1997 г. март — апрель *т. 52, вып. 2(314)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.2

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ЦЕПОЧКИ СИМВОЛОВ

В. А. Малышев

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

1.1. История. Однородные случайные блуждания на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$ (см. книгу Спитцера [1]) являются в настоящее время хорошо изученной областью теории вероятностей, совпадающей в некоторых аспектах с теорией сумм независимых случайных величин. Эта теория имеет много естественных обобщений. Среди них отметим следующие.

- *Случайные блуждания с границами.*

Простейший случай – случайное блуждание в $\mathbb{Z}_+$ с применением в теории массового обслуживания. Более сложное обобщение – теория случайных блужданий в многомерных ортантах, см. [2]. Сюда относятся многие сети массового обслуживания.

- *Случайные блуждания на дискретных группах.*

Наиболее популярными примерами являются аменабельные группы (см. [3]) и свободные некоммутативные группы (первой фундаментальной работой является [4], одна из последних работ – [5]). Многие результаты для свободных и модулярных групп, полученные ранее методом производящих функций, выводятся в нашей теории с помощью чисто вероятностных рассуждений.

- *Случайные блуждания на деревьях* (см. [6]).
- *Случайные блуждания в случайной среде*: замороженная среда (см., например, [7]), динамическая среда и т. д.

Мы описываем здесь класс марковских процессов, связанный со многими из упомянутых приложений и включающий некоторые из них.

1.2. Об основном результате. Мы даем обзор имеющихся результатов и схему построения новой общей теории таких процессов. Две основные трудности лежат в основе этой теории. Первая – случайные блуждания (или диффузионные процессы) на многообразии с границей. В отличие от хорошо разработанной теории для гладкой границы, мы изучаем гораздо более сложную ситуацию, когда граница является кусочно-гладкой. Сложность таких задач определяется параметром C, максимальной коразмерностью пересечений гладких частей границы. Так, например, полупрямая и полупространство имеют $C = 1$, для четверти плоскости $C = 2$, поскольку начало координат (пересечение двух осей) имеет размерность 0.

Вторая трудность – это локальное взаимодействие частицы со случайной однородной средой. Мы рассматриваем простейшую ситуацию, когда среда нетривиальна только с одной стороны от частицы и движется вместе с частицей. Это позволяет нам получить более глубокие результаты без ограничительных предположений, таких как наличие малого параметра, используемых в математической статистической физике и теории процессов с локальным взаимодействием. Случай, когда среда находится с обеих сторон частицы, изучен только в размерности 1 (он моделирует случайную машину Тьюринга).

Мы изучаем эти процессы, строя по ним (используя скейлинг) более простые марковские процессы (иногда даже детерминированные динамические системы) на компактном пространстве, которые мы называем макропроцессами. Если такая динамическая система строго эргодична, то мы можем сформулировать в терминах этой системы необходимые и достаточные условия возвратности и эргодичности процесса. Это охватывает все результаты, известные нам в настоящий момент. Точная формулировка результата является очень громоздкой, поэтому мы приводим ее в предположениях, максимально упрощающих изложение, однако разумных с точки зрения моделей, встречающихся в приложениях.

2. Однородные блуждания: односторонняя среда

Однородные блуждания в $\mathbb{Z}^M$ являются составной частью теории случайных блужданий в $\mathbb{Z}_+^M$. В этом разделе мы изучаем марковские процессы, которые играют аналогичную роль по отношению к процессу эволюции конечных струн, который мы изучим позже. Этот класс марковских процессов сложнее, чем однородные случайные блуждания; здесь еще имеется много открытых вопросов.

2.1. Определения. *Конечной струной* $\alpha = x_1x_2\dots x_n$ называется конечная последовательность символов x_i из некоторого алфавита $S = \{1, 2, \dots, r\}$. Мы всегда будем нумеровать символы конечной струны слева направо, начиная с 1; n называется *длиной* струны, $n = n(\alpha) = |\alpha|$, x_n – крайний справа символ струны. Множество всех конечных струн, включая пустую $\varnothing$, обозначим $\mathscr{A}$. Композицией двух струн, $\alpha = x_1\dots x_n$ и $\beta = y_1\dots y_m$, назовем струну $\alpha\beta = x_1\dots x_{n+m}$, $x_{n+1} = y_1, \dots, x_{n+m} = y_m$.

Мы рассматриваем полубесконечные слева среды $\xi = \dots x_{-1}x_0$, являющиеся функциями из $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -2, -1, 0\}$ в S.

Мы рассматриваем также частицу в узле $n \in \mathbb{Z}$ и пару (n, ξ) будем называть частицей в односторонней среде ξ. Эту пару мы называем также *полубесконечной струной* и иногда также обозначаем ее $\alpha = \dots y_{n-1}y_n, y_n = x_0, y_{n-1} = x_{-1}, \dots$ (т.е. среда с другой выделенной нумерацией). Таким образом, полубесконечная струна является функцией $\alpha\colon \mathbb{Z} \to S$, которая не определена, начиная с некоторого $n+1$. Множество всех полубесконечных струн обозначается через $\mathscr{A}_\infty$, совокупность всевозможных случайных сред – через $\mathscr{E}_\infty$.

Можно определить композицию $\alpha\beta = \dots x_{n-1}x_n \dots x_{n+m}$ полубесконечной струны $\alpha = \dots x_{n-1}x_n$ с конечной струной $\beta = y_1 \dots y_m$, где снова $x_{n+1} = y_1, \dots, x_{n+m} = y_m$. Обозначим через θ сдвиг в пространстве полубесконечных струн:

$$\theta(\alpha) = \dots y_{n-2}y_{n-1}, y_k = x_{k+1}, \quad \text{если} \quad \alpha = \dots x_{n-1}x_n.$$

Для произвольной струны $\alpha = \dots x_{n-1}x_n$ определим ее сдвиг в 0 как изменение нумерации струны таким образом, чтобы крайний слева символ имел номер 0:

$$\theta_0\alpha = \theta^{n(\alpha)}\alpha.$$

Чтобы описать эволюцию, представим себе частицу, выполняющую случайное блуждание, в зависимости от которого изменяется и создается среда слева от частицы. При этом скачки частицы зависят от среды. Эволюция полубесконечной струны определяется переходными вероятностями

$$q(\gamma,\delta) = \mathsf{P}\{\alpha(t+1) = \rho\delta \mid \alpha(t) = \rho\gamma\},$$

где ρ – полубесконечная струна, γ, δ – конечные струны с $n(\gamma) = d, n(\delta) \leqslant 2d$. Заметим, что переходные вероятности не зависят от ρ, это соответствует свойству однородности случайного блуждания в $\mathbb{Z}^M$. Параметр d фиксирован, он характеризует "глубину" взаимодействия. Мы будем предполагать, что $d = 1$; обобщение на случай $d > 1$ по большей части не приводит к новым качественным явлениям, однако требует большой технической работы. В этом случае $q(x, \varnothing)$ есть вероятность стереть последний символ x среды и сдвинуться налево, $q(x,y)$ есть вероятность того, что частица не двигается, но изменяет крайний справа символ среды на y; а $q(x, yz)$ есть вероятность прыгнуть направо и заменить x двумя символами yz. Мы будем называть такую марковскую цепь *случайным блужданием, взаимодействующим со средой* (СБВС) или просто случайной струной в $\mathbb{Z}$.

Объектом нашего внимания в этом разделе является марковская цепь $\mathscr{M}$ с пространством состояний $\times_{i=1}^M \mathscr{A}_\infty$. Мы можем представлять ее себе как частицу в точке $\vec{n} \in \mathbb{Z}^M, \vec{n} = (n_1, \dots, n_M)$, а вектор среды $\vec{\xi}$ имеет координаты

$$\xi_i = \dots y_{i,-1}y_{i,0}, \qquad i = 1, 2, \dots, M.$$

Эта пара задает M-вектор A полубесконечных струн

$$\alpha_i = \dots x_{i,(n_i-1)}x_{i,n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \qquad x_{i,n_i} = y_{i,0}, \qquad x_{i,(n_i-1)} = y_{i,-1}.$$

Если в одномерном случае функцию $\mathbb{Z} \to S \cup \{\varnothing\}$ действительно можно представлять себе как среду, то при $M > 1$ это не так естественно, потому что мы имеем функцию $\mathbb{Z}^M \to S \cup \{\varnothing\}$, и изменение этой среды частицей не локально в топологии $\mathbb{Z}^M$.

Но понятие частицы очень полезно, так как мы постоянно будем использовать аналогии с классической теорией случайных блужданий ($r = 1$).

Переходные вероятности определяются следующим образом. Пусть $\vec{x} = \vec{x}(A) = (x_{i,n_i},\ i = 1, \ldots, M)$ есть набор всех правых символов A, а $\vec{\delta} = (\delta_i,\ i = 1, \ldots, M)$ – набор струн. Каждая струна δ_i имеет длину 0, 1 или 2. Пусть B – набор струн

$$\beta_i = \ldots x_{i,(n_i-1)}\delta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Тогда переходные вероятности за один шаг P_{AB} зависят только от $\vec{x}$ и $\vec{\delta}$. Другими словами, они равны некоторым величинам $q(\vec{x}, \vec{\delta})$ таким, что для всех $\vec{x}$

$$\sum_{\vec{\delta}} q(\vec{x}, \vec{\delta}) = 1.$$

В дальнейшем мы часто будем использовать следующее условие.

Условие 1 (СУН). *Сильное Условие Неприводимости: все $q(\vec{x}, \vec{\delta})$ неотрицательны. Заметим, что во многих интересных примерах это условие не выполнено, так что нам придется также исследовать случаи, когда оно нарушено. Но мы будем предполагать это условие выполненным везде, где не оговорено противное.*

2.2. Классификация. Если $r = 1$, мы имеем классическое случайное блуждание на $\mathbb{Z}^M$. Напомним основные результаты о нем.

Теорема 1. 1) *Для $M > 2$ случайное блуждание всегда невозвратно.*

2) *Для $M = 1, 2$ случайное блуждание возвратно тогда и только тогда, когда средний снос равен нулю, в противном случае оно невозвратно.*

3) *В частности, мы получаем, что случайное блуждание возвратно лишь на множестве параметров, имеющих нулевую лебегову меру в пространстве параметров.*

Мы знаем, что для такого случайного блуждания имеют место закон больших чисел и центральная предельная теорема. Для СБВС нам нужны более общие определения. Случайный процесс $n(t) \in \mathbb{Z}^M$, описывающий поведение частицы, назовем *возвратным*, если при любом начальном состоянии марковской цепи частица с вероятностью единица посетит 0. Мы назовем этот процесс *нулевым возвратным*, если он возвратный и среднее время возвращения в 0 бесконечно для всех начальных условий.

