pi$ и у $-\Pi_{00} q_0$ имеют разные знаки (коэффициент у $\tilde{q}\tilde{\Pi}$ равен нулю):

$$\Pi(1),\ \Pi_{00},\ \frac{dq}{dx} = -M_y' \frac{M_x}{M_y} + M_x' \quad \text{и} \quad \frac{dq_0}{dx} > 0$$

Случай

$$M_x M_y' < M_y M_x'$$

исследуется аналогично, рассматривая разложения по $(1-y)$.

Если выполнено условие (I), то рассуждения вполне аналогичны.

При данном $p \in \mathcal{P}$, как мы увидим далее, гиперплоскости (I) и (2) отделяют множество точек p', p'', для которых стационарное распределение существует, от тех, для которых не существует.

§ 2. Краевая задача на торе. Простой случай.

Далее будет предполагаться, что

$$M_x < 0 \ , \ M_y < 0 \qquad \text{(I)}$$

В этом параграфе мы покажем, что в некоторых предположениях задачу отыскания Π и $\tilde{\Pi}$ можно свести к краевой задаче Римана на торе. (Со специально выбранной комплексной структурой).

Эти предположения будут состоять в том, что

I. $\eta \Gamma_0$ лежит вне $h_1^{-1}(\bar{D})$,

2. $\xi \tilde{\Gamma}_0$ лежит вне $h_2^{-1}(\bar{D})$. (2)

Следующая лемма показывает, что эти предположения могут выполняться.

Лемма I. Для простых случайных блужданий, удовлетворяющих (I), неподвижные точки относительно η лежат вне $h_1^{-1}(\bar{D})$ и выполняется условие (2).

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что в неподвижных точках $\eta x = x = \frac{p_{-1,0}}{p_{10}\, x}$.

Если условие (2) не выполняется, то $\eta \Gamma_0$ обязана пересекаться с Γ_0. Пусть $s \in \Gamma_0 \cap \eta \Gamma_0$. Тогда и ηs принадлежит Γ_0 и $\eta \Gamma_0$ и их пересечению.

Обозначим $y = y(s) = y(\eta s)$, $x_1 = x(s)$, $x_2 = x(\eta s)$.

Тогда должно быть $p_{10} x_1 + p_{-1,0} x_1 = p_{10} x_2 + p_{-1,0} x_2$ или $p_{10} = p_{-1,0} \frac{1}{x_1 x_2}$, что невозможно ввиду (I) и того, что $|x_1| = |x_2| = 1$.

Примером, когда условие (2) не выполняется, является случай: $p_{0,-1} = 2p_{1,-1} = 2p_{-1,-1}$. При этом неподвижная точка s, для которой $y(s) = 0$, $x(s) = -1$, принадлежит как Γ_0, так и $\eta \Gamma_0$.

Можно доказать также более общее утверждение.

Лемма 2. В множестве $\{p : p \in \mathcal{P}, M_x, M_y < 0\}$ обозначим A_2 и B_2 соответственно множества p, для которых условие I. (2) выполняется и нет.

Тогда общей частью границы A_2 и B_2 является гиперповерхность, определенная уравнением:

$$\begin{vmatrix} 2p_{11}-p_{01} & 2p_{10}+1-p_{00} & 2p_{1,-1}-p_{0,-1} & 0 \\ 0 & 2p_{11}-p_{01} & 2p_{10}+1-p_{00} & 2p_{1,-1}-p_{0,-1} \\ 2p_{-1,1}-p_{01} & 2p_{-1,0}+1-p_{00} & 2p_{-1,-1}-p_{0,-1} & 0 \\ 0 & 2p_{-1,1}-p_{01} & 2p_{-1,0}+1-p_{00} & 2p_{-1,-1}-p_{0,-1} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Это утверждение нам далее не понадобится. Поэтому мы даем только набросок доказательства.

p является граничной точкой для A_2 и B_2 тогда и только тогда, когда $\eta\Gamma_0$ касается Γ_0. Среди точек касания обязана быть точка S_0, где $x(S_0)=-1$. Действительно, каждой точке касания S соответствует другая точка касания ηS_0. Таким образом, если точек касания нечетное число, то существует тогда $S_0=\eta S_0$; но функции $x(S)$ в неподвижной точке вещественна (так как $y(S)$ вещественна, см. § 2 Гл. III).

Если для некоторой $S\in\Gamma_0\cap\eta\Gamma_0$ имеет место $x(S)\neq x(\eta S)$, то $x(S)\neq\bar{x}(\eta S)$, так как $y(S)=y(\eta S)$ невещественно. Следовательно, точке $\bar{S}$, где $x(\bar{S})=\bar{x}(S)$, также является точкой касания. Т.е. точек касания не меньше четырех. Но тогда в области B_2 существует точка p, где пересечение $\Gamma_0\cap\eta\Gamma_0$ состоит не менее чем из восьми точек, что как легко видеть невозможно.

Таким образом, условием того, что $p\in\mathcal{P}$ является граничной точкой является условие, чтобы точка S, где $x(S)=-1$ являлась неподвижной, т.е.

$$-\frac{\tilde{b}(y)}{2\tilde{a}(y)}=-1, \quad \tilde{c}(y)=\tilde{a}(y), \qquad \text{или}$$

$$p_{01}y^2+p_{00}y+p_{0,-1}=2p_{11}y^2+(2p_{10}+1)y+$$
$$+2p_{1,-1}=2p_{-1,1}y^2+(2p_{-1,0}+1)y+2p_{-1,-1},$$

откуда и следует (3).

Рассмотрим выделенный нами прообраз Δ_0 области Δ универсальной накрывающей $\mathbb{C}$.

Пусть ℓ – произвольная гладкая замкнутая кривая без самопересечений, принадлежащая $\tilde{G}$ и гомотопная Γ_0 и $\tilde{\Gamma}_0$. Она тогда проходит через точку (I,I). В силу условий (2) $\xi\ell$ и $\eta\ell$ лежат вне $\tilde{G}$.

Рассмотрим тогда область $\Delta_\ell\subset\Delta_0$ и заключенную между $\xi\ell$ и $\eta\ell$. Так как $\eta\ell=\xi\ell+\omega_3$, то $\bar{\Delta}_\ell$ с отождествленными естественным образом границами можно рассматривать как риманову поверхность $\tilde{S}$ с комплексной структурой фактора $\mathbb{C}$ по решетке $\{m\omega_1+n\omega_3\}$.

Если решения $\pi(\omega)$ и $\tilde{\pi}(\omega)$ существуют, то определим следующую кусочно-аналитическую функцию в области $\Delta_\ell\setminus\ell$:

$$\Pi(\omega)=\begin{cases}\pi(\omega), & \omega\in\Delta_{\ell 1},\\ -\tilde{\pi}(\omega), & \omega\subset\Delta_{\ell 2},\end{cases}$$

где $\Delta_{\ell 1}\subset\Delta_\ell$ – область между $\xi\ell$ и ℓ, $\Delta_{\ell 2}=\Delta_\ell\setminus\bar{\Delta}_{\ell 1}$.

Выберем направление обхода всех кривых, гомотопных Γ_0, одинаковыми и такими, чтобы направление обхода Γ_0 совпадало с обходом $h_1\lambda\Gamma_0$ таким, при котором единичный круг остается слева.

Для произвольной гладкой простой кривой обозначим $\Pi_+(\omega)$ предел $\Pi(\omega)$ при приближении к C слева, а $\Pi_-(\omega)$ – справа. При этом будем считать, что $\Pi(\omega)$ продолжается периодически на $\mathbb{C}$ с периодами ω_1 и ω_3 или, что то же самое, стороны $\xi\ell$ и $\eta\ell$ отождествляются

Тогда имеет место

Краевая задача Римана

$$\boxed{\begin{aligned} &\Pi_+(\omega)-\frac{\tilde q(\omega)}{q(\omega)}\Pi_-(\omega)=-\frac{q_0(\omega)}{q(\omega)}, \quad \omega\in\ell, \\ &\Pi_-(\omega)-\frac{\tilde q(\xi\omega)}{q(\xi\omega)}\Pi_+(\omega)=-\frac{q_0(\xi\omega)}{q(\xi\omega)}, \quad \omega\in\xi\ell \end{aligned}} \tag{4}$$

Первое равенство очевидно, а второе получается следующим образом. При $\omega\in\xi\ell$ имеем

$$q(\xi\omega)\Pi(\xi\omega)+\tilde q(\xi\omega)\tilde\Pi(\xi\omega)+q_0(\xi\omega)=0$$

Но $\Pi(\xi\omega)=\Pi(\omega)$, а $\tilde\Pi(\xi\omega)=\tilde\Pi(\eta\xi\omega)$, $\eta\xi\omega\in\xi\ell+\omega_3$.

Отсюда и следует (4).

Нам будет часто нужно следующее преобразование:

$$\int_{\xi\ell} Q(\xi\omega)\,d\omega=\int_{\ell} Q(\omega)\,d\omega . \tag{5}$$

Действительно, имеем $(\omega_i\in\xi\ell)$

$$\int_{\xi\ell} Q(\xi\omega)\,d\omega=\lim\sum Q(\xi\omega_i)(\omega_i-\omega_{i-1})=$$

$$=\lim\sum Q(\xi\omega_i)(\xi\omega_{i-1}-\xi\omega_i)=\int_{\ell} Q(\omega)\,d\omega.$$

Индекс.

Рассмотрим сначала случай, когда только $p'_{-1,0}$ и $p''_{0,-1}$ из переходных вероятностей p'_{ij} и p''_{ij} отличны от нуля. Тогда

$$\frac{\tilde q}{q}=\frac{1-y}{1-x}\neq 0 \qquad \text{на } G.$$

Следовательно, индекс $\frac{\tilde q}{q}$ вдоль любой кривой ℓ одинаков. Для его вычисления заметим, что

$$\operatorname{ind}_{\Gamma_0}\frac{\tilde q}{q}=\operatorname{ind}_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\tilde q}{q},$$

где Γ_ε – кривая, вдоль которой $|x|=1+\varepsilon,\ |y|<1$. Последний индекс легко вычисляется и мы имеем

$$\operatorname{ind}_{\ell}\frac{\tilde q}{q}=-1 .$$

Лемма 3. Если выполняются условия (1), (2),

$$M'_xM_y-M_xM'_y>0,\quad M''_yM_x-M''_xM_y>0 \tag{6}$$

и $q\bar q+q\bar{\tilde q}>0$ в G,

то существует кривая ℓ, обладающая указанными выше свойствами, и такая, что

1. $q, \tilde{q} \neq 0$ на ℓ,

2. $\operatorname{ind}_{\ell} \frac{\tilde{q}}{q} = -1$,

3. $q \neq 0$ в $\overline{G \cap \Delta_{\ell 2}} \setminus (1,1)$,

$\tilde{q} \neq 0$ в $\overline{G \cap \Delta_{\ell 2}} \setminus (1,1)$.

Доказательство. Ясно, что множество R точек из $\mathcal{P} \times \mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$, для которых q и $\tilde{q}$ одновременно обращаются в нуль в некоторой точке из G, являются многообразием меньшего числа измерений (а при фиксированных p и p' – объединением конечного числа гиперплоскостей в $\mathcal{P}''$).

Соединим точку $(p, p', p''$), удовлетворяющую условиям леммы 3, с точкой с тем же p и $p'_{-1,0} = p''_{0,-1} = 1$ кусочно-гладким путем C, каждая точка которого удовлетворяет условиям (1), (2), (6), причем этот путь может пересекать R лишь в конечном числе точек.

Так как p при этом не меняется, то очевидно, что это всегда можно сделать.

Будем теперь некиим специальным образом деформировать ℓ вдоль C. Положим $\ell(p, p'_{-1,0} = 1, \ p''_{0,-1} = 1) = \Gamma_0$.

Заметим сначала, что путь C всегда можно выбрать так, чтобы нули q и $\tilde{q}$ в G менялись непрерывно (что следует из рассмотрения результата). При этом нули q могут входить (и выходить) в G только через $\overline{\Gamma}_0$ – (I,I), а нули $\tilde{q}$ – только через Γ_0 – (I,I).

Действительно, $q \neq 0$ на Γ_0, кроме точки (I,I). Точка (I,I) исключается ввиду условий (6).

Выберем достаточно малые интервалы $C_i \subset C$, содержащие точки ω_i пересечения C с R. При изменении по $C \setminus \cup C_i$ будем деформировать ℓ так, чтобы все нули q, вошедшие в G, оставались в $\Delta_{\ell 2} \cap G$, а нули $\tilde{q}$ – в $\Delta_{\ell 1} \cap G$.

Пусть в точке ω_i совпадают ровно K нулей q и $\tilde{q}$ (учитывая кратности). Изменим ℓ в начале отрезка C_i так, чтобы те нули q, которые в точке ω_i совпадут с нулями $\tilde{q}$, оказались бы в области $\Delta_{\ell 1}$. В конце отрезка C_i проделаем обратную операцию – чтобы снова все нули q были в $\Delta_{\ell 2}$. Ясно, что индекс при подобных деформациях кривой ℓ не изменится.

§ 3. Интегральное представление решения.

Простой случай.

Умножим основное уравнение на x:

$$\Pi_1(\omega) + \frac{x\tilde{q}}{q}\tilde{\Pi}(\omega) + \frac{x q_0}{q} = 0$$

где $\Pi_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_{i0} x^i$. Соответственно изменится $\Pi(\omega)$.

Тогда

$$\operatorname{ind}_{\ell} \frac{x\tilde{q}}{q} = 0.$$

Рассмотрим сначала однородную краевую задачу:

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho_+(\omega) - \frac{x\tilde{q}(\omega)}{q(\omega)}\rho_-(\omega) = 0, \quad \omega \in \ell, \\ &\rho_-(\omega) - \frac{x\tilde{q}(\xi\omega)}{q(\omega)}\rho_+(\omega) = 0, \quad \omega \in \xi\ell. \end{aligned}} \qquad (I)$$

Здесь ℓ выбирается так же, как и в лемме 3 § 2.

8–1590

Тогда

$$\operatorname{ind}_{\ell} \frac{\mathfrak{X}\tilde{q}(\omega)}{q(\omega)} = \operatorname{ind}_{\xi\ell} \frac{\mathfrak{X}\tilde{q}(\xi\omega)}{q(\xi\omega)} = 0 ,$$

и, следовательно, $\ln \mathfrak{X}(\omega)$ является однозначной функцией на ℓ и $\xi\ell$. Здесь положено

$$\mathfrak{X}(\omega)=\begin{cases} \dfrac{\mathfrak{X}\tilde{q}(\omega)}{q(\omega)}, & \omega\in\ell ; \\ \dfrac{\mathfrak{X}\tilde{q}(\xi\omega)}{q(\omega)}, & \omega\in\xi\ell . \end{cases}$$

<u>Лемма I.</u> Кусочно-аналитическая функция

$$\rho(\omega)=\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell}\Big(\zeta(\omega-\tau)+\zeta(-\omega-\tau)\Big)\ln\frac{\mathfrak{X}(\tau)\tilde{q}(\tau)}{q(\tau)}\,d\tau\right] \tag{2}$$

является решением краевой задачи (I), отличным от нуля везде, периодически с периодами ω_1 и ω_3 и инвариантным относительно ξ и η.

Положим

$$\rho(\omega)=\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\ell}+\int_{-\xi\ell}\right)\ln \mathfrak{X}(\tau)\zeta(\omega-\tau)\,d\tau\right]$$

Здесь $\zeta(\omega)-\zeta$ - функция Вейерштрасса, определяемая формулой

$$\zeta(\omega)=\frac{1}{\omega}+\sum_{n^2+m^2\neq 0}\left[\frac{1}{(\omega-n\omega_1-m\omega_3)}+\frac{1}{n\omega_1+m\omega_3}+\frac{\omega}{(n\omega_1+m\omega_3)^2}\right]$$

в системе координат с началом в точке O_1 (или O_2).

Так как $\zeta(\omega-\tau)$ в окрестности точки $\tau\in\ell$ имеет главную часть, равную $\dfrac{1}{\omega-\tau}$, то используя локально формулы Сохоцкого, можно убедиться, что $\rho(\omega)$ удовлетворяет условию (I). Нам осталось убедиться, что $\rho(\omega)$ периодическая с периодами ω_1 и ω_3. Так как

$$\zeta(\tau+\omega_1)=\zeta(\tau)+\eta_1 ,\ \zeta(\tau+\omega_3)=\zeta(\tau)+\eta_3 ,$$

то достаточно убедиться, что

$$\left(\int_{\ell}+\int_{-\xi\ell}\right)\ln X(\tau)\eta_i\,d\tau=0 .$$

Но по формуле (5) § 2

$$\int_{\xi\ell}\ln\frac{\mathfrak{X}(\xi\omega)\tilde{q}(\xi\omega)}{q(\xi\omega)}\,d\omega=\int_{\ell}\ln\frac{\mathfrak{X}(\omega)\tilde{q}(\omega)}{q(\omega)}\,d\omega ,$$

что и требовалось.

Далее (напомним, $\zeta(\omega)$ является нечетной функцией)

$$\int_{-\xi\ell}\ln\frac{\mathfrak{X}(\tau)\tilde{q}(\xi\tau)}{q(\xi\tau)}\zeta(\omega-\tau)\,d\tau=\int_{\xi\ell}\zeta(-\omega+\tau)\ln\frac{\mathfrak{X}\tilde{q}(\xi\tau)}{q(\xi\tau)}\,d\tau=$$

$$=\int_{\xi\ell}\zeta(-\omega-\xi\tau)\ln\frac{\mathfrak{X}\tilde{q}(\xi\tau)}{q(\xi\tau)}\,d\tau=\int_{\ell}\zeta(-\omega-\tau)\ln\frac{\mathfrak{X}\tilde{q}(\tau)}{q(\tau)}\,d\tau .$$

(снова формула (5) § 2).

Отсюда и следует лемма I.

Т е о р е м а I. В условиях леммы 3 и если точка $\mathfrak{X}=0$ лежит в области $\Delta_{\ell 2}$, то стационарное распределение существует, причем Π при $\omega\in\Delta_{\ell 2}$ определяется формулой

$$\Pi(\omega)=\frac{\rho(\omega)\,(c+\mathfrak{f}(\omega))}{\mathfrak{X}(\omega)},$$

где $\rho(\omega)$ определяется формулой (2), $\mathfrak{f}(\omega)$ - формулой (3), а C находится из условия, чтобы в точке ω_0, где $\mathfrak{X}(\omega_0)=0$, $\Pi(\omega_0)=0$, а

Доказательство. Положим

$$\mathfrak{f}(\omega)=\frac{\Pi(\omega)}{\rho(\omega)}, \qquad \tilde{\mathfrak{f}}(\omega)=\frac{\tilde{\Pi}(\omega)}{\tilde{\rho}(\omega)}.$$

Тогда, очевидно, $\mathfrak{f}(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{f}(\omega)+\tilde{\mathfrak{f}}(\omega)+\frac{\mathfrak{X}(\omega)\,q_0(\omega)}{q(\omega)\,\rho(\omega)}=0.$$

Перейдем как и раньше к краевой задаче

$$\mathfrak{f}_+(\omega)-\mathfrak{f}_-(\omega)=-\frac{\mathfrak{X}(\omega)\,q_0(\omega)}{q(\omega)\,\rho(\omega)},\quad \omega\in\ell,$$

$$\mathfrak{f}_-(\omega)-\mathfrak{f}_+(\omega)=-\frac{\mathfrak{X}(\xi\omega)\,q_0(\xi\omega)}{q(\xi\omega)\,\rho(\xi\omega)},\quad \omega\in\xi\ell. \tag{2'}$$

Здесь

$$\rho(\omega)=\rho_+(\omega),\quad \omega\in\ell,$$

и

$$\rho(\xi\omega)=\rho_-(\omega),\quad \omega\in\xi\ell.$$

Положим

$$\mathfrak{f}(\omega)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\ell}\zeta(\omega-\tau)\,\frac{\mathfrak{X}(\tau)\,q_0(\tau)}{q(\tau)\,\rho(\tau)}\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\xi\ell}\zeta(\omega-\tau)\,\frac{\mathfrak{X}(\tau)\,q_0(\xi\tau)}{q(\xi\tau)\,\rho(\xi\tau)}\,d\tau.$$

Так же, как и раньше получаем, что и $\mathfrak{f}(\omega)$ удовлетворяет условиям (2') и может быть записана в виде

$$\mathfrak{f}(\omega)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\ell}\left[\zeta(\omega-\tau)+\zeta(-\omega-\tau)\right]\frac{\mathfrak{X}(\tau)\,q_0(\tau)}{q(\tau)\,\rho(\tau)}\,d\tau. \tag{3}$$

Положим теперь

$$\Pi(\omega)=C\rho(\omega)+\mathfrak{f}(\omega)\rho(\omega),\quad \omega\in\Delta_{\ell 2},$$

и если точка $\mathfrak{X}=0$ принадлежит Δ_{ℓ_1}, то подберем C так, чтобы $\Pi(\omega)$ имела нуль в точке $\mathfrak{X}=0$. Так как $\rho(\omega)$ нигде не обращается в нуль, то это всегда можно сделать нетривиальным образом. Аналитически продолжим $\Pi(\omega)$ на $h_1^{-1}(D)$:

$$\Pi(\omega)=-\frac{C\rho(\omega)+\mathfrak{f}(\omega)+q_0(\omega)}{\mathfrak{X}(\omega)\,q(\omega)}$$

если точка $\mathfrak{X}=0$ принадлежит $\Delta_{\ell 2}$ причем C и подобрана так, чтобы числитель обращался в нуль в точке $\mathfrak{X}=0$.

8^x-1590

Замечая, что $q(\omega)\neq 0$ в $\Delta_{\ell_1}\cap h_1^{-1}(D)$ получим, что существует решение $\Pi(\omega)$, удовлетворяющее условиям леммы § I Гл. Ш. Аналогично доказывается аналитичность $\tilde{\Pi}(\omega)$ в $h_2^{-1}(D)$. Инвариантность Π и $\tilde{\Pi}$ относительно ξ и η соответственно очевидна из инвариантности ядра их интегрального представления.

§ 4. Случай перепутывания областей.

В § 2 мы показали, что кривые Γ_0, $\eta\Gamma_0$ и $\xi\tilde{\Gamma}_0$ в общем случае пересекаются и поэтому введенные там области $\Delta_{\ell 1}$ и $\Delta_{\ell 2}$ не имеют смысла, а следовательно не имеет смысла и задача Римана (4)§2. Однако,мы покажем сейчас, что формулы § 3 для решения верны при некоторых ограничениях и в этом случае.

Кривую ℓ выберем также как в лемме 3 § 2, только условие 3 этой леммы перепишем в следующем виде:

3'. $q\neq 0$ в замыкании области, заключенной между Γ_0 и ℓ и принадлежащей G,
$\tilde{q}\neq 0$ в замыкании области, заключенной между ℓ и $\tilde{\Gamma}_0$ и принадлежащей G.

Функция

$$\rho(\omega)\,(c+\mathfrak{f}(\omega))$$

будет аналитической всюду кроме бесконечной сетки кривых $\bigcup_{h\in\mathcal{H}} h\ell$ и двоякопериодической с периодами ω_1 и ω_3, (даже инвариантной относительно любого преобразования из группы $\mathcal{H}$).

Рассмотрим теперь область $\Delta^{\ell}\subset\Delta$, являющуюся одной из связных компонент области $\mathbb{C}\setminus\{\mathcal{H}\ell\}$, причем такой, замыкание которой содержит точку ω_0, где $\mathfrak{X}=y=1$, и точку $\xi\omega_0$. Ясно, что этими условиями Δ^{ℓ} определяется единственным образом.

В области Δ^{ℓ} определим функцию

$$\Pi_1(\omega,c)=\rho(\omega)(c+\mathfrak{f}(\omega)).$$

Функцию $\Pi_1(\omega,c)$ можно мероморфно продолжить на всю $\mathbb{C}$ следующим образом. Рассмотрим произвольную точку $\omega\in\mathbb{C}\setminus\{\mathcal{H}\ell\}$ и пусть L -- гладкий путь, соединяющий точку $\omega_1\in\Delta^{\ell}$ с ω, не проходящий через точки пересечения кривых из $\mathcal{H}\ell$. Пусть $\Delta^{\ell}=\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n$ - последовательность связных компонент $\mathbb{C}\setminus\mathcal{H}\ell$, через которые проходит L, а $\gamma_{12},\gamma_{23},\dots,\gamma_{n-1,n}$ - соответствующая последовательность границ между этими компонентами.

Граница Δ^{ℓ} состоит из двух гладких кривых: отрезка $\ell'\subset\ell$ и $\xi\ell'$. Мы знаем скачки функции $\rho(\omega)(c+\mathfrak{f}(\omega))$ на ℓ' и $\xi\ell'$ (см. предыдущий параграф). Поэтому можно определить $\Pi_1(\omega,c)$ в двух компонентах $\mathbb{C}\setminus\{\mathcal{H}\ell\}$, граничащих с Δ^{ℓ} по ℓ' и $\xi\ell'$ соответственно так, чтобы $\Pi_1(\omega,c)$ была непрерывной в объединении этих областей. Скачки на других кривых сетки определяются из условия двоякопериодичности функции $\Pi_1(\omega,c)$. Таким же образом мы можем продолжить $\Pi_1(\omega,c)$ вдоль всего пути L. Легко проверяется, что результат продолжения не зависит от L.

Теорема I.

$$\Pi(\omega)=\frac{\Pi_1(\omega,c)}{\mathfrak{X}(\omega)},$$

причем c определяется из условия, чтобы $\Pi_1(\omega,c)=0$ в точках из $h_1^{-1}(D)$, где $\mathfrak{X}(\omega)=0$. В достаточно малой окрестности произвольной точки $\omega\in\mathbb{C}\setminus\{\mathcal{H}\ell\}$ функция $\Pi(\omega)$ представляется в виде

$$\Pi(\omega)=\frac{1}{\mathfrak{X}(\omega)}\Big[A(\omega)+B(\omega)\rho(\omega)(c+\mathfrak{z}(\omega))\Big],$$

где $A(\omega)$ и $B(\omega)$ – эллиптические функции с периодами ω_1 и ω_2, рационально выражающиеся через $q(\omega),\tilde{q}(\omega),q_0(\omega)$ и их сдвиги на элементы группы $\mathcal{H}$.

<u>Доказательство.</u> Полагая

$$\tilde{\Pi}(\omega)=\frac{-q\Pi-q_0}{\tilde{q}},$$

можно легко проверить, что Π и $\tilde{\Pi}$ удовлетворяют условиям инвариантности и аналитичности.

Второе утверждение очевидно из построения.

Мы не рассматривали здесь случая когда $M_x<0, M_y\geq 0$. Его рассмотрение можно провести вполне аналогично.

§ 5. <u>Аналитическая зависимость от параметров.</u>

Многие интересующие нас величины, как стационарные вероятности, производящие функции и ряд других, аналитически зависят от точки пространства параметров $\Omega=\mathcal{P}\times\mathcal{P}'\times\mathcal{P}''\times\mathcal{P}^0$, для которых стационарное распределение существует.

В дальнейшем будем рассматривать открытое множество Ω^0, состоящее из точек, лежащих внутри Ω и таких, что стационарное распределение существует. Тогда, как известно, род S для всех этих точек равен I.

I. Периоды ω_1 и ω_2 являются вещественно-аналитическими функциями от точки $p\in\mathcal{P}$.

Действительно, абелев дифференциал I-го рода с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$d\omega=\frac{dx}{\sqrt{D(x)}}$$

(см. следующий параграф и последний параграф книги / 9 /).

Тогда

$$\omega_1=c\int\limits_{|x|=1}\frac{dx}{\sqrt{D(x)}}$$

и аналогично можно выбрать фиксированную кривую ℓ так, что

$$\omega_2=c\int\limits_{\ell}\frac{dx}{\sqrt{D(x)}}$$

в некоторой окрестности точки $p\in\Omega_0$.

Тогда

$\tau=\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ очевидно аналитически зависит от p.

Мы можем привести уравнение $Q(x,y)=0$ к виду

$$v^2=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$$

где b_i аналитически зависят от точки $p\in\Omega_0$ (см. дополнение), и далее к каноническому виду

$$w=4z^3-g_2z-g_3,$$

где g_2, g_3 аналитически зависят от b_i (см. также дополнение). Отсюда и следует, что

$$\omega_1=\int\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$$

где интеграл берется вдоль фиксированной кривой ℓ (для некоторой достаточно малой окрестности), принадлежащей Ω_0), аналитически зависит от p.

Мы будем в дальнейшем считать, что начало координат выбирается в одной из точек $a_1=\lambda^{-1}k_1^{-1}(x_1)$, причем, очевидно, можно считать, что a_1 аналитически зависит от $p\in\Omega_0$.

<u>Теорема I.</u> Производящая функция стационарных вероятностей $\Pi(x,y)$ при $|x|,|y|<1$ является аналитической функцией как x,y, так и точки $p\in\Omega_0$.

<u>Доказательство.</u> Аналитическая зависимость $\pi(x)$ от p следует непосредственно из интегрального представления, если заметить что подинтегральное выражение аналитически зависит от p при фиксированном ℓ. Для достаточно малой окрестности точки x и p всегда можно фиксировать ℓ_1 причем так, чтобы ℓ не проходила через x.

Следующее доказательство аналитической зависимости $\Pi(x,y)$ от p, пожалуй, самое короткое.

Если (x,y) не принадлежит алгебраической кривой $Q(x,y)=0$, то это следует сразу из явного выражения Π через π и $\tilde{\pi}$ (§ I Гл. III). Заметим, теперь, что параметры в действительности можно считать лежащими в достаточно малой трубчатой окрестности $U\supset\Omega_0$,

т.е. $|\mathrm{Im}\, p_{ij}|\le\varepsilon$, $\sum p_{ij}=1$ и т.д.

Тогда в достаточно малой окрестности любой точки пространства $D\times D\times\Omega_0$ $\Pi(x,y)$ ограничена и аналитична, кроме, может быть, тонкого подмножества (см./ 21 /, стр. 31). Но тогда по теореме Римана об устранимой особенности (I , стр. 32) Π голоморфна всюду.

Замечание I. Предположение о том, что $|x|,|y|<1$ существенно. Мы не можем доказать аналитической зависимости точек ветвления $\pi(x)$ от параметров. Как будет видно в главе VI, этот факт обусловливает скачки в асимптотике при непрерывном изменении параметров.

§ 6. Другой метод получения интегрального представления.

В случае когда группа $\mathcal{H}$ случайного блуждания конечна (см. § I Гл. V) можно получить интегральное представление для производящих функций непосредственно на римановой поверхности, не переходя на универсальную накрывающую. Здесь мы продемонстрируем этот метод на примере простого случайного блуждания с косым отражением.

Так мы будем называть случайное блуждание со следующими производящими функциями

$$p(x,y)=p_{10}x+p_{-1,0}\frac{1}{x}+p_{01}y+p_{0,-1}\frac{1}{y},$$

$$p'(x,y)=p_{01}y+p_{10}x+(p_{-1,0}+p_{0,-1})\frac{1}{x},\quad p''(x,y)=$$

$$=p_{01}y+p_{10}x+(p_{-1,0}+p_{0,-1})\frac{1}{y},\quad p_0(x,y)=p_{10}x+p_{01}y+$$

$$+(p_{-1,0}+p_{0,-1})$$

Если коэффициенты $q,\tilde{q},q_0$ основного уравнения § 3 Гл. III взять по $\mathrm{mod}\, Q$, то оно запишется в виде

$$p_{0,-1}(x-y)\pi+p_{-1,0}(y-x)\tilde{\pi}+\pi_{00}[p_{-1,0}(xy-y)+p_{0,-1}\cdot(xy-x)]=0$$

или

$$\pi-\frac{p_{-1,0}}{p_{0,-1}}\tilde{\pi}=\pi_{00}\psi\overset{def}{=}\pi_{00}\frac{\left(x+\frac{p_{-1,0}}{p_{0,-1}}y\right)-xy\left(1+\frac{p_{-1,0}}{p_{0,-1}}\right)}{x-y}\tag{1}$$

(здесь $\pi=x\Pi$)

Мы будем далее предполагать, что p_{ij} выбраны так, что стационарное распределение существует, т.е. (см. введение)

$$p_{-1,0}+p_{0,-1}>p_{10}+p_{01}\tag{2}$$

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма I. Производящая функция стационарных вероятностей для простого блуждания с косым отражением нерациональна.

Доказательство. Очевидно, что для рациональности $\Pi(x,y)$ необходимо, чтобы $\Pi(x)$ и $\widetilde{\Pi}(y)$ были мероморфными функциями на римановой поверхности S.

Рассмотрим точку $S_0 \in S$, где $x(S)=y(S)=\dfrac{p_{-1,0}+p_{0,-1}}{p_{10}+p_{01}}$. Пусть $\mathcal{H} S_0$ – орбита этой точки. Заметим, что S_0 является на этой орбите единственным полюсом функции $\psi(S)$. Действительно, точка S_1 с $x(S_1)=y(S_1)=1$ не может быть полюсом $\psi(S)$, так как в этой точке

$$\frac{d}{dx}(x-y)=1-\frac{dy}{dx}=1-\frac{p_{-1,0}-p_{10}}{p_{01}-p_{0,-1}}\neq 0$$

в силу (2). Кроме того, точки с $x(S),y(S)=(0,0)$, $(0,\infty),(\infty,0),(\infty,\infty)$, где только еще и возможен полюс, образуют самостоятельную орбиту.

Заметив, что при доказательстве леммы 8 § 6 Гл. III мы нигде не пользовались тем фактом, что S имеет род 0, завершаем с помощью этой леммы доказательство.

Лемма 2. Функции $\psi(S)$, $\Pi(S)$, $\widetilde{\Pi}(S)$ не имеют полюсов в области $\bar{\Delta}\subset S$.

Доказательство. $\psi(S)$ не может иметь полюсов ни в точке $x(S)=y(S)=0$ ни в точке $x(S)=y(S)=1$, например, так как $1-\frac{dy}{dx}$ в этих точках отлична от нуля. В остальных же точках знаменатель этой функции отличен от нуля.

Так как в любой из точек $S\in\bar{\Delta}$ одна из функций Π или $\widetilde{\Pi}$ аналитична, то из основного уравнения следует, что аналитична и другая.

Пусть $\delta S\in\Gamma_1$. Тогда $S\in\eta\Gamma_0$. Легко получить, что $\Pi(S)$ при $S\in\eta\Gamma_0$ удовлетворяет уравнению

$$\Pi(\delta S)-\Pi(S)=\varphi(S)\stackrel{def}{=}\Pi_{00}[\psi(\eta S)-\psi(S)]. \tag{3}$$

Теорема I. Для простого случайного блуждания с косым отражением имеем

$$\Pi(x)=\frac{\Pi_{00}}{4\pi i}\int\limits_{|t|=1}\left[\frac{\sqrt{D(x)}+\sqrt{D(t)}}{x-t}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{D\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{10}t}\right)}+\sqrt{D(x)}}{x-\frac{p_{-1,0}}{p_{10}t}}\right]\left(\psi\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{10}t}\right)-\psi(t)\right)\frac{dt}{\sqrt{D(t)}},$$

где ветвь $\sqrt{D(x)}$ выбирается произвольным образом, а ветвь $\sqrt{D(t)}$ и $\sqrt{D\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{10}t}\right)}$ так, чтобы при $t=1$,

$$\sqrt{D(t)}=2a(1)+b(1),$$

$$\sqrt{D\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{10}t}\right)}=2a(\eta x)+b(\eta x),\ x=1.$$

Оставшаяся часть параграфа будет посвящена доказательству этой теоремы.

