В. А. Малышев, Уравнения Винера–Хопфа в четверти плоскости, дискретные группы и автоморфные функции, *Матем. сб.*, 1971, том 84(126), номер 4, 499–525

УДК 517.432+517.862

Уравнения Винера — Хопфа в четверти плоскости, дискретные группы и автоморфные функции

В. А. Малышев (Москва)

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются уравнения вида

$$\sum_{k,\,l=0}^{\infty} a_{i-k,j-l}\xi_{kl} = \eta_{ij}, \quad i,\, j = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots . \tag{1.1}$$

При этом предполагается, что $\sum_{i,\,j=0}^{\infty} |\eta_{ij}| < \infty$, $\sum_{p,q=-\infty}^{\infty} |a_{pq}| < \infty$, и ищется решение, также принадлежащее пространству l_1 последовательностей $\xi = \{\xi_{kl}\}_{k,\,l=0}^{\infty}$. Рассмотрим оператор A в банаховом пространстве l_1: $A\xi = \xi'$, где

$$\xi'_{ij} = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{i-k,\,j-l}\xi_{kl}.$$

Следующее утверждение выделяет случаи, когда A является оператором Нётера ($\dim \operatorname{Ker} A < \infty$, $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$).

Теорема 1.1 (Симоненко И. Б. [1], [2]). *Оператор A является оператором Нётера тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

$$a(x, y) = \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} a_{pq}x^p y^q \neq 0 \text{ при } |x| = |y| = 1, \tag{1.2}$$

$$\operatorname*{ind}_{|x|=1} a(x, 1) = \operatorname*{ind}_{|y|=1} a(1, y) = 0. \tag{1.3}$$

Стандартным приемом доказывается следующее утверждение (см. [3]).

Лемма 1.1. *В условиях теоремы* 1.1 $\operatorname{ind} A = 0$.

Методы доказательства этих двух утверждений не могут дать условий обратимости оператора, а тем более аналитических свойств решения и его явного представления.

Здесь будет дано исследование возможности получения явного представления решения подобного класса уравнений.

Теория в нётеровском случае для уравнений, инвариантных относительно сдвига, во всем пространстве и на полупрямой является классической (см. [4], [5]), а в полупространстве решение строится также с помощью метода Винера — Хопфа ([6]). Во всех этих случаях имеется компактная явная формула для решения. Подобная формула, основанная на идеях Винера — Хопфа, для уравнений в четверти плоскости может быть получена лишь в очень частных случаях (см. [15], [16]). Ситуация для общего случая резко усложняется. Возникают классы разрешимости уравнений тем или иным методом. В настоящей работе излагается новый подход к исследованию подобных уравнений и для одного класса строятся в некотором смысле полные основы их теории.

Мы будем говорить, что система уравнений (1.1) имеет тип $(n_1, n_2; m_1, m_2)$, где $-\infty\leqslant n_1, m_1<\infty, -\infty<n_2, m_2\leqslant\infty$, если a_{pq} могут быть отличны от нуля лишь при

$$n_1\leqslant p\leqslant n_2,\quad m_1\leqslant q\leqslant m_2. \tag{1.4}$$

Мы будем говорить, что тип $(n_1, n_2; m_1, m_2)$ точный, если область типа (1.4) невозможно сузить.

Замечание 1.1. Существуют уравнения, удовлетворяющие условиям (1.2) и (1.3), произвольного точного типа $(n_1, n_2; m_1, m_2)$. Например, можно положить $a(x, y)=a(x)\tilde{a}(y)$, где $x^{n_1}a(x)$ — многочлен от x степени n_1+n_2, имеющий n_1 нулей внутри единичного круга и n_2 вне его. Аналогично строится $y^{m_1}\tilde{a}(y)$, и для получения нетривиальных примеров достаточно пошевелить коэффициенты $a(x, y)$.

Если уравнение (1.1) имеет один из следующих типов: $(0, \infty; -\infty, \infty)$, $(-\infty, \infty; 0, \infty)$, $(-\infty, 0; -\infty, \infty)$, $(-\infty, \infty; -\infty, 0)$,— то оно разрешимо методом Винера — Хопфа, что легко следует из работы [15]. В данной работе рассматриваются уравнения типа $(-1, \infty; -1, \infty)$.

В случае уравнений (1.1) метод факторизации Винера — Хопфа, на применении которого по существу все кончается в одномерном случае, составляет необходимый предварительный этап исследования (§ 2). В § 3 доказывается обратимость соответствующего оператора в l_1. Первый шаг нового метода (перенос на риманову поверхность) рассматривается в §§ 4, 5. В случае уравнений типа $(-1, 1; -1, 1)$ род соответствующей римановой поверхности равен 0 или 1. Уравнения этого типа подробно исследуются в §§ 6—8. Основная конструкция для рода $g\geqslant 2$ проводится в § 9. Она связана с построением автоморфизмов Галуа на универсальной накрывающей и последующим преобразованием уравнений на универсальной накрывающей с их помощью. Здесь существенно используется техника дискретных групп движений плоскости Лобачевского. В § 10 выясняется аналитическое поведение решения (строится риманова область существования символа решения). В §§ 11, 12 решение уравнений сводится к задаче Карлемана на римановой поверхности, откуда и получается интегральное представление решения.

Некоторые важные черты метода сохраняются в случае произвольного рационального символа.