Здесь и далее мы формулируем утверждения, называемые "теоремами-гипотезами". Это означает, что, по-видимому, утверждение имеет место, но формальное доказательство в настоящий момент остутствует. Мы всегда перечисляем те частные случаи, для которых строгое доказательство имеется.

Теорема-Гипотеза 1. 1) *При любых параметрах частица является либо нулевой возвратной, либо невозвратной.*

2) *При $M > 2$ частица всегда невозвратна.*

3) *При $M = 1, 2$ частица является нулевой возвратной лишь на множестве параметров лебеговой меры нуль в пространстве параметров.*

Эта гипотеза доказана для $M = 1$ (см. [8]–[10]). Ее можно также доказать для $M > 1$ независимых струн, т.е. когда эволюция каждой струны не зависит от остальных.

2.3. Инвариантные меры. Для того, чтобы сформулировать утверждения, подобные ЗБЧ и ЦПТ, нам нужно дать важное определение. Всякая мера μ на $(\mathscr{E}_\infty)^M$ полностью определяется своими корреляционными функциями. В то же время распределение марковской цепи в момент времени t полностью определяется двумя проекциями: распределением положения частицы $n(t)$ и распределением вероятностей среды $\mu(t)$. Например, при $M = 1$ рассмотрим корреляционные функции p_t^k порядка k, описывающие распределение вероятностей k символов на правом конце в момент времени t:

$$p_t^1(i) = \mathsf{P}\{x_{n(t)}(t) = i\},$$
$$p_t^2(i,j) = \mathsf{P}\{x_{n(t)}(t) = i,\ x_{n(t)-1}(t) = j\}$$

и т. д. Они однозначно определяют индуцированное распределение на $\mathscr{E}_\infty = \mathscr{A}_\infty^0 = \theta_0\mathscr{A}_\infty$, которое мы обозначим $\mu(t)$.

Определение 1. Мера μ на $(\mathscr{E}_\infty)^M$ называется *инвариантной*, если из того, что $\mu(0) = \mu$ следует, что $\mu(t) = \mu$ для всех t (начальное значение $n(0)$ не играет роли).

Каждой инвариантной мере μ мы сопоставляем *вектор сноса* $\vec{v} = \vec{v}(\mu)$ с компонентами

$$v_i = \sum_{\vec{\gamma},\vec{\delta}} \mu(\vec{\gamma})q(\vec{\gamma};\vec{\delta})(n(\delta_i) - d).$$

Заметим, что в классическом случае $r = 1$ этот вектор сноса единственный, поскольку есть только одна среда, и распределение среды сосредоточено в одной точке. Это стандартный вектор сноса.

Определим также вектор знаков

$$\operatorname{sign}(\mu) = (\operatorname{sign}(v_i),\ i = 1,\dots,M), \qquad \operatorname{sign}(v_i) = -, 0, +.$$

Таких векторов всего 3^M, и мы будем говорить об инвариантных мерах, соответствующих каждому из этих векторов, например, $(0,\dots,0)$-мера – это инвариантная мера μ с $\operatorname{sign}(\mu) = (0,\dots,0)$.

Теорема-Гипотеза 2. 1) *Если существует* $(0,\dots,0)$-*мера, то нет мер другого типа.*

2) *Более сильная гипотеза: если существует* $(0,\dots,0)$-*мера, то она единственна.*

Это доказано в одномерном случае (см. [10]).

2.4. Одномерный случай.

2.4.1. (+)**-меры.**

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны.*

1) *Для некоторого начального условия координата частицы*

$$n(t) \to \infty$$

почти наверное при $t \to \infty$.

2) *Существует* $v > 0$ *такое, что для всех начальных состояний* $\dfrac{n(t)}{t} \to v$ *почти наверное.*

3) *Существует инвариантная* (+)*-мера.*

В этом случае мы также имеем:

- *существует единственная инвариантная мера* μ *на* $\mathscr{A}^0_\infty$;
- *корреляционные функции* p^k_t *сходятся (экспоненциально быстро) к корреляционным функциям меры* μ.

Для любого распределения μ на $\mathscr{E}_\infty$ определим предельные корреляционные функции

$$\lim_{k\to-\infty} \mu(x_k = i), \qquad \lim_{k\to-\infty} \mu(x_k = i,\ x_{k-1} = j), \dots$$

и т. д., если эти пределы существуют. Обозначим меру, заданную предельными корреляционными функциями, через $\mathrm{Lim}(\mu)$.

Теорема-Определение 1. *Для инвариантной меры* μ *из теоремы 2 предельные корреляционные функции существуют и задают трансляционно-инвариантную меру* $\mathrm{Lim}(\mu)$ *на* $S^{\mathbf{Z}}$.

Эта предельная мера является гиббсовской и обладает свойством экспоненциального перемешивания.

Экспоненциальное перемешивание доказано в [8]. Для корреляционных функций инвариантной меры получены явные выражения в виде ряда, см. [8] и [11].

2.4.2. (−)**-меры.**

Теорема 3. *Предположим, что выполнено условие* СУН. *Тогда следующие условия эквивалентны.*

1) *Для некоторых начальных условий положение частицы*

$$n(t) = n(\alpha(t)) \to -\infty$$

почти наверное при $t \to \infty$.

2) *Для любого трансляционно-инвариантного начального условия (мы берем ограничение стационарного процесса* η *в качестве начального условия) существует* $v = v(\eta) < 0$ *такое, что*

$$\frac{n(t)}{t} \to v \quad \text{п.н.}$$

3) *Имеется континуум экстремальных инвариантных мер* μ *на* $\mathscr{A}^0_\infty$.

4) *Для всех трансляционно-инвариантных начальных состояний* η *корреляционные функции* p^k_t *сходятся к некоторому пределу* $\mu(\eta)$ *и не все из этих предельных мер совпадают (хочется надеяться, что все они различны).*

По этому поводу см. [8], [11]. Имеются также выражения для корреляционных функций этих инвариантных мер, см. [11].

Любая инвариантная мера μ, имеющая трансляционно-инвариантную $\mathrm{Lim}(\mu)$, может быть получена следующим образом. А. Замятин доказал (неопубликованный результат), что предельная мера, являющаяся инвариантной, существует также, если эволюция начинается с периодической струны.

Задача 1. *Неизвестно, существуют ли инвариантные меры μ с не трансляционно инвариантной* $\mathrm{Lim}(\mu)$.

2.4.3. (0)-меры.

Теорема 4. *Во всех случаях, отличных от ситуаций, описанных в предыдущих теоремах, существует единственная инвариантная мера. Соответствующий ей вектор сноса равен нулю.*

2.5. $(+,+,\dots,+)$-меры.

Теорема 5. *Предположим, что выполнено условие* СУН. *Тогда следующие условия эквивалентны.*

1) *Для любых начальных условий координаты $n_i(t)$, $i=1,\dots,M$, стремятся почти наверное к плюс бесконечности.*
2) *Существуют $v_i>0$, $i=1,\dots,M$, такие, что $\dfrac{n_i(t)}{t}\to v_i$ п.н. для всех начальных условий.*
3) *Существует единственная инвариантная мера на $(\mathscr{E}_\infty)^M$ с* $\mathrm{sign}(\mu)=(+,\dots,+)$.

Эта теорема доказана в [13]. В этой же работе доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. *Существуют $k>0$, $\varepsilon>0$ такие, что для любой среды ξ*

$$\mathsf{E}\big[n_i(k)-n_i(0)\mid n(0)=n_0,\ \xi(0)=\xi\big]\geqslant\varepsilon\quad\forall i.$$

Лемма 2 (Экспоненциальная сходимость.). *Все корреляционные функции сходятся к корреляционным функциям инвариантной меры с экспоненциальной скоростью.*

Введем теперь пространство параметров $\mathscr{P}=\{q\}$.

Задача 2. *В общей ситуации, т.е. для параметров, принадлежащих $\mathscr{P}\setminus\mathscr{P}_0$, где $\mathscr{P}_0$ – некоторое множество нулевой лебеговой меры, условия теоремы 5 эквивалентны следующему. Существует единственная инвариантная мера на $(\mathscr{E}_\infty)^M$. В самой общей ситуации это неверно, так как при $M=1$ может быть нулевая возвратность, когда инвариантная мера также единственна (например, для независимых струн).*

2.6. Сосуществование различных типов мер. Для двух полубесконечных струн ($M=2$) мы будем интересоваться четырьмя типами инвариантных мер: $++$, $+-$, $-+$, $--$ (мы не будем здесь рассматривать ситуации, когда имеются меры 0-типа, т.е. $+0$, -0, 00, $0+$, $0-$). Мы уже показали, что если существует $++$-мера, то других мер нет. Рассмотрим теперь примеры других ситуаций.

Задача 3. *Всегда ли существует инвариантная мера μ с трансляционно инвариантной* $\mathrm{Lim}(\mu)$*?*

Существуют только $(-,-)$-меры. Мы приведем примеры таких ситуаций.

Пример 1. Рассмотрим две независимые полубесконечные струны. Предположим, что каждая из них имеет инвариантную $(-)$-меру (следовательно, континуум таких мер). Обозначим соответствующие переходные вероятности $q_0(\cdot,\cdot)$. В этом случае других инвариантных мер, кроме $(-,-)$-мер, нет.

Малые возмущения.

Лемма 3. *Если разности $q - q_0$ достаточно малы, то для системы, соответствующей q, тоже существуют только $(-,-)$-меры.*

Свойства сноса.

Задача 4. *Предположим, что существуют только $(-,-)$-меры. Тогда для любой начальной среды обе координаты частицы почти наверное стремятся к $-\infty$.*

Интуитивные рассуждения, лежащие в основе этой задачи, таковы. Координаты всех векторов сноса $\vec{v}(\mu)$ для инвариантных мер отделены от нуля в силу замкнутости множества $\{\vec{\mu}\}$ (напомним, мы предположили, что мер с другими знаками нет). В таком случае представляется правдоподобным, что функция Ляпунова существует равномерно по начальной среде. Перейдем теперь к обсуждению функций Ляпунова. Мы хотим доказать следующее свойство.

Свойство Ляпунова.