"Разрежем" риманову поверхность S вдоль кривых Γ_1 и $\eta\Gamma_0$. Область $R\subset\Delta$, ограниченная этими кривыми является комплексным аналитическим многообразием с комплексной структурой, индуцированной комплексной структурой S. Отождествим точки S и δS границы. Полученное склеенное пространство наделим фактор-топологией (см., например, / 22 /). Кривую на $\widetilde{S}$, полученную отождествлением Γ_t и $\eta\Gamma_0$ будем обозначать $\widetilde{\Gamma}$.

Легко показать (например, если перейти на универсальную накрывающую), что $\widetilde{S}$ будет также римановой поверхностью рода I с комплексной структурой, которая на $\widetilde{S} \setminus \widetilde{\Gamma}$ совпадает с первоначальной.

Точку на $\widetilde{S}$, соответствующую точке $s \in \bar{R}$ будем обозначать $\tilde{s}$. На $\widetilde{\Gamma}$ определим функцию

$$\varphi(\tilde{s}) = \varphi(s) \qquad , \text{ где } \quad s \in \eta\Gamma_0 .$$

Тогда задача решения уравнения (3) переходит в следующую краевую задачу Римана на римановой поверхности $\widetilde{S}$: определить аналитическую функцию $\Pi(\tilde{s})$ на $\widetilde{S} \setminus \widetilde{\Gamma}$, имеющую единственный предел при приближении к произвольной точке $\tilde{s} \in \widetilde{\Gamma}$ справа (слева) вдоль любого пути, причем

$$\Pi_+(\tilde{s}) - \Pi_-(\tilde{s}) = \varphi(\tilde{s}), \ \tilde{s} \in \widetilde{\Gamma} . \tag{4}$$

При этом мы ориентируем гомологичные кривые Γ_1, Γ_0 и $\eta\widetilde{\Gamma}_0$ одинаково и так, что при обходе по Γ_0 единичная окружность $h_1\Gamma_0$ обходится против часовой стрелки; Π_+ и Π_- будут соответственно правым и левым значением Π, если смотреть по этой ориентации.

Иначе говоря

$$\Pi_+(\tilde{s}) = \Pi(s) \ , \ s \in \Gamma_1 ;$$

$$\Pi_-(\tilde{s}) = \Pi(s) \ , \ s \in \eta\Gamma_0 .$$

Мы использовали прием (см., например, / I4 /) сведения задачи Римана со сдвигом к обычной задаче Римана, однако отличие

от / I4 / состоит в том, что у нас сдвиг не сохраняет кривую разрыва.

Абелевы дифференциалы I-го рода на $\widetilde{S}$ и S.

Как на S так и на $\widetilde{S}$ существует только один с точностью до постоянного множителя абелев дифференциал первого рода $d\omega$. Мы найдем здесь для него явное выражение.

Заметим прежде, что любое конформное преобразование h поверхности $\widetilde{S}$ индуцирует линейное преобразование h^* пространства абелевых дифференциалов первого рода. В нашем случае h^* сводится просто к умножению на константу. Если $h^2 = I$, то $h^* d\omega = \pm\, d\omega$. В последней формуле будет иметь место +, если h сохраняет ориентацию гомологичных кривых, и − , если меняет.

Так

$$\delta^* d\omega = d\omega, \ \xi^* d\omega = \eta^* d\omega = -d\omega . \tag{5}$$

Из первой формулы (5) видно что $d\omega$ автоматически оказывается дифференциалом I-го рода и на $\widetilde{S}$, если ее рассматривать как фактор S по δ. Этот дифференциал не имеет нулей, что следует, например, из теоремы Римана-Роха.

Лемма 3. Единственный абелев дифференциал I-го рода на S и $\widetilde{S}$ имеет вид

$$d\omega = \frac{dx}{2a(x)y + b(x)} = \frac{dx}{\sqrt{D(x)}} \tag{6}$$

Далее функцию $\sqrt{D(x)} = 2a(x)y + b(x)$ будем обозначать через f.

Доказательство соотношения (6) проводится также доказательство аналогичного соотношения для одного частного случая в последнем параграфе книги / 9 /.

Лемма 4. Для того чтобы существовало решение задачи (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int \varphi(\tilde{S})\,d\omega=0 \qquad (7)$$

В нашем случае соотношение (7) выполняется.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы Коши на $\tilde{S}$, если ее применить к функции $\mathcal{F}(\tilde{S})$. Достаточность нам не понадобится, существование $\Pi(\tilde{S})$ следует из существования стационарного распределения и леммы 2. Последнее утверждение леммы легко доказать непосредственно.

Нам надо доказать, что

$$\int_{\eta\Gamma_0}[\eta\psi(s)-\psi(s)]\,d\omega=0.$$

Но

$$\int_{\eta\Gamma_0}(\eta\psi)\,d\omega=-\int_{\eta(\eta\Gamma_0)}\psi(\eta^{*}d\omega)=\int_{\Gamma_0}\psi\,d\omega,$$

так как $\eta(\eta\Gamma_0)$ ориентирован противоположно Γ_0.

Отсюда

$$\int_{\eta\Gamma_0}(\eta\psi-\psi)\,d\omega=\int_{\Gamma_0}\psi\,d\omega-\int_{\eta\Gamma_0}\psi\,d\omega=0,$$

так как Γ_0 и $\eta\Gamma_0$ гомологичны и ψ не имеет полюсов в области, ограничиваемой этими кривыми и принадлежащей Λ.

Оказывается, что в условиях леммы 4 решение уравнения (7) может быть выражено в виде

$$\Pi(\tilde{S})=\int_{\tilde{\Gamma}}A(\tilde{s},\tilde{t})\,\varphi(\tilde{t})\,d\omega(\tilde{t}), \qquad (8)$$

где $d\omega(\tilde{t})$ уже известный дифференциал I-го рода, а $A(\tilde{s},\tilde{t})$ – так называемое ядро Бенке-Штейна для области $\tilde{S}\setminus\tilde{\Gamma}$ (см., например, / 14 /). Мы не будем предполагать известной теорию из / 14 / ввиду того, что все доказательства в конкретных случаях легко проводить заново и формулы приобретают при этом более законченную форму.

Пусть $\mathbb{C}(S)$ и $\mathbb{C}(\tilde{S})$ – поле мероморфных функций соответственно на S и $\tilde{S}$. При этом $\mathbb{C}(\tilde{S})$ является подполем поля алгебраических функций $\mathbb{C}(S)$, инвариантным относительно δ.

Для любой $f\in\mathbb{C}(S)$ ее след $Tr^{\mathbb{C}(S)}_{\mathbb{C}(\tilde{S})}(f)=Tr f=f+\delta f$ принадлежит $\mathbb{C}(\tilde{S})$. Аналогично определим след дифференциала

$$Tr(f\,d\omega)=(f+\delta f)\,d\omega,$$

который является дифференциалом на $\tilde{S}$.

Рассмотрим теперь два экземпляра S. Локальную переменную на одной из них будем обозначать через t, а на другой – через s. Определим функцию $\tilde{A}(t,s)$ на $S\times S$ следующим образом:

$$A(t,s)=\frac{1}{2}\,\frac{f(t)+f(s)}{x(t)-x(s)}$$

8-1590

и

$$\tilde{A}(t,s)=T_{\mathfrak{z}_t}A(t,s)=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta f(t)+f(s)}{\delta x(t)-x(s)}+\frac{f(t)+f(s)}{x(t)-x(s)}\right),$$

где $T_{\mathfrak{z}_t}$ означает, что s мы считаем параметром.

Мы утверждаем тогда, что

$$\Pi(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\eta\Gamma_0}\tilde{A}(t,s)\varphi(t)\,d\omega(t). \qquad (9)$$

Докажем сначала, что правая часть (9) является аналитической функцией на всей S с выброшенными кривыми Γ_1 и $\eta\Gamma_0$. Действительно, пусть $s\in S\setminus(\Gamma_1\cup\eta\Gamma_0)$. Тогда, если $x(t)=x(s)\neq\infty$, то $f(t)=-f(s)$ и так как на $\Gamma_1\cup\eta\Gamma_0$ нет точек ветвления h_1, то $\frac{f(t)+f(s)}{x(t)-x(s)}$ есть гладкая функция на $\eta\Gamma_0$. Аналогично, если $\delta x(t)=x(s)$, то либо $s=\delta t$, либо $s=\eta t$. Лишь во втором случае $s\in S\setminus(\Gamma_1\cup\eta\Gamma_0)$ и тогда

$$\frac{\delta f(t)+f(s)}{\delta x(t)-x(s)}=\frac{f(\delta t)+f(\eta t)}{x(\delta t)-x(\eta t)}=\frac{-f(\eta t)+f(\eta t)}{x(\eta t)-x(\eta t)}$$

и все также, как и в предыдущем случае.

Рассмотрим теперь точки s_i, где $x(s)=\infty$

Фиксируем некоторую локальную систему координат в этой точке и рассмотрим выражение

$$\lim_{s\to s_i}\frac{\Pi(s)}{x(s)}=\lim\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\eta\Gamma_0}\frac{\tilde{A}(t,s)}{x(s)}\varphi(t)\,d\omega(t)=$$

$$=\mathrm{const}\int\limits_{\eta\Gamma_0}\varphi(t)\,d\omega(t)=0,$$

т.е. $\Pi(s)$ аналитична в точке s_i.

Мы доказали, таким образом, что правая часть (9) аналитична в $S\setminus(\Gamma_1\cup\eta\Gamma_0)$. При фиксированном $t\in\eta\Gamma_0$ $\frac{1}{2}\frac{f(t)-f(s)}{x(t)-x(s)}$ имеет в точке $s=t$ вычет равный I в локальной системе координат с униформизирующей переменной x. Аналогично при фиксированном $t\in\eta\Gamma_0$ функция $\frac{1}{2}\frac{f(\delta t)+f(s)}{x(\delta t)-x(s)}$ имеет вычет равный I в точке $s=\delta t$ в такой же системе координат. Поэтому, воспользовавшись формулами Сохоцкого в этой же локальной системе координат и заметив, что правая часть формулы (9) инвариантна относительно δ, мы получим, что $\Pi(s)$, определенная формулой (9), удовлетворяет уравнению (4). Из основного уравнения можно теперь определить $\Pi(s)$ и убедиться, что она аналитична в Δ.

Для доказательства теоремы I остается перенести контур интегрирования на Γ_0, что возможно, так как при $s\in h_1^{-1}(D)$ правая часть в формуле (9) аналитична по t в области между Γ_0 и $\eta\Gamma_0$.

ГЛАВА У.

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ С КОНЕЧНОЙ ГРУППОЙ

§ I. Вычисление группы случайного блуждания.

Из леммы 2 § 4 Гл. Ш следует, что группа $\mathcal{H}$ случайного блуждания является либо конечной четного порядка $n \geqslant 4$, либо бесконечной циклической группой. Оказывается, что группы 4-го порядка имеют красивую вероятностную интерпретацию. Именно, они соответствуют "независимым" случайным блужданиям по обеим осям при дискретном или непрерывном времени.

Докажем сначала две простые леммы.

О п р е д е л е н и е. Случайное блуждание называется простым, если $p_{11} = p_{1,-1} = p_{-1,1} = p_{-1,-1} = 0$. Оно соответствует "независимому" по обоим осям случайному блужданию с непрерывным временем (см. § 3 Гл. I).

Лемма I. Группа $\mathcal{H}$ для простого случайного блуждания является группой четвертого порядка.

Доказательство. Если заметить, что

$$\xi y = \frac{p_{0,-1}}{p_{01}\, y}, \quad \eta x = \frac{p_{-1,0}}{p_{10}\, x},$$

то простым подсчетом можно убедиться в том, что $(\xi\eta)^2 x = x$, $(\xi\eta)^2 y = y$.

Мы будем пользоваться далее следующими обозначениями

$$Q(x,y) \equiv a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \equiv \tilde a(y)x^2 + \tilde b(y)x + \tilde c(y).$$

Лемма 2. Пусть $p(x,y) \equiv p(x)\tilde p(y)$, т.е. случайное блуждание является композицией двух независимых случайных блужданий по осям x и y соответственно. Тогда группа случайного блуждания является группой 4-го порядка.

Действительно, в этом случае в поле $\mathbb{C}(x,y)$ на S имеем $\tilde p(y) = \frac{1}{p(x)}$ и, так как $\frac{1}{p(x)}$ инвариантна относительно ξ, то

$$\xi \tilde p(y) = \tilde p_1 \xi y + \tilde p_0 + \tilde p_{-1}\frac{1}{\xi y} = \tilde p(y) = \tilde p_1 y + \tilde p_0 + \tilde p_{-1}\frac{1}{y},$$

ибо $\tilde p(y)$ необходимо имеет вид $\tilde p_1(y) + \tilde p_0 + \tilde p_{-1}\frac{1}{y}$. Отсюда

$$\tilde p_1(\xi y - y) = \tilde p_{-1}\frac{\xi y - y}{y\,\xi y}$$

и, так как $\xi y \neq y$, то $\xi y = \frac{\tilde p_{-1}}{\tilde p_1 y}$. Доказательство завершается также, как и в лемме I.

Перейдем теперь к доказательству утверждения, обратного к лемме I и 2.

Т е о р е м а I. Невырожденное случайное блуждание тогда и только тогда имеет группу четвертого порядка, когда выполняется одно из следующих условий:

I. случайное блуждание является простым, причем возможно $p_{00} \neq 0$,

2. случайное блуждание является композицией одномерных независимых случайных блужданий, т.е.

$$p(x,y) = \left(p_1 x + p_0 + p_{-1}\frac{1}{x}\right)\left(\tilde p_1 y + \tilde p_0 + \tilde p_{-1}\frac{1}{y}\right) \qquad (I)$$

с точностью до значения p_{00}. Иначе говоря, оно может быть также получено из (I) следующим образом: положим $p'_{ij} = \gamma p_{ij}$ для некоторого $\gamma > 0$ и всех $(i,j) \neq (0,0)$, $p'_{00} = 1 - \gamma \sum_{(i,j)\neq(0,0)} p_{ij}$

Доказательство. Надо доказать необходимость одного из этих двух условий. Имеем следующую диаграмму равенств в предположе-

е^x-1590

нии, что группа $\mathcal{H}$ имеет четвертый порядок, т.е. $(\xi\eta)^2=1$

$$\eta\xi x = \eta x = \frac{\tilde c(y)}{\tilde a(y)x}$$

$$\|$$

$$\xi\eta x = \xi\left(\frac{\tilde c(y)}{\tilde a(y)x}\right) = \frac{\tilde c(\xi y)}{\tilde a(\xi y)x} \qquad (2)$$

Отсюда $\tilde c(y)\tilde a(\xi y) - \tilde a(y)\tilde c(\xi y)=0$ или

$$(\xi y)^2\left[(p_{11}p_{-1,0}-p_{-1,1}p_{10})y + p_{11}p_{-1,-1}-p_{-1,1}p_{1,-1}\right]+$$

$$+\xi y\left[(p_{10}p_{-1,1}-p_{-1,0}p_{11})y^2 + p_{10}p_{-1,-1}-p_{-1,0}p_{1,-1}\right]+$$

$$+\left[(p_{1,-1}p_{-1,1}-p_{-1,-1}p_{11})y^2+(p_{1,-1}p_{-1,0}-p_{-1,-1}p_{10})y\right]=0 \qquad (3)$$

Аналогично, условие

$$\xi\eta y = \eta\xi y \qquad (4)$$

дает

$$c(x)a(\eta x) - a(x)c(\eta x) = 0 \qquad (5)$$

Система равенств (2), (4) или (3), (5) дает необходимое условие для того, чтобы $\mathcal{H}$ была группой четвертого порядка. Вместе с формулами леммы I § 4 Гл. III это будут необходимые и достаточные условия.

Рассмотрим сначала случай, когда многочлены (3) и (4) равны нулю тождественно относительно ξy и ηx соответственно. Приравнивая коэффициенты в (3) и (5) нулю получим следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&a.\ p_{11}p_{-1,0}=p_{-1,1}p_{10}, \qquad && d.\ p_{11}p_{0,-1}=p_{1,-1}p_{01},\\
&b.\ p_{11}p_{-1,-1}=p_{-1,1}p_{1,-1}, && e.\ p_{01}p_{-1,-1}=p_{0,-1}p_{-1,-1}\\
&c.\ p_{10}p_{-1,-1}=p_{-1,0}p_{1,-1}
\end{aligned} \qquad (6)$$

При выполнении равенств 6 a-e мы можем, задавая

$$\begin{aligned}
&p_{11}+p_{10}+p_{1,-1}=p_1, \qquad && p_{11}+p_{01}+p_{-1,1}=p'_1,\\
&p_{01}+p_{00}+p_{0,-1}=p_0, && p_{10}+p_{00}+p_{-1,0}=p'_0,\\
&p_{-1,1}+p_{-1,0}+p_{-1,-1}=p_{-1}, && p_{1,-1}+p_{0,-1}+p_{-1,-1}=p'_{-1},
\end{aligned} \qquad (7)$$

получить все p_{ij}. Действительно, так как мы действуем с точностью до значения p_{00}, то можно положить $p_{00}p_{11}= p_{01}p_{10}$. Тогда, если все $p_{ij}\neq 0$, то для всех i,j,k,l

$$\frac{p_{ij}}{p_{lj}} = \frac{p_{ik}}{p_{lk}}, \qquad \frac{p_{ij}}{p_{il}} = \frac{p_{kj}}{p_{kl}}. \qquad (8)$$

Далее имеем

$$p_ip'_j=(p_{i1}+p_{i0}+p_{i,-1})(p_{1j}+p_{0j}+p_{-1,j})=p_{ij}(p_{1j}+p_{0j}+$$

$$+p_{-1,j}+p_{i1}+p_{i0}+p_{i,-1}-p_{ij})+\sum_{\substack{k\neq j\\ l\neq i}} p_{ik}p_{lj}=p_{ij}\left(\sum p_{lk}\right)=p_{ij}$$

так как ввиду формул (8) $p_{ik}p_{lj}=p_{ij}p_{lk}$.

Если $p_{01}=p_{0,-1}=0$ либо $p_{10}=p_{-1,0}=0$ и $p_{ij}\neq 0$ при $i,j\neq 0$, получим аналогичный результат с $p_0=0$ или $p_0'=0$ соответственно.

Если, например, $p_{10}=0$, но $p_{-1,0}\neq 0$, то из $6a$ и $6e$ следует, что $p_{11}=p_{1,-1}=0$, т.е. случайное блуждание вырождено. Аналогичное обстоятельство имеет место, когда либо $p_{-1,0}=0,\ p_{10}\neq 0$ либо $p_{01}=0, p_{0,-1}\neq 0$ либо $p_{01}\neq 0,\ p_{0,-1}=0$. Таким образом остается разобрать случай, когда все p_{i0} и p_{0j} отличны от нуля. Тогда из формул $6a-e$ легко видеть, что обращение в нуль некоторого $p_{ij}, i,j\neq 0$, влечет обращение в нуль всех остальных $p_{ij},\ i,j\neq 0$, что дает нам простое случайное блуждание.

Пусть теперь выражение (3) не равно тождественно нулю. Тогда в квадратном трехчлене (3) относительно (ξy) не более одного коэффициента может обращаться в нуль. При этом не может обращаться в нуль коэффициент при $(\xi y)^2$, так как в этом случае $\xi y = y$, что невозможно для невырожденного случайного блуждания.

Тогда поделив (3) на $\xi y - y$ получим

$$\xi y=\frac{p_{11}p_{-1,-1}-p_{-1,1}p_{1,-1}+y(p_{11}p_{-1,0}-p_{-1,1}p_{10})}{p_{10}p_{-1,1}-p_{-1,0}p_{11}+y(p_{11}p_{-1,-1}-p_{-1,1}p_{1,-1})}=\frac{-y+\frac{\gamma}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta}y+1}$$

в предположении, что $\beta\neq 0$, где $\gamma=p_{10}p_{-1,-1}-p_{-1,0}p_{1,-1}$,

$$\beta=p_{11}p_{-1,-1}-p_{-1,1}p_{1,-1},\quad \alpha=p_{11}p_{-1,0}-p_{-1,1}p_{10}.$$

Но в то же время $\xi y=\dfrac{c(x)}{a(x)y}$, откуда

$$0=-a(x)y^2+\frac{\gamma}{\beta}a(x)y+\frac{\alpha}{\beta}yc(x)+c(x)=$$

$$=y\Big(b(x)+\frac{\gamma}{\beta}a(x)+\frac{\alpha}{\beta}c(x)\Big)\pmod{Q(x,y)}.$$

Откуда следует, что должно быть

$$b(x)+\frac{\gamma}{\beta}a(x)+\frac{\alpha}{\beta}c(x)\equiv 0\ .$$

Приравнивая коэффициенты получаем

$$\frac{\gamma}{\beta}p_{11}+\frac{\alpha}{\beta}p_{1,-1}=-p_{10}\ ,\quad \frac{\gamma}{\beta}p_{-1,1}+\frac{\alpha}{\beta}p_{-1,-1}=-p_{-1,0}$$

или $\frac{\gamma}{\beta}=-\frac{\gamma}{\beta},\ \frac{\alpha}{\beta}=-\frac{\alpha}{\beta}$, т.е. приходим к формуле $6a$ и $6c$. Но кроме этого должны также выполняться соотношения $6a$ и $6c$ с заменой каждого p_{ij} на p_{ji}, которые получаются симметричным образом при исследовании ηx вместо ξy. Иначе говоря, приходим к соотношениям $6d$ и $6e$. Но из $6a$ и $6e$ следует также $6b$. Мы пришли к случаю когда верны соотношения $6a-e$, уже рассмотренному выше. Теорема доказана.

Интересно, что ряд примеров случайных блужданий с группой $\mathcal{H}$ шестого порядка также имеют очевидный вероятностный смысл (они соответствуют, например, системам двухфазного обслуживания в простейших предположениях, см. §4 Гл.VI).

Лемма 3. Группа $\mathcal{H}$ является группой шестого порядка, если выполняется одно из следующих условий:

1. среди p_{ij} лишь $p_{1,-1}, p_{01}, p_{-1,0}$ отличны от нуля,
2. лишь $p_{-1,1}, p_{10}, p_{0,-1}$ отличны от нуля,
3. лишь $p_{11}\ p_{-1,0}, p_{0,-1}$ отличны от нуля,
4. лишь $p_{-1,-1}, p_{01}, p_{10}$ отличны от нуля.

Доказательство. Разберем лишь первый случай. Остальные рассматриваются аналогично. Имеем

$$\xi\eta x = \frac{p_{-1,0}}{p_{01}} y \qquad \text{и}$$

Следовательно, $\xi\eta\xi\eta x = \xi^2\eta x = \eta x$

$(\xi\eta)^3 x = (\xi\eta)\eta x = \xi x = x$. Далее $(\xi\eta)^3 y = \xi\eta\xi\eta\xi y$,

$\eta\xi y = \frac{p_{-1,0}}{p_{01}} x$ и $(\xi\eta)^3 y = y$, т.е. $(\xi\eta)^3 = 1$.

Заметим, что $\mathcal{H}$ в этом случае изоморфна симметрической группе S_3.

Существуют другие примеры групп $\mathcal{H}$ шестого порядка. Например, двухфазная система обслуживания с биномиальным поступлением требований и биномиальным обслуживанием с дискретным временем (см. § 4 Гл. VI).

В общем случае вычисление группы $\mathcal{H}$ довольно трудно. В следующем параграфе мы указываем на связь этой задачей с одной классической задачей.

Здесь мы докажем лишь следующий результат.

Лемма 4. Множество точек в симплексе $\mathcal{P}$, для которых $\mathcal{H}$ конечна, является множеством первой категории по Бэру.

Действительно, множество тех точек в $\mathcal{P}$, для которых $\mathcal{H}$ имеет порядок $2n$, $n = 2, 3, 4, \ldots < \infty$, является вещественным алгебраическим многообразием $\mathfrak{A}_n$. Оно получается приравниванием коэффициентов у некоторых членов к нулю в следующих сравнениях

$$(\xi\eta)^{2n} x - x \equiv 0 \mod Q(x,y)$$

$$(\xi\eta)^{2n} y - y \equiv 0 \mod Q(x,y)$$

после деления левых частей на Q и взятия остатка. Вещественное алгебраическое многообразие либо нигде не плотно, либо совпадает с $\mathcal{P}$. Таким образом, для того чтобы доказать, что множество точек, где $\mathcal{H}$ конечна, является объединением счетного числа нигде не плотных множеств, надо доказать, что $\mathfrak{A}_n$ не совпадает с $\mathcal{P}$. Но существуют примеры, где группа бесконечна. Например, в § 7 Гл. II строились примеры с гиперболическим или локсодромическим преобразованием $\xi\eta$ на поверхности рода 0.

§ 2. Связь с классической задачей об интегрируемости абелевых дифференциалов в логарифмах.

На универсальной накрывающей преобразование $\xi\eta$ есть сдвиг на ω_3 (см. § 5 Гл. III). Таким образом, группа $\mathcal{H}$ имеет порядок $2n$ тогда и только тогда, когда

$$n\omega_3 \equiv 0 \mod(\omega_1 \omega_2) \qquad \text{(I)}$$

т.е. существуют такие целые p и q, что

$$n\omega_3 = p\omega_1 + q\omega_2,$$

и n является наименьшим числом с таким свойством.

Будем обозначать единственный абелев дифференциал первого рода на S через du, а соответствующий абелев интеграл $\int du$. Выберем (произвольно) две точки u_1 и u_2 на универсальной накрывающей, чтобы $u_2 - u_1 = \omega_3$.

Пусть $s_1 = \lambda u_1$, $s_2 = \lambda u_2$. Тогда

$$\int_{s_1}^{s_2} du = \omega_3 \qquad (2)$$

Из (I) и (2) следует, что существует такая особая 1-цепь γ (см. / 9 /, стр. 310), что

$$\partial\gamma = \frac{S_1^n}{S_2^n} \tag{3}$$

и

$$\int\limits_{\gamma} du = 0 \quad , \tag{4}$$

где $\frac{S_1^n}{S_2^n}$ – дивизор. Условия (I), (2) и (3), (4) эквивалентны. Но тогда по теореме Абеля (/ 9 /, стр. 3I0) дивизор $\frac{S_1^n}{S_2^n}$ является главным. Пусть функция $\varphi(x,y)$ имеет нуль n -го порядка в S_1 и полюс n- того порядка в S_2 .

Но легко видеть, что

$$d(\ln\varphi) = \frac{d\varphi}{\varphi}$$

есть абелев дифференциал третьего рода с полюсами первого порядка в S_1 и S_2 . Иначе говоря, справедлива

<u>Т е о р е м а I</u>. Условие (I) выполняется тогда и только тогда, когда существует абелев интеграл третьего рода с логарифмическими особенностями в точках S_1 и S_2, представимый в виде логарифма от алгебраической функции $\varphi(x,y)$, принадлежащей полю $\mathbb{C}(S)$.

<u>Доказательство</u>. В одну сторону теорема доказана выше. Если подобный абелев интеграл третьего рода существует, обозначим его $u_{S_1S_2}$ и положим

$$\varphi(x,y) = e^{u_{S_1S_2}}$$

Далее снова используя теорему Абеля, придем к (I).

При этом дивизор $\varphi(x,y)$ обязан иметь вид $\frac{S_1^n}{S_2^n}$ для некоторого n и это n является искомым.

Выразим теперь абелев дифференциал 3-го рода в удобном для нас виде.

Прежде всего мы можем выбрать функцию v так (см. Дополнение), что уравнение алгебраической кривой будет иметь вид

$$v^2 = D(x) = d_4x^4 + \cdots + d_0 \;,$$

где $d_4 > 0\,, d_i$ – вещественны.

Рассмотрим функцию

$$z = \frac{v + b + \sqrt{d_4}(x-a)^2 + \frac{d_3}{2\sqrt{d_4}}(x-a)}{x-a}$$

Здесь $b = v(a)$ и точки S_1 , где $x = a, v = b$ и S_2 , где $x = z = \infty$, связаны соотношением $S_1 = \delta S_2$. Заметим, что S_1 и S_2 являются единственными точками, где $z = \infty$ (простые полюсы).

Имеем далее

$$\left[z(x-a) - (b + \sqrt{d_4}(x-a)^2 + \frac{d_3}{2\sqrt{d_4}}(x-a)\right]^2 = D(x)$$

или, учитывая как выбраны коэффициенты перед $(x-a)$ и $(x-a)^2$,

$$z^2(x-a)^2 - 2z(x-a)(b + \sqrt{d_4}(x-a)^2 + \frac{d_3}{2\sqrt{d_4}}(x-a)) = D_2(x),$$

где $D_2(x)$ некоторый многочлен второго порядка, делящийся на $x-a$, так как левая часть равна нулю при $x=a$, $v=-b$

Сокращая на $x-a$ получаем соотношение

$$A(z)x^2 + B(z)x + C(z) = 0 \,,$$

где $D(z) = B^2(z) - A(z)C(z)$ – многочлен четвертого порядка с <u>вещественными</u> коэффициентами.

Искомый абелев дифференциал третьего рода, с полюсами в обоих точках, где $z = \infty$, можно записать теперь в виде

$$(z+C)\ \frac{dz}{\sqrt{D(z)}} \tag{5}$$

(где $\frac{dz}{\sqrt{D(z)}}$ - абелев дифференциал первого рода, см. § 6 Гл. IУ).

Заметим теперь, что первые фундаментальные исследования по интегрируемости абелевых дифференциалов в логарифмах принадлежат Абелю и П.Л. Чебышеву (см. обзор в / 23 /,стр.39-41, и некоторые доказательства в / 24 /). Задача установления в конечное число действий интегрируемости дифференциалов типа (5) в логарифмах для многочленов $D(z)$ четвертого порядка с вещественными коэффициентами была решена русским математиком Е.И. Золотаревым / 25 /. Это по существу решает и нашу задачу с вычислении группы случайного блуждания. У нас нет здесь возможности более останавливаться на этих интересных исследованиях.

§ 3. Рациональные решения функционального уравнения с конечной группой

В § 5 Гл. II были введены автоморфизмы ξ и η универсальной накрывающей. Для функции $f(\omega)$, мероморфной на $\mathbb{C}$ введем обозначение: $f_h(\omega)=f(h\omega),\ h\in\mathcal{H}$.

Тогда $\left(f_{h_1}\right)_{h_2}=f_{h_1}(h_2\omega)=f(h_1h_2\omega)=f_{h_1h_2}$

Наши основные уравнения тогда примут следующий вид:

$$q\Pi+\tilde{q}\tilde{\Pi}+q_0=0, \tag{I}$$

$$\Pi=\Pi_\xi\ , \tag{2}$$

$$\tilde{\Pi}=\tilde{\Pi}_\eta \tag{3}$$

Сдвигая (I) на η получим

$$\frac{q_\eta}{\tilde{q}_\eta}\Pi_\eta+\tilde{\Pi}+\frac{q_{0\eta}}{\tilde{q}_\eta}=0 \tag{4}$$

Из (I) и (4) можно теперь исключить $\tilde{\Pi}$, после чего имеем

$$\frac{q_\eta}{\tilde{q}_\eta}\Pi_\eta-\frac{q}{\tilde{q}}\Pi+\frac{q_{0\eta}}{\tilde{q}_\eta}-\frac{q_0}{\tilde{q}}=0$$

или, если учесть, что $\Pi_\eta=\Pi_{\xi\eta}$, то

$$\Pi_\delta-f\Pi=\psi, \tag{5}$$

где

$$f=\frac{q\tilde{q}_\eta}{\tilde{q}q_\eta},\quad \psi=\frac{\tilde{q}_\eta}{q_\eta}\left(\frac{q_0}{\tilde{q}}-\frac{q_{0\eta}}{\tilde{q}_\eta}\right).$$

Последовательными сдвигами на δ можно получить следующую цепочку уравнений:

$$\begin{aligned}&\Pi_\delta-f\Pi=\psi,\\ &\Pi_{\delta^2}-f_\delta\Pi_\delta=\psi_\delta,\\ &\dots\dots\dots\\ &\Pi_{\delta^n}-f_{\delta^{n-1}}\Pi_{\delta^{n-1}}=\psi_{\delta^{n-1}}\end{aligned} \tag{6}$$

Если порядок группы $\mathcal{H}$ равен $2n$, то система замкнута: $\Pi_{\delta^n}=\Pi$ (в предположении, что Π рациональна, так как $\delta^n=1$). И мы можем явно определить Π . Для этого умножим каждое уравнение, начиная с предпоследнего , соответственно на $f_{\delta^{n-1}},\ f_{\delta^{n-1}}f_{\delta^{n-2}},\dots,\ f_{\delta^{n-1}}f_{\delta^{n-2}}\cdots f_\delta$. Сложив после этого все уравнения, мы в предположении, что

$$f f_\delta f_{\delta^2}\cdots f_{\delta^{n-1}} \neq 1, \tag{7}$$

получим

$$\boxed{\Pi = \frac{\psi_{\delta^{n-1}} + \psi_{\delta^{n-2}} f_{\delta^{n-1}} + \cdots + \psi f_{\delta^{n-1}} f_{\delta^{n-2}}\cdots f_\delta}{1 - f f_\delta f_{\delta^2}\cdots f_{\delta^{n-1}}}} \tag{8}$$

Аналогично, если обозначить

$$\tilde\delta = \eta\xi,\ \tilde\psi = \frac{q_\xi}{\tilde q_\xi}\left(\frac{q_0}{q} - \frac{q_{0\xi}}{q_\xi}\right),\ \tilde f = \frac{\tilde q q_\xi}{q \tilde q_\xi},$$

то при условии

$$\tilde f \tilde f_{\tilde\delta} \cdots \tilde f_{\tilde\delta^{n-1}} \neq 1 \tag{9}$$

получим

$$\boxed{\tilde\Pi = \frac{\tilde\psi_{\tilde\delta^{n-1}} + \tilde\psi_{\tilde\delta^{n-2}}\tilde f_{\tilde\delta^{n-1}} + \cdots + \tilde\psi \tilde f_{\tilde\delta^{n-1}}\tilde f_{\tilde\delta^{n-2}}\cdots\tilde f_{\tilde\delta}}{1-\tilde f\tilde f_{\tilde\delta}\cdots\tilde f_{\tilde\delta^{n-1}}}} \tag{10}$$

Заметим, что условия (7) и (9) эквивалентны. Действительно, обозначим через $\mathbb{C}_0(x,y)$ подполе поля $\mathbb{C}_Q(x,y)$ элементов, инвариантных относительно δ. Тогда (см. дополнение)

$$f f_\delta f_{\delta^2}\cdots f_{\delta^{n-1}} = N^{\mathbb{C}_Q}_{\mathbb{C}_0}(f) = N(f).$$

Вводя обозначение $F = \frac{q}{\tilde q}$ получим

$$N(f) = N(F)N(F_\eta^{-1}) = \frac{NF}{N(F_\eta)},\ N(\tilde f) = N(F^{-1})N(F_\xi).$$

Но как легко убедиться $N(F_\xi) = N(F_\eta)$,

и поэтому

$$N(f) = \frac{N(F)}{N(F_\eta)} = \frac{N(F)}{N(F_\xi)} = \frac{1}{N(\tilde f)}. \tag{11}$$

Теорема I. Если порядок группы $\mathcal{H}$ равен $2n$, причем выполнено условие (7), то существует единственное рациональное решение системы уравнений (I), (2), (3). При этом Π выражается по формуле (8), а $\tilde\Pi$ по симметричной формуле (I0).

