ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1971

т. 196, № 3

Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 3

УДК 519.21 **МАТЕМАТИКА**

В. А. МАЛЫШЕВ

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 VI 1970)

Рассмотрим однородную цепь Маркова с дискретным временем, множеством состояний которой является множество $\{\alpha = (i, j): i, j \geqslant 0$ целые$\}$. Пусть $p_{\alpha\beta}$ — переходные вероятности. При этом, если $\alpha = (k, l)$, $\beta = (k+i, l+j)$, то $p_{\alpha\beta} = p_{ij}$ при $k, l \geqslant 1$; $p_{\alpha\beta} = p_{ij}'$ при $k \geqslant 1$, $l = 0$; $p_{\alpha\beta} = p_{ij}''$ при $k = 0$, $l \geqslant 1$ и $p_{\alpha\beta} = p_{ij}^0$ при $k = l = 0$. При этом мы везде считаем, что i, j равны нулю, если либо $|i| \geqslant 2$, либо $|j| \geqslant 2$, причем, конечно, у p_{ij}' индекс $j \geqslant 0$, у p_{ij}'' индекс $i \geqslant 0$ и т. д.

Случайное блуждание будет предполагаться невырожденным [1] и имеющим единственный существенный класс состояний. Если стационарное распределение существует, то обозначим стационарные вероятности $\pi_\alpha = \pi_{ij}$.

Данная работа является развитием работы [1]. В ней методами теории Галуа были исследованы случаи, когда производящие функции стационарных вероятностей рациональны, и, в частности, показано, что рациональность имеет место лишь на некоторых алгебраических подмногообразиях пространства параметров p_{ij}, p_{ij}', p_{ij}'', p_{ij}^0. В данной работе находится интегральное представление для стационарных вероятностей в общем случае и, кроме того, условия существования стационарного распределения.

Введем следующие производящие функции стационарных вероятностей внутри четверти плоскости и на границах, определенные, по крайней мере, при $|x|, |y| \leqslant 1$:

$$\pi(x, y) = \sum_{i, j=1}^{\infty} \pi_{ij} x^{i-1} y^{j-1}, \quad \pi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{i0} x^{i-1}, \quad \tilde{\pi}(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{0j} y^{j-1}.$$

Если найдены $\pi(x)$, $\tilde{\pi}(y)$ и π_{00}, то $\pi(x, y)$ выражается через них следующим образом:

$$\pi(x, y) = [q(x, y)\pi(x) + \tilde{q}(x, y)\tilde{\pi}(y) + \pi_{00} q_0(x, y)] / Q(x, y), \tag{1}$$

где многочлены Q, q, $\tilde{q}$ и q_0 являются производящими функциями скачков (несколько измененными)

$$Q(x, y) = xy\left(1 - \sum_{i, j=-1}^{1} p_{ij} x^i y^j\right), \quad q(x, y) = x\left(\sum_{i, j=-1}^{1} p_{ij}' x^i y^j - 1\right),$$

$$\tilde{q}(x, y) = y\left(\sum_{i, j=-1}^{1} p_{ij}'' x^i y^j - 1\right), \quad q_0(x, y) = \sum p_{ij}^0 x^i y^j - 1.$$

Существование стационарного распределения определяется средними скачками за один шаг в направлении каждой из осей внутри и на границах четверти плоскости:

$$M_x = \sum_j p_{1j} - \sum_j p_{-1, j}, \quad M_y = \sum_i p_{i1} - \sum_i p_{i, -1},$$

$$M_x' = \sum_j p_{1j}' - \sum_j p_{-1,\,j}', \quad M_y' = \sum_i p_{i1}' - \sum_i p_{i,\,-1}'$$

и т. д. Далее для сокращения формулировок предполагается, что $M_x < 0$, $M_y < 0$.

Теорема 1. *Стационарное распределение существует тогда и только тогда, когда*

$$M_xM_y' - M_yM_x' < 0, \quad M_yM_x'' - M_xM_y'' < 0. \tag{2}$$

Далее мы говорим только о функции $\pi(x)$; формулировки для $\tilde{\pi}(y)$ получаются симметричным образом, а $\pi(x, y)$ рационально выражается через них по формуле (1).