Условие 2. *Существуют $k > 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что для любой среды ξ*

$$\mathsf{E}\big[n_i(k) - n_i(0) \mid n(0),\ \xi(0) = \xi\big] \leqslant -\varepsilon, \qquad i = 1, 2.$$

Существуют только $(+,-)$-меры. Здесь работают те же рассуждения и примеры.

Задача 5. *Предположим, что существуют только $(+,-)$-меры. Тогда для любой начальной среды почти наверное первая координата частицы стремится к ∞, а вторая к $-\infty$.*

Свойство Ляпунова. Оно выглядит аналогично.

Условие 3. *Существуют $k > 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что для любой среды ξ*

$$\mathsf{E}\big[n_2(k) - n_2(0) \mid n(0),\ \xi(0) = \xi\big] \leqslant -\varepsilon;$$
$$\mathsf{E}\big[n_1(k) - n_1(0) \mid n(0),\ \xi(0) = \xi\big] \geqslant \varepsilon.$$

Заметим, что для $r = 1$ это было давно доказано (см. [12]).

Одна струна управляет другой. Другие примеры можно построить, используя следующий механизм. Предположим, одна струна (будем называть ее первой) эволюционирует независимо от второй струны, а скачки второй струны зависят от крайнего справа символа струны 1. Пусть первая струна имеет инвариантную меру $(-)$-типа.

Тогда подходящим выбором переходных вероятностей для второй струны можно добиться того, что будут существовать только $(-,-)$-меры или только $(-,+)$-меры.

Сосуществование $(-,-)$- и $(-,+)$-мер. Покажем, что при выполнении условия СУН могут возникать такие ситуации, когда имеется континуум $(-,-)$- и континуум $(-,+)$-мер. Возьмем алфавит $S = \{1,2\}$ и $M = 2$. Предположим, что выполнены следующие условия.

- Для первой струны скачки $x \to \varnothing$, т.е. удаление крайнего правого символа, имеют вероятность, большую, чем $1-\varepsilon$, для всех x.
- Если крайний справа символ первой струны равен 1, то скачки $x \to \varnothing$ для второй струны имеют вероятность, большую, чем $1-\varepsilon$, для $x = 1,2$; если крайний справа символ первой струны равен 2, то скачки $x \to yz$ имеют вероятность, большую, чем $1-\varepsilon$, для $x = 1,2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *В этом случае существуют $(-,-)$- и $(-,+)$-инвариантные меры.*

Из первого условия следует, что первая струна всегда движется влево. Предположим, что ее начальное состояние – все единицы. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех t вероятность того, что крайний справа символ первой струны равен 1, должна быть больше, чем $1-\delta$. Отсюда следует, что вторая струна движется к $-\infty$. Поэтому возникает инвариантная $(-,-)$-мера. Такое же рассуждение для начального состояния “все двойки” для первой струны дает $(-,+)$-меру.

ТЕОРЕМА-ГИПОТЕЗА 3. *Предположим, что существуют только $(-,-)$- и $(-,+)$-меры. Тогда для любой начальной среды первая координата частицы стремится к $-\infty$ почти наверное.*

В этом случае функция Ляпунова может существовать только для одной координаты, но не для двух одновременно.

Могут ли $(-,+)$- и $(+,-)$-меры сосуществовать?

ЗАДАЧА 6. *Рассмотрим двумерный случай с условием* СУН. *Могут ли одновременно существовать меры $(-,+)$ и $(+,-)$ типов?*

Случайную машину Тьюринга (см. ниже) можно рассматривать как две полубесконечные струны, помещенные на решетку $\mathbb{Z}$. А именно, правый конец первой струны находится в узле n, а вторая струна перевернута так, что ее правый конец превратился в левый. При этом он находится в узле $n+1$. Оказывается, сосуществования мер не может быть, если есть закон сохранения $n_1(t) = n_2(t)$, т.е. сумма координат двух частиц постоянна. Заметим, что условие СУН здесь нарушено.

Трехмерный пример. Мы покажем, что одновременно могут быть $(-,+,-)$- и $(-,-,+)$-меры. Возьмем первую струну такую же, как в предыдущем предложении. Положим вероятности скачков $(+,-)$ для второй и третьей струны близкими к 1, если правый символ первой струны равен 1. Если правый символ первой струны равен 2, положим скачки $(-,+)$ близкими к 1.

2.7. Основной результат о единственности. Для заданной меры μ на двух полубесконечных струнах обозначим $P_i\mu$, $i = 1, 2$, ее проекции (маргинальные распределения).

Теорема-Гипотеза 4. Мы приводим две разные формулировки.

- *Зафиксируем* $\{q\} \in \mathcal{P}$. *Тогда для любой трансляционно инвариантной меры* μ_1 *на* $S^{\mathbf{Z}}$ *существует не более одной инвариантной* $(-,+)$*-меры* μ *с* $\mathrm{Lim}(P_1\mu) = \mu_1$.
- *Предположим, что, начиная с* μ *такой, что* $\mathrm{Lim}(P_1\mu) = \mu_1$, *вторая координата* x_2 *частицы стремится к* $+\infty$ *п.н. Тогда это выполняется для любой меры* μ *с* $\mathrm{Lim}(P_1\mu) = \mu_1$. *Более того,* $\mu(t)$ *сходится к инвариантной мере, которая зависит от* μ *только через* $\mathrm{Lim}(\mu_1)$.

Вторая формулировка доказана для случая, когда μ_1 марковская, см. [13]. Подобное же рассуждение, использующее каплинг, должно работать и в случае, если мера μ_1 обладает свойством экспоненциального перемешивания.

Интуиция. Доказательство в [13] обобщает метод каплинга, использованный в [8] для невозвратного случая. Если для заданной μ_1 существует инвариантная $(-,+)$-мера, то, начиная с этой меры, получим, что вторая координата частицы уходит на $+\infty$. С помощью каплинга можно доказать, что тогда вторая координата частицы уходит на $+\infty$ для любого начального распределения, имеющего в качестве маргинального μ_1. При этом мера на конце второй струны зависит только от хвоста меры μ_1 на $(-)$-бесконечности.

Эта теорема очевидным образом может быть обобщена на случай $M > 2$.

Эти результаты оказываются решающими для построения оператора рассеяния (см. ниже).

2.8. О явных формулах.

2.8.1. Одномерный случай. Явные условия на параметры для всех трех случаев (эргодичность, невозвратность и нулевая возвратность) обсуждаются в [9]. Случай $d = 1$ в достаточной степени явный. Случай $d > 1$ менее явный, технически более сложный, и там есть открытые проблемы.

2.8.2. Простые инвариантные меры. В некоторых случаях инвариантные меры достаточно просты (например, бернуллиевские) и могут быть вычислены явно. Примером являются сети LIFO без ограничений синхронизации. Такая сеть с M узлами представляет собой СБВС с M струнами.

Лемма 4. *Для описанной выше модели в невозвратном случае единственной инвариантной мерой является мера Бернулли.*

Доказательство. Простая проверка. С вероятностью $q(x; \varnothing)$ мы удаляем последний символ, при этом бернуллиевское свойство не изменяется. С вероятностью $q(x)$ мы добавляем в конец новый символ независимо от всех остальных. Таким образом, получаем инвариантные вероятности для схемы Бернулли $q(x)/\sum q(x)$.

Для $M > 1$ мы докажем, что мера Бернулли существует, если выполнены следующие условия. Могут происходить лишь следующие события:

- удаление последнего символа x струны i с вероятностью $p(i; x)$ независимо от остальных символов;

- последний символ i-й струны ставится в конец другой, j-й струны с вероятностью $p(i,j)$;
- символ x добавляется в конец струны i с вероятностью $q(i,x)$.

Доказательство. Нужно лишь проверить, что после каждого из разрешенных событий сохраняется (условное) свойство бернуллиевости. Необходимо также, чтобы все символы во всех струнах были одинаково распределены. Чтобы проверить это, можно вычислить первую корреляционную функцию из системы $M(r-1)$ линейных уравнений с таким же числом неизвестных – вероятностей $\pi(i,x)$ того, что последний символ струны i равен x.

Заметим, что имеется много результатов о product invariant мерах для конечных эргодических струн, см. [14], [15]. По-видимому, эти результаты можно обобщить на случай полубесконечных струн.

2.8.3. Общий случай. Известно, что даже для $r=1$, $M=3$ в общей ситуации невозможно получить условия эргодичности в явном виде. Цель настоящей работы – разделить задачу на более простые части. Для каждой части легче увидеть, возможно ли ее решение в явном виде. Один из возможных подходов – просто постулировать существование глобальных функций Ляпунова. Проблема в том, что в общей ситуации это неинтересно. Однако локальные функции Ляпунова, по-видимому, будут работать во многих случаях. Чтобы объяснить их смысл и дать необходимые формулировки, требуются громоздкие построения. Целью этой статьи и является дать необходимые построения.

Несмотря на все вышесказанное, поиск параметров, при которых возможны явные решения, остается очень актуальной задачей, особенно если это связано с важными приложениями.

3. СБВС в $\mathbb{Z}_+^M$

3.1. Определения. Для каждого СБВС мы определим класс счетных марковских цепей. Для $M=1$ пространством состояний этих счетных марковских цепей (которые мы называем СБВС на полупрямой или односторонней эволюцией конечных струн) является множество $\mathscr{A}$ всех конечных струн, включая пустую струну. Мы предполагаем, что для струн длины $n(\alpha)\geqslant d$ переходные вероятности определяются теми же формулами, что и для полубесконечных струн. Переходные вероятности для струн длины $n(\alpha)\leqslant d-1$ мы выбираем произвольно с одним лишь условием "невырожденности", например, пусть для любой α с $n(\alpha)<d$

$$p_{\alpha\beta}=\mathsf{P}\{\alpha(t+1)=\beta\mid\alpha(t)=\alpha\}>0$$

для любой β с $n(\beta)<2d$. В дальнейшем мы рассматриваем случай $d=1$ везде, где не оговорено противное. Для этого случая нужно лишь задать по отдельности вероятности переходов $p_{\varnothing\varnothing}, p_{\varnothing x}$ из пустой струны в струны единичной и нулевой длины.

Основным объектом наших исследований будут марковские цепи $\mathscr{M}$ с пространством состояний $\times_{i=1}^{M}\mathscr{A}$. Заметим, что в случае $r=1$ это множество есть не что иное, как ортант $\mathbb{Z}_+^M$, и мы увидим в дальнейшем, что в этом случае мы получим в точности случайные блуждания в этом ортанте. В дальнейшем нам понадобятся разные сведения из теории случайных блужданий в $\mathbb{Z}_+^M$, (см. [2], [12]).