Доказательство. Единственность следует из вышеприведенного вывода, а для доказательства существования достаточно доказать, что Π и $\tilde\Pi$, определенные по формулам (8), удовлетворяют соотношениям (I), (2), (3).

Это доказательство, состоящее в простой проверке, мы для простоты проведем лишь для случая группы $\mathcal{H}$ четвертого порядка.

Введем дополнительно обозначения

$$\varphi = \frac{q_0}{q},\ \tilde\varphi = \frac{q_0}{\tilde q}.$$

Тогда

$$\Pi(\omega) = \frac{\frac{\tilde q_\xi\, q_\delta}{q_\xi\, \tilde q_\delta}\left(\frac{q_0\tilde q_\eta}{q_\eta \tilde q} - \frac{q_{0\eta}}{q_\eta}\right) + \frac{q_{0\delta}\tilde q_\xi}{q_\xi\tilde q_\delta} - \frac{q_{0\xi}}{q_\xi}}{1 - F_\eta^{-1} F F_\xi^{-1} F_\delta} =$$

$$= \frac{F_\delta\tilde\varphi - F_\delta\tilde\varphi_\eta + F_\eta\varphi_\delta - F_\eta\varphi_\xi}{F_\eta F_\xi - F F_\delta} \tag{I2}$$

10–1590

Отсюда уже очевидно, что эта функция инвариантна относительно ξ. Учитывая полную симметрию задачи относительно Π и $\tilde{\Pi}$ выражение для $\tilde{\Pi}$ можно получить из (12) заменой q на $\tilde{q}$, ξ на η, т.е. F на F^{-1}, φ на $\tilde{\varphi}$ и η на ξ:

$$\tilde{\Pi}(\omega)=\frac{F_\delta^{-1}\varphi - F_\delta^{-1}\varphi_\xi + F_\xi^{-1}\varphi_\delta - F_\xi^{-1}\varphi_\eta}{F_\eta^{-1}F_\xi^{-1} - F^{-1}F_\delta^{-1}}. \qquad (13)$$

Откуда

$$\frac{\tilde{q}}{q}\tilde{\Pi} = -\frac{F_\eta F_\xi \varphi - F_\eta F_\xi \varphi_\xi + F_\delta F_\eta \varphi_\delta - F_\delta F_\eta \varphi_\eta}{F_\eta F_\xi - F F_\delta} =$$

$$= \frac{F_\eta F_\xi \varphi - F_\eta \tilde{\varphi}_\xi + F_\eta \tilde{\varphi}_\delta - F_\delta \tilde{\varphi}_\eta}{F_\eta F_\xi - F F_\delta}$$

и

$$\Pi + \frac{\tilde{q}}{q}\tilde{\Pi} = \frac{F_\delta \tilde{\varphi} - F_\eta F_\xi \varphi}{F_\eta F_\xi - F F_\delta} = \frac{F_\delta F_\varphi - F_\eta F_\xi \varphi}{F_\eta F_\xi - F F_\delta} =$$

$$= -\varphi = -\frac{q_0}{q}.$$

Алгоритм нахождения функций $\Pi(x)$ и $\tilde{\Pi}(y)$ в случае выполнения условия (7)

Формулы (8), (10) задают по существу функции Π и $\tilde{\Pi}$ как рациональные функции от x и y, т.е.

$$\Pi = \frac{P_0(x,y)}{P_1(x,y)}, \quad \tilde{\Pi} = \frac{Q_0(x,y)}{Q_1(x,y)}, \qquad (14)$$

где $P_i(x,y), Q_i(x,y)$ – многочлены от y с коэффициентами в поле рациональных функций от x. При этом мы можем разделить числитель и знаменатель, например, Π на многочлен

$$\varphi(x,y) = y^2 + \frac{b(x)}{a(x)}y + \frac{c(x)}{a(x)},$$

получив в результате $\Pi = \dfrac{A_1(x)y + A_0(x)}{B_1(x)y + B_0(x)}$.

Докажем, что при этом либо $\Pi = \dfrac{A_1(x)}{B_1(x)}$, либо $\Pi = \dfrac{A_0(x)}{B_0(x)}$.

Но выше мы доказали, что Π инвариантна относительно автоморфизма Галуа ξ. Но тогда из основной теоремы Галуа следует, что

$$\frac{A_1(x)y + A_0(x)}{B_1(x)y + B_0(x)} = \Phi(x) \mod \varphi(x,y) \qquad (15)$$

для некоторой функции $\Phi(x) \in \mathbb{C}(x)$. Последнее сравнение эквивалентно следующему

$$[A_1(x) + B_1(x)\Phi(x)]y + A_0(x) - B_0(x)\Phi(x) = 0 \mod \varphi(x,y) \quad (16)$$

Однако (16) возможно лишь если $A_1(x) = B_1(x)\Phi(x)$ и $A_0(x) = B(x)\Phi(x)$, что и требовалось доказать.

§ 4. Условия рациональности производящих функций

В предыдущем параграфе мы не обращали внимания на аналитичность $\Pi(x)$ и $\tilde{\Pi}(y)$ в единичном круге, т.е. несмотря на то, что рациональное решение существует, оно может не иметь вероятностного смысла.

Следующее утверждение дает необходимые и достаточные условия рациональности производящих функций стационарных вероятностей в случае конечности группы $\mathcal{H}$.

Т е о р е м а I. Пусть порядок группы $\mathcal{H}$ равен $2n$. Если выполнено условие (7), то производящая функция стационарных вероятностей $\Pi(x,y)$ рациональна тогда и только тогда, когда правые части формул (8) и (I0) не имеют полюсов при $|x|\leqslant 1$ и $|y|\leqslant 1$ соответственно. При этом π и $\tilde{\pi}$ выражаются соответственно по формулам (8) и (I0).

Если же условие (7) не выполнено, то $\Pi(x,y)$ рациональна тогда и только тогда, когда

$$\boxed{\psi_{\delta^{n-1}}+\psi_{\delta^{n-2}}f_{\delta^{n-1}}+\cdots+\psi f_{\delta^{n-1}}f_{\delta^{n-2}}\cdots f_{\delta}=0} \qquad (I)$$

В последнем случае явный вид π и $\tilde{\pi}$ мы получим в следующем параграфе. Перейдем к доказательству теоремы.

Утверждение теоремы в случае, если выполняется (7), сразу следует из результатов § I Гл. Ш.

Пусть теперь

$$f f_{\delta} f_{\delta^2}\cdots f_{\delta^{n-1}}=1 \qquad (2)$$

Тогда из системы уравнений (6) § 3 так же, как и при выводе (8) получим

$$\pi_{\delta^n}-\pi=\psi_{\delta^{n-1}}+\psi_{\delta^{n-2}}f_{\delta^{n-1}}+\cdots+\psi f_{\delta^{n-1}}f_{\delta^{n-2}}\cdots f_{\delta}.$$

Таким образом (I) является необходимым и достаточным условием

рациональности π. Аналогично, необходимым и достаточным условием рациональности $\tilde{\pi}$ является

$$\tilde{\psi}_{\tilde{\delta}^{n-1}}+\tilde{\psi}_{\tilde{\delta}^{n-2}}\tilde{f}_{\tilde{\delta}^{n-1}}+\cdots+\tilde{\psi}\tilde{f}_{\tilde{\delta}^{n-1}}\tilde{f}_{\tilde{\delta}^{n-2}}\cdots\tilde{f}_{\tilde{\delta}}=0. \qquad (3)$$

Но из уравнения (I) § 3 следует, что π рациональна тогда и только тогда, когда $\tilde{\pi}$ рациональна. Таким образом, условия (I) и (3) эквивалентны. Для окончания доказательства остается заметить, что π и $\tilde{\pi}$ рациональны тогда и только тогда, когда $\Pi(x,y)$ рациональна, что следует из результатов § I Гл. Ш.

Сейчас мы докажем, что случаи рациональности встречаются все таки очень редко.

Множество точек из $\Omega=P\times P'\times P''\times P^{\circ}$, для которых стационарное распределение существует, будем обозначать через Ω_0.

Т е о р е м а 2. Множество точек из Ω_0, для которых $\Pi(x,y)$ рациональна, является замкнутым нигде не плотным множеством в Ω_0.

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма I. $\pi(x)$ рациональна тогда и только тогда, когда x_3 не является ее точкой ветвления.

Действительно, если мы докажем, что при этом и x_4 не является ее точкой ветвления, то из мероморфности сразу будет следовать, что $\pi(x)$ рациональна.

Обозначим $s_3=h_1^{-1}(x_3)$, $s_4=h_1^{-1}(x_4)$. Можно выбрать такие прообразы $a_3\in\{\lambda^{-1}s_3\}$, $a_4\in\{\lambda^{-1}s_4\}$, что $\pi(\omega)$ инвариантна относительно отражений относительно a_3 и

10^{x}-1580

$a_3-a_4=\pm\dfrac{\omega_1}{2}$ (см. замечание § 5 Гл. III). Отсюда следует, что Π инвариантна относительно отражений относительно a_4 и, следовательно, и всех сдвигов на $2(a_i-a_j)$.

Переходим к доказательству теоремы. Докажем сначала, что множество точек, где $\Pi(x,y)$ нерациональна, открыто. Фиксируем теперь один из прообразов $a_3\in\{\lambda^{-1}s_3\}$ следующим образом. Рассмотрим отрезок $[1, x_3]$ вещественной оси и его связный прообраз $\lambda^{-1}h_1^{-1}([1,x_3])$, содержащий точку $\omega_0\in\Delta_0$, где $x(\omega_0)=y(\omega_0)=1$. Другой конец отрезка примем за a_3.

Пусть для некоторой точки $p\in\Omega_0$ функция Π нерациональна. Тогда можно выбрать достаточно малую окрестность U вблизи a_3 для которой

$$\Pi(\omega,p)\neq\Pi(-\omega,p),\ \omega\in U$$

(отражение берется в системе координат с началом в точке a_3).. В силу непрерывной зависимости Π от параметров (см. § 5 Гл. IУ) это свойство будет выполняться для некоторой окрестности точки p, что и требовалось.

Но в то же время равенства

$$\Pi(\omega,p)=\Pi(-\omega,p)$$

определяют аналитическое множество в Ω_0, что следует из результатов § 5 Гл. IУ. Мы знаем, что это множество не заполняет все Ω_0. Следовательно, оно нигде не плотно. Теорема доказана.

Далее мы приводим пример доказательства утверждения о нерациональности, дающего легко проверяемые условия.

<u>Лемма 2.</u> Пусть для простого случайного блуждания выполняется условие существования стационарного распределения. Тогда для того, чтобы производящая функция стационарных вероятностей была рациональна, необходимо выполнение следующего условия: существует такая точка $s\in S$, в которой $y(s)$ и $x(s)$ вещественны, причем $s\neq(x=y=1)$ и выполняется соотношение: либо $q(h_1s)=q(h_2s)=0$ либо $\tilde q(h_1s)=\tilde q(h_2s)=0, h_1\neq h_2$, либо $q(h_1s)=\tilde q(h_2s)=0$ или, наконец, одна из функций q, $\tilde q$ равна нулю в неподвижной точке относительно ξ или η.

<u>Доказательство.</u> Функция $\Pi(x)$ имеет положительные коэффициенты при разложении в степенной ряд. Следовательно, если она рациональна, то обязательно имеет вещественный полюс в некоторой точке $x_0>1$ (теорема Адамара-Прингсгейма); рассмотрим точку $s_0\in S$, где $x(s_0)=x_0$. Орбита $\mathcal{H}s_0$ этой точки вещественна, т.е. значения функций x и y во всех ее точках вещественны. Действительно, в противном случае $y(s_0)$ и $y(\xi s_0)$ комплексно сопряжены. Но $\eta x_0>0$ и используя то, что на орбите не более четырех точек, мы приходим к противоречию.

Рассмотрим сначала случай, когда на орбите ровно четыре различные точки.

Пусть сначала $|y(s_i)|<1$ для некоторой точки $s_i\in\mathcal{H}s_0$. Тогда без ущерба для общности можно положить $s_i=s_0$. Но тогда обязательно $q(s_0)=0$, так как иначе из основного уравнения следовало бы, что $\Pi(s_0)$ имеет полюс в этой точке. Теперь возможны два случая: I. $|x(\eta s_0)|<1$, 2. $|x(\eta s_0)|>1$. В первом случае, если $q(\xi s_0)\neq0$, то $\tilde\Pi(s)$ имеет полюс в точке $s=\xi s_0$ и тогда обязательно должно быть $\tilde q(\eta\xi s_0)=0$, так как иначе функция $\Pi(s)$ имела бы полюс в точке $\xi\eta s_0$, что по предположению невозможно. Во втором случае, если

$q(\xi s_0)\neq 0$ и $\tilde{q}(\eta\xi s_0)\neq 0$, то так же, как и в первом случае $\Pi(s)$ имеет полюс в точке $\xi\eta s_0$, но тогда обязательно $q(\eta s_0)=0$, так как иначе $\tilde{\Pi}(s)$ имела бы полюс в точке $s=\eta s_0$.

Пусть теперь во всех точках орбиты $|y(s)|>1$. Тогда $|x(\eta s_0)|<1$. Если $q(s_0)\neq 0$ и $q(\xi s_0)\neq 0$, то $\tilde{\Pi}(s)$ имеет полюса в точках $s_0, \xi s_0$ и должно быть $\tilde{q}(\eta s_0)= =\tilde{q}(\eta\xi s_0)=0$ в силу аналогичных соображений. Если же одно из значений $q(s_0)$ или $q(\xi s_0)$ равно нулю, то $\tilde{\Pi}(s)$ снова должна иметь полюс в соответствующей точке и тогда опять по крайней мере одно из значений $\tilde{q}(hs)$ должно обратиться в нуль.

Пусть теперь на орбите $\mathcal{H}s_0$ имеется неподвижная точка относительно ξ или η. Но тогда легко показать, что орбита состоит ровно из двух точек, причем обе они являются неподвижными относительно ξ или η. Если, например, $s_0=\xi s_0$, то $q(s_0)$ или $\tilde{q}(s_0)$ должны обращаться в нуль, так как иначе $\Pi(x)$ будет иметь полюс в другой точке орбиты, или $\tilde{\Pi}(s)$ будет иметь полюс в этой же точке орбиты, что невозможно, так как $\mathcal{H}s_0$ обязательно пересекается с областью $\Delta=h_1^{-1}(\bar{D})\cup h_2^{-1}(\bar{D})$.

Нам остается теперь исключить орбиту точки $x(s)=y(s)=1$. Пусть $\Pi(x)$ имеет полюс в точке $\frac{p_{-1,0}}{p_{10}}>1$, а $\tilde{\Pi}(y)$ – в точке $\frac{p_{0,-1}}{p_{01}}>1$. Но тогда $q(s)$ и $\tilde{q}(s)$ должны обращаться в нуль в точках $x=\frac{p_{-1,0}}{p_{10}}$, $y=1$ и $x=1$, $y=\frac{p_{0,-1}}{p_{01}}$ соответственно.

Если же либо $\Pi(x)$ либо $\tilde{\Pi}(y)$ не имеют полюса соответственно в точках $x=\frac{p_{-1,0}}{p_{10}}$ и $y=\frac{p_{0,-1}}{p_{01}}$, то она должна иметь полюс в некоторой другой точке s_0, принадлежащей вещественной орбите, не совпадающей с орбитой $\mathcal{H}(x=y=1)$ и применимы вышеприведенные рассуждения. Лемма доказана.

§ 5. Явное представление рациональных производящих функций и когомологии Галуа

Здесь мы будем по-прежнему предполагать группу $\mathcal{H}$ случайного блуждания конечной и что условие

$$N_{\mathbb{C}_0}^{\mathbb{C}_Q}(f)=f\cdot f_\delta f_{\delta^2}\cdots f_{\delta^{n-1}}=1 \tag{I}$$

всегда выполняется.

В этом случае необходимым и достаточным условием рациональности производящих функций является условие (1) §4.

Пусть $\mathbb{C}_Q^+$ – аддитивная группа поля $\mathbb{C}_Q(x,y)$, $\mathbb{C}_Q^*=\mathbb{C}_Q\setminus 0$ – мультипликативная группа $\mathbb{C}_Q(x,y)$. В дальнейшем основную роль будет играть тривиальность групп когомологий Галуа $H^1(\mathcal{H}_0,\mathbb{C}_Q^+)$ и $H^1(\mathcal{H}_0,\mathbb{C}_Q^*)$. Ввиду цикличности расширений мы не будем здесь явно говорить о когомологиях (см. дополнение), а будем пользоваться аддитивной и мультипликативной формой теоремы 90 Гильберта (см. / I6 /, стр. 243-244 и дополнение).

Ввиду (I) по мультипликативной теореме 90 Гильберта существует $a\in\mathbb{C}_Q(x,y)$ такой, что

$$f=\frac{a}{a_\delta}, \tag{2}$$

причем для задания a явно достаточно лишь найти такое θ, чтобы выражение

$$a=\theta+f\theta_\delta+ff_\delta\theta_{\delta^2}+\cdots+ff_\delta\cdots f_{\delta^{n-2}}\theta_{\delta^{n-1}} \tag{3}$$

было отлично от нуля.

Подставляя (2) в условие (I) § 4 получим

$$\psi_{\delta^{n-1}}+\psi_{\delta^{n-2}}\frac{a_{\delta^{n-1}}}{a}+\cdots+\psi\frac{a_\delta}{a}=0$$

или

$$\operatorname{Tr}^{\mathbb{C}_Q}_{\mathbb{C}_0}(\psi a_\delta)=\sum_{h\in\mathcal{H}_0}(\psi a_\delta)_h. \tag{4}$$

Тогда по аддитивной теореме Гильберта 90 существует такой элемент $\beta\in\mathbb{C}_Q(x,y)$, что

$$\psi a_\delta=\beta-\beta_\delta, \tag{5}$$

причем для нахождения β в явном виде достаточно выбрать элемент φ с $\operatorname{Tr}\varphi\neq 0$ и положить

$$\beta=\frac{1}{\operatorname{Tr}\varphi}\Big[\psi a_\delta\varphi_\delta+(\psi a_\delta+\psi_\delta a_{\delta^2})\varphi_{\delta^2}+\cdots$$

$$\cdots+(\psi a_\delta+\psi_\delta a_{\delta^2}+\cdots\psi_{\delta^{n-2}}a_{\delta^{n-1}})\varphi_{\delta^{n-1}}\Big] \tag{6}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\Pi_\delta-f\Pi=\psi; \tag{6'}$$

подставляя (2) получим

$$(a\Pi)_\delta-a\Pi=\psi a_\delta,$$

и используя (5)

$$(a\Pi+\beta)_\delta=a\Pi+\beta,$$

т.е.

$$a\Pi+\beta=\gamma,\quad\text{где }\gamma\in\mathbb{C}_0(x,y),$$

или

$$\Pi=\frac{\gamma-\beta}{a} \tag{7}$$

<u>Лемма I.</u> Функция Π, определенная формулой (7) для любого $\gamma\in\mathbb{C}_0(x,y)$, инвариантна относительно ξ, т.е. принадлежит $\mathbb{C}(x)$.

<u>Доказательство</u>. Прежде всего ясно, что существует такой элемент $\tilde\gamma\in\mathbb{C}_0(x,y)$, что $\Pi\in\mathbb{C}(x)$.

Тогда

$$\frac{\tilde\gamma-\beta}{a}=\frac{\tilde\gamma_\xi-\beta_\xi}{a_\xi}\quad\text{и}\quad\frac{\tilde\gamma_\eta-\beta_\eta}{a_\eta}=\frac{\tilde\gamma_\delta-\beta_\delta}{a_\delta}.$$

Но $\tilde\gamma_\delta=\tilde\gamma$, $\tilde\gamma_\eta=\tilde\gamma_\xi$. Откуда имеем

$$\frac{a_\xi}{a}(\tilde\gamma-\beta)+\beta_\xi=\frac{a_\eta}{a_\delta}(\tilde\gamma-\beta_\delta)+\beta_\eta. \tag{8}$$

Но $\dfrac{a_\xi}{a}=\dfrac{a_\eta}{a_\delta}$. Откуда следует, что условие (8) в действительности не зависит от $\tilde\gamma$ и мы можем из (8) для произвольного $\gamma\in\mathbb{C}_0(x,y)$ получить формулу $\dfrac{\gamma-\beta}{a}=\dfrac{\gamma_\xi-\beta_\xi}{a_\xi}$

<u>Лемма 2.</u> Функция $\tilde\Pi$, определенная формулой

$$\tilde\Pi=\frac{-q\Pi-\Pi_{00}q_0}{\tilde q}=\frac{-q\frac{\gamma-\beta}{a}-\Pi_{00}q_0}{\tilde q} \tag{9}$$

принадлежит $\mathbb{C}(y)$.

<u>Доказательство</u>. Надо доказать, что

$$\tilde\Pi_\eta-\tilde\Pi=-\frac{1}{\tilde q\,q_\eta}\left(q_\eta\tilde q\,\Pi_\eta+\Pi_{00}q_{0\eta}\tilde q-q\Pi\tilde q_\eta-\Pi_{00}q_0\tilde q_\eta\right)=$$

$$= -\frac{q_\eta}{\tilde q_\eta}\left(\Pi_\eta - f\Pi - \psi\right) = 0$$

Но так как $\Pi_\eta = \Pi_\delta$, то это следует из уравнения ($6'$).

Мы видим, таким образом, что для нахождения Π и $\tilde{\Pi}$ надо подобрать Γ так, чтобы правые части формул (7) и (9) не имели полюсов соответственно при $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$. Это можно сделать единственным образом и довольно просто.

Примеры.

Тривиальным примером рациональности производящей функции является случайное блуждание, независимое по обоим осям. Например, в терминологии работы / 8* / это обратимый процесс конкуренции, переходные вероятности для которого задаются следующим образом

$$p(x,y) = \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{y} + q_1 x + q_2 y , \quad p'(x,y) =$$

$$= \frac{p_1}{x} + q_1 x + q_2 y + p_2 , \; p''(x,y) = p_1 + q_1 x + q_2 y + \frac{p_2}{y} ,$$

$$p^0(x,y) = p_1 + p_2 + q_1 x + q_2 y .$$

Рациональность здесь ясна сразу из вероятностных соображений: $\Pi(x,y) = \Pi(x)\tilde{\Pi}(y)$, а то, что $\Pi(x)$ и $\tilde{\Pi}(y)$ рациональны следует, например, из / 20 /. Проверим выполнение условия (I) § 4.

В данном случае заметим, что можно рассматривать уравнение

$$\Pi' + \tilde{\Pi}' = \psi ,$$

где $\Pi' = \frac{\Pi}{\tilde q}$, $\tilde{\Pi}' = \frac{\tilde{\Pi}}{q}$, $\psi = -\frac{q_0}{q\tilde q}$. Действительно, $\tilde q$ и q в данном случае инвариантны относительно ξ и η соответственно. Условие (I) § 4 тогда принимает вид

$$\psi - \psi_\xi - \psi_\eta + \psi_{\xi\eta} = 0 \tag{IO}$$

Но

$$\psi = \frac{p_1}{1 - \frac{1}{y}} + \frac{p_2}{1 - \frac{1}{x}} ,$$

а для функций, инвариантных относительно ξ или η условие (IO) очевидно.

Приведем теперь другой пример (нетривиальный). Рассмотрим случайное блуждание со следующими параметрами.

$$p_{10} = p'_{10} \ne 0 , \quad p_{-1,0} = p'_{-1,0} \ne 0 ,$$

$$p'_{01} , \; p_{0,-1} , \; p_{01} \ne 0 , \; p''_{10} = p^0_{10} = 1$$

а остальные $p_{ij}, p'_{ij}, p''_{ij}, p^0_{ij}$ равны нулю. Основное уравнение в этом случае принимает вид

$$(p'_{01} xy + p_{10} x^2 + p_{-1,0} - x)\,\Pi(x) +$$

$$+ y(x-1)\tilde{\Pi}(y) + (x-1)\Pi_{00} = 0 . \tag{II}$$

Но

$$q = x(p'_{01} y - p_{01} y - p_{0,-1}\frac{1}{y}) \bmod Q .$$

Поэтому (II) можно переписать в виде $(p'_{01}=p_{01}+p_{0,-1})$

$$\frac{x\widetilde{\Pi}(x)}{x-1}+\frac{y\widetilde{\widetilde{\Pi}}(y)+\Pi_{00}}{p_{0,-1}(y-\frac{1}{y})}=0$$

или

$$\rho=\frac{\Pi(x)}{x-1}=\frac{\widetilde{\Pi}(y)}{\frac{p_{0,-1}}{y}(1-y)(1+y)}, \qquad (12)$$

где $\Pi(x)=x\widetilde{\Pi}(x)$, $\widetilde{\Pi}(y)=y\widetilde{\widetilde{\Pi}}(y)+\Pi_{00}$

Из (12) следует, что ρ инвариантно относительно ξ и η, т.е.

$$\rho\in\mathbb{C}(x)\cap\mathbb{C}(y)\subset\mathbb{C}_0(x,y)$$

Из (12) следует, что ρ имеет полюс в точке S_0 : $x=y=1$, и, следовательно, во всех точках орбиты $\mathcal{H}S_0 : S_0$, ξS_0, ηS_0, δS_0.

Так как δ переводит область $|x|\leqslant 1$ на S в область $|x|\geqslant\frac{p_{1,0}}{p_{10}}$, то ρ не может иметь других полюсов в объединении этих областей. Осталось проверить, может ли ρ иметь полюса в области $1<|x|<\frac{p_{-1,0}}{p_{10}}$. Пусть орбита $\mathcal{H}S_1$ целиком принадлежит этой области. Но тогда $\mathcal{H}S_1$ пересекается с областью $|y|\leqslant 1$ и $\widetilde{\Pi}(y)$ имеет полюс в этой области, если $y\neq -1$. Но как легко видеть, не может быть одновременно $y=-1$ и $1\leqslant|x|\leqslant\frac{p_{-1,0}}{p_{10}}$. Таким образом

$$\rho=\frac{1}{x-1}+\left(\frac{1}{x-1}\right)_\delta+C=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\frac{p_{-1,0}}{p_{10}x}-1}+C$$

(с точностью до мультипликативной константы).

Откуда

$$\Pi=(x-1)\rho=1+\frac{(x-1)\frac{p_{10}x}{p_{-1,0}}}{1-\frac{p_{10}x}{p_{-1,0}}}+cx-c\,.$$

Откуда $c=1$, так как $\Pi(0)=0$, т.е.

$$\boxed{\Pi=x+\frac{(x-1)\frac{p_{10}x}{p_{-1,0}}}{1-\frac{p_{10}x}{p_{-1,0}}}}$$

Но в то же время

$$\rho=-\frac{1}{y-1}-\left(\frac{1}{y-1}\right)_\delta-1$$

(эта функция имеет полюса с теми же вычетами в точках $\mathcal{H}S_0$ и $\rho(0)=0$). Откуда

$$\boxed{\widetilde{\Pi}(y)=\frac{p_{0,-1}}{y}\left((y+1)\Bigl(y+\frac{(y-1)\frac{p_{01}}{p_{0,-1}}}{1-\frac{p_{01}y}{p_{0,-1}}}\Bigr)\right)}$$

§ 6 Другое явное представление нерациональных решений: "чистые" уравнения Винера-Хопфа.

Мы ограничимся здесь случаем, когда риманова поверхность S связна и имеет род I. Кроме интегрального представления для решения возможно также другое, в некотором смысле более естественное, представление. Согласно основной теореме решения

Π и $\tilde{\Pi}$ являются мероморфными функциями на универсальной накрывающей, т.е. на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Наше основное уравнение имеет вид (см. § 8 Гл. П).

$$\Pi(\omega)+\tilde{\Pi}(\omega)=-\mathfrak{X}(\omega)y(\omega)\eta(\omega)\overset{\mathrm{def}}{=}\psi(\omega). \tag{I}$$

Здесь через $\mathcal{H}$ - будем обозначать группу автоморфизмов универсальной накрывающей, порожденную ξ,η и сдвигом на ω_1. (См. § 5 Гл. Ш).

Далее мы будем везде предполагать, что группа функционального уравнения (на $\mathbb{S}$) конечна.

Замечание I. Здесь следует отметить, что множество точек пространства параметров $A=\{a_{ij}\}$, где группа конечна, является всюду плотным в пространстве параметров. Дадим набросок доказательства.

ω_3 является аналитической функцией от параметров в открытом всюду плотном множестве пространства параметров. A расслаивается на аналитические множества, где $\omega_1=\mathrm{const}$, $\omega_2=\mathrm{const}$. Не существует открытого множества, принадлежащего A, и такого, что на нем ω_3 постоянно на каждом аналитическом множестве $\omega_1=\mathrm{const}$, $\omega_2=\mathrm{const}$. Действительно, в противном случае ω_3 было бы функцией от ω_1 и ω_2. Можно показать, что это не так. Рассмотрим далее окрестность $\mathcal{U}$ некоторой точки на многообразии $\omega_1=\mathrm{const}$, $\omega_2=\mathrm{const}$, где ω_3 не постоянна. Образ $\mathcal{U}$ при отображении ω_3 заполняет открытое множество и, следовательно, те точки, для которых ω_3 рационально разлагается по ω_1 и ω_2, всюду плотны в $\mathcal{U}$.

Назовем орбиту $\mathcal{H}\omega_0$ точки ω_0 свободной от полюсов, если на ней нет полюсов ни $\Pi(\omega)$ ни $\tilde{\Pi}(\omega)$.

Лемма I. Если группа конечна, то лишь конечное число орбит не свободно от полюсов, а именно, орбита будет не свободной от полюсов тогда и только тогда, когда на ней существует точка, в которой $\mathfrak{X}y\eta=\infty$.

Доказательство. Действительно, пусть на орбите точки ω нет полюсов функции $\mathfrak{X}y\eta$. Тогда, если в некоторой точке ω_0 орбиты есть полюс, одной из функций Π или $\tilde{\Pi}$, то в этой же точке есть полюс и другой функции. Кроме того в $\xi\omega_0$ есть полюс функции $\tilde{\Pi}$, а, следовательно, в силу (I) и $\tilde{\Pi}$. Так по индукции можно показать, что как Π, так и $\tilde{\Pi}$ имеют полюса в каждой точке орбиты, что однако невозможно, так как по доказанному в § 5 Гл. Ш любая орбита пересекается с Δ_0. Остальные утверждения леммы очевидны.

Из уравнения (I) легко следует

$$\Pi(\eta\omega)-\Pi(\omega)=\psi(\eta\omega)-\psi(\omega) \tag{2}$$

и

$$-\Pi(\delta\omega)+\Pi(\omega)=-\psi(\eta\omega)+\psi(\omega)\overset{\mathrm{def}}{=}\varphi(\omega), \tag{3}$$

и симметричным образом

$$\tilde{\Pi}(\xi\omega)-\tilde{\Pi}(\omega)=\psi(\xi\omega)-\psi(\omega),$$

$$\tilde{\Pi}(\delta^{-1}\omega)-\tilde{\Pi}(\omega)=\psi(\xi\omega)-\psi(\omega)\overset{\mathrm{def}}{=}\tilde{\varphi}(\omega). \tag{4}$$

Выберем на универсальной накрывающей начало координат в точке $a_1\in\Delta_0$ (см. § 5 Гл. Ш).

Последовательность контуров параллелограммов $P_1,P_2,\ldots$ назовем правильной, если P_i содержится во внутренности P_{i+1}, отношение обоих сторон параллелограмма остается огра-

11-1590

ниченным при $n \to \infty$ и кратчайшее расстояние d_n от P_n до a_1 стремится к ∞.

Обозначим

$$\tau_n = \max_{\omega \in P_n} |\Pi(\omega)|.$$

<u>Лемма 2.</u> Существует такая правильная последовательность контуров $P_1, P_2, \ldots$, что

$$\tau_n \leq C d_n$$

<u>Доказательство</u>. Можно выбрать такой параллелограмм P периодов ω_1 и ω_2, что $\partial \mathcal{H}P = \bigcup_{h \in \mathcal{H}} hP$ не содержит полюсов функции $\mathcal{D}y\eta(\omega)$.

Ввиду конечности группы случайного блуждания $\sup_{\omega \in \partial\mathcal{H}P}|\Pi(\omega)|$ равен максимуму $|\Pi(\omega)|$ по некоторому компактному подмножеству $\partial\mathcal{H}P$. Обозначим этот максимум через C. Тогда используя (3) и соотношение

$$\Pi(\omega) = \Pi(\omega + \omega_1), \tag{5}$$

легко построить последовательность параллелограммов с требуемыми свойствами.

<u>Лемма 3.</u> Пусть ω_i - все полюса функции $\Pi(\omega)$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\Pi(\omega) = A_0 + B_0\omega + {}$$
$$+ \sum_i \left[g_i(\omega) - g_i(0) - g_i'(0)\omega\right], \tag{6}$$

где $g_i(\omega)$ - главная часть $\Pi(\omega)$ в точке ω_i.

<u>Доказательство.</u> Следует из /27/, теорема 2, стр.226-228. Формулу (6) мы можем переписать в виде

$$\Pi(\omega) = \sum_i \left[g_i(\omega) - g_i(0)\right]. \tag{7}$$

Действительно, полюса ω_i можно объединить в пары ($\omega_i, \xi\omega_i = -\omega_i$). Заменим нумерацию и будем считать, что $\omega_i = -\omega_{-i}$. Тогда так как $\Pi(\omega) = \Pi(-\omega)$, то

$$g_i(\omega) = -g_{-i}(-\omega).$$

Откуда $g_i'(0) = g_i(0)$. Аналогично можно показать, что $B_0 = 0$. Но $A_0 = 0$ тогда ввиду уравнения (3).

Теперь нам надо явно вычислить главные части $g_i(\omega)$

Рассмотрим связную компоненту $\widetilde{\Delta} \subset \lambda^{-1}\widetilde{\Delta}$, содержащую Δ_0. Это есть некоторая криволинейная полоса, ограниченная двумя кривыми: связной компонентой $\lambda^{-1}\Gamma_1$ и связной компонентой $\lambda^{-1}\widetilde{\Gamma}_1$.

Для любой точки ω, принадлежащей этой полосе, множество точек $\{\delta^{-n}\omega, n = 0, 1, 2, \}$ может пересекать лишь одну из связных компонент R_+ и R_- дополнения к этой полосе (пусть R_+).

Функцию $\varphi(\omega)$ (см. формулу (3)) очевидно можно, как любую эллиптическую функцию, представить в виде

$$\varphi(\omega) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \sum_i \left[G_i(\omega + n\omega_1 + m\omega_2) - G_i(n\omega_1 + m\omega_2)\right],$$

где $\sum_i G_i(\omega)$ - сумма главных частей $\varphi(\omega)$ в одном параллелограмме периодов. Положим

$$\varphi^+(\omega) = \sum_{m,n,i}^{+} \left[G_i(\omega + n\omega_1 + m\omega_2) - G_i(n\omega_1 + m\omega)\right],$$

11^x-1590

где $\sum^{+}$ означает, что берутся главные части лишь в тех полюсах, которые лежат в R_+ .