Предполагается, что условия (2) выполнены.

Лемма 1. *Алгебраическая функция $y(x)$, определяемая уравнением*

$$Q(x, y) = 0, \tag{3}$$

имеет точно две точки ветвления, расположенные строго вне единичного круга. Эти точки ветвления вещественны, причем наименьшая из них по модулю (обозначаемая далее x_3), всегда положительна. Две другие точки ветвления, также вещественные, лежат в единичном круге.

Аналитическое поведение решения. Многие интересные свойства (например, асимптотика) определяются возможностью аналитического продолжения соответствующих производящих функций. Оказывается, что $\pi(x)$, априори аналитическая в единичном круге, мероморфно продолжается в круг $|x| < x_3$, а далее в нерациональном случае начинает ветвиться, причем все точки ветвления имеют алгебраический характер и их бесконечное число. Точная формулировка дается в теореме 2.

Обозначим через S риманову поверхность поля алгебраических функций, определенного уравнением (3), а через Ω — ее универсальную накрывающую с некоторым фиксированным накрытием $\lambda\colon \Omega \to S$. Имеем следующую диаграмму накрытий

$$\begin{tikzcd} & & \mathbf{P} \\ \Omega \arrow[r, "\lambda"] & S \arrow[ur, "h_1"] \arrow[dr, "h_2"'] & \\ & & \mathbf{P}. \end{tikzcd}$$

Здесь h_1 и h_2 — естественные накрытия римановой поверхностью S комплексной проективной прямой $\mathbf{P}$, соответствующие реализации S как римановой поверхности алгебраических функций $y(x)$ и $x(y)$ соответственно.

Пусть D и $\tilde{D}$ — области на S, где соответственно $|x(s)| < 1$ и $|y(s)| < 1$, $s \in S$.

Лемма 2. *Риманова поверхность S всегда имеет род 1. Граница D состоит из двух простых аналитических непересекающихся замкнутых кривых: Γ_0, где $|y(s)| \leqslant 1$, и Γ_1, где $|y(s)| \geqslant 1$. Аналогичное утверждение верно для границы, $\tilde{\Gamma}_0 \cup \tilde{\Gamma}_1$ области $\tilde{D}$. Кривые Γ_0, Γ_1, $\tilde{\Gamma}_0$, $\tilde{\Gamma}_1$ гомотопны, причем их класс гомологий является одним из элементов нормального базиса гомологий на торе. При этом пересечение $G = D \cap \tilde{D}$ непусто и ограничено кривыми Γ_0 и $\tilde{\Gamma}_0$.*

Риманова поверхность S является фактором Ω по решетке периодов $\{n\omega_1 + m\omega_2\}$ (далее будет предполагаться без ущерба для общности, что $\lambda([0, \omega_1])$ гомологична Γ_0). Зафиксируем одну из связных компонент Δ_0 прообраза $\lambda^{-1}(D \cup \tilde{D})$. Далее прообразы кривых и областей из S на Δ_0 будут обозначаться теми буквами, что и на $D \cup \tilde{D}$ (так $\Gamma_0 = \Delta_0 \cap \lambda^{-1}(\Gamma_0)$). Очевидным образом функции $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ могут быть подняты соответственно на области $D \subsetneq \Delta_0$ и $\tilde{D} \subset \Delta_0$. При этом, например, $\pi(\omega) = \pi(h_1\lambda\omega)$.

Теорема 2. *Функции $\pi(\omega)$ и $\tilde{\pi}(\omega)$, априори аналитические в областях $D \subset \Delta_0$ и $\tilde{D} \subset \Delta_0$ соответственно, могут быть мероморфно продолже-*

ны на всю универсальную накрывающую Ω, причем они имеют на Ω период ω_1.

Таким образом, риманова поверхность функций $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ топологически представляет собой бесконечный цилиндр, т. е. фактор $\mathbf{C}$ по $\{n\omega_1\}$.