§ 2. Факторизация

Рассмотрим кольцо R рядов вида $r(x, y)=\sum\limits_{i,j=-\infty}^{\infty} r_{ij}x^iy^j$, абсолютно сходящихся при $|x|=|y|=1$. Мы будем рассматривать следующие подкольца этого кольца: $R_{++}=R_{\substack{++\\ x\,y}}$ — множество функций $r(x, y)$ с $r_{ij}=0$, если либо

$i<0$, либо $j<0$; R_{+-} — множество функций с $r_{ij}=0$, если либо $i<0$, либо $j\geqslant 0$; R_{-+}, $R_{\underset{x}{+}}$ и т. д. Введем операторы проектирования на эти подкольца: P_{++}, P_{+-}, $P_{\bar{y}}$, $\ldots$. Например,

$$P_{\bar{y}}\left[\sum_{i,j=-\infty}^{\infty} r_{ij}x^iy^j\right]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{-1} r_{ij}x^iy^j.$$

Лемма 2.1. *Если* $r(x, y)\in R$, $r(x, y)\neq 0$ *при* $|x|=|y|=1$ *и*

$$\operatorname*{ind}_{|x|=1} r(x, 1)=\operatorname*{ind}_{|y|=1} r(1, y)=0, \tag{2.1}$$

то $\ln r(x, y)\in R$.

Доказательство. Условия (2.1) гарантируют возможность выделения однозначной ветви $\ln r(x, y)$. Далее, если, например, $r(x, y)$ — кусочно гладкая функция, то доказательство проводится элементарно. В полной общности надо воспользоваться обобщенной теоремой Винера о локально аналитических функциях на пространстве максимальных идеалов кольца R (см. [7]).

Теперь можно положить

$$\ln a(x, y)=\sum_{i,j=-\infty}^{\infty} b_{ij}x^iy^j,$$

$$a_{\underset{x}{+}}(x, y)=\exp[P_{\underset{x}{+}}\ln a(x, y)],$$

$$a_{\bar{x}}(x, y)=\frac{a(x, y)}{a_{\underset{x}{+}}(x, y)},$$

. . . .

Пусть теперь уравнение (1.1) имеет точный тип $(-1, \infty; -1, \infty)$, причем выполняются условия теоремы 1.1. Положим $A(x, y)=xya(x, y)$. Тогда для любого y, $|y|=1$, имеем $\operatorname*{ind}_{|x|=1} A(x, y)=1$, и, аналогично, для любого x, $|x|=1$, $\operatorname*{ind}_{|y|=1} A(x, y)=1$. Поэтому для любого y, $|y|=1$, существует единственный нуль функции $A(x, y)$ внутри единичного круга, обозначаемый далее через $x_0(y)$. Он имеет первый порядок. Аналогично вводится $y_0(x)$.

Если $a(x, y)$ имеет тип $(-1, n; -1, m)$, где $n, m<\infty$, то $A(x, y)$ — многочлен. Пусть $A=A_1A_2\ \ldots\ A_k$ — его разложение на простые множители в кольце $\mathbf{C}[x, y]$.

Пусть, например, $A_1(x_0(y), y)=0$. Тогда из приведенных выше соображений следует, что $A_i(x_0(y), y)\neq 0$ при $i=1$ и $|y|=1$. При этом возможны два случая:

1) (далее называемый случаем неприводимости) для любого x $(|x|)=1)$

$$A_1(x, y_0(x))=0;$$

2) (случай приводимости) для любого x $(|x|=1)$ $A_1(x, y_0(x))\neq 0$. В этом случае мы будем предполагать, что $A_2(x, y_0(x))=0$.

Компоненты факторизации $a(x, y)$ имеют вид:

$$a_{\bar{x}}(x, y) = 1 - \frac{x_0(y)}{x}\,;\; a_{\bar{y}}(x, y) = 1 - \frac{y_0(x)}{y}.$$

§ 3. Обратимость

Рассмотрим следующие функции-символы ($|x| = |y| = 1$):

$$a(x, y) = \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} a_{pq}x^p y^q,\quad \eta(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \eta_{ij}x^i y^j,$$

$$\xi(x, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \xi_{kl}x^k y^l.$$

Умножая соотношения (1.1) на $x^i y^j$ и суммируя, получим

$$\eta(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{i-k,j-l}x^{i-k}y^{j-l}\xi_{kl}x^k y^l = \sum_{p,q}\sum a_{pq}x^p y^q \xi_{kl}x^k y^l,$$

где $p = i - k$, $q = j - l$, и вторая сумма берется по всем неотрицательным k и l при условиях $p + k \geqslant 0$, $q + l \geqslant 0$.

Полагая

$$b_{--}(x, y) = a_{-1,-1}\xi_{00}\frac{1}{xy},$$

$$b_{+-}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_{k0}x^k \sum_{p \geqslant -k} a_{p,-1}x^p \frac{1}{y},$$

$$b_{-+}(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \xi_{0l}y^l \sum_{q \geqslant -l} a_{-1,q}y^q \frac{1}{x},$$

получим

$$\eta(x, y) = a(x, y)\,\xi(x, y) - b_{+-}(x, y) - b_{-+}(x, y) - b_{--}(x, y). \tag{3.1}$$

Вводя функции

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_{k0}x^k \sum_{p \geqslant -k} a_{p,-1}x^{p+1} + a_{-1,-1}\xi_{00},$$

$$\tilde{\pi}(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \xi_{0l}y^l \sum_{q \geqslant -l} a_{-1,q}y^{q+1},$$

перепишем уравнение (3.1) следующим образом:

$$A(x, y)\,\xi(x, y) - \pi(x) - \tilde{\pi}(y) = xy\eta(x, y). \tag{3.2}$$

Заметим, что все слагаемые в этом уравнении принадлежат R_{++}.