Аналогично положим

$$\varphi^-(\omega)=\sum_{m,n,i}{}^{-}\left[-G_i(\delta^{-1}\omega+n\omega_1+m\omega_2)+G_i(n\omega_1+m\omega_2)\right],$$

где $\sum^{-}$ означает, что берутся главные части лишь в тех полюсах, которые лежат в $R_-\cup(\tilde{\Delta}\cap\delta\tilde{\Delta})$.

Построим эллиптическую функцию $\Pi_0(\omega)$, которая в полосе $\tilde{\Delta}\setminus\lambda^{-1}h_1^{-1}(\bar{D})$ имеет те же главные части, что и функция $-\mathfrak{X}y\eta(\omega)$. В $\tilde{\Delta}_0\setminus\lambda^{-1}h_1^{-1}(D)$ функция $-\mathfrak{X}y\eta(\omega)$ может иметь не более двух полюсов. Главные части в них обозначим $v_1(\omega)$ и $v_2(\omega)$.

Тогда

$$\Pi_0(\omega)=\sum_{i=1,2}\sum_{n,m}\left[v_i(\omega+n\omega_1+m\omega_3)-v_i(n\omega_1+m\omega_3)\right]$$

Теорема I.

$$\Pi(\omega)=\Pi_0(\omega)+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\varphi^+(\delta^{-n}\omega)+\varphi^-(\delta^{n}\omega)\right], \qquad (8)$$

причем, чтобы обеспечить сходимость ряда надо сгруппировать члены g_i и g_{-i} (см. выше).

Доказательство. Рассмотрим точку $\omega_1\in R_+$. Существует такая точка $\omega_0\in\tilde{\Delta}$ и такое число n , что $\omega_1=\delta^{-n}\omega_0$, а $\delta^{-i}\omega_0\in R_+$, $i=1,\dots,n-1$.

Используя уравнение (3), получим

$$\Pi(\omega_1)=\Pi(\omega_0)+\varphi(\omega_1)+\varphi(\delta\omega_1)+\dots+\varphi(\delta^{n-1}\omega_1)=$$

$$=\Pi(\omega_0)+\varphi(\delta^{-1}\omega_0)+\dots+\varphi(\delta^{-n}\omega_0). \qquad (9)$$

Аналогичное уравнение можно получить для точек, принадлежащих $R_-\cup(\tilde{\Delta}\cup\delta\tilde{\Delta})$. Кроме того, из основного уравнения следует, что полюса $\Pi(\omega)$ в области $\tilde{\Delta}\setminus\lambda^{-1}h_1^{-1}(D)$ совпадают с полюсами $\Pi_0(\omega)$. Наконец, надо заметить, что процесс рекуррентного получения главных частей по формуле (9) по существу и отражен в соотношении (8).

§ 7. Другое явное представление нерациональных решений: случайные блуждания с конечной группой

Мы найдем сначала общее мероморфное решение функциональных уравнений

$$q(\omega)\Pi(\omega)+\tilde{q}(\omega)\tilde{\Pi}(\omega)+q_0(\omega)=0,$$

$$\Pi(\xi\omega)=\Pi(\omega),\ \tilde{\Pi}(\eta\omega)=\tilde{\Pi}(\omega), \qquad (I)$$

на универсальной накрывающей (S имеет род I). Если группа случайного блуждания конечна, то существуют рациональные решения $\Pi_0(\omega)$ и $\tilde{\Pi}_0(\omega)$, найденные в § 3, удовлетворяющие соотношениям (I).

Таким образом, остается найти общее мероморфное решение однородной задачи:

$$q(\omega)\Pi(\omega+\tilde{q}(\omega)\tilde{\Pi}(\omega)=0,$$

$$\Pi(\xi\omega)=\Pi(\omega),\ \tilde{\Pi}(\eta\omega)=\tilde{\Pi}(\omega) \qquad (2)$$

Из (2) легко получить

$$\Pi(\delta\omega)-\varphi(\omega)\Pi(\omega)=0\,, \tag{3}$$

где

$$\varphi(\omega)=\frac{q(\omega)\,\tilde{q}(\eta\omega)}{\tilde{q}(\omega)\,q(\eta\omega)}\,.$$

Общее мероморфное решение уравнения (3) может быть представлено в виде

$$\Pi_1(\omega)\,\Pi(\omega) \tag{4}$$

где $\Pi_1(\omega)$ – произвольная эллиптическая функция с периодами ω_1 и ω_3 (напомним, что все рассматриваемые функции предполагаются имеющими период ω_1), а $\Pi(\omega)$ – частное решение. Поэтому остается найти частное решение (3).

Лемма I. Произвольное мероморфное решение уравнения (3) может быть представлено в виде

$$\Pi(\omega)=\mathrm{const}\,\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega^2}{a_n^2}\right)}{\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega^2}{b_m^2}\right)}\,. \tag{5}$$

Эта лемма далее если не понадобится и будет легко следовать из возможности представления (4) и теоремы I.

Функция $\varphi(\omega)$, как любая эллиптическая функция, может быть представлена в виде бесконечного произведения

$$\varphi(\omega)=C\,\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega}{\alpha_n}\right)e^{\frac{\omega}{\alpha_n}}}{\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega}{\beta_n}\right)e^{\frac{\omega}{\beta_n}}}\,. \tag{6}$$

Это можно доказать, например, используя представление эллиптической функции через σ – функцию, стандартное разложение σ-функции в бесконечное произведение и группируя затем члены, чтобы избавиться от множителей вида $e^{\alpha\omega^2}$.

Так же, как и в предыдущем параграфе, рассмотрим криволинейную полосу, являющуюся связной компонентой $\lambda^{-1}\Delta$ и содержащую Δ_0. В этой полосе рассмотрим некоторую кривую, аналитичную, без самопересечений, инвариантную относительно сдвига на ω_1 и гомологичную Γ_0 . Такую кривую (обозначим ее Γ) всегда можно выбрать так, чтобы на ней не было ни нулей ни полюсов функции $\varphi(\omega)$.

Кривая Γ разделяет комплексную плоскость на две области R_+ и R_- (через R_+ обозначена та из них, которая содержит кривые $\delta^{-n}\Gamma$, $n=1,2,\ldots$). Очевидно, что функция $\varphi(\omega)$ допускает факторизацию (вторая факторизация)

$$\varphi(\omega)=\varphi_+(\omega)\,\varphi_-(\omega)\,,$$

где

$$\varphi_+(\omega)=C\,\frac{\prod^{+}\left(1-\frac{\omega}{\alpha_n}\right)e^{\frac{\omega}{\alpha_n}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}}}{\prod^{+}\left(1-\frac{\omega}{\beta_m}\right)e^{\frac{\omega}{\beta_m}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\beta_m^2}}}\,,$$

$$\varphi_-(\omega)=C\,\frac{\prod^-\left(1-\frac{\omega}{\alpha_n}\right)e^{\frac{\omega}{\alpha_n}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}}}{\prod^-\left(1-\frac{\omega}{\beta_m}\right)e^{\frac{\omega}{\beta_m}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\beta_m^2}}}, \tag{7}$$

а $\prod^+(\prod^-)$ означает, что берутся лишь те сомножители, для которых α_n и β_m принадлежат $R_+(R_-)$.

Кроме того $\varphi_+(\omega)=C\,\frac{\varphi_1^+(\omega)}{\varphi_2^+(\omega)}$, где $\varphi_1^+(\omega)=\prod^+\left(1-\frac{\omega}{\alpha_n}\right)e^{\frac{\omega}{\alpha_n}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\alpha_n^2}}$ и $\varphi_2^+(\omega)$ – целые функции. Аналогично

$$\varphi_-(\omega)=\frac{\varphi_1^-(\omega)}{\varphi_2^-(\omega)}.$$

Для получения частного решения мы можем решить отдельно уравнения:

$$\begin{aligned}
&\Pi(\delta\omega)=\varphi_1^+(\omega)\,\Pi(\omega),\\
&\Pi(\delta\omega)=\left[\varphi_2^+(\omega)\right]^{-1}\Pi(\omega),\\
&\Pi(\delta^{-1}\omega)=\varphi_2^-(\delta^{-1}\omega)\,\Pi(\omega),\\
&\Pi(\delta^{-1}\omega)=\left[\varphi_1^-(\delta^{-1}\omega)\right]^{-1}\Pi(\omega).
\end{aligned} \tag{8}$$

Решая, например, первое из уравнений (8) имеем

$$\Pi(\omega)=\prod_{n=1}^{\infty}\varphi_1^+(\delta^{-n}\omega). \tag{9}$$

Если мы произведение в правой части (9) представим в виде

$$\prod\left(1-\frac{\omega}{\gamma_n}\right)e^{\frac{\omega}{\gamma_n}+\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\gamma_n^2}},$$

то оно будет сходящимся. Действительно, если мы докажем, что целая функция, определенная первым из уравнений (8) имеет порядок равный 2, то это будет следовать из теоремы Адамара. (См. / 27 /).

Но из (8) следует, что

$$\Pi(\omega+n\omega_3)=\Pi(\omega)\,\varphi_1^{\frac{n(n+1)}{2}}(\omega),$$

откуда уже легко следует утверждение о порядке целой функции.

Решая аналогично другие уравнения (8), мы придем к доказательству.

<u>Теорема</u> I. Произвольное мероморфное решение уравнения (3) может быть представлено в виде

$$\Pi(\omega)=\Pi_1(\omega)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_1^+(\delta^{-n}\omega)}{\varphi_2^+(\delta^{-n}\omega)}\prod_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi_2^-(\delta^{n}\omega)}{\varphi_1^-(\delta^{n}\omega)},$$

где $\Pi_1(\omega)$ – произвольная эллиптическая функция с периодами ω_1 и ω_3.

Очевидно, что существует такая функция $\Pi_1(\omega)$, что $\Pi(\omega)$ инвариантна относительно ξ. Аналогичное представление возможно, конечно, и для $\tilde{\tilde{\Pi}}(\omega)$. При этом произвольные эллиптические функции, очевидно, можно единственным образом выбрать так, чтобы Π и $\tilde{\tilde{\Pi}}$ не имели полюсов в Δ_0. Это представление полезно для изучения асимптотического поведения стационарных вероятностей (см. Гл. УI).

Заметим, что при исследовании однородной задачи мы нигде не пользовались конечностью группы случайного блуждания. В действительности, аналог такого представления может быть получен и для произвольной группы. Здесь, однако, мы не будем этим заниматься.

ГЛАВА УI.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ, НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ И ОБОБЩЕНИЯ

§ I. Простое случайное блуждание с косым отражением

В § 6 Гл. IУ было определено простое случайное блуждание с косым отражением.

Будем далее считать, что условие существования стационарного распределения

$$p_{0,-1} + p_{-1,0} > p_{01} + p_{10} \tag{I}$$

выполненным и что $\Pi_{00} = I$.

Тогда основное уравнение можно записать в виде

$$\Pi - \frac{p_{-1,0}}{p_{0,-1}}\tilde{\Pi} = \psi \stackrel{def}{=} \frac{\left(x + \frac{p_{-1,0}}{p_{0,-1}}y\right) - xy\left(1 + \frac{p_{-1,0}}{p_{0,-1}}\right)}{x - y} \tag{2}$$

Лемма I.

Функция $\Pi(x)$ аналитична в круге $|x| < x_3$, где x_3 – наименьшая по модулю точка из точек ветвления x_3 и x_4, лежащих вне D (см. лемму 4 § 2 Гл. Ш). Она может быть аналитически продолжена в достаточно малую окрестность произвольной точки границы этого круга, кроме точки $x = x_3$. В окрестности этой точки продолжение приводит к алгебраической точке ветвления второго порядка, причем функция

$$\Pi(x) - \left[\psi(x, y(x)) - \psi\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{10}x}, y(x)\right)\right], \tag{3}$$

где

$$\psi(x,y(x))=\frac{\left(x+\frac{p_{-1,0}}{p_{0,-1}}\,y(x)\right)-xy(x)\left(1+\frac{p_{-1,0}}{p_{0,-1}}\right)}{x-y(x)}, \tag{4}$$

аналитична в этой окрестности.

Аналогичное утверждение верно для функции $\widetilde{\pi}(y)$ с очевидными изменениями.

Доказательство. Для достаточно малого $\varepsilon>0$ положим $A=\{x: 1-\varepsilon<|x|<x_3\}$. Область $h_1^{-1}(A)$ состоит из двух связных компонент, каждая из которых гладко накрывает A. В полосе Π (см. § 5 Гл. Ш) рассмотрим две компоненты A_1, $A_2\in\lambda^{-1}h_1^{-1}(A)$, которые пересекаются с $\Delta_0\cap\lambda^{-1}h_1^{-1}(D)$. Так как накрытие λ гладко, то $\pi(x)$ мероморфна в A. Докажем, что $\pi(\omega)$ не имеет полюсов в A_1, где A_1 – та из компонент, которая пересекается с $\Delta_0\cap\lambda^{-1}h_2^{-1}(D)$.

Сделаем перед этим следующие замечания. Функция $\psi(\omega)$ может иметь полюса лишь в точках, где либо 1) $x(\omega)=y(\omega)=x_0$, где $x_0=\frac{p_{-1,0}+p_{0,-1}}{p_{10}+p_{01}}$, либо 2) $x(\omega)=y(\omega)=\infty$. Действительно, при $x=y=1$

$$\frac{d}{dx}(x-y)=1-\frac{dy}{dx}=1-\frac{p_{-1,0}-p_{10}}{p_{01}-p_{0,-1}}\neq 0$$

Предположим сначала, что $x_0\geqslant\frac{p_{0,-1}}{p_{01}}$. Обозначим через ω_0 точку, принадлежащую A_1, в которой $x(\omega_0)=x_0$, $y(\omega_0)=\frac{p_{0,-1}}{p_{01}x_0}$. Пусть $\widetilde{\mathcal{H}}$ – группа автоморфизмов универсальной накрывающей, порожденная ξ и η. Как легко проверить, группа $\mathcal{H}$ случайного блуждания имеет четвертый порядок. Отсюда следует, что орбита точки ω_0 [ж]) состоит лишь из точек, где $(x(\omega),y(\omega))=(x_0,x_0),\left(x_0,\frac{p_{0,-1}}{p_{01}x_0}\right),\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{10}x_0},x_0\right),\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{10}x_0},\frac{p_{0,-1}}{p_{01}x_0}\right)$, а орбита точки ω_1, где $x(\omega_1)=y(\omega_1)=\infty$ содержит точки с $(x(\omega),y(\omega))=(0,0),(0,\infty),(\infty,0),(\infty,\infty)$.

При этом последняя орбита не пересекается ни с первой орбитой ни с областью A_1. Докажем, что $\pi(\omega)$ и $\widetilde{\pi}(\omega)$ не могут иметь полюсов в точках, отличных от точек этих двух орбит. Пусть, например, $\pi(\omega)$ имеет полюс в точке ω_2, не принадлежащей ни $\widetilde{\mathcal{H}}\omega_0$ ни $\widetilde{\mathcal{H}}\omega_1$. Тогда из соотношения (3) следует, что и $\widetilde{\pi}(\omega)$ имеет в этой точке полюс. Используя это соображение и инвариантность $\pi(\omega)$ и $\widetilde{\pi}(\omega)$ относительно ξ или η, можно показать, что обе эти функции имеют полюс в каждой точке орбиты. Но это невозможно, так как из доказательства основной теоремы § 5 Гл. Ш следует, что $\widetilde{\mathcal{H}}\omega_2$ пересекается с Δ_0.

Так как $|y(\omega_0)|<1$, то $\widetilde{\pi}(\omega)$ не может иметь полюса в ω_0. Но из уравнения (2) тогда следует, что и $\pi(\omega)$ не имеет полюса в этой точке, т.е. $\pi(\omega)$ не имеет полюсов в A_1 и $\pi(x)$ аналитична в A. Докажем теперь, что $\widetilde{\pi}(\omega)$ не имеет полюсов в области B_1, определяемой симметричным образом относительно A_1.

Для этого, если $|x_0|<y_3$, то обозначим через $\widetilde{\omega}_0$ точку принадлежащую B_1 и такую, что $x(\widetilde{\omega}_0)=\frac{p_{-1,0}}{p_{10}x_0}$, $y(\widetilde{\omega}_0)=x_0$. Докажем, что $\xi\widetilde{\omega}_0\in\Delta_0$.

Уравнение $p_{01}y+p_{0,-1}\frac{1}{y}=1\pm 2\sqrt{p_{10}p_{-1,0}}$, которому

ж) Т.е. множество $\widetilde{\mathcal{H}}\omega_0=\{\omega:\omega=h\omega_0,\ h\in\widetilde{\mathcal{H}}\}$.

12-1590

удовлетворяет y_3, инвариантно относительно ξ, и имеет два корня, один из которых всегда больше I, а второй всегда меньше I. Поэтому $\xi y_3 < 1$ (так же, как и $\eta x_3 < 1$).

Рассмотрим точки $y=1<\frac{p_{0,-1}}{p_{01}} \leqslant x_0 < y_3$ и путь $\ell = B_1 \cap h_2^{-1}([1,y_3])$. Так как ℓ пересекается с $\Delta_0 \cap \lambda^{-1} h_1^{-1}(D)$, то $\ell \subset B_1$. Начальная точка отрезка этого пути переводится автоморфизмом ξ в Δ_0: $\xi\left(1, \frac{p_{0,-1}}{p_{01}}\right) = (1,1) \in \Delta_0$. Кроме того, на отрезке $\left[\frac{p_{0,-1}}{p_{01}}, y_3\right]$ ξy монотонна и $|\xi y(\tilde{\omega}_0)|<1$. Поэтому $\tilde{\omega}_0 = \xi\eta\omega_0$.

Так же, как и выше можно доказать, что единственная сомнительная точка в B_1, где возможен полюс $\tilde{\pi}(\omega)$ есть $\tilde{\omega}_0$. Мы уже показали, что $\tilde{\pi}(\omega)$ не имеет полюса в ω_0, а значит и в $\eta\omega_0$. Но тогда в силу (3) и $\pi(\omega)$ не имеет полюса в $\eta\omega_0$, а значит и в $\xi\eta\omega_0$. Снова в силу соотношения (3) $\tilde{\pi}(\omega)$ не имеет полюса в $\tilde{\omega}_0 = \xi\eta\omega_0$.

Второе утверждение леммы доказывается подобными же рассуждениями. Для исследования аналитического поведения $\pi(x)$ в точке $x = x_3$ заметим, что из предыдущих рассуждений следует, что точка из $\lambda^{-1} h_1^{-1}(x_3)$, принадлежащая границе A_1, при преобразовании η переходит в $\Delta_0 \cap \lambda_1^{-1} h_1^{-1}(D)$. Но из уравнения (2) получаем

$$\pi(\omega) - \pi(\eta\omega) = \psi(\omega) - \psi(\eta\omega). \quad (5)$$

При проектировании $h_1\lambda$ это уравнение перейдет в

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{10}x}\right) = \psi(x, y(x)) - \psi\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{10}x}, y(x)\right). \quad (6)$$

Так как $\pi\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{10}x}\right)$ аналитична в окрестности точки $x = x_3$, то лемма I в случае $x_0 \geqslant \frac{p_{0,-1}}{p_{01}}$ доказана. Случай $x_0 \geqslant \frac{p_{-1,0}}{p_{10}}$ рассматривается симметричным образом, а других случаев нет.

Т е о р е м а I. Для простого невырожденного случайного блуждания с косым отражением асимптотическое поведение стационарных вероятностей на границе определяется следующим образом

$$\pi_{n0} \sim C \frac{\pi_{00}}{n^{3/2} x_3^{n-1}}, \quad \pi_{0n} \sim \tilde{C} \frac{\pi_{00}}{n^{3/2} y_3^{n-1}}, \quad (6)$$

где

$$C = \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \sqrt{x_3(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_3)} \; \frac{p_{01}}{2} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{p_{-1,0}}{p_{0,-1}}\right)\left(\frac{x_3}{x_0 - x_3} - \frac{1}{\frac{p_{10}}{p_{-1,0}} x_0 x_3 - 1}\right),$$

$$\tilde{C} = \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \sqrt{y_3(y_3-y_1)(y_3-y_2)(y_4-y_3)} \; \frac{p_{10}}{2} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{p_{0,-1}}{p_{-1,0}}\right)\left(\frac{y_3}{x_0 - y_3} - \frac{1}{\frac{p_{01}}{p_{0,-1}} y_0 y_3 - 1}\right).$$

Доказательство. Обозначим $y_+(x)$ – ту ветвь функции $y(x) + \frac{b(x)}{2a(x)}$, для которой $y(x_0) = x_0$, а через $-y_+(x)$ другую ее ветвь. Умножив числитель и знаменатель функции (2) на $x + \frac{b(x)}{2a(x)} + y_+(x)$, после некоторых преобразований получим

$$\psi(x, y(x)) = \frac{p_{01} x y_+(x) \left(1 + \frac{p_{-1,0}}{p_{0,-1}}\right) \pi_{00}}{x_0 - x} + \psi_1(x),$$

где $\psi_1(x)$ аналитична в окрестности точки $x = x_3$. Аналогично

$$\eta\psi(x,y) = \frac{p_{01}\psi_+(x)\left(1+\frac{p_{-1,0}}{p_{0,-1}}\right)\pi_{00}}{\frac{p_{10}}{p_{-1,0}}x_0 x - 1} + \psi_2(x)\ ,$$

где $\psi_2(x)$ аналитична в окрестности точки x_3. Из леммы I тогда следует, что функция

$$\pi(x) - \pi_{00}C_1\sqrt{(x_1-x)(x_2-x)(x_3-x)(x_4-x)}\left(\frac{x}{x_0-x} - \frac{1}{\frac{p_{10}}{p_{-1,0}}x_0 x-1}\right) \quad (7)$$

где $C_1 = \frac{p_{01}}{2}\left(1+\frac{p_{-1,0}}{p_{0,-1}}\right)$ является аналитической в окрестности точки x_3.

Для того, чтобы окончить доказательство, нам надо сделать небольшое отступление. В § 3 будет показано, что асимптотика коэффициентов будет определяться либо полюсами, либо точками ветвления. Поэтому нам нужны будут результаты об асимптотическом поведении коэффициентов функции, не имеющих на окружности сходимости других особых точек.

Асимптотическое поведение коэффициентов функции с алгебраическими особенностями на границе круга сходимости.

Результаты этого пункта мы заимствуем из работы Р. Юнгена /3*/.

Разложение в ряд Тейлора функции $(1-z)^{-s}$ имеет вид

$$(1-z)^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ ,$$

где

$$a_n \sim \frac{n^{s-1}}{\Gamma(s)}\varphi(n)\ ,$$

а $\varphi(n)$ может быть разложена в асимптотический ряд вида

$$\varphi(n) = 1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots\ .$$

Будем говорить, что функция $f(z)$ имеет в точке $z=C$ алгебра-

ическую особенность типа S, если в некоторой окрестности U этой точки $f(z)$ представима в виде суммы выражений вида

$$(z-c)^{-s_i}\varphi_i(z);\ f(z)=\sum_{i=1}^{N}(z-c)^{-s_i}\varphi_i(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \quad (8)$$

где $\varphi_i(z)$ аналитичны в U.

Положим $\sigma_i=\mathrm{Re}\, s_i$, если $s \neq 0, -1, -2, \dots,$ и $\sigma=-\infty$ в противном случае. При этом $\sigma=\max_i \sigma_i$ называется весом особой точки C.

<u>Теорема 2.</u> Если на границе круга сходимости $f(z)$ имеет только алгебраические особенности, причем среди этих особенностей особенность в точке C имеет максимальный вес, то если $f(z)$ представима в некоторой окрестности точки $\mathrm{Re}\, s_1$, в виде (8) и $\varphi_1(c)\neq 0$, то

$$a_n \sim \frac{n^{s_1-1}}{c^n}\varphi_1(c)(-c)^{-s_1} \quad (9)$$

при определенном выборе ветви в правой части (4) как функции от s_1. У нас далее s_1 вещественно и $C>0$. Поэтому трудностей не возникает.

Применяя теперь это утверждение к функции (7) мы заканчиваем доказательство теоремы.

§ 2. Случайные блуждания без соскока с границы.

Так мы будем называть случайные блуждания с

$$q(x;y)=p'_{10}x^2+(p'_{00}-1)x+p'_{-1,0}\ ,$$

$$\tilde{q}(x,y)=p''_{01}y^2+(p''_{00}-1)x+p''_{0,-1}\ .$$

12*-1590

Замечание I.

Ничего не изменится если мы везде будем полагать $p_{00}=p'_{00}=p''_{00}=p^{\circ}_{00}=0$. При этом производящие функции только умножатся соответственно $\Pi(x,y)$ на $\sum_{(i,j)\neq(0,0)} p_{ij}$, $\Pi(x)$ на $\sum_{(i,j)\neq(0,0)} p'_{ij}$ и т.д.

Заметим, что $q=(x-1)(p'_{10}x-p'_{-1,0}), \tilde{q}=(y-1)(p''_{01}y-p''_{0,-1})$.

Введем

$$\Pi_1(x)=q(x)\Pi(x),\ \tilde{\Pi}_1(y)=\tilde{q}(y)\tilde{\Pi}(y).$$

Тогда основное уравнение имеет вид ($\Pi_{00}=1$)

$$\Pi_1(x)+\tilde{\Pi}_1(y)=-q_0(x,y), \tag{I}$$

причем $\Pi_1(x)$ и $\tilde{\Pi}_1(y)$ должны быть аналитичны при $|x|\leq 1$ и $|y|\leq 1$ соответственно. Это в точности совпадает с соответствующим уравнением для случая "чистых" уравнений Винера-Хопфа (правда, здесь уже не выполняется условие нетеровости).

Однако, рассматривая уравнение в области $h_1^{-1}(\bar{D})\cup h_2^{-1}(D)\subset S$ можно показать, что решение однородного уравнения есть постоянная (с помощью принципа максимума).

Таким образом, решения уравнения (I) не зависят от q и $\tilde{q}$, кроме, может быть, аддитивных констант.

Если, однако, учесть, что константы должны быть определены из условий

$$\Pi_1(1)=0\ ,\ \tilde{\Pi}_1(1)=0,$$

то решение (I) единственно и не зависит от q и $\tilde{q}$ (но зависит, конечно, от Q).

Заметим, что необходимым и достаточным условием существования стационарного распределения в этом случае будет (если, конечно, либо $M_x<0$, либо $M_y<0$):

$$M'_x<0,\ M''_y<0.$$

Так как $\Pi_1(x)$ не зависит от $q,\tilde{q}$ при данном Q, то

$$\Pi(x)=\frac{\Pi_1(x)}{(x-1)(p'_{10}x-p'_{-1,0})}$$

имеет полюс при всех $x=\frac{p'_{-1,0}}{p'_{10}}$, кроме, может быть, конечного числа, где $\Pi_1(x)=0$. Тем не менее имеет место

<u>Т е о р е м а I.</u> Для случайного блуждания без соскока с границы

$$\Pi_{n0}\sim\begin{cases} C\left(\frac{p'_{10}}{p'_{-1,0}}\right)^n & \text{при } \frac{p'_{-1,0}}{p'_{10}}<x_3,\\ C\ \frac{x_3^{-n}}{n^{3/2}} & \text{при } \frac{-p'_{-1,0}}{p'_{10}}>x_3,\\ C\ \frac{x_3^{-n}}{\sqrt{n}} & \text{при } \frac{p'_{-1,0}}{p'_{10}}=x_3. \end{cases}$$

<u>Доказательство.</u> Чтобы доказать, что $\Pi_1(x)$ не обращается в нуль при $1<x\leq x_3$ положим $q(x)=-x+1$.

Тогда

$$\Pi(x)=\frac{\Pi_1(x)}{1-x}.$$

и ввиду вышеизложенного утверждение доказано.

Для доказательства теоремы нам надо еще показать, что $\tilde{\Pi}_1(x)$ не имеет полюсов при $1<x\leq x_3$.

Для этого заметим, что $q_0(x,y)\neq\infty$ при $0<x<\infty$. Действительно, y имеет полюс лишь если $x=\infty$ или $a(x)=$ $=p_{11}x^2+p_{01}x+p_{-1,1}=0$

Рассмотрим произвольную точку $x, 1<x\leq x_3$, и соответствующую ей точку ω на универсальной накрывающей (являющуюся одним концом связной компоненты кривой $\lambda^{-1}h_1^{-1}([1,x_3])$, другим концом которой является точка $x=y=1$, принадлежащая Δ_0).

Заметим, что $y(x)>0$ при $1<x<\infty$. Действительно, это верно для $x=1$, а при движении x по этому отрезку $y(x)$ не может обратиться в нуль, так как $c(x)\neq 0$.

Из явного вида автоморфизмов Галуа ξ и η тогда следует, что существует последовательность точек $\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_n=\omega$, для которой $\omega_0\in\Delta_0$, $0<x(\omega_i), y(\omega_i)<\infty$, $\omega_i=h\omega_{i-1}$, где $h=\xi$ или η.

Отсюда используя основное уравнение и уравнения

$$\tilde{\Pi}_1(\omega)=\tilde{\Pi}_1(\xi\omega),\ \tilde{\tilde{\Pi}}_1(\eta\omega)=\tilde{\tilde{\Pi}}_1(\omega)$$

легко показать, что $\tilde{\Pi}_1(\omega)=\infty$. Теорема доказана, если заметить, что $\Pi(x)$ нерациональна, и применить те же соображения об асимптотике коэффициентов функции с алгебраическими особенностями, что и в § I.

Этот пример является общим в следующем смысле: он демонстрирует все возможные виды асимптотики для $\Pi(x)$ (см. § 3) и ее скачки при непрерывном изменении параметров.

§ 3. Общий характер асимптотического поведения

В § 2 Гл. III мы доказали, что обе точки ветвления x_3 и x_4 функции $y(x)$, лежащие вне единичного круга, вещественны,

причем одна из них положительна, а вторая может быть отрицательна лишь при $p_{10}<2\sqrt{p_{11}p_{1,-1}}$.

Будем обозначать наименьшую по модулю из этих двух точек ветвления через x_3. Это обозначение оправдывает следующая

Лемма I. x_3 всегда положительна и

$$x_3<|x_4|$$

Доказательство. Заметим, что у дискриминанта

$$D(x)=a_4x^4+\dots+a_1x+a_0$$

имеет место

$$a_3=2p_{10}(p_{00}-1)-4(p_{11}p_{0,-1}+p_{01}p_{1,-1}),$$

$$a_1=2p_{-1,0}(p_{00}-1)-4(p_{01}p_{-1,-1}+p_{-1,1}p_{0,-1}).$$

Легко видеть, что в невырожденном случае a_1 и a_3 не могут одновременно обращаться в нуль. Поэтому $D(x)$ не может быть двух равных по модулю корней, имеющих разные знаки, т.е. невозможно, чтобы $x_4=-x_3$. Отсюда следует, что невозможно и $|x_4|<x_3$. Действительно, пусть для некоторой точки $p\in\mathcal{P}$ это имеет место. Соединим точку p непрерывным путем $l\subset\mathcal{P}_1$ с точкой, где $x_4=\infty$. Тогда в некоторой точке этого пути должно быть $x_4=-x_3$, что как уже мы видели, невозможно.

Рациональная асимптотика

Мы скажем, что $\Pi(x)$ имеет рациональную асимптотику для коэффициентов Π_{n0}, если $\Pi(x)$ мероморфна внутри некоторого круга и имеет в этом круге полюса.

Тогда существует круг $|x|<x_0+\varepsilon, \varepsilon>0, x_0>1$ такой, что $\Pi(x)$ может иметь полюса лишь на окружности $|x|=x_0$, а в остальных точках этого круга аналитична. Из теоремы Адамара – Прингсгейма следует тогда, что один из полюсов есть обязательно $x = x_0$, а остальные полюса имеют не больший порядок. Можно доказать (см. / 26 /), что они имеют меньший порядок тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi_{n+1,0}}{\pi_{n,0}}$.

Оказывается, что алгоритм выделения полюсов $\pi(x)$, лежащих на отрезке $(1, x_3)$, очень прост.

Обозначим $y_0(x)$ ту ветвь $y(x)$ на отрезке $[1,x_3]$, для которой $y_0(1)=1$. (Мы ограничиваемся случаем $M_x<0$, $M_y<0$).

Положим

$$x_2 = \frac{p_{1,-1}+p_{0,-1}+p_{-1,-1}}{p_{11}+p_{01}+p_{-1,1}}.$$

Лемма 2. При $M_x<0, M_y<0$ $\pi(x)$ не может иметь полюса в точке $x_0 \in [1,x_2]$ порядка большего, чем порядок нуля $q(x_0, y(x_0))$. Если же $x_0 \in (x_2, x_3)$, то полюс $\pi(x)$ не может иметь большего порядка, чем нуль функции $q\tilde{q}_\eta$ в этой точке.

Доказательство. Заметим сначала, что $y_0(x) > 0$ на этом отрезке. Действительно, $y_0(x)$ может обратиться в нуль лишь там, где $C(x)=0$. Вещественность же и непрерывность $y_0(x)$ на $[1,x_3]$ очевидна.

Заметим, что

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=y=1} = -\frac{M_x}{M_y} < 0$$

Возможны два случая:

1. точка $x_2 = \frac{p_{1,-1}+p_{0,-1}+p_{-1,-1}}{p_{11}+p_{01}+p_{-1,1}}$, где $y_0(x_2)=1$, принадлежит $(1,x_3]$,
2. $x_2 \bar{\in} (1,x_3]$

Мы рассмотрим только случай 1, так как случай 2, как будет видно, является частным случаем 1.

Точка x_1, в которой $\frac{dy_0(x)}{dx}=0$, на соответствующем листе римановой поверхности S является неподвижной относительно η (так как в ней $Q_x(x,y)=0$), причем такая точка на отрезке $(1,x_2)$ одна (ввиду нечетности числа точек, где $\frac{dy_0(x)}{dx}=0$). Докажем, что на отрезке (x_2,x_3) нет точек, где $\frac{dy_0(x)}{dx}=0$. Заметим, что $\frac{dy_0(x)}{dx} \to +\infty$ при $x \to x_3$, так как $y_0(x) \neq 0$ при $x \in (x_2, x_3)$. Следовательно, таких точек либо нет либо две. Но то, что не может быть две можно доказать из соображений непрерывности, исходя из случая простого случайного блуждания и учитывая тот факт, что неподвижная точка для η не может быть ни $x=y=1$ ни $x=x_3$.

Мы имеем таким образом

$$1 < x_1 < x_2 < x_3 .$$

Пусть сначала $x_0 \in (1,x_2]$.

Имеем

$$\pi(x_0) = \frac{-\tilde{q}(x_0, y(x_0))\tilde{\tilde{\pi}}(y_0(x_0)) - \pi_{00} q_0(x_0, y_0(x_0))}{q(x_0, y_0(x_0))}, \qquad (1)$$

причем $\tilde{\tilde{\pi}}(x_0, y_0(x_0)) \neq \infty$, так как $y_0(x_0) \le 1$. В то же время $\tilde{q}$ и q_0 не могут иметь полюсов, если $0 < x, y < \infty$. Поэтому для этого случая лемма доказана.