Интегральное представление решения. Функции x, y, $q(x, y)$, $\tilde{q}(x, y)$, $q_0(x, y)$, поднятые на Ω, являются эллиптическими функциями, обозначаемыми далее $x(\omega)$, $y(\omega)$, $q(\omega) = q(x(\omega), y(\omega))$ и т. д. Обозначим через x_1 и y_1 любые из точек ветвления функций соответственно $y(x)$ и $x(y)$, лежащих в единичном круге, и пусть $a = \lambda^{-1}(h_1^{-1}(x_1)) \cap \cap \Delta_0$, $b = \lambda^{-1}h_2^{-1}(y_1) \cap \Delta_0$ (ввиду теоремы 2 можно предполагать, что все делается по $\mathrm{mod}\, \omega_1$, т. е. в полосе $\Pi = \{\omega\colon \omega = \mu\omega_1 + \nu\omega_2, 0 \leqslant \mu < 1, \nu < \infty)$. Введем автоморфизмы отражений ξ и η относительно точек a и b соответственно (поднятие автоморфизмов Галуа (1) на Ω). $\xi\eta$ есть сдвиг на ω_3 — удвоенное расстояние между a и b. Пусть $\zeta(\omega)$ — ζ-функции Вейерштрасса с периодами ω_1 и ω_3 и началом координат в точке a.

Пусть $l \subset G$ — произвольная замкнутая кривая, гладкая и без самопересечений, гомотопная Γ_0, причем $q \neq 0$ в замыкании области, расположенной между l и Γ_0 на Δ_0, а $\tilde{q} \neq 0$ в замыкании области, расположенной между l и $\tilde{\Gamma}_0$ (кроме конечно точки, где $x = y = 1$).

Лемма 3. *Кривую l, обладающую перечисленными выше свойствами, можно выбрать так, чтобы $\operatorname{ind}\limits_{l} xq / \tilde{q} = 0$.*

Пусть $\varkappa$ — группа преобразований Ω, порожденная ξ и η. Введем аналитическую всюду кроме сетки кривых $\varkappa l$, двоякопериодическую с периодами ω_1 и ω_3 функцию

$$\rho(\omega) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}(\zeta(\omega - \tau) + \zeta(-\omega - \tau)) \ln\frac{x(\tau)\,\tilde{q}(\tau)}{q(\tau)}\,d\tau\right],$$

причем на каждой кривой из $\varkappa l$ определим $\rho(\omega)$ как предельное значение $\rho(\omega)$ слева при обходе в направлении ω_1). Введем обладающую такими же свойствами функцию

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}[\zeta(\omega - \tau) + \zeta(-\omega - \tau)]\,\frac{x(\tau)\,q_0(\tau)}{q(\tau)\,\rho(\tau)}\,d\tau.$$

Теорема 3. *В области $\Delta_l \subset D$, являющейся связной компонентой $\Omega \setminus \setminus \{\varkappa l\}$, замыкание которой содержит точку ω_0, где $x = y = 1$, и точку $\xi\omega_0$, имеет место*

$$\pi(\omega) = \rho(\omega)\,[c + \chi(\omega)]/x(\omega), \tag{4}$$

где константа c определяется так, чтобы в точке $x(\omega) = 0$ числитель (4) обращался в нуль.

Замечание. В остальных точках $\pi(\omega)$ можно найти, используя теорему 2 и тот факт, что числитель $\Pi(\omega)$ правой части (4) имеет следующие скачки на кривых $\varkappa l$:

$$\Pi_+(\omega) - \frac{\tilde{q}(\omega)}{q(\omega)}\Pi_-(\omega) = -\frac{q_0(\omega)}{q(\omega)}, \quad \omega \in l \cap \overline{\Delta}_l;$$

$$\Pi_-(\omega) - \frac{\tilde{q}(\xi\omega)}{q(\xi\omega)}\Pi_+(\omega) = -\frac{q_0(\xi\omega)}{q(\xi\omega)}, \quad \omega \in \xi l \cap \overline{\Delta}_l$$

(здесь Π_+ и Π_- — предельные значения $\Pi(\omega)$ слева и справа соответственно, а скачки на остальных кривых hl, $h \in \varkappa$, находятся из условия двоякопериодичности функции $\Pi(\omega)$). Собственно, сведение к задаче Римана (5) и является основным в доказательстве теоремы 3.