Замечание 3.1. Если известна функция $\pi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k x^k$, то ξ_{k0} получаются рекуррентным образом из системы уравнений

$$\pi_0 = a_{-1,-1}\xi_{00},$$
$$\pi_1 = a_{0,-1}\xi_{00} + a_{-1,-1}\xi_{10},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Аналогично получаются ξ_{0l}, если известна функция $\tilde{\pi}(y)$.

Теорема 3.1. *Оператор A, соответствующий уравнению* (1.1) *точного типа* $(-1, n; -1, m)$, *где* $1 \leqslant n, m \leqslant \infty$, *в условиях теоремы* 1.1 *является обратимым в пространстве* l_1.

В силу леммы 1.1 достаточно доказать, что $\operatorname{Ker} A = 0$. В § 2 для любого y, $|y| = 1$, определена функция $x_0(y)$ такая, что $|x_0(y)| < 1$ и $a(x_0(y), y) = 0$. Тогда из (3.2) следует, что

$$|\pi(x_0(y))| = |\tilde{\pi}(y)|. \tag{3.3}$$

Аналогично

$$|\pi(x)| = |\tilde{\pi}(y_0(x))|. \tag{3.4}$$

Пусть, например,

$$M = \max_{|x|=1} |\pi(x)| \geqslant \max_{|y|=1} |\tilde{\pi}(y)| = \tilde{M}.$$

Тогда из принципа максимума модуля и соотношения (3.4) следует, что, во-первых, $M = \tilde{M}$, и, во-вторых, $\tilde{\pi}(y) \equiv M$. Отсюда и $\pi(x) \equiv M$. Но из явного вида (3.1) для $\tilde{\pi}(y)$ следует тогда, что $M = 0$.

Следствие 3.1. *Если операторы A и A_n, $n = 1, 2, \dots$, имеют тип* $(-1, \infty; -1, \infty)$, *причем для их символов* $a(x, y)$, $a_n(x, y)$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{|x|=|y|=1} |a(x, y) - a_n(x, y)| = 0,$$

то $\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \to 0$. *При этом, если* $\|A - A_n\| \cdot \|A\| < 1$, *то*

$$\|A_n^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A - A_n\|}{1 - \|A - A_n\| \cdot \|A\|}.$$

Замечание. Отсюда следует, что решения уравнения с нерациональным ядром можно получать, используя уравнения с рациональными ядрами.

§ 4. Операция проектирования на аналитическое множество

Далее до конца работы будет предполагаться, что уравнение (1.1) имеет произвольный точный тип $(-1, n; -1, m)$ с $1 \leqslant n, m < \infty$. Положим $A = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1, A(x, y) = 0\}$, D — внутренность единичного круга и Γ — его граница. Пусть $\bar{A}$ — замыкание главного аналитического множества A, лежащего в $D \times D$, т. е.

$$\bar{A} = \{(x, y) : |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1, A(x, y) = 0\}.$$

Тогда ясно, что решение уравнения (3.2) должно удовлетворять условию

$$xy\eta(x, y) + \pi(x) + \tilde{\pi}(y) = 0 \tag{4.1}$$

при $(x, y) \in \bar{A}$ и, в частности, на границе $\bar{A} \cap [(D \times \Gamma) \cup (\Gamma \times D)]$. Докажем обратное утверждение.

Лемма 4.1. *Если существуют непрерывные в единичном круге $\bar{D}$ и аналитические внутри него функции $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$, удовлетворяющие соотношению* (4.1) *на $\bar{A} \cap [(D \times \Gamma) \cup (\Gamma \times D)]$, то решение уравнения* (3.2) *определится по формуле*

$$\xi(x, y) = \frac{\pi(x) + \tilde{\pi}(y) + xy\eta(x, y)}{xya(x, y)}. \tag{4.2}$$

Доказательство (другой метод см. в работе [14]). Вводя функции $\pi_1(x) = \dfrac{\pi(x) - a_{-1,-1}\xi_{00}}{x}$ и $\tilde{\pi}_1(y) = \dfrac{\tilde{\pi}(y)}{y}$, перепишем уравнение (3.2) так:

$$a(x, y)\,\xi(x, y) = \pi_1(x)\frac{1}{y} + \tilde{\pi}_1(y)\frac{1}{x} + \frac{a_{-1,-1}\xi_{00}}{xy} + \eta(x, y) = 0. \tag{4.3}$$

Отсюда

$$a_{\underset{x}{+}}(x, y)\,\xi(x, y) = \frac{1}{a_{\underset{x}{-}}(x, y)}\left[\frac{\pi_1(x)}{y} + \frac{\tilde{\pi}_1(y)}{x} + \frac{a_{-1,-1}\xi_{00}}{xy} + \eta(x, y)\right] \tag{4.4}$$