Для любого $\Lambda \subset \{1, \dots, M\}$ естественно ввести множество

$$\mathrm{Face}(\Lambda) = \times_{i=1}^{M} \mathscr{B}_i \subset \times_{i=1}^{M} \mathscr{A},$$

где $\mathscr{B}_i$ состоит только из пустой струны при $i \notin \Lambda$ и равно $\mathscr{A} \setminus \{\varnothing\}$ для $i \in \Lambda$. Мы называем это множество *гранью*. В случае $r = 1$ это действительно грань ортанта. Заметим, что множество $\times_{i=1}^{M} \mathscr{A}$ является объединением всех 2^M граней. К несчастью, для граней, определенных таким образом, невозможно определить перпендикуляр к грани и, следовательно, ввести такое важное понятие как индуцированная цепь так, как это делается в случае $r = 1$. Ниже мы вводим индуцированные цепи совершенно другим способом, по аналогии с [12].

Чтобы задать скачки, необходимо ввести множества переходных вероятностей на каждой Λ, включая пустую, разные на разных гранях.

Условие 4 (свойство максимальной однородности). *Для любых $A \in \mathrm{Face}(\Lambda)$, $B \in \times_{i=1}^{M} \mathscr{A}$ пусть P_{AB} удовлетворяет следующему условию: P_{AB} зависит только от Λ, от последних символов непустых струн из A и от вектора $\vec{\delta}$, определенного выше.*

Точнее, пусть A есть M-вектор струн

$$\alpha_i = x_{i1} \dots x_{in_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, M.$$

Обозначим $\vec{\gamma}$ массив всех последних символов $x_i = x_{in_i}$ этих струн. Если α_i пусто, то x_i тоже пусто. Пусть $\vec{\delta}$ есть набор из M струн δ_i, $i = 1, \dots, M$, где длина δ_i равна нулю, единице или двум, если $i \in \Lambda$, и равна нулю или единице в противном случае.

Тогда единственно возможные вероятности переходов таковы:

$$\alpha_i = x_{i1} \dots x_{in_i} \to x_{i1} \dots x_{i,n_i-1} \delta_i, \qquad i = 1, \dots, M.$$

Таким образом, последний символ непустых струн стирается, и вместо него в правый конец каждой струны добавляется нуль, один или два символа. К пустой струне добавляется нуль или один символ.

Условие 5 (аналог СУН). *Все вероятности P_{AB} положительны.*

3.2. Индуцированные цепи. Мы будем рассматривать марковские цепи $\mathscr{M}_\Lambda$, связанные со счетной марковской цепью на $\times_{i=1}^{M} \mathscr{A}$. Они называются *индуцированными цепями*. Пространством состояний марковской цепи $\mathscr{M}_\Lambda$ является произведение $\times_{i=1}^{M} \mathscr{A}_i$, где $\mathscr{A}_i = \mathscr{A}$, $i \notin \Lambda$ и $\mathscr{A}_i = \mathscr{A}_\infty$, $i \in \Lambda$. Величину $|\Lambda|$ мы называем *размерностью* грани. Переходными вероятностями этих цепей будут те же самые P_{AB}, только некоторые струны из A полубесконечны, предыдущее определение имеет место в этом случае без каких-либо изменений. Заметим, что индуцированные цепи несчетные за исключением случая $\Lambda = \varnothing$.

Состояние индуцированной цепи определяется тройкой: частица (в $\mathbb{Z}_+^{|\Lambda|}$), $|\Lambda|$ полубесконечных сред и $M - |\Lambda|$ конечных струн.

Идея введения индуцированных цепей $\mathscr{M}_\Lambda$ состоит в том, что они определяют поведение системы вдали от границ Λ, т.е. когда длины струн α_i, $i \in \Lambda$, достаточно велики.

Заметим, что при $r = 1$ ситуация более простая, и мы определяли индуцированные цепи (см., например, [12]) просто проектируя исходные переходные вероятности на перпендикуляр к грани. В этом случае индуцированная цепь была марковской цепью на $\mathbb{Z}_+^{M-|\Lambda|}$, и мы могли разделить перпендикулярную и тангенциальную компоненты процесса вблизи грани. Это оказывается невозможным осуществить при $r > 1$, и мы рассматриваем марковские цепи на $\mathbb{Z}_+^{M-|\Lambda|} \times \mathbb{Z}^{|\Lambda|}$. Следуя нашему новому определению, в этом случае $\Lambda = \{1, \dots, M\}$, и $\mathscr{M}_\Lambda$ есть просто марковская цепь на полубесконечных струнах, т.е. однородный случай, изученный в предыдущем разделе. Для случайных блужданий ($r = 1$) это соответствует полностью однородным случайным блужданиям на всем $\mathbb{Z}^M$.

Для случайного блуждания $\alpha(t)$ в $\mathbb{Z}_+^M$ рассмотрим следующий скейлинг: начнем в точке $[xN]$ и положим $t = [\tau N]$. Для $\tau < \frac{1}{d}\operatorname{dist}(x, \partial\mathbb{R}_+^M)$, если x принадлежит внутренности $\mathbb{R}_+^M$ (т.е. координаты вектора x положительны), мы получаем при $N \to \infty$

$$\frac{1}{N}\,\alpha([\tau N]) \to v,$$

где v – средний снос внутри $\mathbb{Z}_+^M$.

Это выполнено, потому что за столь малое "макро-время" блуждание не может достичь границы ортанта, и эволюция совпадает с эволюцией полностью однородного случайного блуждания на всем $\mathbb{Z}^M$. К несчастью, этот скейлинг работает не всегда при $r > 1$, а лишь для специальных "стационарных" начальных условий. Чтобы понять это, мы должны начать с обзора результатов, касающихся эволюции одной струны. Например, множество инвариантных мер будет использовано ниже для построения фундаментального векторного пучка.

3.3. Одномерный случай. Здесь мы рассматриваем марковские цепи $\mathscr{M}$ на $\mathscr{A}$ и $\mathscr{M}_\infty$ на $\mathscr{A}_\infty$, соответствующие эволюции одной струны. Заметим, что марковские цепи $\mathscr{M}$ на $\mathscr{A}$ являются счетными, и мы можем использовать стандартную терминологию для марковских цепей.

3.3.1. Невозвратный случай. Обозначим $\mathscr{P}_d = \mathscr{P}$ множество всех параметров $q(\cdot,\cdot)$ с фиксированным $d > 0$.

ТЕОРЕМА 6. *Множество параметров $\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}$, на котором марковская цепь $\mathscr{M}$ нулевая возвратная, имеет лебегову меру* 0.

ТЕОРЕМА 7. *Предположим, что выполнено условие* СУН. *Тогда следующие условия эквивалентны на $\mathscr{P} \setminus \mathscr{P}_0$:*

1) *марковская цепь $\mathscr{M}$ невозвратна;*
2) *длина случайной струны $n(t) = n(\alpha(t)) \to \infty$ п.н. при $t \to \infty$;*
3) *существует такое $v > 0$, что для всех начальных состояний выполняется $\dfrac{n(t)}{t} \to v$ п.н.;*
4) *существует единственная инвариантная мера μ на $\mathscr{A}_\infty^0$;*
5) *корреляционные функции p_t^k сходятся к пределу, одному и тому же для всех начальных состояний.*

ТЕОРЕМА 8. *В условиях предыдущей теоремы*

- *инвариантная мера* μ *имеет трансляционно инвариантную* $\mathrm{Lim}(\mu)$;
- *более того,* $\mathrm{Lim}(\mu)$ *обладает свойством экспоненциального перемешивания.*

Это совпадает с инвариантной мерой для соответствующей полубесконечной струны.

3.3.2. Эргодический случай.

ТЕОРЕМА 9. *Предположим, что выполнено условие СУН. Тогда следующие условия эквивалентны на* $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$:

1) *марковская цепь* $\mathcal{M}$ *эргодична;*
2) *любое из утверждений теоремы* 3 *для соответствующей полубесконечной струны верно.*

В эргодическом случае есть и другие законы стабилизации.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть* π – *стационарное распределение, а* π_N – *условное стационарное распределение при условии, что длина струны равна* N. *Тогда условные корреляционные функции* $\pi_N(\delta)$, *т.е. вероятности того, что последняя подструна длины* $n(\delta)$ *струны (длины* N) *равна* δ, *стремится при* $N \to \infty$ *к предельным величинам экспоненциально быстро.*

Другой подход к этим предельным корреляционным функциям – предел бесконечного объема. Мы начинаем с некоторого конечного усечения счетной марковской цепи. Это означает, что мы рассматриваем последовательность $\mathcal{M}_L$ конечных марковских цепей. Пространство состояний $\mathcal{M}_L$ есть множество всех струн длины, не превосходящей L. Если длина струны меньше L, то скачки этой цепи такие же, как у счетной цепи. Если длина в точности равна L, тогда мы вводим другие скачки (мы называем это граничными условиями и предполагаем, что они невырожденны). Если $N, L - N$ стремятся к бесконечности, то условное стационарное распределение последних символов струны длины N стабилизируется к одним и тем же корреляционным функциям независимо от граничных условий. Это доказано в [16]. Трудная проблема – понять, верно ли это в случае $d > 1$.

3.3.3. Случай нулевой возвратности.

ТЕОРЕМА 11. *Предположим, что выполнено условие* СУН. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *марковская цепь* $\mathcal{M}$ *нулевая возвратная;*
2) *существует инвариантная мера* μ *такая, что* $v(\mu) = 0$;
3) *любое из утверждений теоремы* 4 *выполнено.*

См. [10].

3.3.4. Отсутствие условия СУН. Опишем простейший случай, когда условие СУН нарушено.

Приводимость в терминах алфавита. Предположим, что $\mathbb{R} = \bigcup_i R_i$, $R_i \cap R_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Предположим, что $q(\cdot,\cdot)$ равны нулю, если аргументами являются символы из разных R_i, и отличны от нуля в остальных случаях. Мы столкнемся с такими ситуациями позже.

3.4. Уход на бесконечность по внутренности. Мы вновь возвращаемся к многомерному случаю.