Если $q(\omega) / \tilde{q}(\omega) \equiv \mathrm{const}$, что имеет место, например, для случайного блуждания с косым отражением (2), то решение выражается в виде обычного эллиптического интеграла.

Можно получить интегральное представление непосредственно для стационарных вероятностей. Мы сформулируем его здесь на примере блужданий с группой четвертого порядка автоморфизмов S.

Если $Q(x, y) \equiv a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, то введем абелев дифференциал первого рода на S

$$d\omega = -dx/[2a(x)y + b(x)].$$

Рассмотрим область R, лежащую между Γ_1 и $(\xi_\eta)^2\widetilde{\Gamma}_1 = \widetilde{\Gamma}_1 + 2\omega_3$. Можно считать, что $R \subset S$.

Теорема 4. *Для простого случайного блуждания имеет место*

$$\pi_{mn} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1} \frac{q}{x^m y^n}[(ff_\delta - 1)\pi(x)' + f_\delta\psi + \psi]\, d\omega +$$

$$+ \sum_{s\in R} \operatorname{Res}_s \left[\frac{q\pi(x)}{x^m y^n} d\omega\right],$$

где

$$f = \frac{q\widetilde{q}_\eta}{\widetilde{q}\, q_\eta}, \quad \psi = \frac{\widetilde{q}_\eta}{q}\left(\frac{q_0}{\widetilde{q}} - \frac{q_{0\eta}}{\widetilde{q}_\eta}\right),$$

а Res_s *означает вычет в точке* s *у стоящего в скобках мероморфного дифференциала на* S. *При этом* $\widetilde{\Gamma}_1$ *ориентирована так, чтобы* Δ *при обходе оставалась слева.*

Аналогичное соотношение имеет место и для случайного блуждания с произвольной группой. Если норма $N_{\mathrm{C}_0}{}^{\mathrm{C}}{}_Q(f) = ff_\delta = 1$, что имеет место, например, для случайного блуждения с косым отражением, то подынтегральное выражение в формуле (5) не содержит $\pi(x)$. Теорема 4 доказывается с помощью теории Лере ([3]) и является основной для получения разного рода асимптотических представлений.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Малышев, УМН, 26, 1 (1971). [2] В. А. Малышев, Тр. Советско-Японского симпозиума по теории вероятностей, Хабаровск, 1969, стр. 176. [3] Ж. Лере, Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии, М., 1961.

Dokl. Akad. Nauk SSSR
Tom 196 (1971), No. 3

Soviet Math. Dokl.
Vol. 12 (1971), No. 1

POSITIVE RANDOM WALKS AND GENERALIZED ELLIPTIC INTEGRALS

UDC 519.21

V. A. MALYŠEV

Consider a homogeneous Markov chain with discrete time with set of states $\{\alpha = (i, j): i, j \geq 0$ are integers$\}$. Let $p_{\alpha\beta}$ be transition probabilities. Now if $\alpha = (k, l)$, $\beta = (k + i, l + j)$, then $p_{\alpha\beta} = p_{ij}$ for $k, l \geq 1$; $p_{\alpha\beta} = p'_{ij}$ for $k \geq 1$, $l = 0$; $p_{\alpha\beta} = p''_{ij}$ for $k = 0$, $l \geq 1$ and $p_{\alpha\beta} = p^0_{ij}$ for $k = l = 0$. We always assume that i, j are equal to zero if either $|i| \geq 2$ or $|j| \geq 2$, and, finally, p'_{ij} has index $j \geq 0$, p''_{ij} has index $i \geq 0$, etc.

We assume that the random walk is nondegenerate [1] and has a unique essential class of states. If the stationary distribution exists, then we denote the stationary probabilities by $\pi_\alpha = \pi_{ij}$.

This work further develops the work of [1]. In the latter, methods of Galois theory were used to investigate the case in which the generating functions of the stationary probabilities are rational and, in particular, it was shown that rationality holds only on certain algebraic submanifolds of the space of parameters $p_{ij}, p'_{ij}, p''_{ij}, p^0_{ij}$. In the present paper we find an integral representation for the stationary probabilities in the general case and also find conditions for existence of a stationary distribution.