и

$$0 = P_{\underset{x}{-}}\left[\frac{1}{a_{\underset{x}{-}}(x, y)}\left(\frac{\pi_1(x)}{y} + \frac{\tilde{\pi}_1(y)}{x} + \frac{a_{-1,-1}\xi_{00}}{xy} + \eta(x, y)\right)\right]. \tag{4.5}$$

Аналогично получим

$$0 = P_{\underset{y}{-}}\left[\frac{1}{a_{\underset{y}{-}}(x, y)}\left(\frac{\pi_1(x)}{y} + \frac{\tilde{\pi}_1(y)}{x} + \frac{a_{-1,-1}\xi_{00}}{xy} + \eta(x, y)\right)\right]. \tag{4.6}$$

Обратно, если выполнены условия (4.5) и (4.6), то функция в правой части формулы (4.4) принадлежит кольцу $R_{\underset{x}{+}}$. Обозначив ее $\psi(x, y)$ и положив $\xi(x, y) = \dfrac{\psi(x, y)}{a_{\underset{x}{+}}(x, y)}$, имеем формулу (4.2). Нам остается показать только, что операции проектирования в формулах (4.5) и (4.6) эквивалентны операции проектирования на аналитическое множество A.

Лемма 4.2. *Соотношение* (4.1) *выполняется тогда и только тогда, когда выполняются соотношения* (4.5) *и* (4.6).

Докажем сначала формулу

$$P_{\underset{y}{-}}\left[\frac{1}{1 - \frac{y_0(x)}{y}}\,\omega(y)\right] = \omega(y_0(x))\frac{\frac{y_0(x)}{y}}{1 - \frac{y_0(x)}{y}}, \tag{4.7}$$

где $\omega(y) \in R_{+\atop y}$. Действительно, для любого x, $|x|=1$,

$$P_{\bar{y}}\left[\frac{1}{1-\frac{y_0(x)}{y}}y^i\right]=P_{\bar{y}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{y_0(x)}{y}\right)^k y^i\right]=y_0^i\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{y_0(x)}{y}\right)^k.$$

Воспользовавшись теперь линейностью оператора $P_{\bar{y}}$, получим формулу (4.7). Рассматривая теперь, например, формулу (4.6), имеем

$$\frac{\pi_1(x)}{y}\cdot\frac{1}{1-\frac{y_0(x)}{y}}+\frac{\tilde{\pi}_1(y_0(x))}{x}\cdot\frac{\frac{y_0(x)}{y}}{1-\frac{y_0(x)}{y}}+\frac{a_{-1,-1}\xi_{00}}{xy\left(1-\frac{y_0(x)}{y}\right)}+$$
$$+\eta(x, y_0(x))\frac{y_0(x)}{y}\cdot\frac{1}{1-\frac{y_0(x)}{y}}=0,$$

что совпадает с (4.1) при $|x|=1$, $|y_0(x)|<1$.

Из леммы 4.1 следует, что все сводится к вычислению функций $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$. Приведем здесь один из результатов такого рода: пусть R_1 и R_2 — римановы поверхности функций $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ соответственно (введенные ниже) с заданными накрытиями $h_1: R_1 \to \mathbf{P}_x$ и $h_2: R_2 \to \mathbf{P}_y$, где $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{P}_y$ — одномерные проективные пространства. Тогда $\xi(x, y)$ естественно определена на $R_1 \times R_2$ и является мероморфной функцией на этом комплексном многообразии.

§ 5. Уравнения на римановой поверхности

Далее будет предполагаться, если не оговорено противное, что $a(x, y)$ рациональна и реализуется случай неприводимости (см. § 2). Пусть $A_1(x, y)$ — неприводимый многочлен, для которого $A_1(x_0(y), y)=$ $=A_1(x, y_0(x))=0$; n — степень $A_1(x, y)$ по x, m — степень $A_1(x, y)$ по y. Уравнение

$$A_1(x, y)=0 \qquad (5.1$$

определяет тогда алгебраические функции $y(x)$ и $x(y)$, римановы поверхности которых связны, компактны и конформно эквивалентны. Обозначим соответствующую абстрактную риманову поверхность через S. Как риманова поверхность алгебраической функции $y(x)$, S естественным образом реализуется как разветвленное m-листное накрытие $h_1: S \to \mathbf{P}$ комплексной сферы $\mathbf{P}$. Аналогично определяется накрытие $h_2: S \to \mathbf{P}$, соответствующее функции $x(y)$ и имеющее n листов.

Пусть $\mathbf{C}_A(x, y)$ — поле алгебраических функций, определенное уравнением (5.1). $\mathbf{C}_A(x, y)$ является конечным алгебраическим расширением поля $\mathbf{C}(x)$ рациональных функций от x, а также поля $\mathbf{C}(y)$ рациональных функций от y. $\mathbf{C}_A(x, y)$ естественно изоморфно $\mathbf{C}(S)$, полю мероморфных функций на римановой поверхности S. Функция $x(s)$, $s \in S$, соответствующая при этом изоморфизме функции $x(y)$, обладает следующим свойством: если $x(s_1)=x(s_2)$, s_1, $s_2 \in S$, то $h_1 s_1=h_1 s_2$, и наоборот. Аналогичным свойством обладает функция $y(s)$, соответствующая функции $y(x)$.