Пусть $x_0 \in (x_2, x_3)$. На соответствующем листе римановой поверхности $0 < \eta x_0 < 1$. Имеем

$$\Pi(x_0)=\frac{1}{q(x_0,y_0(x_0))\tilde{q}_\eta(x_0,y_0(x_0))}\Big(\tilde{q}q_\eta\Pi(\eta x_0)-$$

$$-\Pi_{00}q_0\tilde{q}_\eta+\Pi_{00}q_{0\eta}\tilde{q}\Big), \tag{2}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Таким образом, алгоритм нахождения рациональной асимптотики таков. С помощью формул (I) или (2), используя то или иное явное представление для $\Pi(x)$ внутри единичного круга можно найти главную часть $\Pi(x)$ в минимальном положительном полюсе. Аналогично можно выделить полюса $\Pi(x)$ на окружности сходимости или убедиться, что их нет.

Интересной нерешенной задачей является выделить все случаи, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Pi_{n+1,0}}{\Pi_{n0}}$ не существует, т.е. у $\Pi(x)$ есть неположительные полюса на окружности сходимости того же порядка, что и положительный полюс на этой окружности.

Нерациональная асимптотика

Мы скажем, что асимптотика Π_{n0} нерациональна, если их асимптотика не является рациональной, т.е. если в круге $|x|<x_3$ $\Pi(x)$ не имеет полюсов.

Т е о р е м а I. Если асимптотика коэффициентов нерациональна, то

$$\Pi_{n0}\sim \mathrm{const}\,\frac{1}{x_3^n\; n^{1-\sigma}}$$

где σ - вес особой точки x_3 для функции $\Pi(x)$.

Доказательство. Действительно, $\Pi(x)$ не имеет больше точек ветвления на окружности $|x|=x_3$. Легко видеть, что в нашем случае σ может принимать только значения $(2K+1)\frac{1}{2}$, где K - целое число. Поэтому, если $\Pi(x)$ имеет на окружности $x=|x_3|$ полюса, то их порядок не превосходит $\sigma-\frac{1}{2}$. Доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству теоремы Адамара-Прингсгейма (см. также формулу (9) § I). Остается воспользоваться теоремой 2 § I.

Нахождение представления типа (8) § I, а, следовательно, и σ для $\Pi(x)$ в точке x_3 также осуществляется просто. А именно, используя формулы (I) или (2).

Таким образом, мы описали возможные типы асимптотического поведения Π_{n0}. В каждом конкретном случае это поведение может быть найдено, используя приведенные выше методы.

Есть, однако, интересные общие вопросы относительно областей параметров, для которых имеет место то или иное асимптотическое поведение. Как всегда, обозначаем через Ω - открытое множество пространства параметров $P\times P'\times P''\times P^0$, где стационарное распределение существует и S имеет род I. Обозначим $\Omega_2^x\subset\Omega$ - подмножество, где асимптотика Π_{n0} рациональна. Аналогично вводится Ω_2^y. Пусть $\Omega_2\subset\Omega_2^x\cap\Omega_2^y$ - замкнутое нигде не плотное подмножество, где $\Pi(x)$ (а, следовательно, и $\Pi(x,y)$) рациональна.

Используя формулы (I), (2) в доказательстве леммы 2 и непрерывную зависимость $\Pi(x)$ при $|x|<1$ от параметров (см. § 5 Гл. IУ), можно доказать, что $\Omega_2^x\setminus\Omega_2$ открыто. Можно доказать также, что $\Omega\setminus\bar{\Omega}_2^x$ непусто и, следовательно, открыто, причем для этого множества $\sigma=-\frac{1}{2}$. Кроме того, пересечения $\Omega_2^x\cap\Omega_2^y$ и $\Omega_2^x\cap(\Omega\setminus\bar{\Omega}_2^y)$ непусты и открыты.

Представляет интерес изучение других соотношений между этими множествами. В частности, верно ли, что $\Omega_2 \subset \Omega_2^{x}$?

Аналогично может быть изучена асимптотика коэффициентов функций $\Pi(x,1)$ и $\Pi(1,y)$ и других. Двумерной асимптотикой, т.е. π_{nm} при $n \to \infty$ и $m \to \infty$, мы здесь не занимаемся.

§ 4. Интерпретация на языке массового обслуживания и некоторые другие приложения

Существует мнение, что любую систему массового обслуживания при разумных требованиях "однородности" составляющих эту систему процессов можно свести к случайному блужданию в телесном угле эвклидова пространства. Это мнение подтверждается, во-первых, тем, что одномерная теория массового обслуживания вкладывается в теорию Винера-Хопфа на полупрямой. Во-вторых, существуют довольно общие формулировки задач теории массового обслуживания именно на языке подобных случайных блужданий. И, наконец, в ряде работ такое сведение осуществлено в явном виде.

Мы приведем здесь ряд примеров простейших двумерных систем массового обслуживания.

Два обслуживающих прибора и два типа требований

Пусть два типа требований поступают в систему независимо по закону Пуассона с интенсивностями μ_{10} и μ_{01} соответственно. Два прибора могут обслуживать оба типа требований: первый прибор специализирован на требованиях первого типа и обслуживает их с интенсивностью $\mu_{-1,0}$, а требования второго типа с интенсивностью $\tilde{\mu}_{0,-1}$. Аналогично второй прибор обслуживает требования второго типа с интенсивностью $\mu_{0,-1}$, а первого типа – $\tilde{\mu}_{-1,0}$.

Под состоянием системы будем понимать точку (i,j) , где $i,j \geq 0$ целые – число требований I-го и 2-го типа в системе соответственно (включая требования, находящиеся на обслуживании). Если $i,j > 0$, то каждый прибор обслуживает требования своего типа, т.е. интенсивности переходов равны μ_{ij} . Если $j = 0$, то оба прибора обслуживают требования первого типа, и наоборот (при поступлении требования нового типа обслуживание не своего типа прерывается).

Мы имеем в данном случае простое случайное блуждание с косым отражением, если $\mu_{-1,0} = \tilde{\mu}_{0,-1}$ и $\mu_{0,-1} = \tilde{\mu}_{-1,0}$, неоднократно разбиравшееся выше.

Можно добавлять в эту модель другие вероятности переходов: μ_{11} – интенсивность поступления пар требований одновременно, $\mu_{-1,-1}$ – если имеется третий прибор, который обслуживает одновременно два требования и т.д. Кроме того, в ряде случаев естественным является изменение интенсивностей переходов при попадании точки на границу.

Двухфазное обслуживание

Имеется два обслуживающих прибора, ремонтирующих два вида поломок у требований одного типа.

У каждого требования может быть поломка второго типа или обе одновременно. Если имеются обе поломки, то требование после ремонта первой (фаза I) поступает в очередь на ремонт второй (фаза II). Через (i,j) – будем обозначать число требований на I-й фазе и на второй. Обозначим $\mu_{-1,1}$, $\mu_{0,-1}$ – интенсивности обслуживания на первой и второй фазе, а μ_{10} , μ_{01} – интенсивности поступления на фазы I и II соответственно. Граничные переходные интенсивности те же.

Время может быть также дискретно, а поступление и обслуживание требований осуществляется по биномиальному закону.

Если $\mu_{01}=0$, то в задаче о двухфазной системе обслуживания стационарное распределение является геометрическим и независимым по каждой из осей. Соответствующая производящая функция была просто отгадана в работе / 2 /. Это, пожалуй, единственная работа, где была найдена производящая функция для невырожденного случайного блуждания.

По существу в данной работе находится стационарный режим для всех этих перечисленных систем массового обслуживания. Ничего не меняется, если не предполагать независимости поступления и обслуживания требований.

Интересной задачей является упрощение явных формул для стационарных вероятностей при специальных режимах (малая и большая загрузка системы и т.д.).

Изменение дискретного вектора с двумя неотрицательными компонентами может быть проинтерпретировано многими другими способами. Например,

1. запасы двух видов продукции на складе,
2. число особей в двух экологических нишах популяции с рождением, смертью и миграцией,
3. развитие эпидемии для двух классов индивидуумов.

Мы рассмотрим менее известный пример.

Одномерное случайное и квантовое блуждание трех частиц с финитным потенциалом

Пусть на целочисленной решетке прямой находится три частицы. Первоначально они находятся в точках $x_1<x_2<x_3$. (x_2-x_1 и x_3-x_2 нечетны). Частицы будем считать тождественными, за один шаг частица может сделать скачок +I и -I. Вероятности скачков левой, средней и правой частиц можно считать разными, однако, одинаковыми для одной (например, левой) частицы, если она удалена от соседней (средней) больше чем на I. При сближении двух частиц на расстояние I их вероятности скачков могут меняться (финитность потенциала).

Если обозначить $i=\frac{1}{2}(x_2-x_1-1)$, а $j=\frac{1}{2}(x_3-x_2-1)$ (т.е. исключить движение центра тяжести), то изменение вектора (i,j) сводится очевидным образом к блужданию в четверти-плоскости рассмотренного выше вида.

Если ввести вместо переходных вероятностей p и q скачков частицы на +I и -I соответственно два произвольных комплексных числа (которые мы будем называть переходными амплитудами) p и q, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} p+q&=1, \\ |p|^2+|q|^2&=1, \end{aligned} \tag{I}$$

и вместо $\pi_{ij}(t)$ (см. § I Гл. I) амплитуды $\psi_{ij}(t)$ нахождения системы в состоянии (i,j) в момент t, удовлетворяющие также уравнениям (I) § I Гл. I, то мы будем говорить о квантовом блуждании.

Заметим, что при тензорном перемножении свойства (I) сохраняются. Уравнения (I) § I Гл. I называются уравнениями Шредингера. Они могут быть решены приведенными в работе методами. Это есть простейший пример квантовой задачи трех тел. На этом примере отчетлива видна разница между задачами двух тел (соответствующей блужданию на полупрямой) и трех тел (соответствующей блужданию в четверти-плоскости).

§ 5. Блуждание в произвольном угле плоскости и другие обобщения

Оказывается, что задача исследования "однородного" блуждания в произвольном угле четверти-плоскости нетрудно может быть сведена к задаче в четверти-плоскости.

В дискретном случае мы, естественно, будем рассматривать только углы, кратные $\frac{2\pi}{8}$. Студент МГУ М. Меньшиков заметил, что преобразование $(i,j) \to (i-j, j)$ является искомым для угла $\frac{2\pi}{8}$. Действительно, это преобразование задает взаимно-однозначное соответствие между $Z^2_{++} = Z^2\left(\frac{2\pi}{4}\right)$ и $Z^2\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \{(i,j): i \geq j \geq 0$ целые$\}$.

"Однородное" случайное блуждание в $Z^2\left(\frac{2\pi}{8}\right)$ определяется так же, как и в $Z^2\left(\frac{2\pi}{4}\right)$, причем $p_{-1,1} = p'_{-1,1} = 0$, а у вероятностей скачков с границы $i = j$ отличны от нуля только $p''_{11}, p''_{10}, p''_{-1,-1}, p''_{1,-1}, p''_{0,-1}$. Легко видеть, что при преобразовании $(i,j) \to (i-j, j)$ однородность внутри угла и на его границах сохраняется.

Аналогично, для области $Z^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \{(i,j): j \geq 0,$ $i \geq -j$ целые$\}$ искомым является преобразование $(i,j) \to (i+j, j)$.

Другие углы исследуются сложнее, но сводятся к следующей более общей задаче.

Рассмотрим блуждание в полупространстве $j \geq 0$. Величины скачков удовлетворяют тем же условиям, что и раньше. Однако, в областях

$$A = \{(i,j): i > 0, j > 0\}, B = \{(i,j): i < 0, j > 0\},$$
$$A' = \{(i,j): i > 0, j = 0\}, A'' = \{(i,j): i = 0, j > 0\},$$
$$A''' = \{(i,j): i < 0, j = 0\},$$

переходные вероятности вообще-говоря различны и равны p_{ij}, $q_{ij}, p'_{ij}, p''_{ij}, p'''_{ij}$ соответственно. Разделяя уравнения для стационарных вероятностей π_{ij} на две группы:

с $i \geq 0$ и $i < 0$ мы получим систему функциональных уравнений следующего вида

$$Q_1(x,y)\pi_1(x,y) = q_1(x,y)\pi_1(x) + \tilde{q}_1(x,y)\tilde{\pi}_1(y) + r_1(x,y)\tilde{\pi}_2(y) + q_0(x,y);$$

$$Q_2(x,y)\pi_2(x,y) = q_2(x,y)\pi_2(x) + \tilde{q}_2(x,y)\tilde{\pi}_1(y) + r_2(x,y)\tilde{\pi}_2(y) + \tilde{q}_0(x,y),$$

метод решения которой близок к тому методу, которым исследовался случай приводимости § 9 Гл. П.

По-видимому, снятие ограничений на величины скачков с границы и на величины скачков внутри четверти-плоскости (лишь бы $p_{i,j} = 0$ при либо $i < -1$ либо $j < -1$) не влияет на условия существования стационарного распределения и вообще на технику исследования. Положение усложняется, если мы рассматриваем произвольные ограниченные скачки внутри четверти-плоскости. Например, если $p_{ij} = 0$ при $i < -2$ либо $j < -2$, то мы должны ввести дополнительные параметры p'''_{ij} и p^{IV}_{ij} – скачки с прямых $j = 1$ и $i = 1$ соответственно.

Автор думает, что общая краевая задача Римана для функций двух комплексных переменных может быть во многом исследована подобным методом.

Дополнение.

Сведения об алгебраических расширениях второго порядка.

Следующие обозначения и понятия предполагаются известными (стандартное руководство см. / 16 /):

$\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел,

$\mathbb{C}[x,y]$ – кольцо многочленов над полем комплексных чисел от двух неизвестных,

$\mathbb{C}(x), \mathbb{C}(y), \mathbb{C}(x,y)$ – поля рациональных функций над $\mathbb{C}$ от x, y и x и y соответственно.

Пусть $Q(x,y)=a(x)y^2+b(x)y+c(x)\in \mathbb{C}[x,y]$ неприводим, т.е. не представим в виде $Q=Q_1Q_2$, где $Q_1,Q_2 \in \mathbb{C}[x,y]$ не постоянны $(a(x),b(x),c(x)$ – многочлены второго порядка). Множество многочленов вида FQ, где F – произвольный многочлен из $\mathbb{C}(x,y)$ образует идеал, причем фактор кольцо $\mathbb{C}[x,y]/\{FQ\}$ по этому идеалу не имеет делителей нуля. Будем обозначать его $\mathbb{C}_Q[x,y]$. Поле частных $\mathbb{C}_Q(x,y)$ этого кольца называется алгебраическим расширением полей $\mathbb{C}(x)$ или $\mathbb{C}(y)$.

Многочлен $Q(x,y)$ для невырожденного случайного блуждания таков, что $\mathbb{C}(x)$ действительно содержится в $\mathbb{C}_Q(x,y)$. Операции в $\mathbb{C}_Q(x,y)$ делаются также как в $\mathbb{C}(x,y)$, только по $\bmod Q$. Ни один многочлен из $\mathbb{C}[x]$ не равен 0 по $\bmod Q$.

Эндоморфизм поля – отображение поля в себя, сохраняющее операции. Для поля $\mathbb{C}(x,y)$ $(\mathbb{C}_Q(x,y))$ преобразование $f(x,y)\to f(\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y))$, где φ_1 и φ_2 – фиксированные элементы из $\mathbb{C}(x,y)$ $(\mathbb{C}_Q(x,y))$ является эндоморфизмом. В последнем случае надо дополнительно потребовать, чтобы $Q(\varphi_1,\varphi_2)=0 \bmod Q$. Автоморфизм $\mathbb{C}_Q(x,y)$ называется автоморфизмом Галуа над некоторым подполем $\mathbb{C}_0(x,y)$, если он переводит любой элемент этого подполя в себя. Совокупность подобных автоморфизмов образует группу Галуа поля $\mathbb{C}_Q(x,y)$ над $\mathbb{C}_0(x,y)$.

Группа Галуа $\mathbb{C}_Q(x,y)$ над $\mathbb{C}(x)$ является циклической группой второго порядка. Тождественный автоморфизм I всегда принадлежит этой группе. Пусть $\xi\neq 1$ является автоморфизмом Галуа над $\mathbb{C}(x)$. Из следующего вычисления вытекает, что ξ если существует, то не более одного. Так как по определению $\xi x=x$,

то достаточно вычислить ξy. Тогда $\xi f(x,y)=f(x,\xi y)$. Заметим, что

$$\psi^2=b^2(x)-4a(x)c(x),\text{ где } \psi=2a(x)y+b(x).$$

Ясно, что $\xi\psi^2=\psi^2$ и $\xi\psi=-\psi$ (так как, если $\xi\psi=\psi$, то $\xi=1$), т.е.

$$\xi(2a(x)y+b(x))=-2a(x)y-b(x)$$

или

$$\xi y=-y-\frac{b(x)}{a(x)}=-\frac{a(x)y^2+b(x)y+c(x)-c(x)}{a(x)y}=$$

$$=\frac{c(x)}{a(x)y}\quad(\bmod Q(x,y)).$$

Ясно, что ξ, определенной формулой

$$\xi f(x,y)=f\left(x,\frac{c(x)}{a(x)y}\right)$$

есть эндоморфизм а, следовательно, и автоморфизм (на).

<u>Униформизация</u>. Рассмотрим элементы $x,y\in\mathbb{C}_Q(x,y)$, связанные соотношением $Q(x,y)=0$. Преобразуем его к виду

$$\left(y+\frac{b(x)}{2a(x)}\right)^2+\frac{c(x)}{a(x)}-\frac{b^2(x)}{4a^2(x)}=0.$$

Положив

$$u=y+\frac{b(x)}{2a(x)}$$

имеем

$$u^2=\frac{b^2(x)-4a(x)c(x)}{4a^2(x)}.\qquad \text{Пусть } v=u\,2a(x).$$

13*-1500

Тогда $v^2=b^2(x)-4a(x)c(x)=D(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$,

причем легко видеть, что x и v порождают все поле $\mathbb{C}_Q(x,y)$.

Полагая $v=-\frac{v_1}{x_1^2}$, $x=\frac{1}{x_1}+\alpha$, где α - произвольный корень $D(x)$ имеем

$$v_1^2=b_3x_1^3+b_2x_1^2+b_1x+b_0 \quad \text{, где}$$

b_i - многочлены от a_i и α. Далее, если положить

$$x_1=\frac{z-\frac{b_2}{12}}{\frac{b_1}{4}}, \quad v_1=\frac{4w}{b_1} \quad \text{, то}$$

$$w=4z^3-g_2z-g_3$$

Рассмотрим снова поле $\mathbb{C}_Q(x,y)$ и группу $\mathcal{H}_0$ автоморфизмов этого поля, порожденную элементом $\delta=\xi\eta$. Если $\mathcal{H}_0$ конечна, то можно рассмотреть подполе $\mathbb{C}_0(x,y)\subset\mathbb{C}_Q(x,y)$. элементов, инвариантных относительно δ.

Пусть $f\in\mathbb{C}_Q(x,y)$.

<u>Определение следа и нормы</u>:

$$Tr_{\mathbb{C}_0}^{\mathbb{C}_Q}(f)=\sum_{h\in\mathcal{H}_0}hf=f+f_\delta+\cdots+f_{\delta^{n-1}},$$

$$N_{\mathbb{C}_0}^{\mathbb{C}_Q}(f)=\prod_{h\in\mathcal{H}}hf=ff_\delta\cdots f_{\delta^{n-1}},$$

где n - порядок циклической группы $\mathcal{H}_0$.

В интересующем нас случае (см. § 5 Гл. У) мы можем определить коцикл Галуа α группы $\mathcal{H}_0$ в мультипликативную группу $\mathbb{C}_Q^*=\mathbb{C}_Q\setminus 0$ следующим образом:

$$\alpha(\delta^i)=f_{\delta^i}.$$

Легко проверяется, что определение коцикла (см. / I6 /) удовлетворено.

Библиография

I. Гахов Ф.Д. - Краевые задачи. Физматгиз, Москва. I963.

2. Мусхелишвили Н.И. - Сингулярные интегральные уравнения. "Наука". Москва. I968.

3. Крейн М.Г. - Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, Успехи матем.наук, т.XШ, вып. 5, I958, 4I3-4I6.

4. Гохберг И.Ц., Гольденштейн Л.С.- О многомерном интегральном уравнении на полупространстве с ядром, зависящим от разности аргументов и его дискретном аналоге, ДАН СССР, I3I, I, I960, I-I2.

5. Пале Р.-Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе. Москва. I970. "Мир".

6. Симоненко И.Б. - Операторы типа свертки в конусах, Математический сборник, 74, 2, I967, 298-3I3.

7. Симоненко И.Б. - О многомерных дискретных свертках, Математические исследования, 3, I, I968, I08-I22, Кишинев.

8. Боровков А.А., Рогозин Б.А. - Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий, Теория вероятностей и ее применения, 9, 3, I964.

9. Спрингер Дж. - Введение в теорию римановых поверхностей, Москва, I960.

I0. Гурьиц А, Курант Р. - Теория функций. Москва. I968.

II. Малышев В.А. - О решении дискретных уравнений Винера-Хопфа в четверти-плоскости, ДАН СССР, I87, 6, I969.

I2. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е. - Коммутативные нормированные кольца. Москва. I960.

I3. Форд Л.Р. - Автоморфные функции. ОНТИ, I936.

14. Зверович Э.И., Литвинчук Г.С. - Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения, Успехи матем. наук, 23, 3, 1968, 67-121.
15. Эрве М. - Функции многих комплексных переменных. Москва, 1965.
16. Ленг С.-Алгебра. Москва, 1968.
17. Неванлинна Р. - Униформизация. Москва. 1955.
18. Чжун Кай Лай - Однородные цепи Маркова. Москва, 1964.
19. Малышев В.А. - Аналитический метод в теории случайных блужданий в четверти-плоскости: простое блуждание с косым отражением. Труды Советско-Японского Симпозиума по теории вероятностей в г. Хабаровске, 1969, 176-184.
20. Боровков А.А. - Асимптотические методы в теории массового обслуживания. Зимняя школа по теории вероятностей в г. Ужгороде. 1964.
21. Ганнинг Р., Росси Х. - Аналитические функции многих комплексных переменных. "Мир". Москва. 1969.
22. Ху Сы Цзян - Теория гомотопий. "Мир". Москва. 1964.
23. Чеботарев Н.Г. - Проблемы современной теории Галуа. Собрание сочинений, том 3, 1950. Изд. АН СССР. Москва - Ленинград.
24. Чеботарев Н.Г. - Теория алгебраических функций. ОГИЗ. 1948. Москва - Ленинград.
25. Золотарев Е.И. - Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению. Докт. дисс. Спб., 1874. См. также Полное собрание сочинений, вып. I, Л., 1931, стр. 161-360.
26. Малышев В.А. - О полюсах рациональных производящих функций. Вероятности появления комбинаций. Литовский математический сборник, т. 5, № 4, 1965.

27. Шабат Б.В. - Введение в комплексный анализ, Москва, "Наука", 1969.
28. Рабинович В.С. - Многомерное уравнение Винера-Хопфа для конусов, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Республ. научный сборник, г. Харьков, 1967, вып. 5, 59-67.
29. Каничев В.А. - Краевые задачи линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Республ. научный сборник, г. Харьков, 1967, вып. 5, 59-67.

1^x. Heathcote C.R. - The Time-Dependent Problem for a Queue with Preemptive Priorities, Oper.Research, 7, 5, 1959.
2^x. Jackson R. - Queueing Systems with Phase Type Service, Journal Roy. Statist.Soc., ser.B, 18, I, 1956, 129-132.
3^x. Jungen R. - Sur les series de Taylor n'ayant que des singularités algebrico-logarithmique sur leur cercle de convergence. Commentarii mathematici helvetici, 3, 3, 1931, 266-306.
4^x. Lehner J. - Discontinuous groups and automorphic functions, Providence, 1964.
5^x. Wiener N., Hopf E. - Über eine Klasse Singulären Integralgleichungen. Sitz.Preus.Akad.Wiss., 1931, 696-706.
6^x. Weierstrass K. - Mathematische Werke. Band 4. Vorlesungen über Abelschen Transzendenten. 1902.
7^x. Selberg A. - On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces, Tata Institute of Fundamental Research, 1960, 147-164 (перевод в сб. "Математика", 1962, 6 : 3, 3-15).

8[x]. Iglehart D.L. - Reversible competition processes, Zeitschrift für Warschein. und Verwan. Geb., 2, 4, 1964, 314-331.

9[x]. Reuter G. - Competition processes, 4th Berkeley Symposium on probability, II, 1960, 420-430.

10[x]. Jadin M. - Queueing with alternating priorities, treated as random walk on the lattice in the plane, Journal of Applied Probability, 7, 1, april 1970, 196-218.

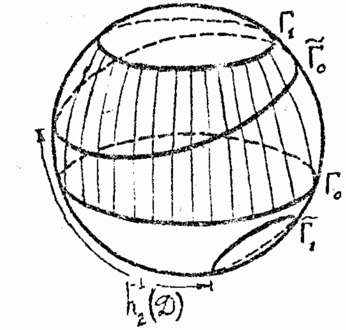

Рис.1 (§7 Гл.II).

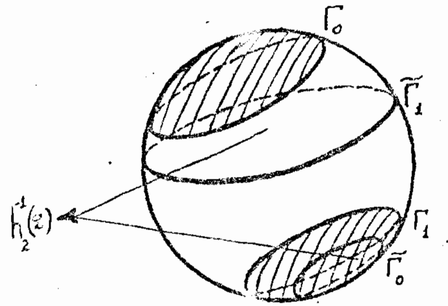

Рис.2 (§7 Гл.II).

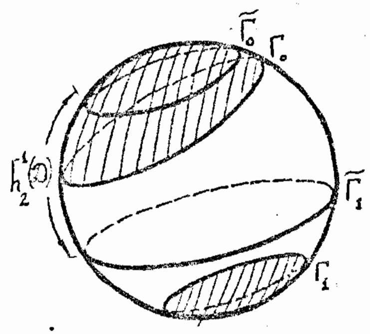

Рис.3 (§7 Гл.II).

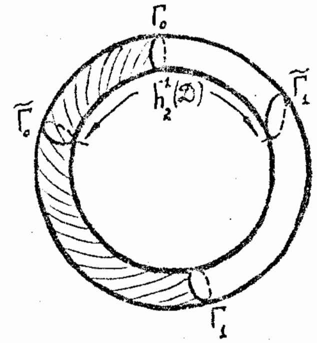

Рис.4 (§8 Гл.II).

Заштрихована область $h_1^{-1}(\mathcal{D})$.

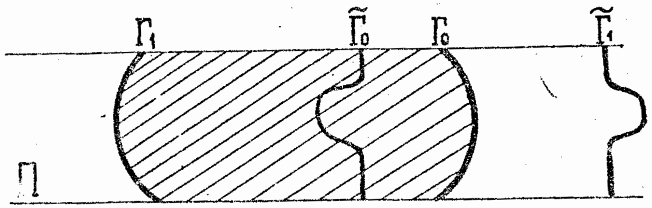

Рис.5 (§8 Гл.II).

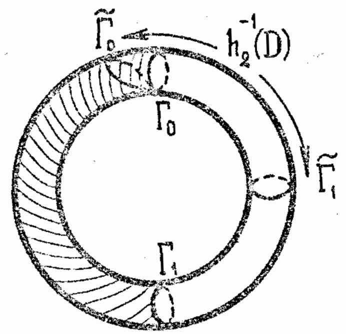

Рис.6 (§3 Гл.III).

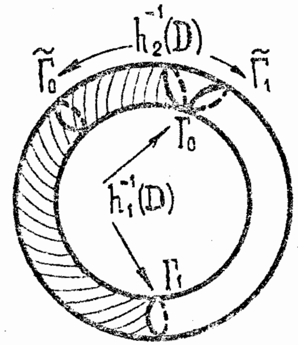

Рис.7 (§3 Гл.III).

Заштрихована область $h_1^{-1}(D)$.

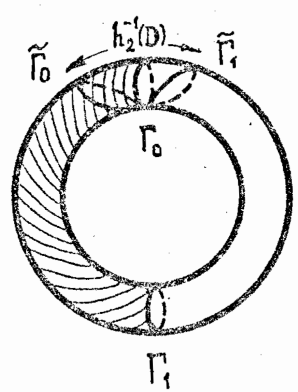

Рис. 8 (§3 Гл.III).

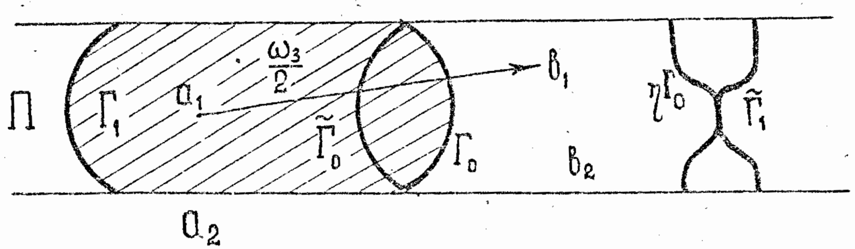

Рис.9 (§5 Гл.III).

Заштрихована область $h_1^{-1}(D)$.

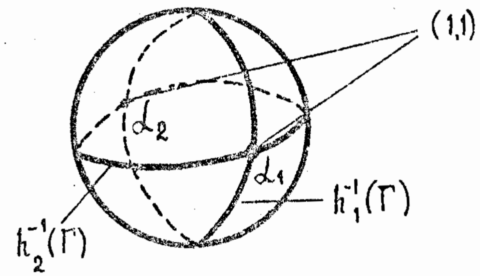

Рис.I0 (§6 Гл.III).

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIII

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

6

МОСКВА · 1972

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XIII, № 6 Ноябрь — Декабрь 1972

УДК 519.217

В. А. МАЛЫШЕВ

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ДВУМЕРНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

I. Введение

Рассмотрим однородную цепь Маркова с дискретным временем, множеством состояний которой является дискретная решетка в четверти плоскости, т. е. множество $Z_{++}{}^2 = \{(i, j) : i, j \geqslant 0 \text{ целые}\}$. Пусть $P(k', l' / k, l)$ — вероятность перейти из состояния (k, l) в (k', l') за один шаг. Мы будем предполагать, что $P(k', l' / k, l) = 0$, если либо $|k' - k| \geqslant 2$ либо $|l' - l| \geqslant 2$ и если $(k, l) \neq (0, 0)$. Кроме того, будет предполагаться выполненным следующее условие однородности

$$P(k', l'/k, l) = \begin{cases} p_{ij} & \text{при} \quad i = k' - k, \quad j = l' - l,\ k, l \geqslant 1, \\ p_{ij}' & \text{при} \quad i = k' - k, \quad j = l',\ l = 0,\ k \geqslant 1, \\ p_{ij}'' & \text{при} \quad i = k', \quad j = l' - l, \quad k = 0,\ l \geqslant 1. \end{cases}$$

Число отличных от нуля вероятностей $P(i, j / 0, 0) = p_{ij}{}^0$ конечно.

Введем вектора средних скачков за один шаг внутри четверти плоскости и с границ

$$(M_x, M_y) = \Big(\sum_j p_{1j} - \sum_j p_{-1,j},\ \sum_i p_{i1} - \sum_i p_{i,-1}\Big),$$

$$(M_x', M_y') = \Big(\sum_j p_{1j}' - \sum_j p'_{-1,j},\ \sum_i p_{i1}'\Big),$$

$$(M_x'', M_y'') = \Big(\sum_j p_{1j}'',\ \sum_i p_{i1}'' - \sum_i p'_{i,-1}\Big).$$

Обозначим через $\mathfrak{P}$ пространство параметров

$$\mathfrak{P} = \Big\{(p_{ij}, p_{ij}', p_{ij}'', p_{ij}{}^0) : \sum_{i,j} p_{ij} = 1,\ p_{ij} \geqslant 0 \text{ и т. д.}\Big\}.$$

Далее мы будем рассматривать, если не оговорено противное, только такие точки $p \in \mathfrak{P}$, для которых выполнены следующие условия:

1) все состояния сообщаются между собой,

2) случайное блуждание невырождено, т. е. из любой точки (i, j), $i, j \geqslant 1$ можно прийти в любую такую же с положительной вероятностью, не заходя на границу; $M_x < 0$ и $M_y < 0$;

3) существует стационарное распределение, т. е. одновременно выполняются следующие неравенства

$$M_x M_y' - M_y M_x' < 0, \tag{1}$$

$$M_y M_x'' - M_x M_y'' < 0. \tag{2}$$

Эквивалентность условий (1) и (2) эргодичности случайного блуждания при условии выполнения 1) и 2) доказана в ([1]). Кроме того, возможен чисто вероятностный метод доказательства (см. по этому поводу ([2])). Множество точек $p \in \mathfrak{P}$, для которых выполняются условия 1), 2), 3), обозначим через $\mathfrak{P}_1$.

Обозначим через π_{ij} стационарные вероятности состояния (i, j) и введем производящие функции

$$\pi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \pi_{ij} x^{i-1} y^{j-1}, \qquad \pi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{i0} x^{i-1},$$

$$\tilde{\pi}(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{0j} y^{j-1}, \qquad Q(x, y) = xy\left(1 - \sum_{i,j} p_{ij} x^i y^j\right),$$

$$q(x, y) = x\left(\sum_{i,j} p_{ij}' x^i y^j - 1\right), \qquad \tilde{q}(x, y) = y\left(-1 + \sum_{i,j} p_{ij}'' x^i y^j\right),$$

$$q_0(x, y) = \sum_{i,j} p_{ij}^0 x^i y^j - 1.$$

Лемма 1. *Стационарное распределение существует тогда и только тогда, когда существует константа* π_{00} *и функции* $\pi(x, y)$, $\pi(x)$, $\tilde{\pi}(y)$, *принадлежащие пространству* L_1 (т. е. $\sum_{i,j=0}^{\infty} |\pi_{ij}| < \infty$), *для которых выполняется соотношение*

$$Q(x, y)\pi(x, y) = q(x, y)\pi(x) + \tilde{q}(x, y)\tilde{\pi}(y) + \pi_{00} q_0(x, y). \tag{3}$$

При этом, если такие функции существуют, то они единственны с точностью до постоянного множителя, общего для $\pi(x, y)$, $\pi(x)$, $\tilde{\pi}(y)$ *и* π_{00}, *подбором которого можно добиться, чтобы все коэффициенты этих функций и* π_{00} *были положительны с суммой, равной* 1, *т. е. они действительно являются производящими функциями для стационарного распределения.*

Вывод (3) из стандартных уравнений для π_{ij} и доказательство леммы 1 см. в ([1]). В работе выясняется аналитическое поведение производящих функций $\pi(x, y)$, $\pi(x)$, $\tilde{\pi}(y)$ (аналитическое продолжение, особенности). Получено явное представление для $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ в виде, обобщающем представление Миттаг — Лефлера для эллиптических ζ-функций и представление Вейерштрасса для эллиптических σ-функций (соответственно в виде ряда и произведения). С помощью теории вычетов Лере получено представление для стационарных вероятностей π_{ij}, $i, j \geqslant 1$, в виде интеграла по одномерному циклу на соответствующей римановой поверхности. Во второй части работы это представление будет использовано для нахождения асимптотики для π_{ij}.