ТЕОРЕМА 12. *Предположим, что выполнено условие* СУН. *Тогда следующие условия эквивалентны.*

1) *Координаты $n_i(t)$, $i = 1, \dots, M$, частицы стремятся к плюс бесконечности п.н. для всех начальных состояний.*
2) *Существуют v_i, $i = 1, \dots, M$, такие, что $\frac{n_i(t)}{t} \to v_i$ п.н. для всех начальных условий.*
3) *Существует единственная инвариантная мера на $\mathscr{M}_0$ с $\operatorname{sign}\mu=(+,\dots,+)$.*
4) *Ни для какой из индуцированных цепей с $\Lambda \neq \{1, \dots, M\}$ нет инвариантных мер .*

В ситуации этой теоремы цепь $\mathscr{M}$ невозвратна. Доказательство см. в [13]. Для случайных блужданий ($r = 1$) это соответствует случаю, когда все координаты среднего сноса внутри ортанта положительны.

3.5. Инвариантные меры для индуцированных цепей. Мы должны изучать несчетные индуцированные цепи наряду со счетной цепью $\times_{i=1}^{M}\mathscr{A}$. Изучение индуцированных цепей дает индуктивный (по M) подход к проблеме, напоминающий индуктивные подходы к решению задачи $(M + 1)$ тела в квантовой механике и случайных блужданий на $\mathbb{Z}_{+}^{M}$. Основную роль здесь вновь будут играть инвариантные меры. Первым шагом было изучение инвариантных мер в однородном случае (простейшая индуцированная цепь).

Мера на $\times_{i=1}^{M}\mathscr{A}_i^0$, $\mathscr{A}_i^0 = \mathscr{A}_\infty^0$, $i \in \Lambda$; $\mathscr{A}_i^0 = \mathscr{A}$, $i \notin \Lambda$, называется *инвариантной*, если она инвариантна по отношению к динамике индуцированной цепи. Заметим, что это определение совпадает с определением для полностью однородного случая ($\Lambda = \{1, \dots, M\}$).

Мы дадим два определения эргодичности для грани.

1) Грань называется *эргодической*, если существует инваринатная мера на соответствующем $\times_{i=1}^{M}\mathscr{A}_i^0$.

2) Грань называется *строго эргодической*, если выполнено следующее условие Ляпунова: существуют $k > 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\mathsf{E}\big[n_i(k) - n_i(0) \mid n(0),\ \xi(0)\big] \leqslant -\varepsilon, \qquad i \notin \Lambda,$$

для всех достаточно больших $n_j(0)$ равномерно по другим начальным условиям.

Из компактности следует, что всякая строго эргодическая грань является эргодической.

Для $r = 1$ эргодические грани имеют ровно одну инвариантную меру, и первое определение есть в точности определение эргодической грани для случайных блужданий. Для произвольного r может существовать много инвариантных мер.

Рассмотрим одномерные цепи для случая $M = 2$.

Предположим, что существуют только $(-,-)$-меры для $\Lambda = \{1,2\}$ и обе индуцированные цепи строго эргодичны.

Чтобы получить условия эргодичности, рассмотрим инвариантные меры эргодических одномерных цепей. Введем сначала вектор сноса $\vec{v} = \vec{v}(\mu)$, соответствующий данной инвариантной мере μ этой индуцированной цепи. Это вектор имеет только одну компоненту, направленную вдоль оси i и равную

$$v_i = \sum_{\vec{\gamma},\vec{\delta}} \mu(\vec{\gamma})q(\vec{\gamma};\vec{\delta})\,(n(\delta_i) - 1).$$

Теорема-Гипотеза 5.

- *Если для некоторой (эргодической) грани i существует инвариантная мера с $v_i > 0$, то эта инвариантная мера единственна. В этом случае (двумерная) марковская цепь невозвратна.*
- *Если для любой эргодической грани i существует инвариантная мера с $v_i < 0$, то имеется континуум таких мер и каждая из них имеет $v_i < 0$. В этом случае марковская цепь эргодична.*

Приведем интуитивные рассуждения, лежащие в основе доказательства. Мы используем две функции Ляпунова: одна вынуждает вторую компоненту двигаться к нулю, другая – для индуцированной цепи. Функцию Ляпунова для индуцированной цепи можно построить подобно тому, как строилась функция Ляпунова для одномерного СБВС (см. [9]). Затем мы слепляем вместе эти две функции так, как это делается для случайных блужданий в четверти плоскости (см. [12]).

3.6. Эйлеровский предел. Рассмотрим вначале двумерный случай. Для классических случайных блужданий в $\mathbb{Z}_+^2$ мы начинаем с точки $[xN] \in \mathbb{Z}_+^2$, где $x \in \mathbb{R}_+^2$ фиксировано, а $N \to \infty$. Мы можем доказать, что для достаточно малого $\tau \in \mathbb{R}_+$ имеет место сходимость по вероятности:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} n([\tau N]) = x + v\tau,$$

где v – средний снос внутри $\mathbb{Z}_+^2$.

Для $M > 1$ мы должны зафиксировать не только начальную точку, но и начальное состояние среды для соответствующей индуцированной цепи, поэтому зафиксируем пару (x, μ), где μ есть инвариантная мера для однородного двумерного СБВС. При больших N это означает, что мы выбираем обе длинные струны случайным образом с почти стационарным распределением.

Предложение 2. *Предположим, что мера μ имеет $(-,-)$-тип. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} n([\tau]N) = x + v(\mu)\tau$$

в смысле сходимости по вероятности для любого $\tau \leqslant \tau_0$, где τ_0 – такое, что $x + v(\mu)\tau_0$ принадлежит одной из одномерных граней.

Аналогичное утверждение имеет место для случая, когда мера μ имеет тип $(+,-)$.

Предложение 3. *Предположим, что существуют только* $(+,-)$*-меры и* μ *– одна из них. Тогда для* $\tau \geqslant \tau_0$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} n([\tau]N) = x + v(\mu)\tau_0 + v_1(\tau - \tau_0)$$

по вероятности, причем вторая координата вектора v_1 *равна нулю (т.е. вектор направлен вдоль первой грани).*

Доказательство аналогично доказательству для классического случайного блуждания в $\mathbb{Z}^2_+$ (см. [17]).

3.7. Уход на бесконечность вдоль грани. Здесь мы хотим указать аналог утверждения 1.2.3 из [2].

Теорема 13. *Пусть выполнено условие* СУН. *Предположим, что для индуцированнной цепи* $\mathscr{M}_\Lambda$ *существует инвариантная мера* μ_Λ *такая, что* $v_i(\mu_\Lambda) > 0$, $i \in \Lambda$. *Тогда*

1) *марковские цепи* $\mathscr{M}_\Lambda$ *и* $\mathscr{M}$ *невозвратные;*
2) $\dfrac{n_i(t)}{t} \to v_i$ *для всех* $i \in \Lambda$ *с положительной вероятностью.*

Доказательство. Оно аналогично доказательству предложения 1.2.3 в [2] и использует эргодическую теорему Биркгофа для функционалов n_i стационарной марковской цепи на $\mathscr{A}_0^\Lambda \times \mathscr{A}^{\bar{\Lambda}}$.

4. Макропроцессы на $\mathbb{R}^M_+$

4.1. Динамика на пучке мер. Известно, что часто динамическая полугруппа может быть определена лишь на тангенциальном пучке, а не на конфигурационном пространстве. Аналогичная ситуация имеет место для эволюции струн при $r > 1$: мы должны рассматривать динамику на пучке мер над $\mathbb{R}^M_+$ вместо динамики на самом $\mathbb{R}^M_+$, как это было в случае $r = 1$.

Определение 2. *Пучком мер* над $\mathbb{R}^M_+$ называется множество пар (x, μ), где $x \in \mathbb{R}^M_+ \setminus 0$, а μ – инвариантная мера для индуцированной цепи на грани Λ, принадлежащей $\mathbb{R}^M_+$ и содержащей x, или на некоторой грани Λ_1, замыкание которой содержит Λ.

Предположим также, что в последнем случае μ является исходящей мерой для Λ, т.е. соответствующий вектор сноса имеет положительные компоненты, перпендикулярные к Λ.

Чтобы понять смысл этого определения, поясним его в простейшем случае. Предположим, что мы начинаем со струны α такой, что $|\alpha| = [xN]$, все координаты $x \in \mathbb{R}^M_+$ положительны. Предположим, что x фиксировано, а α выбирается случайно как ограничение стационарного процесса, имеющего распределение μ. Тогда в эйлеровском скейлинге на достаточно малом макровремени τ мы будем двигаться в соответствии с законом больших чисел со скоростью $v(\mu)$ (в действительности, до тех пор, пока не достигнем границы $\mathbb{R}^M_+$).

Определим теперь динамику в общем случае. Пусть в момент времени 0 мы имеем

$$x(0) = x \in \Lambda, \qquad \mu(0) = \mu,$$

где μ – мера для некоторой грани Λ_1, замыкание которой содержит Λ (возможно, $\Lambda_1 = \Lambda$). Тогда

$$x(t) = x + tv(\mu), \qquad \mu(t) \equiv \mu,$$

до тех пор, пока $x(t)$ не достигнет границы Λ_1. В момент t_1, когда $x(t)$ достигает границы Λ_1 в первый раз в некоторой точке $y \in \partial\Lambda_1$, динамика становится разрывной и определяется так:

$$x(t+0) = y, \qquad \mu(t+0) = \nu,$$

где (y, ν) – инвариантная мера на $\partial\Lambda_1$ или исходящая инвариантная мера на некоторой грани Λ_2, замыкание которой содержит $\partial\Lambda_1$. Этот переход определяется оператором *СТОЛКНОВЕНИЙ* или *РАССЕЯНИЯ* S, который является семейством операторов S_Λ для всех Λ:

$$S_\Lambda\colon H(\mathrm{in}, \Lambda) \to H(\mathrm{out}, \Lambda),$$

где $H(\mathrm{in}, \Lambda)$ – множество всех входящих мер для Λ, т.е. мер на гранях размерности $|\Lambda| + 1$, замыкание которых содержит Λ и таких, что их вектор сноса отрицательный в направлении, перпендикулярном Λ. (Выше мы определили исходящие меры; входящие меры определяются аналогично, подобные определения см. в [2].) В $H(\mathrm{out}, \Lambda)$ мы включаем все исходящие меры и меры на самой Λ.

В следующем разделе мы приведем примеры операторов столкновения в двумерном случае. Позже мы дадим общее определение операторов столкновения.

Однако, эти динамические системы помогают только в дух случаях: когда все траектории ведут к нулю или же когда существует грань, все траектории на которой уходят на бесконечность. В тех системах, которые соответствуют сетям обслуживания, изученным к настоящему времени методами теории очередей, только такие ситуации и возникают. В более сложных ситуациях следует избрать другую стратегию.