Очевидно, что $h_1^{-1}(\Gamma)$ является границей открытого множества $h_1^{-1}(D)$, а $h_2^{-1}(\Gamma)$ — границей для $h_2^{-1}(D)$. Если над Γ нет точек ветвления h_i, $i=1, 2$, то $h_i^{-1}(\Gamma)$ состоит из простых аналитических замкнутых непересекающихся кривых. Точки самопересечения и недифференцируемости могут появляться в точках ветвления h_i на $h_i^{-1}(\Gamma)$. Ввиду наших предположений, при $|x|=1$ множество $h_1^{-1}(x) \cap h_2^{-1}(D)$ состоит из одной точки. Следовательно, пересечение $h_1^{-1}(\Gamma)$ с $h_2^{-1}(D)$ не содержит точек ветвления накрытия h_1.

Заметим, что в силу условия (1.2) $h_1^{-1}(\Gamma) \cap h_2^{-1}(\Gamma)=0$, и, таким образом, $h_1^{-1}(\Gamma) \cap h_2^{-1}(D)$ является аналитической простой замкнутой кривой. Обозначим ее Γ_0.

Аналогично определяется $\widetilde{\Gamma}_0 = h_2^{-1}(\Gamma) \cap h_1^{-1}(D)$. Положим $G = h_1^{-1}(D) \cap \cap h_2^{-1}(D)$. Ясно, что $\Gamma_0 \cup \widetilde{\Gamma}_0$ является границей G.

Лемма 5.1. *Пусть род римановой поверхности S не равен нулю и реализуется случай неприводимости. Тогда G является связной областью.*

Мы покажем, что если G несвязна, то Γ_0 и $\widetilde{\Gamma}_0$ гомотопически эквивалентны нулю на S. Окончание доказательства проводится так же, как доказательство п. 2 леммы 7.1. Действительно, мы уже заметили, что $h_1^{-1}(x) \cap \cap h_2^{-1}(D)$ при $|x|=1$ состоит из одной точки. Кроме того, если G несвязна, то она состоит из двух связных компонент, ограничиваемых соответственно кривыми Γ_0 и $\widetilde{\Gamma}_0$. Компонента G, ограничиваемая кривой Γ_0, накрывает единичный круг $\{x: |x| \leqslant 1\}$. Это накрытие, в силу сделанного выше замечания, однолистно на границе. Следовательно, оно однолистно везде. Отсюда и следует искомое утверждение.

Обозначим через Δ объединение связных компонент множества $h_1^{-1}(D) \cup \cup h_2^{-1}(D)$ таких, что они имеют с G непустое пересечение. Ясно, что в условиях леммы 5.1 Δ является связной областью. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k \subset \subset h_1^{-1}(\Gamma)$ и $\widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2, \ldots, \widetilde{\Gamma}_l \subset h_2^{-1}(\Gamma)$—связные компоненты границы области Δ. В случае, если на них нет точек ветвления накрытий h_1 и h_2 соответственно, они являются простыми замкнутыми непересекающимися аналитическими кривыми.

Пусть теперь дана функция $f(x)$, мероморфная в некоторой области D комплексной сферы $\mathbf{P}$, и риманова поверхность S вместе с разветвленным накрытием $h: S \to \mathbf{P}$. Тогда функция $f(x)$ может быть поднята на область $h^{-1}(D)$ следующим образом:

$$f_h(s) = f(hs), \quad s \in h^{-1}(D).$$

При этом $f_h(s)$ (обозначаемая далее просто $f(s)$) является мероморфной функцией в $h^{-1}(D)$, что для точек, где накрытие разветвлено, проверяется, например, по теореме об устранимых особенностях.

Перенося $\pi(x)$ на $h_1^{-1}(D) \cap \Delta$ посредством h_1^{-1}, а $\widetilde{\pi}(y)$ посредством h_2^{-1} на $h_2^{-1}(D) \cap \Delta$, получим функции $\pi(s)$ и $\widetilde{\pi}(s)$, определенные на $h_1^{-1}(D) \cap \Delta$ и $h_2^{-1}(D) \cap \Delta$ соответственно, аналитические в этих областях и непрерывные на границах. Далее для возможности проведения аналитического исследования уравнений мы всегда, если не оговорено противное, будем предполагать, что $\eta(x, y)$ в уравнении (3.2) есть многочлен. Тогда можно считать функции $x(s)$, $y(s)$, $\eta(s) = \eta(x(s), y(s))$ определенными на всей S. Функции $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ удовлетворяют на Γ_0 и $\tilde{\Gamma}_0$ одному и тому же уравнению

$$\pi(s) + \tilde{\pi}(s) = -x(s)y(s)\eta(s), \tag{5.2}$$

которое получается применением h_1^{-1} и h_2^{-1} к уравнению (3.2).

Уравнение (5.2) допускает, очевидно, аналитическое продолжение на область G, где определены функции $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ одновременно. Используя уравнение (5.2), функции $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ можно мероморфно продолжить на области $h_1^{-1}(D) \cap \Delta$ и $h_2^{-1}(D) \cap \Delta$ соответственно. Иначе говоря, $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ мероморфны в области Δ, причем в этой области выполняется уравнение (5.2). Обратное утверждение также верно.