We introduce the following generating functions for stationary probabilities in a quadrant of the plane and on the boundaries, defined, at least, for $|x|, |y| \leq 1$:

$$\pi(x, y) = \sum_{i, j=1}^{\infty} \pi_{ij} x^{i-1} y^{j-1}, \quad \pi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{i0} x^{i-1}, \quad \tilde{\pi}(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{0j} y^{j-1}.$$

If we have found $\pi(x)$, $\tilde{\pi}(y)$ and π_{00}, then $\pi(x, y)$ can be expressed in terms of these as follows:

$$\pi(x, y) = [q(x, y)\pi(x) + \tilde{q}(x, y)\tilde{\pi}(y) + \pi_{00} q_0(x, y)] / Q(x, y), \tag{1}$$

where the polynomials Q, q, $\tilde{q}$ and q_0 are generating functions of the transition probabilities (somewhat transformed)

$$Q(x, y) = xy\Big(1 - \sum_{i, j=-1}^{1} p_{ij} x^i y^j\Big), \quad q(x, y) = x\Big(\sum_{i, j=-1}^{1} p'_{ij} x^i y^j - 1\Big),$$
$$\tilde{q}(x, y) = y\Big(\sum_{i, j=-1}^{1} p''_{ij} x^i y^j - 1\Big), \quad q_0(x, y) = \sum p^0_{ij} x^i y^j - 1.$$

The existence of a stationary distribution is determined by the mean transitions on one step in the direction of each of the axes inside and on the boundaries of the quadrant:

$$M_x = \sum_j p_{1j} - \sum_j p_{-1,j}, \quad M_y = \sum_i p_{i1} - \sum_i p_{i,-1},$$
$$M_x' = \sum_j p_{1j}' - \sum_j p_{-1,j}', \quad M_y' = \sum_i p_{i1}' - \sum_i p_{i,-1}',$$

etc. For the sake of brevity of statement we assume that $M_x < 0$, $M_y < 0$.

Theorem 1. *A stationary distribution exists if and only if*

$$M_x M_y' - M_y M_x' < 0, \quad M_y M_x'' - M_x M_y'' < 0. \tag{2}$$

Furthermore, we shall discuss only the function $\pi(x)$; the formulation for $\widetilde{\pi}(y)$ is obtained symmetrically, and $\pi(x, y)$ can be expressed rationally in terms of the others via formula (1).

Lemma 1. *The algebraic function $y(x)$, defined by the equation*

$$Q(x, y) = 0, \tag{3}$$

has precisely two branch points situated strictly outside the unit circle. These branch points are real, and the one which is smaller in modulus (denoted by x_3) is always positive. Two other branch points, also real, lie in the unit circle.

Analytic behavior of the solution. Many interesting properties (for example, asymptotics) are determined by the possibility of analytic extension of the corresponding generating functions. It turns out that $\pi(x)$, a priori analytic in the unit circle, can be meromorphically continued into the disk $|x| < x_3$, and furthermore, in the nonrational case it begins to branch, all branch points are of an algebraic nature and there are an infinite number of them. A precise statement is given in Theorem 2.

Let S denote the Riemann surface of the field of algebraic functions defined by equation (3), and let Ω denote its universal covering with some fixed cover λ: $\Omega \to S$. We have the following diagram of coverings

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & \mathbf{P} \\ \Omega \arrow[r, "\lambda"] & S \arrow[ur, "h_1"] \arrow[dr, "h_2"'] & \\ & & \mathbf{P} \end{tikzcd}$$

Here h_1 and h_2 are the natural coverings by the Riemann surface S of the complex projective line $\mathbf{P}$ corresponding to the realization S as the Riemann surface of algebraic functions $y(x)$ and $x(y)$ respectively.

Let D and $\widetilde{D}$ be regions on S where $|x(s)| < 1$ and $|y(s)| < 1$, $s \in S$, respectively.