4.2. Операторы столкновения в двумерном случае. Мы приводим определение и классификацию операторов столкновения в двумерном случае.

Предположим, что μ есть $(+-)$-инвариантная мера для внутренности и

$$\mu_1 = \mathrm{Lim}(P_1(\mu)).$$

Обозначим через $H(\mathrm{out}, \mu_1)$ множество всех инвариантных $(-+)$-мер ν или инвариантных мер ν для одномерной грани 1 таких, что

$$\mu_1 = \mathrm{Lim}(P_1(\nu)).$$

Тогда оператор столкновений S (на грани 1) отображает входящую меру μ в некоторую случайным образом выбранную меру на $H(\mathrm{out}, \mu_1)$. Если выбор меры однозначен, мы называем оператор столкновений *детерминированным*.

ТЕОРЕМА-ГИПОТЕЗА 6. *Если выполнено условие* СУН, *то* $H(\mathrm{out}, \mu_1)$ *состоит лишь из одной меры.*

Это можно доказать, если выполнено условие Ляпунова для μ. Если одна из одномерных граней не имеет исходящих пар, или обе одномерные грани не имеют исходящих пар, то имеет место классификация теоремы 5 (см. выше).

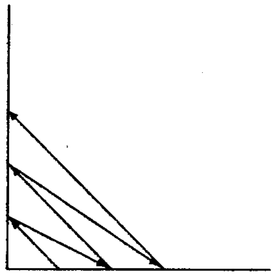

Рис. 1. Странный уход на бесконечность

В этом случае при любом начальном условии за конечное макро-время мы приходим к этой одномерной грани, скажем, к грани 1. Затем мы движемся вдоль грани 1.

Ниже мы дадим примеры, когда обе одномерные грани имеют исходящие пары. Это приводит к "странным" способам ухода на бесконечность, см. рис. 1.

4.3. Детерминированные отражения. Пусть задано разбиение алфавита

$$\{1,\ldots,r\}=\bigcup_{i=1}^{s}F_i,\quad F_i\cap F_j=\varnothing,\qquad i\neq j.$$

Эволюция двух струн $(\alpha(t),\beta(t))$ задается точкой $p\in\mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ – пространство параметров. Обозначим символы струны α в момент времени t через $x_k(t)$, а символы струны β – через $y_k(t)$.

Для заданного p назовем пару подмножеств (F_i,F_j) *устойчивой* парой, если из того, что $x_k(0)\in F_i, y_k(0)\in F_j$ для всех k (в дальнейшем мы пользуемся сокращенными обозначениями $\alpha\in F_i,\beta\in F_j$), следует $x_k(t)\in F_i, y_k(t)\in F_j$ п.н. до тех пор, пока по крайней мере одна из струн не станет пустой.

Определение 3. Состояние (α,β) называется *чистым*, если каждая струна либо пустая, либо все ее символы принадлежат одному и тому же F_i.

Назовем F_i *квазинеприводимыми классами*, если выполнены следующие условия:

- любая пара (F_i,F_j) устойчива;
- множество всех чистых состояний является замкнутым классом для нашей марковской цепи.

Определение 4. Назовем СБВС на $\mathbb{Z}_+^M$ *детерминированным*, если все операторы столкновения детерминированные.

Определение 5. Предположим, что F_i квазинеприводимые. Пару (i,j) назовем *правой допустимой парой* (будем обозначать это так: $i\to j$), если выполнены следующие условия.

- Если обе струны не пустые и $\alpha\in F_i,\beta\in F_j$, то α влияет на β, но не наоборот. Это означает, что α движется независимо от β.
- Струна α имеет инвариантную $(-)$-меру на F_i (т.е. при эволюции ограниченной на F_i). Более того, существует $v>0$ такое, что для всех начальных условий

$$n(\alpha(t))\leqslant n(\alpha(0))-vt$$

до того момента времени, когда $\alpha(t)$ впервые становится пустой.

- Если $\alpha \in F_i$, $\beta \in F_j$, то струна β стремится к бесконечности, и для всех начальных условий
$$n(\beta(t)) \geqslant n(\beta(0)) + (v+\varepsilon)t$$
для некоторого $\varepsilon > 0$ до тех пор, пока одна из струн не станет пустой.

Симметричным образом можно определить *левые допустимые пары* (i,j), которые мы обозначаем $i \leftarrow j$.

ТЕОРЕМА 14. *Пусть $r = 3$, F_i – одноточечные множества, состоящие, соответственно, из точек i. Предположим, что следующие пары являются допустимыми:*

$$1 \to 2, \quad 3 \leftarrow 2, \quad 3 \to 1, \quad 2 \leftarrow 1, \quad 2 \to 3, \quad 1 \leftarrow 3.$$

Предположим также следующее.

- *Если струна 2 лежит в F_2, а струна 1 пустая, то в следующий момент времени струна 1 лежит в F_3;*
- *Если струна 1 лежит в F_3, а струна 2 пустая, то в следующий момент времени струна 2 лежит в F_1;*
- *Если струна 2 лежит в F_1, а струна 1 пустая, то в следующий момент времени струна 1 лежит в F_2;*
- *Если струна 1 лежит в F_2, а струна 2 пустая, то в следующий момент времени струна 2 лежит в F_3;*
- *Если струна 2 лежит в F_3, а струна 1 пустая, то в следующий момент времени струна 1 лежит в F_1;*
- *Если струна 1 лежит в F_1, а струна 2 пустая, то в следующий момент времени струна 2 лежит в F_2.*

Тогда мы уходим на бесконечность так, как это показано на рисунке 1. Точнее, $n_1(t)+n_2(t) \to \infty$, но каждое из $n_i(t)$ становится пустым бесконечно часто п.н.

Это следствие теории случайных блужданий на двумерных комплексах (см. [12]).

Это был простейший пример такого поведения, но могут возникать и более сложные явления: рассеяние и асимптотически инвариантные меры.

Рассеяние. Следующий случай также может быть полностью включен в теорию случайных блужданий на двумерных комплексах, как она была разработана в [18]. Предположим, что каждое из F_i состоит только из одного элемента i, и что для любого k единственными состояниями являются те, для которых либо $n_k = 0$, либо n_k содержит только один тип элементов. Но если, например, $n_1 > 0$, $n_2 = 0$, то каждый тип i может появиться во второй струне с некоторой вероятностью $p(1,k;2,i)$, где k есть тип струны 1.

Асимптотически инвариантные меры. Пусть теперь F_i состоят более чем из одной точки, но удовлетворяют условиям, близким к сформулированным в предыдущей теореме. Предположим, что для допустимой пары $i \to j$ имеется инвариантная $(-+)$-мера μ_{12}^{ij} с "возрастающей" маргинальной составляющей μ_2^j (т.е. той, вдоль которой мы уходим на бесконечность). Тогда вдоль этой меры мы "в конце концов приходим" к оси 2. Затем эта "возрастающая составляющая" становится "убывающей составляющей" (мы движемся назад вдоль той же самой оси) для некоторой инвариантной (+−)-меры μ_{21}^{kj}, если предположить, что $k \leftarrow j$ является допустимой парой. Это определяет оператор рассеяния на оси 2:

$$S\mu_{12}^{ij} = \mu_{21}^{kj}.$$

Заметим, что в этом случае оператор рассеяния детерминированный. Оператор рассеяния на другой оси определяется аналогично.

ТЕОРЕМА 15. *Оба оператора рассеяния здесь существуют и являются детерминированными.*

Мы не доказываем общую теорему существования оператора рассеяния, однако можно привести много примеров, когда она может быть легко доказана.

Можно легко построить примеры, когда имеется большее число допустимых пар, где S случайно, но принимает конечное число значений. Теория рассеяния на двумерных комплексах также покрывает результаты о классификации для этого случая.

Очень важно свойство непрерывности этого оператора: S является непрерывным отображением (в слабой топологии).

4.4. Теорема классификации в размерности 2.

ТЕОРЕМА-ГИПОТЕЗА 7. *Следующее утверждение имеет место на множестве параметров полной меры. Если нет рассеяния, то частица невозвратна, если существует по крайней мере одна траектория динамической системы, идущая в бесконечность. В противном случае она эргодична.*

Эта теорема доказана в [19] при некоторых дополнительных предположениях. Интуитивное доказательство таково. Из непрерывности вытекает, что если существует одна траектория, уходящая на бесконечность, то существует открытое множество таких траекторий. В таком случае можно построить функцию Ляпунова на этом множестве.

Если есть рассеяние, необходимо использовать более тонкую технику (см. ниже).

4.5. Локальные функции Ляпунова. Чтобы доказать существование эйлеровского предела или конечное рассеяние вблизи неэргодической грани, нужны функции Ляпунова или некоторая специальная структура случайного блуждания. Примером являются сети FIFO, для которых существует более простой метод доказательства сходимости к модели жидкости. В этой системе нужно рассмотреть один узел и его входящий и выходящий потоки. В предположении, что существует скейлинговый предел для входящих потоков, можно доказать, что он существует и для выходящих потоков. Затем такие локальные картинки для различных узлов склеиваются вместе.

Что касается первого метода, мы дадим точные определения локальных функций Ляпунова для случая, когда на каждой грани существует только один тип инвариантных мер.

УСЛОВИЕ 6 (локальное условие Ляпунова). *Для эргодических граней мы предполагаем существование функций Ляпунова во всех перпендикулярных направлениях, это вынуждает частицу быстро достичь данную грань. Для неэргодических граней Λ мы предполагаем, что, равномерно по начальным условиям, перпендикулярно входящие (в Λ) координаты имеют функцию Ляпунова, которая* *вынуждает частицу быстро достичь грань, и существует единственная эргодическая исходящая грань с функцией Ляпунова, вынуждающая частицу быстро уйти с грани* Λ.

При этом условии существование предела при эйлеровском скейлинге легко доказывается, двумерный случай см. в [19].

4.6. Общее определение операторов столкновения. Рассмотрим некоторую входящую меру μ (т.е. меру с вектором сноса, смотрящим в сторону грани) и возьмем ее проекцию $\mu_\Lambda = P_\Lambda \mu$ на Λ. Если существует только одна исходящая мера ν с $\mu_\Lambda = P_\Lambda \nu$, то положим

$$S\mu = \nu.$$

Если это имеет место для всех Λ и всех μ, назовем макропроцесс детерминированным.