Лемма 5.2. *Если в условиях леммы* 5.1 *существуют решения уравнения* (5.2) $\pi(s)$ *и* $\tilde{\pi}(s)$, *аналитические соответственно в областях* $h_1^{-1}(D) \cap \Delta$ *и* $h_2^{-1}(D) \cap \Delta$, *непрерывные на границе этих областей и такие, что* $\pi(s_1) = \pi(s_2)$ *при* $x(s_1) = x(s_2)$ *и* $\tilde{\pi}(s_1) = \tilde{\pi}(s_2)$ *при* $y(s_1) = y(s_2)$, *то решение уравнения* (3.2) *дается функциями* $\pi(x) = \pi(x(s))$ *и* $\tilde{\pi}(y) = \tilde{\pi}(y(s))$.

Действительно, определим $\xi(x, y)$ по формуле (4.2). Тогда, заметив, что выполняется уравнение (4.1), для доказательства достаточно использовать лемму 4.1.

§ 6. Точный тип (—1,1; —1,1). Род 0

В этом и в двух следующих параграфах мы полностью решим уравнение (1.1) точного типа (—1,1; —1,1). В этом случае, если многочлен $A(x, y)$ неприводим, то род римановой поверхности S равен нулю или единице. В данном параграфе мы разберем случай нулевого рода.

Представим $A(x, y)$ в виде $a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$. Тогда для того, чтобы S имела род 0, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант $D(x) = b^2(x) - 4a(x)c(x)$ имел либо вторую степень по x, либо имел кратный корень в $\mathbf{C}$.

Лемма 6.1. *На* $h_i^{-1}(\Gamma)$ *нет точек ветвления накрытия* h_i, $i = 1, 2$, *и множество* $h_i^{-1}(\Gamma)$ *несвязно, т. е. в* D *лежит четное число точек ветвления как накрытия* h_1, *так и накрытия* h_2. *Таким образом, так как* h_i *двулистно, то* $h_i^{-1}(\Gamma)$ *состоит из двух непересекающихся аналитических простых замкнутых кривых.*

Доказательство. Если бы множество $h_1^{-1}(\Gamma)$ было связным, то оно целиком принадлежало бы множеству $h_2^{-1}(D)$ (ибо $h_1^{-1}(\Gamma) \cap h_2^{-1}(\Gamma) = 0$), что в силу условия (1.3) невозможно.

Таким образом, возможны следующие четыре случая взаимного расположения $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$.

А) В D лежит ровно две точки ветвления накрытия h_i, $i = 1, 2$, т. е. $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$ связны (рис. 1).

B) В D нет точек ветвления накрытий h_1 и h_2, т. е. $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$ несвязны (рис. 2).

C) В D лежит две точки ветвления h_1 и нет точек ветвления h_2, т. е. $h_1^{-1}(D)$ связна, а $h_2^{-1}(D)$ несвязна.

D) В D есть две точки ветвления h_2, но нет точек ветвления h_1, т. е. $h_2^{-1}(D)$ связна, а $h_1^{-1}(D)$ несвязна (рис. 3).

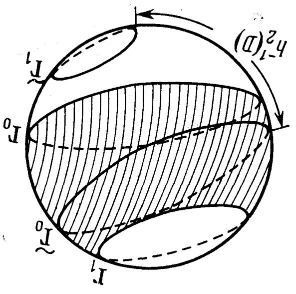

Рис. 1

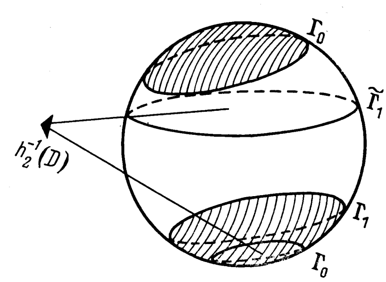

Рис. 2

Приведем примеры, когда эти случаи имеют место:

A) $a_{1,0} = a_{1,1} = a_{0,1} = 0$, B) $a_{-1,0} = a_{-1,-1} = a_{0,-1} = 0$,

C) $a_{10} = a_{1,-1} = a_{0,-1} = 0$, D) $a_{01} = a_{-1,1} = a_{-1,0} = 0$.

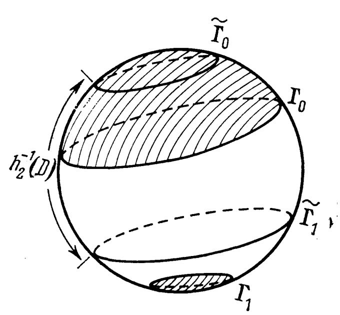

Рис. 3

При этом везде $a_{00} = -1$, а остальные a_{ij} положительны, причем их сумма меньше единицы (вероятностный аналог этих примеров см. в работе [14]).

Теорема 6.1. *В случаях* C) *и* D) *решение* $\xi(x, y)$ *является рациональной функцией.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\pi(x)$ и $\widetilde{\pi}(y)$ рациональны. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что одна из функций $\pi(s)$ или $\widetilde{\pi}(s)$ может быть мероморфно продолжена на всю риманову поверхность S. Тогда и вторая оказывается мероморфной на S в силу основного уравнения (5.2).