Lemma 2. *The Riemann surface S is always of type 1. The boundary of D consists of two simple analytic nonintersecting closed curves: Γ_0, where $|y(s)| \leq 1$, and Γ_1, where $|y(s)| \geq 1$. Analogous assertions hold for the boundary $\widetilde{\Gamma}_0 \cup \widetilde{\Gamma}_1$ of the region $\widetilde{D}$. The curves $\Gamma_0, \Gamma_1, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1$ are homotopic, and their class of homologies* *is one of the elements of the normal homology base on the torus. The intersection* $G = D \cap \tilde{D}$ *is nonempty and bounded by the curves* Γ_0 *and* $\tilde{\Gamma}_0$.

The Riemann surface S is a factor of Ω on the lattice of periods $\{n\omega_1 + m\omega_2\}$ (we further assume, without loss of generality, that $\lambda([0, \omega_1])$ is homologic to Γ_0). We fix one of the components Δ_0 of the inverse image $\lambda^{-1}(D \cup \tilde{D})$. Further inverse images of curves and regions of S on Δ_0 are denoted by the same letters as on $D \cup \tilde{D}$ (thus $\Gamma_0 = \Delta_0 \cap \lambda^{-1}(\Gamma_0)$). The functions $\pi(x)$ and $\tilde{\pi}(y)$ can be lifted on the regions $D \subset \Delta_0$ and $\tilde{D} \subset \Delta_0$ in the obvious manner. Here, for example, $\pi(\omega) = \pi(h_1\lambda\omega)$.

Theorem 2. *The functions* $\pi(\omega)$ *and* $\tilde{\pi}(\omega)$, *a priori analytic in the regions* $D \subset \Delta_0$ *and* $\tilde{D} \subset \Delta_0$ *respectively, can be meromorphically extended onto the whole universal covering* Ω, *and on* Ω *they have period* ω_1.

Thus the Riemann surface of the functions $\pi(x)$ and $\tilde{\pi}(y)$ is topologically an infinite cylinder, i.e., a factor C in $\{n\omega_1\}$.

Integral representation of the solution. The functions x, y, $q(x, y)$, $\tilde{q}(x, y)$, $q_0(x, y)$, lifted onto Ω, are elliptic functions, further denoted by $x(\omega)$, $y(\omega)$, $q(\omega) = q(x(\omega), y(\omega))$, etc. Let x_1 and y_1 denote any of the branch points of the functions $y(x)$ and $x(y)$, respectively, lying in the unit circle, and let $a = \lambda^{-1}(h_1^{-1}(x_1)) \cap \Delta_0$, $b = \lambda^{-1}h_2^{-1}(y_1) \cap \Delta_0$ (in view of Theorem 2 we may assume that all this is done mod ω_1, i.e., in the strip $\Pi = \{\omega\colon \omega = \mu\omega_1 + \nu\omega_2,\ 0 \le \mu < 1,\ \nu < \infty\}$). We introduce automorphisms of the mappings ξ and η relative to the points a and b respectively (lifting of Galois automorphisms [1] onto Ω). $\xi\eta$ is a shift by ω_3 – the doubled distance between a and b. Let $\zeta(\omega)$ be the Weierstrass ζ-function with periods ω_1 and ω_3 and origin at the point a.

Suppose $l \subset G$ is an arbitrary closed curve, smooth and without self-intersections, homotopic to Γ_0, where $q \neq 0$ is in the closed region situated between l and Γ_0 on Δ_0, and $\tilde{q} \neq 0$ is in the closed region situated between l and $\tilde{\Gamma}_0$ (except of course for the point $x = y = 1$).

Lemma 3. *The curve* l, *having the properties noted above, can be chosen so that* $\operatorname{ind}_l xq/\tilde{q} = 0$.

Let κ be the group of transformations of Ω generated by ξ and η. We introduce the function

$$\rho(\omega) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_l (\zeta(\omega - \tau) + \zeta(-\omega - \tau)) \ln \frac{x(\tau)\tilde{q}(\tau)}{q(\tau)}\, d\tau\right],$$

which is analytic everywhere except for the grid of curves κl doubly periodic with periods ω_1 and ω_3, and on each curve κl we define $\rho(\omega)$ as the limiting value of $\rho(\omega)$ from the left in the direction of ω_1. We introduce the function

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\int_l [\zeta(\omega - \tau) + \zeta(-\omega - \tau)]\, \frac{x(\tau)\, q_0(\tau)}{q(\tau)\, \rho(\tau)}\, d\tau$$

with these same properties.