2. Алгебраическая кривая $Q(x, y) = 0$

Докажем следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2. *Для любой точки $p \in \mathfrak{P}_1$ многочлен Q неприводим и алгебраическая кривая s, определенная уравнением $Q(x, y) = 0$, имеет род 1.*

Многочлен $Q(x, y)$ рассматривается здесь как элемент кольца $C[x, y]$, где $\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел, а алгебраическая кривая S как алгебраическое многообразие в двумерном проективном пространстве $\mathscr{P}^2$. Из леммы 2 следует тогда, если $p_{11} = 0$, что S неособа *) (см. ([2]), стр. 130, теорема 2), и, следовательно, ее можно отождествить с римановой поверхностью S алгебраического расширения поля $\mathbf{C}(x)$ рациональных функций от x, определенного уравнением

$$Q(x, y) = 0, \tag{4}$$

Введем следующее определение. Пусть $(\mathfrak{R}; \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n)$ — упорядоченный набор топологического пространства $\mathfrak{R}$ и n его подпространств. Два такие набора $(\mathfrak{R}; \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n)$ и $(\mathfrak{M}; \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n)$ называются *эквисингулярными* (см. ([4])), если существует гомеоморфизм $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{M}$ такой, что $f\mathfrak{R}_i = \mathfrak{M}_i$ для всех i.

Лемма 3. *Для всех точек $p \in \mathfrak{P}_1$ наборы $(S; D_x, D_y)$, где $D_x = \{s \in S : |x(s)| < 1\}$, $D_y = \{s \mid y(s) | < 1\}$, эквисингулярны. При этом граница D_x состоит из двух непересекающихся аналитических простых замкнутых кривых Γ_0 и Γ_1, а граница D_y — из таких же $\widetilde{\Gamma}_0$ и $\widetilde{\Gamma}_1$.*

Γ_0, Γ_1, $\widetilde{\Gamma}_0$, $\widetilde{\Gamma}_1$ гомотопны одному и тому же элементу нормального базиса гомологий на торе (см. ([5])) *и попарно не пересекаются, за исключением Γ_0 и $\widetilde{\Gamma}_0$, пересечение которых состоит из единственной точки s, где $x(s) = y(s) = 1$. Кроме того, $\Gamma_0 \subset \overline{D}_y$, $\widetilde{\Gamma}_0 \subset \overline{D}_x$, $\Gamma_1 \subset S \setminus \overline{D}_y$, $\widetilde{\Gamma}_1 \subset S \setminus \overline{D}_x$.*

Лемма 4. *Для любой точки $p \in \mathfrak{P}_1$ алгебраическая функция $y(x)$, определенная уравнением (4), имеет две точки ветвления x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, внутри единичного круга, и две, x_3 и x_4, вне его. Все эти точки ветвления действительны.*

Если $p_{10} > 2\sqrt{p_{11}p_{1,-1}}$, то x_3 и x_4 положительны; если $p_{10} = 2\sqrt{p_{11}p_{1,-1}}$, то одна из этих точек равна ∞ (вторая положительна); если же $p_{10} < 2\sqrt{p_{11}p_{1,-1}}$, то одна из этих точек ветвления положительна, а другая отрицательна.

Аналогично, если $p_{-1,0} > 2\sqrt{p_{-1,1}p_{-1,-1}}$, то $0 < x_1 < x_2 < 1$; если $p_{-1;0} = 2\sqrt{p_{-1,1}p_{-1,-1}}$, то $0 = x_1 < x_2 < 1$ и, наконец, при $p_{-1,0} < 2\sqrt{p_{-1,1}p_{-1,-1}}$

$$-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1.$$

Эти же утверждения с очевидными изменениями верны и для точек ветвления $y_1, \ldots, y_4$ алгебраической функции $x(y)$.

---

*) При $p_{11} \neq 0$ мы иногда через S будем обозначать также неособую алгебраическую кривую в $\mathbf{C}^2$, определенную уравнением (4), но если не оговорено противное, будем понимать под S соответствующую риманову поверхность.

Переходим к доказательствам. Покажем сначала, как из леммы 4 следуют леммы 2 и 3.

Если у $y(x)$, определяемой уравнением второго порядка по x и по y, имеется четыре различные точки ветвления, то S очевидно неприводима и имеет род I. Точно так же, рассматривая накрытие $h_1 = x(s): S \to \mathscr{P}^1$, и учитывая то, что над $\{x: |x| = 1\}$ нет точек ветвления этого накрытия, убеждаемся, что $h_1^{-1}\{x: |x| = 1\}$ состоит из двух аналитических простых замкнутых кривых, гомотопных одному из элементов нормального базиса гомологий.

Из простых геометрических соображений относительно суммы комплексных чисел следует, что $\Sigma p_{ij}x^iy^j = 1$ при $|x| = |y| = 1$ может быть лишь если $x = y = 1$. Поэтому пересечение $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ и $\widetilde{\Gamma}_0 \cup \widetilde{\Gamma}_1$ состоит лишь из точки (1,1) на S. Остается показать, что в этой точке пересекаются именно те компоненты (Γ_0 и $\widetilde{\Gamma}_0$), которые принадлежат соответственно $\overline{D}_y$ и $\overline{D}_x$.

Обозначим $p(x, y) = \Sigma p_{ij}x^iy^j$. Тогда $p_{yy}''(1, y) > 0$ при $y > 0$. Отсюда следует, что при $M_y < 0$ уравнение $p(1, y) = 1$ имеет два корня: $y_0(1) = 1$ и $y_1(1) > 1$. Поэтому Γ_1 лежит вне $\overline{D}_y$ и не пересекается с $\widetilde{\Gamma}_1$. Отсюда следует также, что Γ_1 и $\widetilde{\Gamma}_1$ не могут быть гомотопны различным элементам нормального базиса гомологий на торе. И докажем, наконец, что другая компонента $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ (обозначим ее Γ_0) принадлежит $\overline{D}_y$. Надо доказать, что для точки $p \in \mathfrak{P}_1$ уравнение $Q(x, y) = 0$ имеет решение (x, y) такое, что $|x| = 1$, $|y| < 1$. Это легко проверяется для простого случайного блуждания (т. е. когда $p_{11} = p_{1,-1} = p_{-1,1} = p_{-1,-1} = 0$), если положить $x = -1$. Но $Q(-1, y) \neq 0$ при $|y| = 1$. Поэтому по принципу аргумента, число корней $Q(-1, y)$ при $|y| < 1$ постоянно при непрерывном изменении p_{ij}. Однако, интересующая нас область изменения p_{ij} (будем обозначать ее далее $\mathfrak{P}_1^1$) связна, откуда следует результат.

Переходим теперь к доказательству леммы 4. Нам надо доказать, что дискриминант $D(x) = b^2(x) - 4a(x)c(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + \ldots + a_0$ для $y(x)$ не имеет кратных корней (здесь положено $Q(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x))$, в том числе и в ∞.

Кратный корень в ∞ реализуется тогда и только тогда, когда $a_3 = a_4 = 0$. Легко видеть, что эта система уравнений

$$a_4 = p_{10}^2 - 4p_{11}p_{1,-1} = 0,$$
$$a^3 = 2p_{10}(p_{00} - 1) - 4(p_{11}p_{0,-1} + p_{01}\ p_{1,-1})$$

относительно p_{ij} не может иметь решений в невырожденном случае. Аналогично доказывается невозможность кратных корней при $x = 0$. Докажем, что $D(x)$ не имеет корней при $|x| = 1$. Для $x = 1$ это было доказано выше (в точке $x = 1$ функция $y(x)$ имеет два различных значения $y_0(1) = 1$ и $y_1(1) > 1$), а при $x = -1$ доказывается аналогично. Для остальных x, $|x| = 1$, в силу невырожденности выполняется хотя бы одно из следующих трех неравенств:

$$|b(x)| < b(1), \quad |a(x)| < a(1), \quad |c(x)| < c(1).$$

Но так как $a(1)+b(1)+c(1)=0$, $|2\sqrt{a(x)c(x)}|>|a(x)|+|c(x)|$, то $D(x)=(b(x)+2\sqrt{a(x)c(x)})(b(x)-2\sqrt{a(x)c(x)})$ не может равняться нулю.

Отсюда по принципу аргумента следует, что внутри и вне единичного круга лежит по два корня $D(x)$ (с учетом кратности). Нам надо доказать, что никакие два из этих корней не могут сливаться, т. е. иметь кратность большую 1. Обозначим для этого через A множество точек, где $a(x)c(x)=0$. Докажем, что $x_i \bar{\in} A$, $i=1,\ldots,4$. Действительно, в противном случае

$$b(x)=a(x)c(x)=0,$$

что невозможно, так как корни $b(x)$ неотрицательны, а $a(x)$ и $c(x)$ имеют положительные коэффициенты (точки $x=0$, ∞ были исключены ранее).

Заметим теперь, что для простого случайного блуждания корни $D(x)$ внутри единичного круга (так же как и вне) являются корнями разных уравнений

$$b(x)+2\sqrt{a(x)c(x)}=1-p_{10}x-p_{-1,0}\frac{1}{x}+2\sqrt{p_{01}p_{0,-1}}=0,$$

$$b(x)+2\sqrt{a(x)c(x)}=1-p_{10}x-p_{-1,0}\frac{1}{x}-2\sqrt{p_{01}p_{0,-1}}=0,$$

и являются, очевидно, вещественными. Если мы теперь будем непрерывно менять p_{ij}, то x_1 и x_2 будут оставаться вещественными корнями разных уравнений $b-2\sqrt{ac}=0$, $b+2\sqrt{ac}=0$ (так как $x_i \bar{\in} A$) и могут слиться лишь, если $x_1=x_2\in A$, что, как мы видели, невозможно (остается заметить, что область $\mathfrak{P}_1^1$ связна).

Последние утверждения леммы 4 мы доказывать не будем (см. ([1])), так как в этой части работы они нам не понадобятся.

3. Аналитическое продолжение производящих функций

Для всех точек $p\in\mathfrak{P}_1^1$ риманова поверхность S является накрытием Галуа как комплексной сферы $\mathbf{P}_x$ с переменной x так и $\mathbf{P}_y$ с переменной y. Группы Галуа являются циклическими второго порядка. Единственные нетривиальные их элементы обозначим соответственно через ξ и η. Они действуют по формулам

$$\xi y=\frac{p_{1,-1}x^2+p_{0,-1}x+p_{-1,-1}}{y(p_{11}x^2+p_{01}x+p_{-1,1})},\qquad \eta x=\frac{p_{-1,1}y^2+p_{-1,0}y+p_{-1;1}}{x(p_{11}y^2+p_{10}y+p_{1,-1})}. \tag{5}$$

Здесь $x=x(s)$, $y=y(s)$ и автоморфизмы ξ и η действуют в поле $\mathbf{C}_Q(x,y)$. Им соответствуют конформные автоморфизмы римановой поверхности $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, определяемые из условия $\xi f(s)=f(\tilde{\xi}^{-1}s)$, $\eta f(s)=f(\tilde{\eta}^{-1}s)$. Далее, где это не будет вызывать путаницы, будем обозначать ξ и $\tilde{\xi}$ (η и $\tilde{\eta}$) одной буквой ξ (η).

Универсальной накрывающей для S является комплексная плоскость $\mathbf{C}$. Пусть при этом фиксировано некоторое неразветвленное накрытие λ: $\mathbf{C}\to S$. S можно рассматривать как комплексную группу Ли, являющуюся фактор-группой аддитивной группы $\mathbf{C}$ по дискретной подгруппе $\{n\omega_1+m\omega_2\}$, где периоды ω_1 и ω_2 линейно независимы над полем вещественных чисел R, n и m целые (таким образом λ можно считать гомоморфизмом, начало координат мы выберем позже). Можно предположить, что цикл $\lambda([0, \omega_1])$ гомологичен Γ_0 (а следовательно, и всем Γ_1, $\widetilde{\Gamma}_0$, $\widetilde{\Gamma}_1$).

Прообраз $\lambda^{-1}\overline{(D_x \cup D_y)}$ состоит из счетного числа криволинейных полос, сдвинутых на вектора, кратные ω_2. Фиксируем одну связную компоненту множества $\lambda^{-1}(D_x \cup D_y)$ и обозначим ее Δ. Выберем произвольно точку $a_1 \in \Delta \cap \lambda^{-1}\{s_1\}$ и ближайшую к ней точку $b_1 \in \Delta \cap \lambda^{-1}(\tilde{s}_1)$, $x(s_1) = x_1$, $y(\tilde{s}_1) = y_1$.

Произвольный конформный автоморфизм ζ римановой поверхности S может быть продолжен до конформного автоморфизма универсальной накрывающей $\zeta = \lambda^{-1}\tilde{\zeta}\lambda$. Чтобы сделать продолжение автоморфизмов Галуа $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ однозначными, мы потребуем, чтобы соответственно a_1 и b_1 были для них неподвижными точками. Тогда в системе координат с началом в a_1 имеем $\xi\omega = -\omega$, $\xi\eta\omega = \omega + \omega_3$, где $\omega_3 = 2(a_3 - b_3)$.

Лемма 5. *Стационарное распределение для нашей цепи Маркова существует тогда и только тогда, когда существует константа* π_{00} *и функции* $\pi(\omega)$, $\tilde{\pi}(\omega)$, *аналитические в областях* $\lambda^{-1}(D_x) \cap \Delta$ *и* $\lambda^{-1}(D_y) \cap \Delta$ *соответственно, непрерывные на границах этих областей и удовлетворяющие следующим соотношениям*

$$q(\omega)\pi(\omega) + \tilde{\pi}(\omega)\tilde{q}(\omega) + \pi_{00}q_0(\omega) = 0, \tag{6}$$

$$\pi(\xi\omega) = \pi(\omega), \quad \tilde{\pi}(\eta\omega) = \tilde{\pi}(\omega), \tag{7}$$

$$\pi(\omega + \omega_1) = \pi(\omega), \quad \tilde{\pi}(\omega + \omega_1) = \tilde{\pi}(\omega), \tag{8}$$

где

$$q(\omega) = q(x(\omega), y(\omega)), \quad \tilde{q}(\omega) = \tilde{q}(x(\omega), y(\omega)), \tag{9}$$

$$x(\omega) = x(s), \quad y(\omega) = y(s), \quad s = \lambda\omega. \tag{10}$$

При этом решение уравнения (3) *определяется по формулам*

$$\pi(x) = \pi(\omega), \quad x = x(\omega), \quad \tilde{\pi}(y) = \tilde{\pi}(\omega), \quad y = y(\omega), \tag{11}$$

$$\pi(x, y) = \frac{q(x, y)\pi(x) + \tilde{q}(x, y)\tilde{\pi}(y) + \pi_{00}q_0(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{12}$$

Доказательство. Если стационарное распределение существует, то учитывая, что $Q(x(\omega), y(\omega)) \equiv 0$, и определяя $\pi(\omega)$, $\tilde{\pi}(\omega)$ по формулам (11), получаем для них все соотношения (6)—(8).

Докажем обратное утверждение. Мы можем определить $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ по формулам (11). Действительно, в силу неразветвленности накрытия λ и выполнения соотношения (8), мы можем опустить π на S по формуле $\pi(s) = \pi(\omega)$, $s = \lambda\omega$, причем $s \in D_x$, $\pi(s) = \pi(\xi s)$. Но тогда функция $\pi(x) = \pi(s)$, $x = x(s)$, однозначна при $|x| < 1$ (и аналитична). Из доказываемой ниже теоремы 1 следует, что $\pi(\omega)$ (и $\tilde{\pi}(\omega)$) аналитичны в некоторой окрестности $\overline{D}_x(\overline{D}_y)$. Поэтому и $\pi(x)$, $\tilde{\pi}(y)$ аналитичны соответственно при $|x| < 1 + \varepsilon$ и $|y| < 1 + \varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Отсюда в свою очередь следуют два утверждения:

1) Функция $\pi(x, y)$, определенная соотношением (12), аналитична

при $|x|$, $|y| < 1 + \varepsilon$. Это следует из того, что

$$q(x,\ y)\pi(x) + \tilde{q}(x,\ y)\tilde{\pi}(y) + \pi_{00}q_0(x,\ y) = 0 \tag{13}$$

на главном аналитическом множестве $U \subset \{(x,\ y): |x|,\ |y| < 1+\varepsilon\}$ — множестве нулей уравнения $Q(x,\ y) = 0$ (см., например, ([6]), стр. 41, теорема 6), причем выполняется соотношение (3) для $|x|$, $|y| \leqslant 1$.

2) Функции $\pi(x,\ y)$, $\pi(x)$, $\tilde{\pi}(y)$ принадлежат пространству L_1. Далее достаточно применить лемму 1.

Теорема 1. *Пусть заданы функции* $\pi(\omega)$ *и* $\tilde{\pi}(\omega)$, *аналитические соответственно в* $\Delta \cap \lambda^{-1}D_x$ *и* $\Delta \cap \lambda^{-1}D^y$, *непрерывные на границах этих областей, причем выполняются соотношения* (6)—(8). *Тогда они могут быть мероморфно продолжены на всю универсальную накрывающую.*

Доказательство. Далее, там где это не вызывает путаницу, будем применять обозначения D_x, D_y, Γ_0 и т. д. соответственно для $\Delta \cap \lambda^{-1}D_x$, $\Delta \cap \lambda^{-1}D_y$, $\Delta \cap \lambda^{-1}\Gamma_0$ и т. д.

В силу соотношения (6) $\pi(\omega)$ и $\tilde{\pi}(\omega)$ мероморфно продолжаются соответственно на $\bar{\Delta} \setminus D_x$ и $\bar{\Delta} \setminus D_y$, причем в силу условия теоремы 1, они аналитичны в окрестности $\bar{D}_x$ и $\bar{D}_y$ соответственно. Далее доказательство совершенно аналогично доказательству соответствующих теорем об аналитическом продолжении из (7), поэтому мы его опускаем (см., однако, ([1]), стр. 89).

4. Явное представление производящих функций на универсальной накрывающей

В этом пункте нашей задачей будет найти все мероморфные решения уравнения (при условии $\pi(\xi\omega) = \pi(\omega)$, $\tilde{\pi}(\eta\omega) = \tilde{\pi}(\omega)$)

$$q(\omega)\pi(\omega) + \tilde{q}(\omega)\tilde{\pi}(\omega) = 0. \tag{14}$$

Полагая $\pi_1(\omega) = x\pi(\omega)$, $\varphi = \dfrac{x\tilde{q}}{q}$ перепишем (14) в виде

$$\pi_1(\omega) + \varphi(\omega)\tilde{\pi}(\omega) = 0. \tag{15}$$

Достаточно найти одно мероморфное решение $\pi_1(\omega)$ и $\tilde{\pi}_1(\omega)$ уравнения (15). Общее решение (14) тогда запишется в виде

$$\pi(\omega) = x^{-1}\pi_1(\omega)\psi(\omega), \quad \tilde{\pi}(\omega) = \tilde{\pi}_1(\omega)\psi(\omega), \tag{16}$$

где $\psi(\omega)$ — произвольная эллиптическая функция с периодами ω_1 и ω_3, инвариантная относительно ξ (и η).

Лемма 6. *Для любой точки* $p \in \mathfrak{P}_1$ *невозможно, чтобы* $q(s) = \tilde{q}(s) = 0$ *при* $s \in \bar{G} \setminus s_0$, *где* $G = D_x \cap D_y$, $x(s_0) = y(s_0) = 1$.

Доказательство. В $\bar{G}$ ни $\pi(s)$ ни $\tilde{\pi}(s)$ не имеют полюсов. Положим в соотношении (6) $\omega = \lambda^{-1}s$. Тогда либо $\pi_{00} = 0$ либо $q_0(s) = 0$. Но первое невозможно ввиду того, что все состояния сообщаются между собой. Очевидно, что существование стационарного распределения не зависит от выбора $p_{ij}{}^0$. Но их можно выбрать так, чтобы $q_0(s) \neq 0$, что дает противоречие. Лемма доказана.

Замечание 1. Существует непосредственное доказательство, но оно гораздо длиннее.

Выберем направление обхода на Γ_0 так, чтобы изменение $x(s)$ при этом отвечало положительному обходу (против часовой стрелки) по единичной окружности. Остальные кривые $\widetilde{\Gamma}_0$, Γ_1, $\widetilde{\Gamma}_1$ ориентируем гомологично Γ_0.

Лемма 7. *Если* $p_{-1,-1}+p''_{0,-1}\neq 0$, *то существует гладкая замкнутая кривая* $l\in G$ *без самопересечений, гомотопная* Γ_0 (*проходящая через* s_0) *и удовлетворяющая следующим условиям:* 1) $xq\neq 0$ *в* $\bar\Delta_{l1}\setminus\{s_0\}$, $\tilde q\neq 0$ *в* $\bar\Delta_{l2}\setminus\{s_0\}$, *где* Δ_{l1} — *область в* G, *лежащая между* l *и* Γ_0, *а* Δ_{l2} — *между* l *и* $\widetilde{\Gamma}_0$;

2)
$$\operatorname*{ind}_l x\tilde q/q=0.$$

Замечание 2. Если $p_{-1,-1}+p'_{-1,0}\neq 0$, то имеет место симметричным образом формулируемая лемма. При этом вместо функции $\pi_1(s)$ надо ввести функцию $\tilde\pi_1(s)=y\tilde\pi(s)$; все дальнейшее также совершенно симметрично. Если же $p_{-1,-1}=p'_{-1,0}=p''_{0,-1}=0$, то не удовлетворяется условие сообщаемости состояний. Поэтому везде в дальнейшем мы ограничиваемся случаем $p_{-1,-1}+p''_{0,-1}\neq 0$, не оговаривая этого особо.

Доказательство леммы. Имеют место следующие легко проверяемые утверждения:

а) q и $\tilde q$ в точке s_0 имеют нули первого порядка при $M_x<0$, $M_y<0$;

б) при $p\in\mathfrak{R}_1$ $q\neq 0$ на $\Gamma_0\setminus\{s_0\}$ и $\tilde q\neq 0$ на $\widetilde{\Gamma}_0\setminus\{s_0\}$;

в) в $\bar G$ невозможно одновременно $x(s)=\tilde q(s)=0$.

Действительно, $\tilde q(0,y)$ может иметь лишь неотрицательные корни, а $Q(0,y)$ не имеет положительных корней. Иначе говоря, в точке s имеем также $y(s)=0$. Но тогда $0=Q(0,0)=p_{-1,-1}$ и $0=\tilde q(0,0)=p''_{0,-1}$.

Для любой $p_1\in\mathfrak{P}_1$ рассмотрим точку $\bar p\in\mathfrak{P}_1$ с теми же p_{ij} и $p'_{-1,0}=p''_{0,-1}=1$. Так как $q=1-x$ и $\tilde q=1-y$ не имеют нулей в $\bar G\setminus s_0$, то для любой $l\subset\bar G$ и гомологичной Γ_0 имеем (где $\Gamma_{1+\varepsilon}$ — гомологичная Γ_0 кривая $|x|=1+\varepsilon$, $|y|<1$, $0<\varepsilon\ll 1$):
$$\operatorname*{ind}_l\frac{\tilde q}{q}=\operatorname*{ind}_{\Gamma_0}\frac{x\tilde q}{q}-\operatorname*{ind}_{\Gamma_0}x=\operatorname*{ind}_{\Gamma_{1+\varepsilon}}\frac{x\tilde q}{q}-1=-1.\tag{17}$$

Действительно,
$$\operatorname*{ind}_{\Gamma_{1+\varepsilon}}\frac{x\tilde q}{q}=\operatorname*{ind}_{\Gamma_{1+\varepsilon}}x+\operatorname*{ind}_{\Gamma_{1+\varepsilon}}\tilde q-\operatorname*{ind}_{\Gamma_{1+\varepsilon}}q=1+0-1=0.$$

Выберем теперь произвольную точку $p_1\in\mathfrak{P}_1$ с теми же p_{ij} и соединим ее с $\bar p$ простым гладким путем $C\subset\mathfrak{P}_1$, для любой точки p которого p_{ij} остаются неизменными. Для данного $p\in C$ пусть $A(p)$ и $\tilde A(p)$ — множества нулей функций $\dfrac{q(s)}{1-x}$ и $\dfrac{\tilde q(s)}{1-y}$, соответственно, лежащих в $\bar G$ (они совпадают с нулями q и $\tilde q$ соответственно, кроме точки s_0).

Множества $\bigcup\limits_{p\in C} A(p) = A$ и $\bigcup\limits_{p\in C} \tilde{A}(p) = \tilde{A}$ не пересекаются с достаточно малой δ-окрестностью U_δ точки s_0 (так как C замкнуто). Множества $B = (A \cup \tilde{\Gamma}_0) \setminus U_\delta$ и $\tilde{B} = (\tilde{A} \cup \Gamma_0) \setminus U_\delta$ связны и находятся друг от друга на положительном расстоянии ρ. Иначе говоря, нули $\dfrac{q}{1-x} \left(\dfrac{\tilde{q}}{1-y}\right)$ могут входить в $\bar{G}$ только через $\tilde{\Gamma}_0 \setminus U_\delta$ $(\Gamma_0 \setminus U_\delta)$ и изменяются там непрерывно, что следует из рассмотрения соответствующих результантов.

Поэтому существует такая кривая l', гомологичная Γ_0, что $B \subset \bar{\Delta}_{l'2}$, $\tilde{B} \subset \bar{\Delta}_{l'1}$. Функция $\operatorname{ind}\limits_{l'} \tilde{q}/q$ непрерывно зависит от $p \in C$, так как $\tilde{q}/q \neq 0$, ∞, и поэтому, как целочисленная функция, постоянна. Таким образом в силу (17) для всех $p \in C$ $\operatorname{ind}\limits_{l'} \tilde{q}/q = -1$. Очевидно, что можно теперь для точки $p_1 \in C$ деформировать l' так (если нужно), чтобы при деформации не пересекались множества B и $\tilde{B}$, а нули $x(s)$ лежали в области $\bar{\Delta}_{l2}$. Для полученной кривой l имеем $\operatorname{ind}\limits_{l} x\tilde{q}/q = \operatorname{ind}\limits_{l} x - 1 = \operatorname{ind}\limits_{\Gamma_0} x - 1 = 0$, что и доказывает лемму.

Кривая l гомологична одному из элементов нормального базиса гомологий на S. Можно выбрать гладкую замкнутую кривую l_1 без самопересечений, гомологичную другому элементу нормального базиса гомологий на S. Можно предполагать, что l и l_1 пересекаются трансверсально в одной точке, причем $\operatorname{ind}\limits_{l_1} \varphi = 0$.

Тогда множество $\lambda^{-1}(l \cup l_1)$ разбивает универсальную накрывающую $\mathbf{C}$ на открытые фундаментальные области. Рассмотрим одну из них F и обозначим через $a_1, \ldots, a_r$ $(b_1, \ldots, b_r)$ нули (полюса) функции $\varphi(\omega)$, лежащие в F (при этом нуль или полюс кратности i пишется i раз). Тогда можно доказать, что

$$a_1 + \ldots + a_r = b_1 + \ldots + b_r \tag{18}$$

(см. ([8]), стр. 160, формулы (3) — (6)).

Функция $\varphi(\omega)$ может быть представлена тогда в виде бесконечного произведения

$$\varphi(\omega) = c_1 \prod_{m,n=-\infty}^{\infty} \varphi_{mn}(\omega), \tag{19}$$

$$\varphi_{00}(\omega) = \prod_{i=1}^{r} \frac{\omega - a_i}{\omega - b_i},$$

$$\varphi_{mn}(\omega) = \prod_{i=1}^{r} \frac{\left(1 - \dfrac{\omega - a_i}{\bar{\omega}}\right) \exp\left(\dfrac{\omega - a_i}{\bar{\omega}} + \dfrac{(\omega - a_i)^2}{2\bar{\omega}^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{\omega - b_i}{\bar{\omega}}\right) \exp\left(\dfrac{\omega - b_i}{\bar{\omega}} + \dfrac{(\omega - b_i)^2}{2\bar{\omega}^2}\right)} \tag{20}$$

$$\bar{\omega} = m\omega_1 + n\omega_2, \quad (m, n) \neq (0, 0),$$

(см. ([8]), стр. 182). Произведение (19) сходится абсолютно для всех ω, если исключить сомножители, равные в этой точке нулю или ∞. Это следует из возможности представления

$$\left(1-\frac{z}{\bar\omega}\right)\exp\left(\frac{z}{\bar\omega}+\frac{z^2}{2\bar\omega^2}\right)=1-\frac{z^3}{3\bar\omega^3}+\ldots.$$

Обозначим через L_+ компоненту множества $\mathbf{C}\setminus l$, содержащую $\widetilde{\Gamma}_1$, а через L — компоненту, содержащую Γ_1. Можно считать, что точки $a_i+\bar\omega$, $b_i+\bar\omega\in L_+$ при $n\geqslant 0$, $F\subset L_+$, $F\cap\Delta\neq 0$.

Для $k\geqslant 0$ введем индуктивно последовательности функций

$$\overset{2k+1}{\varphi_{mn}}(\omega)=\overset{2k}{\varphi_{mn}}(\xi\omega),\qquad \overset{2k+2}{\varphi_{mn}}(\omega)=\overset{2k+1}{\varphi_{mn}}(\eta\omega),$$

причем $\varphi^0_{mn}(\omega)=\varphi_{mn}(\omega)$ при $n\geqslant 0$ и $\varphi^0_{mn}(\omega)=[\varphi_{mn}(\eta\omega)]^{-1}$ при $n<0$.

Используя (18), можно переписать (20) следующим образом

$$\varphi_{mn}(\omega)=\prod_{i=1}^{r}\frac{\bar\omega-\omega+a_i}{\bar\omega-\omega+b_i}\exp\left(\frac{a_i^2-b_i^2}{2\bar\omega^2}\right).$$

Кроме того, легко видеть, что при $n\geqslant 0$

$$\varphi^{2k}_{mn}(\omega)=\varphi_{mn}((\xi\eta)^k\omega)=\varphi_{mn}(\omega+k\omega_3),$$

$$\overset{2k+1}{\varphi_{mn}}(\omega)=\varphi_{mn}((\xi\eta)^k\xi\omega)=\varphi_{mn}(-\omega+k\omega_3),$$

а при $n<0$

$$\overset{2k}{\varphi_{mn}}(\omega)=\varphi_{mn}(-\omega-(k+1)\omega_3),\qquad \overset{2k+1}{\varphi_{mn}}(\omega)=\varphi_{mn}(\omega-(k+1)\omega_3).$$

Вводя обозначение $\bar\omega_k=\bar\omega-k\omega_3$, из последних формул имеем для $k\geqslant 1$, $n\geqslant 0$

$$\begin{aligned}\overset{2k}{\varphi_{mn}}(\omega)\overset{2k-1}{\varphi_{-m,-n}}(\omega)&=\prod_{i=1}^{r}\frac{\bar\omega_k-\omega+a_i}{\bar\omega_k-\omega+b_i}\,\frac{-\bar\omega_k+\omega+b_i}{-\bar\omega_k+\omega+a_i},\\ \overset{2k+1}{\varphi_{mn}}(\omega)\overset{2k-2}{\varphi_{-m,-n}}(\omega)&=\prod_{i=1}^{r}\frac{\bar\omega_k+\omega+a_i}{\bar\omega_k+\omega+b_i}\,\frac{-\bar\omega_k+\omega+b_i}{-\bar\omega_k+\omega+a_i}.\end{aligned}\tag{21}$$

Если $\bar\omega_k=0$, то $\overset{2k}{\varphi_{mn}}\overset{2k-1}{\varphi_{-m,-n}}\overset{2k+1}{\varphi_{mn}}\overset{2(k-1)}{\varphi_{-m,-n}}=1\overset{\text{def}}{=}\overset{k}{\psi_{mn}}$. Далее будем предполагать, что $\bar\omega_k\neq 0$. Функции (21) можно разложить *) в ряд по степеням $\dfrac{1}{\bar\omega_k}$.

*) При фиксированном ω для всех кроме конечного числа $\varphi_{mn}{}^k$.

Используя (18), легко убедиться, что

$$\overset{2k}{\varphi}_{mn}\overset{2k-1}{\varphi}_{-m,-n}=1+\frac{1}{\overline{\omega}_k^3}(c_2+c_3\omega)+\ldots,\quad \overset{2k+1}{\varphi}_{mn}\overset{2k-2}{\varphi}_{-m,-n}=1+\frac{1}{\overline{\omega}_k^3}(c_2-c_3\omega)+\ldots,$$

где c_2 и c_3 — некоторые многочлены от a_i и b_i. Обозначим для $k\geqslant 1$, $n\geqslant 1$, $\omega_k\neq 0$:

$$\psi_{mn}{}^k(\omega)=\left(1-\frac{2c_2}{\overline{\omega}_k^3}\right)\overset{2k}{\varphi}_{mn}\overset{2k+1}{\varphi}_{mn}\overset{2k-1}{\varphi}_{-m,-n}\overset{2k-2}{\varphi}_{-m,-n}.$$

Теорема 2. *Функции*

$$\pi_1(\omega)=\prod_{\substack{m\\ k,n\geqslant 1}}\psi_{mn}{}^k\prod_{\substack{m\\ n\geqslant 1}}\varphi_{mn}{}^0\varphi_{mn}{}^1\prod_{\substack{m\\ k\geqslant 0}}\varphi_{m0}{}^k \tag{22}$$

и

$$\tilde{\pi}_1(\omega)=-\frac{\pi_1(\omega)}{\varphi(\omega)}$$

являются мероморфными решениями (15), *причем все произведения в* (22) *сходятся абсолютно в любой точке* ω, *если отбросить конечное число сомножителей, равных в этой точке* 0 *или* ∞. *Кроме того, выполняются соотношения*

$$\pi_1(\omega)=\pi_1(\xi\omega)=\pi_1(\omega+\omega_1),\ \tilde{\pi}_1(\omega)=\tilde{\pi}_1(\eta\omega)=\tilde{\pi}_1(\omega+\omega_1). \tag{23}$$

Доказательство. Последние два произведения в формуле (22) сходятся абсолютно. Для доказательства абсолютной сходимости первого достаточно доказать абсолютную сходимость ряда

$$\sum_{m,n,k}\frac{1}{\overline{\omega}_k^{\,i}}\qquad i\geqslant 4.$$

Но в наших обозначениях $\omega_3=r_1\omega_1+r_2\omega_2$, где $r_1,\ r_2\in\mathbf{R}$, $r_2<0$. Поэтому этот ряд сходится абсолютно. Остальные утверждения теоремы очевидны. Например, для всех m, n, k $\psi_{mn}^k(\omega)=\psi_{mn}^k(\xi\omega)$.