В более общих ситуациях нужно доказывать существование стохастического ядра рассеяния. Оператор S становится стохастическим оператором: для каждой Λ и каждой входящей меры μ имеется распределение $S(\mu, \nu)$ на пространстве исходящих мер ν для грани Λ. Есть примеры, когда стохастическое ядро строится следующим образом. Сначала для каждой неэргодической грани Λ строится специальная *ЛОКАЛЬНАЯ* цепь. В терминах этой цепи ν являются элементами границы выхода для этой локальной цепи. Для каждого μ ядро $S(\mu, \nu)$ определяет распределение на границе выхода. Таким образом, если для эргодических граней основным инструментом являются индуцированные цепи, определяющие детерминированную эволюцию на грани, то для неэргодических граней таким инструментом являются *ЛОКАЛЬНЫЕ* цепи.

Все ядра в совокупности определяют марковский процесс на $\mathbb{R}_+^M$.

Дискретное распределение является простейшим частным случаем (см. [12]), но также и непрерывные распределения могут существовать даже при $r = 1$. Простейший пример: $\mathbb{Z}^2$ разделена на 4 квадранта, $\mathbb{Z}_{++}, \mathbb{Z}_{+-}, \mathbb{Z}_{-+}, \mathbb{Z}_{--}$. В каждом квадранте имеется однородное случайное блуждание, векторы сноса показаны на рис. 2. Предположим, что на границах (полуосях) скачки такие же, как внутри исходящего квадранта для соответствующей полуоси. Зададим векторное поле $v(x)$ в $\mathbb{R}^2$ постоянным в каждом квадранте. Пусть C есть изохронная кривая: $C = \{x :$ время достижения нуля обращенным процессом (вдоль векторного поля $-v(x)$) равно $1\}$.

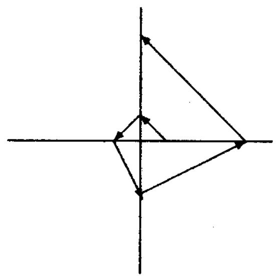

Рис. 2. Непрерывное рассеяние

Теорема-Гипотеза 8. *Существует эйлеровский предел в смысле сходимости по распределению, и носитель предельного распределения принадлежит изохронной кривой.*

Первое утверждение можно доказать, используя трюк, подобный тому, что используется для доказательства теоремы Ван Хова в статистической механике.

5. Макропроцессы на компактных пучках мер

Здесь мы можем дать лишь очень краткое изложение, параллельное [2], все обозначения и определения могут быть взяты из [2].

Пусть φ есть радиальная проекция $\mathbb{R}_+^M$ на симплекс

$$B^{M-1} = \left\{(x_1, \ldots, x_M) : \sum_i x_i = 1\right\} \subset \mathbb{R}_+^M.$$

Пусть U^τ есть радиальная проекция динамической системы $T^{\tilde{\tau}}$, сопровождаемая заменой времени $\tau = \tau(\tilde{\tau})$, эта замена времени выбирается подобно [2].

Это порождает соответствующее отображение $\varphi \times 1$ пучка мер над $\mathbb{R}_+^M$ на пучок мер над B^{M-1}.

Мощным инструментом является также сокращение размерности: мы можем рассматривать лишь ограничение U^τ на границу ∂B^{M-1} симплекса B^{M-1}, потому что спустя конечный промежуток времени система достигнет ∂B^{M-1} и останется там навсегда, за исключением того тривиального случая, когда все координаты вектора сноса внутри ортанта положительны. Заметим, что ∂B^{M-1} изоморфна $(M-2)$-мерной сфере S^{M-2}. Таким образом, мы получаем динамическую систему на компактном многообразии.

Может оказаться так, что этот процесс сокращения размерности возможно будет продолжить дальше. Тем самым получаются динамические системы на более сложных многообразиях $\mathscr{S}$ (с границей или без нее), но имеющих меньшую размерность.

В соответствии с результатами для $r = 1$ свойство непрерывности процесса может оказаться очень важным. Поэтому нам необходимо ввести топологию на пучке мер, используя лебегову топологию евклидова пространства и слабую топологию на пространстве мер.

5.1. Основная теорема. Определения основных констант L и M взяты нами из [2].

ТЕОРЕМА 16. *Предположим, что макропроцесс является детерминированным и соответствующая динамическая система имеет конечное число непрерывных и строго эргодических компонент $i = 1, \ldots, k$. Пусть ρ_i есть нормированная неотрицательная инвариантная (по отношению к макропроцессу) мера для i-й компоненты.*

- *Если динамическая система строго эргодична, то $M = L$ и система эргодична, если $L < 0$.*
- *Пусть выполнено условие равномерной сходимости, подобное тому, что сформулировано в главе 3 в [2]. Пусть, кроме того, по крайней мере одна из констант L_{ρ_i} положительна. Тогда процесс является невозвратным.*
- *При тех же условиях, если все константы L_{ρ_i} отрицательны, то процесс эргодичен.*

Доказательство. Первое утверждение может быть доказано в точности так же, как теорема 3.1.1 в [2]. Остальные утверждения также аналогичны теоремам 3.2.1, 3.3.1 и 3.3.2 из [2].

6. Приложения

6.1. Приложения – некоммутативные группы. Наши результаты для одной струны покрывают ряд задач для свободных и модулярных групп, изучавшихся ранее (см. [4] и многочисленные статьи в журнале Annals of Probability). Соответствующие этой группе задач системы струн обладают свойством ограниченности скачков. В нашей терминологии это свойство выражается так: если в момент времени t состояние процесса есть слово $\alpha(t)$, то в момент $t+1$ слово $\alpha(t+1)$ отличается от $\alpha(t)$ не более чем на d символов в конце. Таким образом, случайные блуждания на таких группах вызывают лишь локальные изменения в конце слова. Напомним, что случайное блуждание на G определяется множеством параметров $\{p_i\}_{i=-r,\ldots,r}$, $\sum_i p_i = 1$, $p_i > 0$, задающих вероятности переходов $\rho \to \rho e_i$, где e_i – генераторы для $i > 0$, $e_0 = 1$, $e_i = e_{-i}^{-1}$, $i < 0$.

Для локальных групп это свойство не выполнено: переход за один шаг может изменить струну по всей ее длине. В контексте групп можно очень естественно подойти к новому пласту задач об эволюции струны, для которой свойство ограниченности скачков не выполняется. В [20] были введены локально свободные группы как промежуточный по сложности класс между свободными и модулярными группами, с одной стороны, и группами кос, с другой стороны. Группы кос имеют важные применения в квантовой теории поля.

Точнее, рассмотрим следующий класс (очевидно, не аменабельных) групп G с генераторами $S = \{e_i\}$, $i = 1,\ldots,r,-1,\ldots,-r$, $e_i^{-1} = e_{-i}$, и единственными определяющими соотношениями

$$e_i e_j = e_j e_i$$

для некоторого множества I пар (i,j).

Таким образом, группа полностью определяется множеством I. Заметим, что два генератора e_i, e_j либо коммутируют, $e_i e_j = e_j e_i$, либо порождают свободную подгруппу группы G.

Следуя [20], где рассматривался специальный выбор I, мы называем такие группы *локально свободными.*

А. Гайрат доказал невозвратность, закон больших чисел и центральную предельную теорему для этого класса групп.

6.2. Другие среды.

Двухсторонняя эволюция. Правосторонняя эволюция струны определялась следующими вероятностями переходов за один шаг:

$$q_r(x,\varnothing),\ q_r(x,y),\ q_r(x,yz).$$

Законы стабилизации определяют (неявно) функции от $\{q_r\}$

$$v_r > 0,\ \mu_r,\ v_{r,\mathrm{erg}}(\mu) > 0,$$

а именно:

- в невозвратном случае
$$\frac{a(t)}{t} \to v_r$$
при $t \to \infty$, где $a(t)$ – координата частицы (т.е. правого конца струны);
- в невозвратном случае μ_r есть инвариантная мера, а $\mathrm{Lim}(\mu)$ – ее предел;
- в эргодическом случае если начальное условие задано ограничением стационарного процесса η на $\mathbb{Z}$ (мы будем распределение этого процесса также обозначать η), то
$$\frac{a_t}{t} \to -v_{r,\mathrm{erg}}(\mu).$$

Подобным образом мы можем определить эволюцию левого конца обращенной (левосторонней) струны. Обозначим соответствующие этой эволюции параметры

$$q_l,\ v_l > 0,\ \mu_l,\ v_{r,\mathrm{erg}}(\eta) > 0,$$

где, например, в эргодическом случае

$$\frac{b_t}{t} \to -v_{r,\mathrm{erg}}(\mu),$$

b_t – координата левого конца струны.

Двухсторонняя эволюция конечных струн определяется как независимая эволюция левого и правого концов, соответствующая множеству параметров q_l, q_r. Оказывается, двухстороннюю эволюцию можно изучать в терминах односторонней эволюции с тремя параметрами $v_l, \mu_l, v_{l,\mathrm{erg}}(\eta)$ и аналогичными параметрами с индексами r. Наиболее труден случай, когда одна струна, скажем, левосторонняя, невозвратна, а правосторонняя струна эргодична. Наш основной результат состоит в следующем. При двухсторонней эволюции длина струны стремится к бесконечности п.н., если

$$v_l > v_{r,\mathrm{erg}}(\mathrm{Lim}\,\mu_l).$$

Если же

$$v_l < v_{r,\mathrm{erg}}(\mathrm{Lim}\,\mu_l),$$

то средняя длина струны остается ограниченной. Полное изложение и доказательства даны в [11].

6.3. Случайная машина Тьюринга [33]. Пусть задана цепь Маркова с дискретным временем $\mathscr{L}$ на пространстве состояний $X = \mathbb{Z}_+ \times \{1,\dots,r\}^{\mathbb{Z}_+}$. Таким образом, X – это множество пар (x, α), где $n \in \mathbb{Z}_+$ – координата частицы (или головка машины Тьюринга, $\mathbb{Z}_+$ рассматривается как лента машины Тьюринга), а α – конфигурация спинов из $\mathbb{Z}_+$ (или среда, или программа на ленте машины Тьюринга).

Пусть позиция частицы в момент t равна $n > 0$, а значение спина в n равно $\alpha(n) = a$. Тогда имеются две возможности.

1) В момент $t + 1$ частица прыгает в $n - 1$ с вероятностью q_b^a, а значение спина в n меняется с a на b.
2) С вероятностью $\overline{q}_b^a$ частица прыгает в $n + 1$, а спин в n меняется с a на b.

Спины в других точках не изменяются в момент $t+1$.