Theorem 3. *In the region $\Delta_l \subset D$, which is a component of $\Omega \setminus \{\kappa l\}$, whose closure contains the point ω_0, where $x = y = 1$, and the point $\xi\omega_0$, we have*

$$\pi(\omega) = \rho(\omega)\,[c + \chi(\omega)]/x(\omega), \tag{4}$$

where the constant c is chosen so that the numerator of (4) vanishes at the point $x(\omega) = 0$.

Remark. At the remaining points, $\pi(\omega)$ can be found by using Theorem 2 and the fact that the numerator $\Pi(\omega)$ of the right side of (4) has the following jumps on the curves κl:

$$\Pi_+(\omega) - \frac{\widetilde{q}(\omega)}{q(\omega)}\,\Pi_-(\omega) = -\frac{q_0(\omega)}{q(\omega)}, \quad \omega \in l \cap \overline{\Delta}_l;$$
$$\Pi_-(\omega) - \frac{\widetilde{q}(\xi\omega)}{q(\xi\omega)}\,\Pi_+(\omega) = -\frac{q_0(\xi\omega)}{q(\xi\omega)}, \quad \omega \in \xi l \cap \overline{\Delta}_l$$

(here Π_+ and Π_- are the limiting values of $\Pi(\omega)$ from the left and right respectively, and the jumps on the remaining curves hl, $h \in \kappa$, are found from the condition of double periodicity of the function $\Pi(\omega)$). Actually, reduction of (5) to a Riemann problem is fundamental to the proof of Theorem 3.

If $q(\omega)/\widetilde{q}(\omega) \equiv \text{const}$, which is the case, for example, for random walk with oblique reflection [2], then the solution can be expressed in the form of an ordinary elliptic integral.

We can obtain an integral representation directly for stationary probabilities. We present it here in an example of walk with a group of fourth order of automorphisms of S.

If $Q(x, y) \equiv a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, then we introduce the abelian differential of first kind on S

$$d\omega = -dx/[2a(x)y + b(x)].$$

Consider the region R lying between Γ_1 and $(\xi_\eta)^2\widetilde{\Gamma}_1 = \widetilde{\Gamma}_1 + 2\omega_3$. We can assume that $R \subset S$.

Theorem 4. *For simple random walk we have*

$$\pi_{mn} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}_1} \frac{q}{x^m y^n}\,[(ff_\delta - 1)\,\pi(x) + f_\delta\psi + \psi]\,d\omega + \sum_{s\in R} \operatorname{Res}_s \left[\frac{q\pi(x)}{x^m y^n}\,d\omega\right],$$

where

$$f = \frac{q\widetilde{q}_\eta}{\widetilde{q}\,q_\eta}, \quad \psi = \frac{\widetilde{q}_\eta}{q}\left(\frac{q_0}{\widetilde{q}} - \frac{q_{0\eta}}{\widetilde{q}_\eta}\right),$$

and Res_s *denotes the remainder at the point s for the meromorphic differential on S in the parentheses.*

The analogous relationship also holds for random walk with an arbitrary group. If the norm $N_{C_0}^{CQ}(f) = ff_\delta = 1$, which is the case, for example, for random walk with oblique reflection, then the expression under the integral in formula (5) does not contain $\pi(x)$. Theorem 4 can be proved with the aid of Leray's theory [3] and is fundamental for obtaining various kinds of asymptotic representations.

Moscow State University

Received 13/MAY/70

BIBLIOGRAPHY

[1] V. A. Malyšev, Uspehi Mat. Nauk 26 (1971), no. 1 (157).

[2] ———, Proceedings Soviet-Japanese Sympos. on Probability Theory, Khabarovsk, 1969, p. 176. (Russian)

[3] J. Leray, *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe* (*Problème de Cauchy*. III), Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 81–180; Russian transl., IL, Moscow, 1961. MR 23 #A3281; 24 #A256.

Translated by:
Lisa Rosenblatt