2. Произвольное мероморфное решение уравнения (6), удовлетворяющее соотношениям (7) и (8), может быть представлено в виде

$$\pi(\omega)=\frac{\pi_1(\omega)\,(r(\omega)+a(\omega))}{x(\omega)},\qquad \tilde{\pi}(\omega)=\tilde{\pi}_1(\omega)\,(\tilde{r}_1(\omega)+a(\omega)), \tag{24}$$

где $\pi_1(\omega)$, $\tilde{\pi}_1(\omega)$ определены в теореме 2, $a(\omega)$ — произвольная эллиптическая функция с периодами ω_1 и ω_3, инвариантная относительно ξ и η, а $r(\omega)$, $\tilde{r}(\omega)$ удовлетворяют соотношениям

$$r(\omega)-\tilde{r}(\omega)=-\frac{\pi_{00}x(\omega)\,q_0(\omega)}{q(\omega)\,\pi_1(\omega)}\overset{\text{def}}{=}\theta(\omega), \tag{25}$$

$$r(\omega)=r(\xi\omega)=r(\omega+\omega_1),\ \tilde{r}(\omega)=\tilde{r}(\eta\omega)=\tilde{r}(\omega+\omega_1).$$

Переходим к нахождению $r(\omega)$ и $\tilde{r}(\omega)$.

Рассмотрим отрезок l' кривой l, заключенный между точками ω_0 и ω_0+

$+\omega_1 \in l$. Пусть $U_\varepsilon(\omega)$ — круговая ε-окрестность точки ω. Положим $l_\varepsilon = l' - [U_\varepsilon(\omega_0) \cup U_\varepsilon(\omega_0+\omega_1)]$. Далее под $\int\limits_l$ будем понимать $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{l_\varepsilon}$.

Пусть $c_4 = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_l \theta(\tau)\,d\tau$. Перепишем уравнение (25) следующим образом

$$r(\omega) - (\tilde r(\omega) + c_4) = \theta(\omega) - c_4. \tag{26}$$

Лемма 8. *Существуют такие мероморфные на универсальной накрывающей функции* $\theta_+(\omega)$ *и* $\theta_-(\omega)$, *что*

а) $\theta_+(\omega)$ *аналитична в* $\bar L_+$, $\theta_-(\omega)$ *аналитична в* $\bar L_-$,

б) $-\theta_+(\omega) + \theta_-(\omega) = \theta(\omega) - c_4$,

в) *существуют такие константы* $A>0$ *и* $B>0$, *что*

$$|\theta_+(\omega)| \leqslant Ae^{-B(r_2)},\quad |\theta_-(\omega)| \leqslant Ae^{-B|r_2|}$$

соответственно при $\omega = r_1\omega_1 + r_2\omega_2 \in L_+$ *и* $\omega \in L_-$, $r_1, r_2 \in R$.

Доказательство. Положим

$$\theta_\pm(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_l (\theta(\tau) - c_4)\,\frac{e^{\frac{2\pi i\tau}{\omega_1}}\,d\tau}{e^{\frac{2\pi i\tau}{\omega_1}} - e^{\frac{2\pi i\omega}{\omega_1}}} \tag{27}$$

соответственно при $\omega \in L_-$ и $\omega \in L_-$. Легко показать, что обе эти функции мероморфно продолжаются соответственно в L_- и L_+ (перенося кривую интегрирования параллельно соответственно в L_- или L_+).

Выполнение соотношения б) на l доказывается с помощью формул Сохоцкого, а свойства а) и в) очевидны. Лемма доказана.

Так же как и выше, введем индуктивно следующие последовательности функций, $k \geqslant 0$,

$$\theta_-^0(\omega) = \theta_-(\omega),\quad \theta_-^{2k+1}(\omega) = \theta_-^{2k}(\xi\omega),\quad \theta_-^{2k+2}(\omega) = \theta_-^{2k+1}(\eta\omega);$$

$$\theta_+^0(\omega) = \theta_+(\omega),\quad \theta_+^{2k+1}(\omega) = \theta_+^{2k}(\eta\omega),\quad \theta_+^{2k+2}(\omega) = \theta_+^{2k+1}(\xi\omega).$$

Теорема 3. *Производящие функции стационарного распределения* $\pi(\omega)$ *и* $\tilde\pi(\omega)$ *с точностью до постоянного множителя определяются формулами* (24), *где*

$$\begin{aligned} r(\omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} \theta_-^k(\omega) - \sum_{k=1}^{\infty} \theta_+^k(\omega),\\ \tilde r(\omega) &= -c_4 + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_-^k(\omega) - \sum_{k=0}^{\infty} \theta_+^k(\omega). \end{aligned} \tag{28}$$

При этом все ряды в (28) *сходятся абсолютно, если для данной точки* ω *исключить члены с полюсами в этой точке.*

Функция $a(\omega)$ при этом подбирается так, чтобы $\pi(\omega)$ и $\tilde{\pi}(\omega)$ были аналитичны соответственно в $\bar{D}_x$ и $\bar{D}_y$, причем при заданном π_{00} такая $a(\omega)$ существует и единственна.

Доказательство. Абсолютная сходимость рядов в (28) следует из условия в) леммы 8, если заметить, что, например,

$$\theta_+^{2k}(\omega) = \theta_-(\omega + k\omega_3), \qquad \theta_-^{2k+1}(\omega) = \theta_-(-\omega + k\omega_3).$$

Выполнение соотношений (25) проверяется очевидным образом. Последнее утверждение теоремы следует из леммы 5.

Мы не будем приводить здесь достаточно простой алгоритм построения $a(\omega)$, основанный на следующей важной лемме.

Определение. *Группу $\mathfrak{H}$ автоморфизмов универсальной накрывающей, порожденную ξ и η (с выбранными выше неподвижными точками), назовем группой случайного блуждания.*

Орбитой точки ω_0 назовем множество $\mathfrak{H}\omega_0 = \{\omega : \omega = h\omega_0,\ h \in \mathfrak{H}\}$. Орбита $\mathfrak{H}\omega$ может быть упорядочена следующим образом:

$$\ldots\ \xi\eta\omega < \eta\omega < \omega < \xi\omega < \eta\xi\omega < \ldots .$$

При другом выборе точки ω порядок может измениться на противоположный, но понятие отрезка остается инвариантным (условимся считать точки a_1 и ξa_1 различными также как и b_1 и ηb_1).

Лемма 9. *Пересечение орбиты $\mathfrak{H}\omega$ и $\bar{\Delta}$ образует отрезок, оба конца которого принадлежат $\bar{\Delta} \setminus \bar{G}$, а остальные точки (если они есть) принадлежат $\bar{G}$.*

Для доказательства достаточно заметить, что если, например, $\omega \in \bar{G}$, $\xi\omega \in \bar{D} \setminus \bar{G}$, то точки $\eta\xi\omega$, $\xi\eta\xi\omega, \ldots$ и т. д. не принадлежат $\bar{\Delta}$.

5. Интегральное представление стационарных вероятностей

Здесь мы получим основное для дальнейшего асимптотического исследования представление для стационарных вероятностей π_{ij}, i, $j \geqslant 1$. Нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 10. *Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ $Q(x, y) \neq 0$ при $1 < |x|$, $|y| \leqslant 1 + \varepsilon$.*

Доказательство. В окрестности окружности $|x| = 1$ комплексной плоскости C_x переменной x существуют две ветви функции $y(x) : y_0(x)$ и $y_1(x)$ такие, что $|y_1(x)| > 1$ при $|x| = 1$, $y_0(1) = 1$, $|y_0(x)| < 1$ для $|x| = 1$, $x \neq 1$. Это следует из результатов раздела 2. Достаточно доказать, таким образом, что $|y_0(x)| < 1$ при $|x| = 1 + \varepsilon$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Но это легко следует из того, что $|y_0(x)| < 1$ при $|x| = 1$, $x \neq 1$ и неравенства

$$\left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=y=1} = -\frac{M_y}{M_x} < 0.$$

Рассмотрим две кривые $\Gamma_{1+\varepsilon}$ и $\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}$ на S, определяемые следующим образом: $\Gamma_{1+\varepsilon} = \{s : |x(s)| = 1 + \varepsilon,\ |y(s)| > 1\}$, $\tilde{\Gamma}_{1+\varepsilon} = \{s : |y(s)| = 1 + \varepsilon,$

$|x(s)|>1\}$. Мы ориентируем $\Gamma_{1+\varepsilon}$ и $\widetilde{\Gamma}_{1+\varepsilon}$ гомологично Γ_0, Γ_1 и т. д., ориентацию которых мы выбрали перед леммой 7. Иначе говоря, при положительном обходе по $\Gamma_{1+\varepsilon}(\widetilde{\Gamma}_{1+\varepsilon})$ изменение $x(y)$ отвечает отрицательному (положительному) обходу по окружности $|x|=1+\varepsilon$ $(|y|=1+\varepsilon)$.

Мы будем пользоваться следующими очевидными обозначениями

$$Q(x, y)=a(x)y^2+b(x)y+c(x)=\tilde{a}(y)x^2+\tilde{b}(y)x+\tilde{c}(y).$$

В дальнейшем двумерное комплексное линейное пространство $\mathbf{C}^2$ с координатами (x, y) будем считать канонически вложенным в двумерное комплексное проективное пространство $\mathbf{P}^2$ с однородными координатами (x', y', z') так, что (x, y) отождествляется с (x', y', z') при $z'\neq 0$, $x=\dfrac{x'}{z'}$, $y=\dfrac{y'}{z'}$.

Введем открытую связную область

$$R=\{(x, y): 1+\varepsilon/2<|x|<1+3\varepsilon/2,\ 1<|y|<\infty\}\subset \mathbf{C}^2.$$

Выше было отмечено, что $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ продолжаются в некоторую окрестность единичного круга. Будем считать в дальнейшем, что $\varepsilon>0$ выбрано так, что $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ аналитичны соответственно при $|x|<1+2\varepsilon$ и $|y|<1+2\varepsilon$, что $y(x)=\infty$ при $1<|x|<1+2\varepsilon$ и что выполнены условия леммы 10 для числа 2ε. Рассмотрим также открытую связную область R' — достаточно малую окрестность множества

$$R\cup\{(0, y')\}\subset \mathbf{P}^2.$$

Аффинная алгебраическая кривая S, определенная уравнением $Q(x, y)=0$, не имеет особенностей в $\mathbf{C}^2$. Имеет место

$$R\cap S=R'\cap S\subset R\subset R'\subset \mathbf{P}^2,$$

где все эти множества являются комплексными аналитическими многообразиями.

Рассмотрим форму

$$\gamma=\frac{\pi(x)\,q(x, y)}{Q(x, y)\,x^m y^n}\,dx\wedge dy$$

на R. Она голоморфна на $R\setminus(R\cap S)$ и имеет полярную особенность первого порядка на $R\cap S$ (по поводу используемой здесь и далее терминологии см. ([9]), стр. 493—500).

Ее форма — вычет на $R\cap S$ равна

$$\operatorname{res}\gamma=-\frac{\pi(x)\,q(x, y)\,dx}{\dfrac{\partial Q}{\partial y}\,x^m y^n}=-\frac{\pi(x)\,q(x, y)\,dx}{(2a(x)\,y+b(x))\,x^m y^n}.$$

Форма γ для $m, n\geqslant 1$ голоморфна также и на $R'\setminus(R\cap S)$, что легко проверяется, если ввести координаты $x_1=x$, $y_1=1/y=z'/y'$.

Используя соотношение (3) и тот факт, что $\pi(x, y)$ аналитична при $|x|$, $|y|\leqslant 1+2\varepsilon$ можно следующим образом преобразовать формулу

Коши для вероятностей π_{mn}, $m, n \geqslant 1$:

$$\pi_{mn} = \frac{1}{(2\pi i)} \oint\oint_{|x|=|y|=1+\varepsilon} \frac{\pi(x,y)}{x^m y^n}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\oint_{|x|=|y|=1+\varepsilon} \frac{q\pi + \tilde{q}\tilde{\pi} + \pi_{00} q_0}{Q x^m y^n}\, dx\, dy = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

ввиду леммы 10, где

$$\mathrm{I} = \frac{1}{(2\pi i)} \oint\oint_{|x|=|y|=1+\varepsilon} \frac{q(x,y)\pi(x)}{Q(x,y)x^m y^n}\, dx\, dy,$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\oint \frac{\tilde{q}\tilde{\pi}}{Q x^m y^n}\, dx\, dy, \qquad \mathrm{III} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\oint \frac{\pi_{00} q_0}{Q x^m y^n}\, dx\, dy.$$

Теорема 4. *При* $m, n \geqslant 1$

$$\pi_{mn} = A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}} + A_{\mathrm{III}},$$

где

$$A_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\Gamma_1} \frac{q(s)\pi(s)\, d\omega}{x^m y^n}, \quad A_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\tilde{\Gamma}_1} \frac{\widetilde{q}\widetilde{\pi}\, d\omega}{x^m y^n},$$

$$A_{\mathrm{III}} = \frac{\pi_{00}}{2\pi i} \int_{-\Gamma_1} \frac{q_0 d\omega}{x^m y^n}$$

и

$$d\omega = \frac{dx}{2a(x)y + b(x)}.$$

Доказательство. Пусть δ — кограничный оператор Лере. Рассмотрим границу трубчатой окрестности кривой $\Gamma_{1+\varepsilon}$ (построение см. стр. 496, ([9])):

$$\delta\Gamma_{1+\varepsilon} = \bigcup_{s \in \Gamma_{1+\varepsilon}} \delta s.$$

В нашем случае точка s однозначно определяется значениями $x(s)$ и $y(s)$. Тогда можно считать, что δs есть кривая $|y - y(s)| = \varepsilon_1$ в одномерном проективном пространстве $\mathbf{P}(s) \subset \mathbf{P}^2$, определенном уравнением $x' - x(s)z' = 0$. При этом δs ориентирована так, чтобы при обходе (в плоскости y) область $|y - y(s)| < s_1$ лежала слева. В $\mathbf{P}(s)$ с выкинутой областью $|y| \leqslant 1$ и точкой $y(s)$ цикл δs гомологичен циклу $|y| = 1 + \varepsilon$ с отрицательным направлением обхода. Отсюда следует, что двумерные циклы $\delta\Gamma_{1+\varepsilon}$ и $|x| = |y| = 1 + \varepsilon$ гомологичны в $R' \setminus (R \cap S)$ (если выбрать ε и ε_1 соответствующим образом). При этом, если учесть выбранную ранее ориентацию $\Gamma_{1+\varepsilon}$, то цикл $|x| = |y| = 1 + \varepsilon$ имеет каноническую ориентацию.

По теореме Лере (([9]), стр. 497) получаем

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\delta\Gamma_{1+\varepsilon}} \gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \operatorname{res} \gamma \equiv A_{\mathrm{I}}.$$

Но тогда по теореме Коши — Пуанкаре

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\delta\Gamma} \gamma = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|x|=|y|=1+\varepsilon} \gamma \equiv \mathrm{I}$$

т. е. $A_{\mathrm{I}} = \mathrm{I}$. Остальные равенства доказываются аналогично.

На римановой поверхности S существует единственный с точностью до постоянного множителя абелев дифференциал первого рода (см. ([1]), стр. 127), равный

$$d\omega = \frac{dx}{2a(x)y + b(x)} = -\frac{dy}{2\tilde{a}(y)x + \tilde{b}(y)}. \quad {*)}$$

Чтобы не делать в дальнейшем различия между интегрированием на S и по естественной мере $d\omega$ на универсальной накрывающей, мы будем считать далее по определению, что

$$\int\limits_{\Gamma_0} d\omega = \omega_1, \qquad \int\limits_{F_0} d\omega = \omega_2,$$

где F_0 — другой элемент нормального базиса гомологий на S, ориентацию которого мы здесь уточнять не будем.

Мы здесь воспользовались также аналитичностью $\dfrac{q\pi\, d\omega}{x^m y^n}$ при $1 < |x| < 1 + \varepsilon$, $|y| \geqslant 1$ и теоремой Коши на S, чтобы заключить, что

$$\int\limits_{\Gamma} \operatorname{res} \gamma = \int\limits_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \operatorname{res} \gamma.$$

З а м е ч а н и е 1. Для выполнения равенства $A_{\mathrm{III}} = \mathrm{III}$ надо предположить, что $p_{ij}{}^0 = 0$ при $i > 1$ либо $j > 1$. Но нам далее понадобится теорема 4 лишь для достаточно больших m, n, поэтому мы не делаем здесь этого предположения.

З а м е ч а н и е 2. Существует доказательство теоремы 4, не использующее теории вычетов Лере, но оно более громоздкое.

Поступила в редакцию
31 мая 1971 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] М а л ы ш е в В. А., Случайные блуждания. Уравнения Винера — Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа. Изд. МГУ, М., 1970.

[2] М а л ы ш е в В. А., Классификация двумерных положительных случайных блужданий и почти линейные полумартингалы, Докл. АН СССР, 202, № 3 (1972), 526—528.

[3] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Основы алгебраической геометрии, Успехи матем. наук, 24, № 6 (1969), 3—184.

[4] В а р ч е н к о А. Н., Теорема об эквисингулярности семейств алгебраических многообразий, Успехи матем. наук, 26, № 1 (1971), 217—218.

[5] С п р и н г е р Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, Изд-во иностр. лит., М., 1960.

[6] Э р в е М., Функции многих комплексных переменных, «Мир», М., 1965.

[7] М а л ы ш е в В. А., Уравнения Винера — Хопфа в четверти плоскости, дискретные группы и автоморфные функции, Матем. сб., 84, № 4 (1971), 499—525.

[8] Г у р в и ц А., К у р а н т Р., Теория функций, «Наука», М., 1968.

[9] Ш а б а т Б. В., Введение в комплексный анализ, «Наука», М., 1969.

*) Так как $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{Q_x'}{Q_y'} = -\dfrac{2\tilde{a}(y)x + \tilde{b}(y)}{2a(x)y + b(x)}$.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XIV

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1973

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XIV, № 1 Январь — Февраль 1973

УДК 519.217

В. А. МАЛЫШЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

§ 1. Введение

Данная работа является непосредственным продолжением работы ([1]), терминология и обозначения которой сохраняются.

Мы будем рассматривать здесь случайные блуждания из множества $\mathfrak{P}_1$ пространства параметров, причем везде будет дополнительно предполагаться (если не оговорено противное), что блуждание внутри четверти-плоскости простое, т. е. $p_{11}=p_{1,-1}=p_{-1,1}=p_{-1,-1}=0$. Это предположение не влияет на основные идеи и делается ради сокращения вычислений.

Общая схема работы такова. Для нахождения асимптотики π_{mn} внутри квадранта используется представление π_{mn} в виде интеграла по одномерному циклу на основной римановой поверхности S. При этом подинтегральное выражение имеет классический характер для применения метода перевала. Одним из основных пунктов является доказательство того, что этот цикл можно деформировать так, чтобы он проходил через точку перевала, а в остальном лежал ниже ее уровня. Это делается в § 2 с помощью исследования вещественной римановой поверхности и структурной устойчивости линий уровня некоторых функций Морса на S. При деформации цикла (§ 4), однако, могут встретиться полюса подинтегрального выражения. Если этого нет, то асимптотика определяется вкладом точки перевала (§ 3), в противном случае вкладом полюсов (§ 5). Основная теорема формулируется в § 6. Там же дано качественное описание асимптотического поведения в некоторой аналогии с языком теории турбулентности. В § 7 рассмотрено блуждание без соскока с границ.

§ 2. Линии уровня функции $|x^m y^n|$ на римановой поверхности

Сначала мы приведем дополнительные нужные нам результаты об алгебраических функциях $y(x)$, $x(y)$ и римановой поверхности S.

1. Точки ветвления. Точки ветвления $y(x)$ и $x(y)$ все положительны. Они обозначаются соответственно $x_1<x_2<x_3<x_4$ и $y_1<y_2<$ $<y_3<y_4$. Самая нужная нам в дальнейшем точка ветвления x_3 (и y_3).

Ее явный вид:

$$x_3=\frac{1}{2p_{10}}\left(1-2\sqrt{p_{01}p_{0,-1}}+\sqrt{1-4\sqrt{p_{01}p_{0,-1}}+4p_{01}p_{0,-1}-4p_{10}p_{-1,0}}\right)$$

2. Вещественные точки римановой поверхности. Точку $s\in S$ будем называть вещественной, если $x(s)$, $y(s)$ вещественны либо равны ∞. Через S_r обозначим множество вещественных точек S.

Лемма 1. *S_r состоит из двух непересекающихся аналитических простых (без самопересечений) замкнутых кривых, гомологичных одному из элементов нормального базиса гомологий на S (отличному от Γ_0).*

Доказательство. В окрестности произвольной точки $s\in S$ одна из функций x, y, $1/x$ или $1/y$ является униформизующей переменной. Пусть, например, такой является x, причем s вещественна. Тогда в достаточно малой окрестности s множество вещественных точек является аналитической дугой. Отсюда следует аналитичность и отсутствие каких бы то ни было пересечений. Так как S_r замкнуто в S, то отсюда следует и замкнутость этих кривых.

Заметим теперь, что значения $y(x)$ вещественны при $x_2\leqslant x\leqslant x_3$, так как $y(1)$ вещественны. Но $y(x_1)$ и $y(x_4)$ также вещественны, причем из отсутствия пересечений следует, что $y(x)$ невещественны при $x_1<x<x_2$ и $x_3<x<x_4$. Поэтому из аналитичности следует, что значения $y(x)$ вещественны при $x<x_1$ и $x_4<x$. Из построения римановой поверхности $y(x)$ следует теперь последнее утверждение леммы.

Компоненту S_r, где $x_2\leqslant x(s)\leqslant x_3$, обозначим через F_0, а другую через F_1. Заметим, что при $s\in F_0$ также и $0<y_2\leqslant y(s)\leqslant y_3$.

3. Критические точки функции x^my^n *на* S. Обозначим $\alpha=n/m$; ввиду симметрии задачи достаточно ограничиться случаем $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Удобно ввести функцию $\chi_\alpha(s)=|xy^\alpha|:S\to[0,\infty]$. Ниже будет доказано, что все критические точки $\chi_\alpha(s)$ на $\chi_\alpha^{-1}(0,\infty)$ в смысле теории Морса, ([2])) являются изолированными и невырожденными, а следовательно, имеют индекс 1 (в силу принципа максимума модуля).

При $\alpha=0$ критические точки $|x|$ будут обозначаться $s_i(0)$, $i=1,\ldots,4$, так что в них $x(s_i(0))=x_i$. Заметим, что $s_3(0)\in\bar\Delta$, так как $x_3>1$ и $y(x_3)=\sqrt{p_{0,-1}/p_{0,1}}>1$.

Лемма 2. *При $0\leqslant\alpha<1$ функция χ_α на $\chi_\alpha^{-1}(0,\infty)$ имеет четыре различные невырожденные критические точки, обозначаемые $s_i(\alpha)$, $i=1,\ldots,4$. Любая $s_i(\alpha)$ непрерывно зависит от α, что единственным образом определяет обозначения, если учесть определение $s_i(0)$. Кроме того, $s_2(\alpha)$, $s_3(\alpha)\in F_0$, а $s_1(\alpha)$, $s_4(\alpha)\in F_1$ и $s_2(\alpha)\in\Delta$, $s_3(\alpha)\in S\setminus\bar\Delta$, причем значения $x_i(\alpha)=x(s_i(\alpha))$, $y_i(\alpha)=y(s_i(\alpha))$ вещественны.*

При $\alpha=1$ можно считать, что $s_1(\alpha)=0$, $s_4(\alpha)=\infty$ и существует только две критические точки в нашем смысле, $s_2(1)$ и $s_3(1)$, удовлетворяющих вышеприведенным условиям.

Доказательство. Пусть сначала $0\leqslant\alpha<1$. Орбиту, состоящую из точек $(0,0)$, $(0,\infty)$, $(\infty,0)$, (∞,∞) по определению можно сразу исключить из рассмотрения (далее мы не будем это оговаривать особо).

В любой локальной окрестности либо x либо y являются униформизующими переменными. Альтернативные уравнения для определения критических точек следующие:

$$(xy^{\alpha})_x{}' = y^{\alpha-1}\left(y + \alpha x\frac{dy}{dx}\right) = 0, \qquad \alpha \neq 0,$$

$$(xy^{\alpha})_y{}' = y^{\alpha-1}\left(y\frac{dx}{dy} + \alpha x\right) = 0.$$

Они эквивалентны и сводятся к виду

$$\frac{y}{\alpha x} = -\frac{dy}{dx} = -\frac{p_{-1,0}/x^2 - p_{1,0}}{p_{0,1} - p_{0,-1}/y^2}$$

или

$$\alpha p_{-1,\,0}/x - \alpha p_{1,\,0}x = -p_{0,\,1}y + p_{0,\,-1}/y. \tag{1}$$

Из (1) и уравнения $Q(x, y) = 0$ получим следующую систему

$$p_{1,0}(1+\alpha)x + \frac{p_{-1,0}}{x}(1-\alpha) - 1 = -\frac{2p_{0,-1}}{y},$$

$$p_{10}(1-\alpha)x + \frac{p_{-1,0}}{x}(1+\alpha) - 1 = -2p_{01}y. \tag{2}$$

Корни $x_i(\alpha)$ и $y_i(\alpha)$ этих уравнений непрерывно зависят от α. Поэтому $s_2(\alpha)$, $s_3(\alpha) \in F_0$, $s_1(\alpha)$, $s_4(\alpha) \in F_1$, так как это, очевидно, имеет место для $\alpha = 0$.

Докажем, что $s_2(\alpha) \neq s_3(\alpha)$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Действительно, $s_3(0) \overline{\in} \bar{\Delta}$. При непрерывном изменении α $s_3(\alpha)$ может войти в $\bar{\Delta}$ лишь через точки $(x, y) = \left(\frac{p_{-1,0}}{p_{1,0}}, 1\right) \in \tilde{\Gamma}_1$ и $\left(1, \frac{p_{0,-1}}{p_{0,1}}\right) \in \Gamma_1$, так как $x(s)$, $y(s) > 0$ на F_0. Но точки $\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{1,0}}, 1\right)$ и $\left(1, \frac{p_{0,-1}}{p_{0,1}}\right)$ могут являться корнями (1) лишь при $\alpha < 0$. Таким образом $s_3(\alpha) \in S \setminus \bar{\Delta}$. Аналогично доказывается, что $s_2(\alpha) \in \Delta$.

Докажем теперь, что $0 < x_1(\alpha) \leqslant x_1$. Это следует из того, что $x_1(\alpha)$, $y_1(\alpha) \neq 0, \infty$ при $0 \leqslant \alpha < 1$, что видно из уравнения четвертой степени для $x_i(\alpha)$. Аналогично $x_4 \leqslant x_4(\alpha) < \infty$. Поэтому при непрерывном изменении α $s_i(\alpha)$ не могут совпасть. Отсюда следует и их невырожденность.

Случай $\alpha = 1$ рассмотрим отдельно. Обозначим $v(s) = xy$. Две критические точки (отличные от $x_1(1) = y_1(1) = 0$ и $x_4(1) = y_4(1) = \infty$) определяются из уравнений (2) при $\alpha = 1$ или из уравнения

$$4p_{1,\,0}p_{0,\,1}v^2 - v(1 - 4p_{1,\,0}p_{-1,\,0} - 4p_{0,\,1}p_{0,\,-1}) + 4p_{0,\,-1}p_{-1,\,0} = 0. \tag{3}$$

Лемма доказана.

4. Критические значения. Критическими значениями будем называть значения $\chi_\alpha(s_i(\alpha))$, $i = 1, \ldots, 4$.

Лемма 3. *Для любого α, $0 \leqslant \alpha < 1$, все четыре критические значения различны.*

Доказательство. Докажем сначала, что $\chi_\alpha(s_2(\alpha)) < \chi_\alpha(s_3(\alpha))$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Для $\alpha = 0$, 1 это очевидно. Рассмотрим отрезок F_2 на F_0, который принадлежит Δ и расположен между точками $s_2(0)$ и $s_2(1)$. Докажем, что $s_2(\alpha) \in F_2$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, причем

$$x_2(0) < x_2(\alpha) < x_2(1),\ y_2(0) = \sqrt{p_{0,-1} / p_{0,1}} > y_2(\alpha) > y_2(1), \tag{4}$$
$$0 < \alpha < 1.$$

Действительно, $y_2(\alpha) = \sqrt{p_{0,-1}/p_{0,1}}$ лишь при $\alpha = 0$, что непосредственно видно из уравнения (1) (не может быть одновременно $y = \pm\sqrt{p_{0,-1}/p_{0,1}}$ и $x = \pm\sqrt{p_{-1,0}/p_{1,0}}$). Аналогично, $\alpha = 1$ является единственным значением α, при котором $x_2(\alpha) = x_2(1)$, $y_2(\alpha) = y_2(1)$, что легко следует из системы (2). То, что $x_2(0) < x_2(1)$ очевидно, а то, что $y_2(0) > y_2(1)$ легко следует из того, что ветвь функции $v(x)$ на F_2 убывает до v_2 (мы будем обозначать корни уравнения (3) через v_2 и v_3, $v_2 < v_3$) при возрастании x, а следовательно, и соответствующая ветвь $y(x) = v/x$ убывает.

Аналогично показывается, что $s_3(\alpha) \in F_3 \subset F_0$, где F_3 — отрезок, заключенный между $s_3(0)$ и $s_3(1)$ и что

$$x_3(1) < x_3(\alpha) < x_3(0),\ y_3(0) = \sqrt{p_{0,-1}/p_{0,1}} < y_3(\alpha) < y_3(1), \tag{5}$$
$$0 < \alpha < 1.$$

Но

$$x_2(1) < x_3(1). \tag{6}$$

Действительно, если $x_2(1) \geqslant x_3(1)$, то существует такое значение $\alpha \leqslant 1$, что $x_2(\alpha) = x_3(\alpha)$. Но это невозможно ввиду уравнений (2) и того, что $y_2(\alpha) \neq y_3(\alpha)$.

Из неравенств (4) — (6) следует теперь, что $\chi_\alpha(s_2(\alpha)) < \chi_\alpha(s_3(\alpha))$ для всех α.

Аналогично доказывается, что $\chi_\alpha(s_1(\alpha)) < \chi_\alpha(s_2(\alpha))$ и $\chi_\alpha(s_3(\alpha)) < < \chi_\alpha(s_4(\alpha))$.

5. Устойчивость линий уровня.

Лемма 4. *Для любых α, β, $0 \leqslant \alpha$, $\beta < 1$ существуют такие гомеоморфизмы $f_{\alpha\beta}$: $S \to S$ и $g_{\alpha\beta} : [0, \infty] \to [0, \infty]$, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\chi_\alpha} & [0, \infty] \\ {\scriptstyle f_{\alpha\beta}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_{\alpha\beta}} \\ S & \xrightarrow{\chi_\beta} & [0, \infty] \end{array}$$

коммутативна.

Это свойство называется структурной устойчивостью линий уровня (см., например, ([3])). Доказывается лемма 4 так же, как и теорема 1 из ([3]), если учесть леммы 2 и 3. Различие состоит в следующем. Удобно вместо функции $\chi_\alpha(s)$ рассмотреть функцию $\tilde{\chi}_\alpha(s) = {}_{\pi}\ \mathrm{Arc\,tg}\,\chi_\alpha(s) : S \to \to [0, 1]$. Она недифференцируема в точках $\tilde{\chi}_\alpha^{-1}(\{0, 1\})$, от чего можно избавиться сглаживанием. Получающиеся при этом новые критические точки (максимумы и минимумы) сохраняются при возмущении, что и дает доказательство.

Мы выделим следующее утверждение

Следствие 1. *Для любого* α, $0 \leqslant \alpha < 1$, *множество* $D_\chi = \{s : \chi_\alpha(s) < \chi\}$ *гомеоморфно* D_x *при* $\chi = \chi_\alpha(s_3(\alpha)) - \varepsilon$ *для достаточно малого* $\varepsilon > 0$, *а* $\overline{D}_{\chi(s_3(\alpha))}$ *гомеоморфно* $\overline{D}_x$ *с отождествленными точками* $(1, 1)$ *и* $(1, p_{0,-1}/p_{0,1})$, *причем при этом гомеоморфизме эти отождествленные точки переходят в точку* $s_3(\alpha)$.

§ 3. Локальный аспект метода перевала на S

Будем считать далее, что $0 < \alpha \leqslant 1$. Рассмотрим достаточно малую окрестность $U \subset S$ точки $s_3(\alpha)$. Линии уровня $\chi_\alpha(s)$ пересекаются в точке $s_3(\alpha)$ ортогонально, разделяя U на четыре сектора, так как невырожденная критическая точка $s_3(\alpha)$ имеет индекс 1. Обозначим $D_\alpha^- = D_{\chi_\alpha(s_3(\alpha))}$, $D_\alpha^+ = S \setminus D_\alpha^-$. Пусть $E_x^\alpha(E_y^\alpha)$ — объединение компонент открытого множества $D_\alpha^- - \bar{\Delta}$, граница каждой из которых пересекается с $\Gamma_1(\widetilde{\Gamma}_1)$. Ясно, что $E_x^\alpha \cap E_y^\alpha = 0$ (по-видимому, E_x^α и E_y^α всегда связны, но это для нас неважно). Если из границы D_α^- (или D_α^+) выбросить точку $s_3(\alpha)$, то она окажется состоящей из двух связных гладких дуг, обозначаемых Γ_x^α и Γ_y^α так, чтобы Γ_x^α пересекалась с границей E_x^α.

Заметим, что $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ были определены ранее на $\overline{D}_x$ и $\overline{D}_y$ соответственно. С помощью основной теоремы об аналитическом продолжении ([1], теорема 1) легко видеть, что их можно считать мероморфными в некоторой окрестности множеств $\bar{\Delta} \cup \overline{E}_x^\alpha$ и $\bar{\Delta} \cup \overline{E}_y^\alpha$ соответственно. В частности, отсюда они оказываются определенными (мероморфными) в U.

Рассмотрим гладкую дугу Γ_u в $U \cap \overline{D}_\alpha^+$, проходящую через $s_3(\alpha)$ и такую, что ее образ $x(\Gamma_u)$ на плоскости x является прямым отрезком, перпендикулярным вещественной оси и ориентированным в направлении возрастания мнимой части.

Рассмотрим выражение

$$A_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_u} \frac{q(s)\pi(s) + \tilde{q}(s)\tilde{\pi}(s) + \pi_{00}q_0(s)}{x^m y^n}\, d\omega, \tag{7}$$

называемое вкладом точки перевала, причем будем предполагать выполненным следующее условие:

A) $g(s) = q(s)\pi(s) + \tilde{q}(s)\tilde{\pi}(s) + \pi_{00}q_0(s) \neq \infty$ в точке $s = s_3(\alpha)$.

Ввиду свободы выбора U можно считать также, что $q\pi + \tilde{q}\tilde{\pi} + \pi_{00}q_0 \neq \infty$ в U. Следует заметить, что ввиду нашего определения $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ в U последнее выражение не равно тождественно нулю в U.

Выражение (7) имеет типичный вид для применения локальной техники метода перевала (см., например, [4]).