Марковская цепь $\mathcal{L}$ полностью определена матрицами $Q = \{q_b^a\}$ и $\overline{Q} = \{\overline{q}_b^a\}$, $a,b \in \{1,\ldots,r\}$. Ясно, что $Q+\overline{Q}$ является стохастической $r \times r$-матрицей. Предположим, что $q_b^a > 0, \overline{q}_b^a > 0$ для всех a,b.

Обозначим (n_t, α_t) состояние процесса в момент t, здесь n_t – координата частицы, а α_t – конфигурация на $\mathbb{Z}_+$.

Обозначим $\tau(\alpha)$ первый момент достижения нуля частицей, если начальное состояние равно $(1,\alpha)$:

$$\tau(\alpha) = \min\{t : n_t = 0 \mid n_0 = 1,\ \alpha_0 = \alpha\}.$$

Нам понадобятся следующие определения.

Определение 6. Цепь $\mathcal{L}$ *эргодична* для данного α, если $\mathsf{P}\{\tau(\alpha) < \infty\} = 1$, т.е. частица достигнет нуля с вероятностью 1 и существует T такое, что $\mathsf{E}\tau(\alpha) < T$. Мы назовем $\mathcal{L}$ *равномерно эргодической*, если среднее время первого возвращения в 0 ограничено равномерно по α.

Определение 7. Цепь $\mathcal{L}$ *возвратна* для данного начального состояния $(1,\alpha)$ (равномерно возвратна) тогда и только тогда, когда $\mathsf{P}\{\tau(\alpha) < \infty\} = 1$ (для всех α).

Определение 8. Цепь $\mathcal{L}$ *невозвратна* для данного α (равномерно невозвратна) тогда и только тогда, когда существует $p < 1$ такое, что $\mathsf{P}\{\tau(\alpha) < \infty\} < p$ (для всех α).

Теорема 17. *Пусть π_0 есть стационарное распределение стохастической матрицы $Q+\overline{Q}$ и*

$$q \stackrel{\text{def}}{=} \pi_0 Q\vec{1}, \qquad \overline{q} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_0 \overline{Q}\vec{1}.$$

Тогда

1) *$\mathcal{L}$ равномерно эргодична тогда и только тогда, когда*

$$q > \overline{q}. \tag{1}$$

2) *$\mathcal{L}$ равномерно невозвратна тогда и только тогда, когда*

$$q < \overline{q}. \tag{2}$$

Случай $q \neq \overline{q}$ называется *некритическим случаем.* В критическом случае (т.е. при $q = \overline{q}$) верен следующий результат.

Пусть α – однородная конфигурация, т.е. $\alpha = ddd\ldots$, или, что равносильно, $\alpha(i) = d$ для всех $i \in \mathbb{Z}_+$ для некоторого $d \in \{1,\ldots,r\}$.

Введем следующие обозначения:

$$a = \sum_{l=0}^{\infty}(\delta_d - \pi)P^l A\vec{1}, \qquad b = 1 + \sum_{l=0}^{\infty}(\pi A - \pi)P^l A\vec{1},$$

где $P = (I - \overline{Q})^{-1}Q$, а π – стационарное распределение, соответствующее стохастической матрице P; δ_d – точечная мера на $\{1,\ldots,r\}$, сосредоточенная в точке d.

ТЕОРЕМА 18. *Пусть начальное состояние равно* $(1, \alpha)$. *Тогда*

- *если* $a < -b$, *то* $\mathscr{L}$ *эргодична*;
- *если* $a > b$, *то* $\mathscr{L}$ *невозвратна*;
- *если* $-b < a < b$, *то* $\mathscr{L}$ *нулевая возвратная*.

6.4. Сети обслуживания с несколькими типами требований. Очереди FIFO с условиями синхронизации и несколькими типами заявок в марковском случае являются частным случаем двухсторонней эволюции, рассмотренной выше. Итак, сеть FIFO описывается как система, состоящая из M струн с двухсторонней эволюцией. Но для сетей FIFO и другой, традиционный, язык также оказывается полезным. Ниже мы приводим результаты, касающиеся поведения некоторых классов сетей с дисциплиной FIFO в контексте эйлеровского скейлинга, который в цитируемых нами работах называется жидкостным пределом.

- Прежде всего, вызывают интерес детерминированные сети обслуживания, так как они могут послужить примерами динамических систем, возникающих при изучении стохастических процессов (см. [21], [22]). Во многих случаях условия эргодичности зависят *ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО* от природы соответствующей динамической системы (заметим, что сама динамическая система существенно зависит от всех переходных вероятностей).
- Жидкостные модели, связанные с некоторыми сетями, исследуются в [23].
- Существование эйлеровского предела (в некотором более слабом смысле) доказано в [24]. Формулировка результата не различает детерминированного случая и случая, когда есть рассеяние.
- Условия эргодичности изучаются в работах [25]–[28].
- Другие (не жидкостные) методы получения условий эргодичности предложены в [29], [30].

6.5. Нейронные сети. Случай $r = 1$ имеет в настоящее время много приложений к динамике нейронных сетей. Первое применение было к не очень известной модели спинового стекла (см. [31] и ссылки в ней). Недавно было обнаружено, что модель Фиготина–Пастура–Хопфилда с конечным числом образов также подпадает под этот случай (см. [32]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Spitzer F. Principles of Random Walk. New York: Van Nostrand, 1964.

[2] Malyshev V. A. Networks and Dynamical Systems // Adv. Appl. Probab. 1993. V. 25. P. 140–175.

[3] Grigorchuk R. I. Symmetrical Random Walks on Discrete Groups // Multicomponent Random Systems. Adv. Probab. Rel. Topics. V. 6. New York: Marcel Dekker, 1980. P. 285–326.

[4] Дынкин Е. Б., Малютов М. Б. Случайные блуждания на группах с конечным числом образующих // Докл. АН СССР. 1961. Т. 2. С. 399–402.

[5] Lalley S. Finite range random walk on free groups and homogeneous trees // Ann. Probab. 1993. V. 21. №4. P. 2087–2130.

[6] Sawyer S., Steger T. The rate of escape for anisotropic random walk in a tree // Probab. Theory and Relat. Fields. 1987. V. 76. P. 207–230.

[7] Kesten H., Kozlov M., Spitzer F. A limit law for random walk in a random environment // Compositio Mathematica. 1975. V. 30. №2. P. 142–168.

[8] Малышев В. А. Законы стабилизации при эволюции случайной струны // Проблемы передачи информации. 1994. Т. 30. №3. С. 79–95.

[9] Гайрат А.С., Малышев В.А., Пелих К.Д. Классификация цепей Маркова, описывающих эволюцию струны // УМН. 1995. Т. 50. №3. С. 5–24.

[10] Gairat A., Iasnogorodski R., Malyshev V. Null Recurrent Random String // Markov Processes and Related Fields. 1996. V. 2. №3. P. 427–460.

[11] Gairat A.S., Malyshev V., Zamyatin A. Two-sided evolution of a random chain // Markov Processes and Related Fields. 1995. V. 1. №2. P. 281–316.

[12] Fayolle G., Malyshev V.A., Menshikov M.V. Topics in Constructive Theory of Countable Markov Chains. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

[13] Замятин А.А., Ямбарцев А. Транзитная динамика двух взаимодействующих струн // Фундам. и прикл. матем. 1996. V. 2. №4.

[14] Kelly F. Reversibility and Stochastic Networks. New York: John Wiley, 1979.

[15] Baskett F., Chandi K.M., Muntz R.R., Palacios F.G. Open, closed and mixed network of queues with different classes of customers // Journ. Assoc. Computing Machinery. 1975. V. 22. №2. P. 248–260.

[16] Андреенко Н., Гайрат А.С., Замятин А.А. Термодинамический предельный переход для конечных струн // Препринт. М.: МГУ, 1996.

[17] Malyshev V.A. Stabilization laws for processes with a localized interaction // Rapport de Recherche INRIA. №1635, 1992.

[18] Fayolle G., Ignatyuk I.A., Malyshev V., Menshikov M. Random walks in two-dimensional complexes // Queueing Systems. 1991. V. 9. №3. P. 269–300.

[19] Zamyatin A., Soboleva A. Ergodicity and transience conditions for two strings // Preprint, 1996.

[20] Nechaev S.K., Grosberg A.Yu., Vershik A.M. Random Walks on Braid Groups: Brownian Bridges, Complexity and Statistics // Preprint, 1995.

[21] Seidman T.I. First Come, First Served can be unstable! // IEEE Trans. Automatic Control. 1994. V. 39. №10.

[22] Winograd G.I., Kumar P.R. The FCFS service discipline: stable network topologies, bounds on traffic burstiness and delay, and control by regulators // Preprint, 1994.

[23] Dumas V. Instability cycles in fluid Bramson networks // IEEE Trans. Automatic Control. (to appear).

[24] Stolyar A. On the stability of multiclass queueing networks: a relaxed sufficient condition via limiting fluid processes // Markov Processes and Related Fields. 1995. V. 1. №4. P. 491–512.

[25] Chen H., Zhang H. Stability of multiclass queueing networks under FIFO service discipline // Preprint, 1994.

[26] Rybko A.N., Stolyar A.N. Ergodicity of stochastic processes describing the operation of open queueing networks // Problems of Information Transmission. 1992. V. 28. №3. P. 3–26.

[27] Bramson M. Convergence to equilibria for fluid models of FIFO queueing network // Queueing Theory. 1996. V. 22. P. 5–45.

[28] Foss S.G., Rybko A.N. Stability of multiclass Jackson-type networks // Markov Processes and Related Fields. 1996. V. 2. №3. P. 461–486.

[29] Bramson M. Instability of FIFO queueing networks // Ann. Appl. Probab. 1994. V. 4. P. 414–431.

[30] Bramson M. Instability of FIFO queueing networks with quick service times // Ann. Appl. Probab. 1994. V. 4. P. 693–718.

[31] Karpelevich F., Malyshev V., Rybko A. Stochastic Evolution of Neural Networks // Markov Processes and Related Fields. 1995. V. 1. №1. P. 141–161.

[32] Malyshev V., Spieksma F. Dynamics of Binary Neural Networks // ESI preprint, 1996.

[33] Gairat A.S. Random walk of an active particle in nonhomogeneous environment // Markov Processes and Related Fields. 1995. V. 1. №1. P. 91–113.

INRIA-Domaine de Voluceau, Rocquencourt,
BP105-78153-Le Chesnay, France

Поступила в редакцию
15.09.1996