Основной прием, которым мы здесь и далее будем пользоваться, это продолжение мероморфных функций с помощью автоморфизмов Галуа. В случае типа $(-1, 1; -1, 1)$ поле $\mathbf{C}_A(x, y) \sim \mathbf{C}(S)$ является расширением Галуа как поля $\mathbf{C}(x)$ рациональных функций от x, так и поля $\mathbf{C}(y)$ рациональных функций от y. Группа Галуа поля $\mathbf{C}_A(x, y)$ над $\mathbf{C}(x)$ является циклической группой второго порядка. Обозначим ее нетривиальный элемент через $\widetilde{\xi}$. Аналогично пусть $\widetilde{\eta}$ — нетривиальный элемент группы Галуа поля $\mathbf{C}_A(x, y)$ над $\mathbf{C}(y)$. Автоморфизмам Галуа поля $\mathbf{C}(S)$ соответствуют конформные автоморфизмы ξ и η римановой поверхности S:

$$\widetilde{\xi} f(s) = f(\xi s), \quad \widetilde{\eta} f(s) = f(\eta s), \quad f \in \mathbf{C}(S).$$

Явный вид автоморфизмов Галуа ξ и η в случае точного типа $(-1, 1; -1, 1)$ дается формулами

$$\xi y = \frac{a_{1,-1}x^2 + a_{0,-1}x + a_{-1,-1}}{y(a_{11}x^2 + a_{01}x + a_{-1,1})}, \quad \eta x = \frac{a_{-1,1}y^2 + a_{-1,0}y + a_{-1,-1}}{x(a_{11}y^2 + a_{10}y + a_{1,-1})}.$$

Перейдем к доказательству теоремы 1 в случае C). Обозначим через $\widetilde{D}_0$ и $\widetilde{D}_1$ компоненты $h_2^{-1}(D)$, ограниченные соответственно $\widetilde{\Gamma}_0$ и $\widetilde{\Gamma}_1$. Область $\Delta = h_1^{-1}(D) \cup \widetilde{D}_0$ связна, и так же, как в § 5, получаем, что $\pi(s)$ и $\widetilde{\pi}(s)$ мероморфны в Δ. Заметим теперь, что $\xi\Gamma_0 = \Gamma_1$. Поэтому $\xi(\Delta \setminus h_1^{-1}(D)) = S \setminus \Delta$, и тогда $\Delta \cup \xi\Delta = S$. Из последнего соотношения вытекает, ввиду инвариантности $\pi(s)$ относительно ξ, что $\pi(s)$ продолжается на всю S. Случай D) рассматривается аналогично.

Явный вид решения в случае C) и D).

В случае C) обозначим через $s_1, \ldots, s_k$ $(k \leqslant 4)$ — полюса функции $-xy\eta(x, y)$ правой части формулы (5.2) в области $\Delta \setminus h_1^{-1}(D)$, а через $\varphi(s - s_i)$ — главные части этой функции в точках s_i (будем считать, что s — униформизирующая переменная на S). Тогда

$$\pi(s) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(s - s_i) + \sum_{i=1}^{k} \xi\varphi_i(s - s_i), \tag{6.1}$$

$$\widetilde{\pi}(s) = -x(s)y(s)\eta(s) - \pi(s). \tag{6.2}$$

Действительно, $\pi(s)$ должна быть аналитична в $h_1^{-1}(D)$, но может иметь полюса в $\Delta \setminus h_1^{-1}(D)$, так как $\widetilde{\pi}(s)$ в этой области аналитична. Так как $h_1^{-1}(D)$ связна, то $\pi(s)$ инвариантна относительно ξ (что и использовалось в доказательстве теоремы 6.1), откуда и следует формула (6.1). Заметим, что $\widetilde{\pi}(s)$ не обязана быть инвариантной относительно η.

При этом в формуле (6.1), конечно, $\pi(s)$ определена с точностью до аддитивной константы, которая определяется из условия, чтобы $\widetilde{\pi}(y) = 0$ при $y = 0$.

Переходим к рассмотрению случая B).

Теорема 6.2. *Пусть D_1 — одна из связных компонент области $h_1^{-1}(D) \cup h_2^{-1}(D)$, и пусть функции $\pi(s)$ и $\widetilde{\pi}(s)$, определенные на этой компоненте, удовлетворяют уравнению* (5.2). *Тогда $\pi(s)$ и $\widetilde{\pi}(s)$ мероморфно продолжимы на всю S с выколотой точкой s_1, являющейся неподвижной точкой автоморфизма $\xi\eta$ и не принадлежащей D_1. При этом (D_1 ограничена Γ_1)*:

$$\pi(s) = -x(s)y(s)\eta(s) - \widetilde{\pi}(s), \tag{6.3}$$

$$\widetilde{\pi}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} [A(\xi\delta^{-k}s) - A(\delta^{-k}s)] + \text{const}, \tag{6.4}$$

$$A(s) = -x(s)y(s)\eta(s),$$

причем ряд в правой части формулы (6.4) *абсолютно сходится в любой ограниченной части плоскости* $S\setminus\{s_1\}$, *за исключением конечного числа точек в этой части, которые являются полюсами одного из членов ряда.*