Лемма 5. *При* $m \to \infty$, $n/m \to \alpha$, *если* $q\pi + \tilde{q}\tilde{\pi} + \pi_{00}q_0 \neq 0, \infty$ *в точке* $s = s_3(\alpha)$, *то*

$$A_\alpha \sim c_1 \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{x_3^m(\alpha) y_3^n(\alpha)}, \tag{8}$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{g(s_3(\alpha))}{2a(x_3(\alpha))y_3(\alpha) + b(x_3(\alpha))} \cdot \frac{1}{\left| \dfrac{d^2(xy^\alpha)}{dx^2}(s_3(\alpha)) \right|^{1/2}}. \tag{9}$$

Если же $g(s) = 0$ *в точке* $s_3(\alpha)$, *то либо*

$$A_\alpha \sim \frac{c_2}{\sqrt{m}} \frac{1}{m^k} \frac{1}{x_3{}^m(\alpha)\, y_3{}^n(\alpha)}, \tag{10}$$

либо

$$A_\alpha \leqslant \frac{1}{m^k} \frac{1}{x_3{}^m(\alpha)\, y_3{}^n(\alpha)} \quad \text{для любого } k > 0, \tag{11}$$

причем последний случай имеет место тогда и только тогда, когда в разложении (в $x(U)$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \tau^n = \tilde{g}(x(\tau))\, x'(\tau), \tag{12}$$

где $\tilde{g}(x) = \dfrac{g(x)}{2a(x)y + b(x)}$, *а* $x(\tau)$ *определяется из уравнения*

$$\tau^2 = \ln xy^\alpha - \ln \chi_\alpha(x_3(\alpha)),$$

все коэффициенты d_n *с четными индексами равны нулю.*

В первом же случае k *равно наименьшему отличному от нуля четному числу* n *в разложении* (12).

Доказательство. Сразу получается, если заменить $\int\limits_{\Gamma_u} [\cdot]\, d\omega$ на $\int\limits_{x(\Gamma_u)} [\cdot] \dfrac{dx}{2a(x)y + b(x)}$ и использовать теорему 1, стр. 448–449, (4).

Случай, когда имеет место (11), будем называть квазирациональным (при $\alpha = 0$ ему соответствует рациональность $\pi(x)$). При этом, как мы покажем в следующем параграфе, интегральное представление π_{mn} вырождается.

§ 4. Глобальный аспект метода перевала на S

Пусть $\widetilde{\Gamma}_x{}^\alpha$ и $\widetilde{\Gamma}_y{}^\alpha \subset D_\alpha{}^+ \cup \{s_3(\alpha)\}$ — кусочно-гладкие кривые без самопересечений, проходящие через $s_3(\alpha)$, гомологичные Γ_0 и лежащие в достаточно малой окрестности $\Gamma_x{}^\alpha$ или $\Gamma_y{}^\alpha$ соответственно. Можно считать, что $\widetilde{\Gamma}_x{}^\alpha \cap U = \widetilde{\Gamma}_y{}^\alpha \cap U = \Gamma_U$.

Мы будем пользоваться теоремой 4 из (1).

Сдвигая контур интегрирования с Γ_1 на $\Gamma_x{}^\alpha$ и учитывая встретившиеся полюса, получим

$$A_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\widetilde{\Gamma}_x{}^\alpha} \frac{q(s)\,\pi(s)\, d\omega}{x^m y^n} + \sum_{s \in E^\alpha \cup \Gamma_x{}^\alpha} \operatorname{res} \left[\frac{q\pi\, d\omega}{x^m y^n} \right], \tag{13}$$

где под $\sum\limits_{s \in B} \operatorname{res}_s[\cdot]$ понимается сумма вычетов стоящего в скобках мероморфного дифференциала в множестве B. Для подсчета вычетов удобно перейти на плоскость x, учитывая ветвь $y(x)$, например,

$$\sum_{s \in E_x^\alpha} \operatorname{res}_s \left[\frac{q\pi d\omega}{x^m y^n} \right] = \sum_{x \in x(E_x^\alpha)} \operatorname{res}_x \left[\frac{q\pi(x)}{x^m y^n (2a(x)\, y + b(x))} \right]. \tag{14}$$

О п р е д е л е н и е. *Для данных параметров* $p \in \mathfrak{P}_1$ *и* α *асимптотика* π_{mn} *называется рациональной, если в множестве* E_x^α *есть полюса функции* $q(s)\pi(s)$ *или в* E_y^α *есть полюса функции* $\tilde{q}\tilde{\pi}$.

Л е м м а 6. *Если асимптотика* π_{mn} *не является рациональной, то (при* $m \to \infty$, $n/m \to \alpha$) *она определяется вкладом точки перевала, т. е. по формулам* (8) *или* (10) *или* (11).

Если же асимптотика является рациональной, то для некоторого $\varepsilon > 0$ *существует* $s_j \in F_0$, *что*

$$\pi_{mn} = c_3 \frac{1}{x^m(s_j)\, y^n(s_j)} + O\left(\frac{1}{(\chi_\alpha(s_j) + \varepsilon)^m} \right), \tag{15}$$

где

$$c_3 = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{|x^m(s_i)\, y^n(s_i)|}{x^m(s_i)\, y^n(s_i)}, \qquad a_i = \begin{cases} \operatorname{res}_{s_i}[q\pi d\omega], & i = 1, \ldots, k, \\ \operatorname{res}_{s_i}[\tilde{q}\tilde{\pi} d\omega], & i = k+1, \ldots, N, \end{cases}$$

а точки $s_1, \ldots, s_k \in E_x^\alpha$, $s_{k+1}, \ldots, s_N \in E_y^\alpha$ *таковы, что* $\chi_\alpha(s_i) = \chi_\alpha(s_j)$ *являются полюсами* $q\pi$ $(\tilde{q}\tilde{\pi})$, *причем в* E_x^α (E_y^α) *не существует полюса* s *функции* $q\pi$ $(\tilde{q}\tilde{\pi})$ *такого, что* $\chi_\alpha(s) < \chi_\alpha(s_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала полюса $q\pi$ и $\tilde{q}\tilde{\pi}$ отсутствуют соответственно в областях $\bar{E}_x^\alpha$ и $\bar{E}_y^\alpha$. Тогда, используя формулу (13), а также аналогичные формулы для A_{III} и A_{II} (при переносе контура интегрирования из $-\tilde{\Gamma}_1$ в $-\tilde{\Gamma}_y^\alpha$), получаем первое утверждение как следствие леммы 5. Пусть теперь возможны полюса $q\pi$ на Γ_x^α и $\tilde{q}\tilde{\pi}$ на Γ_y^α. Асимптотика суммы вычетов в этих полюсах имеет вид

$$B_{mn} = \sum_{s_i \in \Gamma_x^\alpha} \frac{a_i}{x^m(s_i)\, y^n(s_i)} + \sum_{s_j \in \Gamma_y^\alpha} \frac{b_i}{x^m(s_j)\, y^n(s_j)}$$

для некоторых констант a_i, b_i. Но $x(s_i)$, $y(s_i)$ не могут быть одновременно положительными при $s_i \neq s_3(\alpha)$. Тогда можно показать (например, так же в ([5])), что для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ можно выбрать подпоследовательность m_k, n_k такую, что $B_{m_k, n_k} = r_k e^{i\varphi_k}$, где $r_k \sim \dfrac{1}{\chi_\alpha^{m_k}(s_3(\alpha))}$, $\varepsilon < \varphi_k < 2\pi - \varepsilon$. Учитывая (8), получаем противоречие положительности π_{mn}, т. е. все a_i и b_i равны нулю. Первое утверждение леммы полностью доказано.

Для доказательства второго нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 7. *Если* $1 < \chi_\alpha(s) < \chi_\alpha(s_3(\alpha))$ *и* $x(s)$, $y(s) > 0$, *то* $s \in F_0$. *Любая связная линия уровня* $\chi_\alpha(s)$, *пересекающаяся с* $E_x{}^\alpha$ *или с* $E_y{}^\alpha$, *имеет с* F_0 не более одной точки пересечения.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $s \overline{\in} F_0$. Тогда либо $0 < x(s) < x_1$, либо $x_4 < x(s) < \infty$. Но при этом как легко видеть $y(s) < 0$, что приводит к противоречию. Второе утверждение следует из результатов § 2.

Переходим к доказательству второго утверждения леммы 6. Рассмотрим точки $s_1, \ldots, s_k \in E_x{}^\alpha$, $s_{k+1}, \ldots, s_N \in E_y{}^\alpha$ с равными значениями $\chi_\alpha(s_i)$ и такие, что $q(s_i)\pi(s_i) = \infty$, $i = 1, \ldots, k$, $\tilde{q}(s_i)\tilde{\pi}(s_i) = \infty$, $s_i = k+1, \ldots, N$. Докажем, что существует такой индекс j, $1 \leqslant j \leqslant N$, что $x(s_j)$, $y(s_j) > 0$, т. е. $s_j \in F_0$ по лемме 7. Действительно, в противном случае можно было бы считать, что либо $k = 0$, либо $N - k = 0$, чего можно добиться шевелением коэффициентов $q(x, y)$ или $\tilde{q}(x, y)$. Последнее следует из доказываемой ниже леммы 8 и того, что при достаточно малом шевелении полюса будут сдвигаться, но не исчезать (аналитическая зависимость числителей правых частей (18) и (19) от p'_{ij}, и p''_{ij}, см. ([6])). Пусть, например, $N - k = 0$. Тогда

$$\pi_{mn} \sim \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{x^m(s_i)\, y^n(s_i)}, \qquad c_i = \operatorname{res}_{s_i}[q\pi\, d\omega]. \tag{16}$$

Если не все c_i равны нулю, то так же как при доказательстве первого утверждения леммы, мы получаем противоречие с положительностью π_{mn}.

Случай равенства всех c_i нулю можно опять таки устранить достаточно малым шевелением коэффициентов q, $\tilde{q}$, q_0. Лемма 6 доказана.

В заключение этого параграфа покажем, что в случае квазирациональности интегральное представление π_{mn} вырождается.

Преобразуем выражение для π_{mn} следующим образом (при очевидном выборе ветвей $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ с помощью основной теоремы об аналитическом продолжении):

$$\pi_{mn} = \sum_{s \in E_x{}^\alpha} \operatorname{res}_s\left[\frac{q\pi d\omega}{x^m y^n}\right] + \sum_{s \in E_y{}^\alpha} \operatorname{res}_s\left[\frac{\tilde{q}\tilde{\pi} dw}{x^m y^n}\right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{(-\Gamma_x{}^\alpha) \cup (-\Gamma_y{}^\alpha)} \frac{q\pi + \tilde{q}\tilde{\pi} + q_0\pi_{00}}{x^m y^n}\, d\omega + \frac{1}{2} \sum_{s \in \bar{D}_\alpha^+} \operatorname{res}_s\left[\frac{q\pi + \tilde{q}\tilde{\pi}}{x^m y^n}\, d\omega\right] \tag{17}$$

(без ущерба для общности можно считать, что $q\pi + \tilde{q}\tilde{\pi} + \pi_{00}q_0 \neq \infty$ на $\Gamma_x{}^\alpha \cup \Gamma_y{}^\alpha$).

При преобразовании $\tau \to -\tau$ обе связные компоненты множества $\Gamma_x{}^\alpha \cap U$ переходят в соответствующие компоненты множества $\Gamma_y{}^\alpha \cap U$, причем $\tilde{g}(x(\tau))x'(\tau) = -\tilde{g}(x(-\tau))x'(-\tau)$. Отсюда посредством аналитического продолжения это свойство распространяется на всю кривую $\Gamma_x{}^\alpha$ (ввиду аналитичности $\Gamma_x{}^\alpha$, $\Gamma_y{}^\alpha$ и $\tilde{g}(x(\tau))x'(\tau)$). Получающееся взаимнооднозначное соответствие $s \to s'$ между $\Gamma_x{}^\alpha$ и $\Gamma_y{}^\alpha$ таково, что $\operatorname{Arg} x(s) =$

$= \operatorname{Arg} x(s')$, $\operatorname{Arg} y(s) = \operatorname{Arg} y(s')$. Поэтому интеграл в формуле (17) равен нулю, что и требовалось доказать.

§ 5. Области рациональной и нерациональной асимптотики

Здесь мы полностью исследуем области рациональной и нерациональной асимптотики и уточним асимптотические представления леммы 6.

Рассмотрим снова вещественный овал $F_0 \subset S$. Перенумеруем для удобства некоторые точки на нем:

$$s_0 = (1, 1),\ s_1 = (\sqrt{p_{0,-1} / p_{0,1}},\ y_2),\ s_2 = (p_{0,-1} / p_{0,1},\ 1),$$

$$s_3 = (x_3,\ \sqrt{p_{-1,0} / p_{1,0}}),\quad s_4 = (p_{0,-1} / p_{0,1},\ p_{-1,0} / p_{1,0}),$$

$$s_5 = (\sqrt{p_{0,-1} / p_{0,1}},\ y_3),\ s_6 = (1,\ p_{-1,0} / p_{1,0}),$$

$$s_7 = (x_2,\ \sqrt{p_{-1,0} / p_{1,0}}).$$

Будем считать F_0 вполне упорядоченным множеством в направлении возрастания индексов s_i с наименьшей точкой s_0. Тогда можно говорить о направленных отрезках $(s', s'') \subset F_0$, $s_0 \leqslant s' < s''$ (s'' может равняться s_0).

Лемма 8. *Для того чтобы асимптотика π_{mn} была рациональной, необходимо, чтобы $q(s) = 0$ при некотором $s \in (s_0, \xi s_3(\alpha))$ либо $\tilde{q}(s) = 0$ при некотором $s \in (\eta s_3(\alpha), s_0)$.*

Доказательство. Пусть асимптотика рациональна. Тогда из леммы 5 следует, что существует либо полюс s функции $q\pi$, принадлежащий $E_x^{\alpha} \cap F_0 = (s_3(\alpha), s_6)$, либо полюс $\tilde{q}\tilde{\pi}$, принадлежащий $E_y^{\alpha} \cap F_0 = (s_2, s_3(\alpha))$. В первом случае мы докажем более сильное утверждение:

Если $\xi s \in (s_0, s_2]$, то $q(\xi s) = 0$. Если же $\xi s \in (s_2, \xi s_3(\alpha))$, то выполняется по крайней мере одно из двух равенств $q(\xi s) = 0$ или $\tilde{q}(\eta\xi s) = 0$, $\eta\xi s \in (\eta\xi s_3(\alpha), s_0)$.

Пусть сначала $\xi s \in (s_0, s_2]$. Тогда

$$\pi(\xi s) = \frac{-\tilde{q}(\xi s)\tilde{\pi}(\xi s) - \pi_{00}q_0(\xi s)}{q(\xi s)}, \tag{18}$$

и так как $\xi s \in D_y$, то $\tilde{\pi}(\xi s) \neq \infty$ и $q(\xi s)$ должно равняться нулю. Пусть теперь $s \in (s_3(\alpha), s_4)$. Тогда в точке ξs

$$\pi = \frac{\tilde{q}q_\eta\pi_\eta - \pi_{00}q_0\tilde{q}_\eta + \pi_{00}q_{0\eta}\tilde{q}}{q\tilde{q}_\eta}, \tag{19}$$

и так как $\pi(\eta\xi s) \neq \infty$, то утверждение доказано.

Аналогично доказывается симметричное утверждение.

Пусть существует полюс функции $\tilde{q}\tilde{\pi}$ в точке $s \in (s_2, s_3(\alpha)) \subset E_y^{\alpha} \cap F_0$. Тогда если $\eta s \in [s_6, s_0)$, то $\tilde{q}(\eta s) = 0$. Если же $\eta s \in (\eta s_3(\alpha), s_6)$, то выполняется по крайней мере одно из двух равенств $\tilde{q}(\eta s) = 0$ или $q(\xi\eta s) = 0$, $\xi\eta s \in (s_0, \xi\eta s_3(\alpha))$.

Лемма 9. *q имеет нуль на отрезке $(s_0, \xi s_3(\alpha)) \subset F_0$ тогда и только тогда, когда $q(x_3(\alpha), \xi y_3(\alpha)) < 0$. Аналогично, $\tilde{q}$ имеет нуль на отрезке $(\eta s_3(\alpha), s_0)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{q}(\eta x_3(\alpha), y_3(\alpha)) < 0$, причем нули q и $\tilde{q}$ на этих отрезках единственны и имеют первый порядок.*

Доказательство. Рассмотрим симплекс $\mathfrak{P}' = \{p_{i,j}': \sum p_{i,j}' = 1, p_{i,j}' \geqslant 0\}$. Докажем, что $q(s)$ не может иметь на отрезке (s_0, s_3) корней кратности большей 1 ни для какой точки $p' \in \mathfrak{P}'$. Рассмотрим для этого систему уравнений

$$q(s) = 0, \tag{20}$$
$$q_x'(s) = \frac{dy}{dx}(p_{-1,1}' + p_{0,1}'x + p_{1,1}'x^2) + (p_{0,1}' + 2p_{1,1}'x)\,y + 2p_{1,0}'x - 1 = 0.$$

Эта система определяет точки, где q имеет корни кратности большей 1, и является линейной системой в $\mathfrak{P}'$ (параметры $p_{i,j}$ мы далее фиксируем). Пусть такая точка на (s_0, s_3) существует. Тогда линейное многообразие (20) пересекает симплекс $\mathfrak{P}'$. Будем двигать точку по направлению к s_3; так как $\frac{dy}{dx} \to \infty$ при $s \to s_3$, то из второго уравнения следует, что существует последняя точка в (s_0, s_3), для которой еще выполняется (20). Из соображений размерности тогда следует, что это последнее линейное многообразие (20) должно пересекаться с гранью $\mathfrak{P}'$ такой, где только два параметра $p_{i,j}'$ могут быть отличны от нуля. Таким образом, мы свели задачу к случаю, когда только две вероятности $p_{i,j}'$ отличны от нуля. Проверка же для этого случая носит вычислительный характер и мы ее опускаем.

Из доказанного утверждения следует, что корни q могут войти или выйти из $(s_0, \xi s_3(\alpha))$ только через точки s_0 или $\xi s_3(\alpha)$. Но точка s_0 исключается ввиду того, что при $M_x M_y' - M_y M_x' < 0$ всегда корень q в s_0 имеет первый порядок. Таким образом, число корней в области $\mathfrak{P}_-' \subset \mathfrak{P}'$ (или $\mathfrak{P}_+' \subset \mathfrak{P}'$), ограниченной гиперплоскостью, где $q(\xi s_3(\alpha)) < 0$ (или $q(\xi s_3(\alpha)) > 0$), постоянно. Рассматривая какой-либо частный случай (например, когда $p_{1,1}' = p_{0,1}' = p_{-1,1}' = 0$), убеждаемся в справедливости леммы 9.

Наша цель теперь доказать утверждение, обратное лемме 8. Для этого введем дополнительное условие:

В) Пусть корень $s \in E_x^\alpha \cap F_0(E_y^\alpha \cap F_0)$ функции $q(\tilde{q})$ таков, что в E_x^α и E_y^α нет корней q и $\tilde{q}$ соответственно, лежащих ниже уровня $\chi_\alpha(s)$. Тогда в $E_x^\alpha(E_y^\alpha)$ нет корней $q(\tilde{q})$ отличных от s, лежащих на той же линии уровня $\chi_\alpha(s)$.

Это условие легко проверяется в каждом конкретном случае и, по-видимому, выполняется всегда. Так как оно не носит принципиального характера, мы не доказываем это.

Для данного α рассмотрим область $\mathfrak{P}_1'(\alpha) \subset \mathfrak{P}_1$ такую, где $q(\xi s_3(\alpha)) < 0$, т. е. существует корень s функции q на $(s_0, s_3(\alpha))$ и, если существует корень $\tilde{s}$ функции $\tilde{q}$ на $(\eta s_3(\alpha), s_0)$, то $\chi_\alpha(s) < \chi_\alpha(\tilde{s})$. Аналогично определяется область $\mathfrak{P}_1''(\alpha) \subset \mathfrak{P}_1$ с заменой q на $\tilde{q}$ и т. д. Пусть $\mathfrak{P}_1^{\text{н}} \subset \mathfrak{P}_1$ — множество, где $q(\xi s_3(\alpha)) < 0$, $\tilde{q}(\xi s_3(\alpha)) < 0$ и для корней $s \in (s_0, \xi s_3(\alpha))$, $\tilde{s} \in (\eta s_3(\alpha), s_0)$ функций q и $\tilde{q}$ соответственно имеет место $\chi_\alpha(s) = \chi_\alpha(\tilde{s})$.

Лемма 10. *Пусть с обеих границ есть соскок, т. е.* $(p_{1,1}' + p_{0,1}' + p_{-1,1}')(p_{1,1}'' + p_{1,0}'' + p_{1,-1}'') \neq 0$. *Тогда при* $p \in \mathfrak{P}_1'(\alpha)$ *существует полюс* $q\pi$ *в точке* ξs, *если* $q(s) = 0$, $s \in (s_0, \xi s_3(\alpha))$. *Аналогичное условие* *выполняется для* $p \in \mathfrak{P}_1''(\alpha)$, *а для* $p \in \mathfrak{P}_1^{\text{н}}(\alpha)$ *функции* $q\pi$ *и* $\tilde{q}\tilde{\pi}$ *имеют полюс в точках* s *и* $\tilde{s}$ *соответственно, если* $q(s) = \tilde{q}(\tilde{s}) = 0$, $s \in (s_0, \xi s_3(\alpha))$, $\tilde{s} \in (\eta s_3(\alpha), s_0)$.

Доказательство. Мы докажем первое утверждение, остальные доказываются аналогично.

Покажем сначала, что $q(\xi s) \neq 0$. Но уравнение $q(s) = 0$ можно переписать в виде $y = P(x)$, где $P(x)$ — рациональная функция от x (если $p_{11}' + p_{01}' + p_{-1,1}' \neq 0$). Тогда из $q(s) = q(\xi s) = 0$ следовало бы, что $y = \xi y$, но на $(s_0, \xi s_3(\alpha))$ нет неподвижных точек относительно ξ.

Ввиду этого достаточно доказать, что функция π имеет полюс в точке s.

Мы сначала покажем, что для данной $p \in \mathfrak{P}_1$ всегда можно изменить параметры p_{ij}^0, не выходя из $\mathfrak{P}_1$, так, что это свойство будет выполняться.

Действительно

$$\pi(s) = \frac{-\tilde{q}(s)\tilde{\pi}(s) - \pi_{00}q_0(s)}{q(s)}. \tag{21}$$

Пусть сначала $s \in (s_0, s_2)$. Тогда $\tilde{\pi}(s) > 0$ и так как $x(s) > 1$, $y(s) < 1$, то q_0 всегда можно выбрать так, чтобы знак $q_0(s)$ совпал со знаком $\tilde{q}(s)$. Отсюда и следует искомое утверждение. Если $s = s_2$, то $\tilde{q}(s_2)$, $\tilde{\pi}(s_2) > 0$ и следует положить $q_0 = x - 1$.

Пусть теперь $s \in (s_2, \xi s_3(\alpha))$. Так как $\tilde{q}$ не имеет нулей на (s_7, s_0), то $\tilde{q}_\eta(s) < 0$. Поэтому второй член в числителе правой части (19), $(-\pi_{00}\tilde{q}_\eta q_0)$, всегда положителен. Выбирая $q_0 = x^N - 1$, докажем, что при достаточно больших N этот член становится больше, чем сумма остальных. Для этого достаточно показать, что $\pi(\eta s) / \pi_{00}$ остается ограниченным. Но это сразу следует из интегрального представления для $\pi(s)$, ([6]).

Для доказательства того, что это имеет место в действительности для всех $p_{i,j}^0$, введем следующее обозначение: ${}_\beta p_{\gamma\delta}^*$ — математическое ожидание числа попаданий в состояние δ до того момента, пока марковская цепь, выходящая из состояния γ, не попадает в состояние β. Известно, что

$${}_\beta p_{\beta\delta}^* = \pi_\delta / \pi_\beta, \quad \beta = (0, 0), \quad \delta \neq (0, 0) \tag{22}$$

(см., например ([7]), стр. 81). В то же время для любых двух состояний $\gamma_1 \neq \beta$ и $\gamma_2 \neq \beta$ существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что

$$c_1 < {}_\beta p_{\gamma_1\delta}^* / {}_\beta p_{\gamma_2\delta}^* < c_2. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что если $q_0 = 1 - x^i y^j$, то для любых ij $(p \in \mathfrak{P}_1)$ и i', j' отношение соответствующих стационарных вероятностей удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon_1 < \pi_{mn} / \pi_{mn}' < \varepsilon_2 \tag{24}$$

для некоторых констант $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Но в то же время если $\pi(s) \neq \infty$, то асимптотика π_{mn} будет определяться полюсами или критической точкой, лежащими выше уровня $\chi_\alpha(s)$, что противоречит (24). Лемма доказана.

Лемма 11. $p \in \mathfrak{P}_1'(\alpha) \cup \mathfrak{P}_1''(\alpha) \cup \mathfrak{P}_1^{\text{н}}(\alpha)$ *тогда и только тогда, когда асимптотика* π_{mn} *рациональна.*

Доказательство. Было дано по существу в начале доказательства леммы 10.

§ 6. Основная теорема

Здесь мы сформулируем окончательное утверждение об асимптотическом поведении π_{mn} и обсудим его «физический» смысл.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha \leqslant 1$, $\sum\limits_i p_{i1}' \sum\limits_j p_{1j}'' \neq 0$. *Тогда, если*

$$q(x_3(\alpha), \xi y_3(\alpha)) > 0, \quad \tilde{q}(\eta x_3(\alpha), y_3(\alpha)) > 0, \tag{25}$$

то

$$\pi_{mn} \sim \frac{c_1}{\sqrt{m}} \frac{1}{x_3{}^m(\alpha)\, y_3{}^n(\alpha)},$$

где $x_3(\alpha)$, $y_3(\alpha)$ *определяются из уравнений* (2), *а* c_1 *находится по формуле* (9).

Если либо $q\left(x_3(\alpha), \dfrac{p_{0,-1}}{p_{0,1}y_3(\alpha)}\right) < 0$, *либо* $\tilde{q}\left(\dfrac{p_{-1,0}}{p_{1,0}x_3(\alpha)}, \quad y_3(\alpha)\right) < 0$ *и выполняется условие* B), *то*

$$\pi_{mn} \sim \begin{cases} c_2 x_0^{-m}(\alpha)\, y_0^{-n}(\alpha), & p \in \mathfrak{P}_1', \\ c_3 \tilde{x}_0^{-m}(\alpha)\, \tilde{y}_0^{-n}(\alpha), & p \in \mathfrak{P}_1'', \\ c_2 x_0^{-m}(\alpha)\, y_0^{-n}(\alpha) + c_3 \tilde{x}_0^{-m}(\alpha)\, \tilde{y}_0^{-n}(\alpha), & p \in \mathfrak{P}_1^{\text{н}}, \end{cases}$$

где $1 < x_0(\alpha) < x_3(\alpha)$, $1 < y_0(\alpha) < \dfrac{p_{0,-1}}{p_{0,1}y_3(\alpha)}$ *и* $1 < \tilde{x}_0(\alpha) < \dfrac{p_{-1,0}}{p_{1,0}x_3(\alpha)}$, $1 < \tilde{y}_0(\alpha) < y_3(\alpha)$ *определяются из системы уравнений*

$$Q(x, y) = 0, \quad q(x, y) = 0$$

или

$$Q(x, y) = 0, \quad \tilde{q}(x, y) = 0$$

соответственно, а константы c_2 *и* c_3 *по формулам*

$$c_2 = \operatorname{res}_{x_0}\left[\frac{q(x, y(x))\,\pi(x)}{2a(x)\,y(x) + b(x)}\right], \quad c_3 = \operatorname{res}_{\tilde{y}_0}\left[\frac{\tilde{q}(x(y), y)\,\tilde{\pi}(y)\cdot}{2\tilde{a}(y)\,x(y) + \tilde{b}(y)}\right].$$

Доказательство. Случай рациональной асимптотики был полностью разобран в предыдущем параграфе. В случае нерациональной асимптотики нам надо лишь доказать, что $g(s_3(\alpha)) \neq 0$ (в соответствии с леммой 5). Имеет место даже $q(s_3(\alpha))\pi(s_3(\alpha))$, $\tilde{q}(s_3(\alpha))\tilde{\pi}(s_3(\alpha))$, $q_0(s_3(\alpha)) > 0$. Докажем лишь первое неравенство, остальные доказываются аналогично.

Согласно условию $q(s_3(\alpha)) > 0$, а $\pi(s_3(\alpha)) > 0$, так как в круге $|x| < x_3(\alpha)\,\pi(x)$ не имеет особых точек. Теорема доказана.

В соответствии с характером данной работы мы не рассматривали менее принципиальные вопросы асимптотики π_{mn}. Сделаем несколько замечаний по этому поводу.

а). Мы предполагали (условие A)), что $g(s_3(\alpha)) \neq \infty$. Рассмотрение этого случая (т. е. когда $q(\xi s_3(\alpha)) = 0$ или $\tilde{q}(\eta s_3(\alpha)) = 0$) привносит дополнительно чисто локальную задачу, когда точка перевала лежит рядом с полюсом. Эта задача решена (см., например, [8])).

b). Об условии B) уже было сказано выше.

c). Мы не выписывали асимптотического разложения (в нерациональном случае) и не давали следующего члена асимптотики в рациональном случае, что может быть легко сделано в каждом конкретном случае.

d). Вычисление констант c_1, c_2, c_3 носит совсем другой характер. Здесь они выражены через значения $\pi(x)$, $\tilde{\pi}(y)$ в точках $x_0(\alpha)$, $x_3(\alpha)$, $y_0(\alpha)$ и т. д. Для этих значений существуют разные методы вычисления (см. ([1, 6])). Существуют случаи, когда они могут быть вычислены проще (случайное блуждание с косым отражением, см. ([6])), но этот факт, по-видимому, носит чисто арифметический характер.

Значения $x_0(\alpha)$, $y_0(\alpha)$, $x_3(\alpha)$, $y_3(\alpha)$, $\tilde{x}_0(\alpha)$, $\tilde{y}_0(\alpha)$ имеют четкий вероятностный смысл. Например, для нерациональной асимптотики

$$x_3(\alpha) = \lim_{m/n\to\alpha} \pi_{m,n}/\pi_{m+1,n} = \lim_{m/n\to\alpha} {}_{(m+1,n)}\dot{p}_{(m+1,n),(m,n)}.$$

Перейдем теперь к выяснению «физического» смысла полученных результатов. Мы будем говорить на языке теории турбулентности (не придавая здесь серьезного смысла этой аналогии). Можно представлять себе, что движение отмеченной частицы определяется случайным полем скоростей (о постановке подобной задачи в реальном случае см., например, ([9])). Нас интересует зависимость движения этой частицы (т. е. в данном случае зависимость π_{mn}) от возмущений поля скоростей на границах, имея в виду, что турбулентность определяется в частности неустойчивостью при возмущении граничных условий.

Тогда область $\mathfrak{P}_1'$ естественно назвать областью неустойчивости по границе x, $\mathfrak{P}_1''$ — областью неустойчивости по границе y, $\mathfrak{P}_1^{\text{н}}$ — областью неустойчивости по обеим границам, $\mathfrak{P}_1 \setminus \overline{(\mathfrak{P}_1' \cup \mathfrak{P}_1'' \cup \mathfrak{P}_1^{\text{н}})}$ — областью устойчивости (имея в виду, что $a^n b^m$ при больших n, m может сильно меняться при малом изменении a или b). Весьма показательная картина наблюдается также при фиксированных $p_{i,j}$, $p_{i,j}'$, $p_{i,j}''$ и переменном α. Типичная картина такова: при $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ область устойчивости, а при $0 \leqslant \alpha < \alpha_1$ и $\alpha_2 < \alpha \leqslant \infty$ — области неустойчивости по соответствующей границе.

Границу множества устойчивости (или неустойчивости) естественно назвать *поверхностью Рейнольдса.* При фиксированных α и $p_{i,j}$ она представляет собой объединение двух линейных гиперплоскостей $q(\xi s_3(\alpha)) = 0$ и $\tilde{q}(\eta s_3(\alpha)) = 0$.

Переход от устойчивости к неустойчивости геометрически наглядно определяется движением корней q и $\tilde{q}$ по вещественному овалу F_0.

Сделаем еще несколько замечаний.

f). Случай $\alpha = 0$ разобран в ([6]), см. также следующий параграф. Интересен также случай асимптотики в пограничном слое ($n, m \to \infty$, $\alpha \to 0$). Это случай дополнительно привносит чисто локальную задачу исследования асимптотики по двум параметрам в окрестности точки перевала (ее решение см. ([10])).

g). Полученные результаты определяют постановки задач по нахождению асимптотики стационарных вероятностей для случайных блужданий в бесконечных областях с границами при числе измерений $\geqslant 2$. Одной из основных задач является исследование поверхностей Рейнольдса.

§ 7. Блуждание без соскока с границ

В предыдущем параграфе мы опустили случай, когда с одной из границ отсутствует соскок. Здесь мы сформулируем без доказательства результаты для случая отсутствия соскока с обеих границ. Различие состоит лишь в том, что при $\alpha \neq 0, \infty$ неустойчивости не может быть (ввиду того, что $q(s) \equiv q(\xi s)$, $\tilde{q}(s) \equiv \tilde{q}(\eta s)$) и при $\alpha = 0$ корни q и $\tilde{q}$ легко вычисляются в явном виде.

Теорема 2. *Если*

$$p''_{1,1} + p''_{1,0} + p''_{1,-1} = p'_{1,1} + p'_{0,1} + p'_{-1,1} = 0$$

то при $\alpha \neq 0, \infty$

$$\pi_{mn} \sim \frac{c_1}{\sqrt{m}} \frac{1}{x_3^m(\alpha) y_3^n(\alpha)}$$

где c_1 вычисляется так же как в теореме 1. *Если же* $\alpha = 0$, *то*

$$\pi_{m0} \sim \begin{cases} \dfrac{c_1}{m^{3/2}} \dfrac{1}{x_3^m} \ \textit{при} \ \dfrac{p'_{-1,0}}{p'_{1,0}} > x_3, \\[2ex] \dfrac{c}{\sqrt{m}} \dfrac{1}{x_3^m} \ \textit{при} \ \dfrac{p'_{-1,0}}{p'_{1,0}} = x_3, \\[2ex] c_2 \left(\dfrac{p'_{10}}{p'_{-1,0}} \right)^m \ \textit{при} \ \dfrac{p'_{-1,0}}{p'_{1,0}} < x_3. \end{cases}$$

Доказательство теоремы для $\alpha = 0$ см. в ([6]), константы вычисляются так же как в теореме 1.

Поступила в редакцию
12 июня 1971 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малышев В. А., Аналитический метод в теории двумерных положительных случайных блужданий, Сиб. матем. ж., т. XIII, № 6 (1972), 1314—1329.
2. Милнор Дж., Теория Морса, «Мир», М., 1965.
3. Арнольд В. И., Особенности гладких отображений, Успехи матем. наук, 23, № 1 (1968), 3—44.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.
5. Малышев В. А., О полюсах рациональных производящих функций. Вероятности появления комбинаций, Литовский матем. сборник, 5, № 4 (1965), 585—591.
6. Малышев В. А., Случайные блуждания. Уравнения Винера — Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа. Изд. Моск. ун-та, М., 1970.
7. Чжун-Кай-лай, Однородные цепи Маркова, «Мир», М., 1965.
8. Боровков А. А., Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых случайных слагаемых, Сиб. матем. ж., т. III, № 5 (1962), 645—694.
9. Pabjett W. J., Tsokos C. P., Existence of a Stochastic Integral Equation in Turbulence Theory, J. Math. Phys., 12, № 2, (1971).
10. Pederson R. N., Laplace's method for two parameters, Pacif. J. Math., 15, № 2 (1965), 585—596.