Доказательство. Заметим сначала, что группа $\varkappa$ автоморфизмов S, порожденная ξ и η, является некоторой подгруппой группы дробнолинейных преобразований S. Обозначим через $D_0, D_1, \widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1$ области, принадлежащие $h_1^{-1}(D)\bigcup h_2^{-1}(D)$ и ограниченные Γ_0, Γ_1, $\widetilde{\Gamma}_0$, $\widetilde{\Gamma}_1$ соответственно. Имеем (см. рис. 2): $D_0\subset\widetilde{D}_1$, $\widetilde{D}_0\subset D_1$, $\xi D_0=D_1$, $\eta\widetilde{D}_0=\widetilde{D}_1$. Построим индуктивно две последовательности областей:

$$D_0\subset\widetilde{D}_1\subset\eta D_1\subset\eta\xi\widetilde{D}_1\subset\ \dots\ \subset\eta\,(\xi\eta)^k D_1\subset(\eta\xi)^{k+1}\widetilde{D}_1\subset\ \dots,$$

$$\widetilde{D}_0\subset D_1\subset\xi\widetilde{D}_1\subset\xi\eta D_1\subset\ \dots\ \subset\xi\,(\eta\xi)^k\widetilde{D}_1\subset(\xi\eta)^{k+1}D_1\subset\ \dots .$$

Отношения принадлежности в этих цепочках легко проверяются по индукции.

Заметим теперь, что преобразование $\xi\eta$ (а следовательно, и $(\xi\eta)^n$) является либо гиперболическим, либо локсодромическим. Действительно, при параболическом или эллиптическом преобразовании образ ограниченного связного открытого множества (им можно считать D_1) не может строго содержать свой прообраз. При этом одна из неподвижных точек преобразования $\xi\eta$, точка s_1, принадлежит D_0, а вторая — s_2, принадлежит $\widetilde{D}_0$; $\xi s_1=\eta s_1=s_2$. Отсюда следует, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\eta\xi)^k\widetilde{D}_1=S\setminus\{s_2\}$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\xi\eta)^k D_1=S\setminus\{s_1\}$. Обозначим поднятия функций $\pi(x)$ и $\widetilde{\pi}(y)$ на D_1 через $\pi(s)$ и $\widetilde{\pi}(s)$, а на $\widetilde{D}_1$ через $\Pi(s)$ и $\widetilde{\Pi}(s)$ соответственно. Тогда имеем $\pi(\xi s)=\Pi(s)$, $\widetilde{\pi}(\eta s)=\widetilde{\Pi}(s)$, $s\in\widetilde{D}_1$. Используя эти соотношения и уравнение (5.2), по индукции мероморфно продолжаем $\pi(s)$ и $\widetilde{\pi}(s)$ на области $(\xi\eta)^k D_1$, а Π и $\widetilde{\Pi}$ на $(\eta\xi)^k\widetilde{D}_1$, откуда и получается первое утверждение теоремы.

Для получения явного представления решения в случае B) рассмотрим уравнение

$$\pi(s)+\widetilde{\pi}(s)=A(s),$$

или

$$\Pi(\xi s)+\widetilde{\pi}(s)=\mathrm{A}(s). \tag{6.5}$$

Но

$$\Pi(\xi s)+\widetilde{\Pi}(\xi s)=A(\xi s),$$

или

$$\Pi(\xi s)+\widetilde{\pi}(\eta\xi s)=A(\xi s). \tag{6.6}$$

Сравнивая уравнения (6.5) и (6.6), получим

$$\widetilde{\pi}(\eta\xi s)-\widetilde{\pi}(s)=A(\xi s)-A(s). \tag{6.7}$$

Формальным решением последнего уравнения является ряд

$$\tilde{\pi}(s)=\sum_{k=1}^{\infty}[A(\xi\delta^{-k}s)-A(\delta^{-k}s)]+\text{const},$$

где $\delta=\eta\xi$. Докажем, что этот ряд определяет мероморфную функцию на $S\setminus\{s_1\}$. Для этого достаточно показать, что этот ряд сходится в любой точке, отличной от полюса любого из членов этого ряда. Считая $\tilde{\pi}(s_2)=0$, перепишем соотношение (6.7) следующим образом:

$$\tilde{\pi}(s)-\tilde{\pi}(\delta^{-1}s)=A(\xi\delta^{-1}s)-A(\delta^{-1}s),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tilde{\pi}(s)-\tilde{\pi}(\delta^{-k}s)=\sum_{i=1}^{k}[A(\xi\delta^{-i}s)-A(\delta^{-i}s)].$$

Для любого $s\neq s_1$ имеем $\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{\pi}(\delta^{-k}s)=\tilde{\pi}(s_2)=0$. Поэтому ряд в правой части (6.4) сходится.

Заметим далее, что $A(\xi s)-A(s)$ не имеет полюсов в области $\tilde{D}_0$. Для $A(s)$ это следует из того, что ни π, ни $\tilde{\pi}$ не могут иметь полюсов в $\tilde{D}_0$, а для $A(\xi s)$ — из того, что ни Π, ни $\tilde{\Pi}$ не могут иметь полюсов в области $D_0=\xi D_1$. Положим $s_2=0$, $s_1=\infty$. Тогда, если $B(s)=A(\xi s)-A(s)$, то $B(0)=0$, и так как $B(s)$ не имеет полюсов в точках 0 и ∞, то ее можно представить в виде линейной комбинации членов вида $\dfrac{cs^m}{(b-s)^n}$, $n>m\geqslant 1$.

Но тогда мероморфность ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}B(r^{-k}s)$, $|r|>1$, очевидна.

Симметричным образом получаем

$$\Pi(s)=\sum_{k=1}^{\infty}[A(\eta\tilde{\delta}^{-k}s)-A(\tilde{\delta}^{-k}s)]+\text{const},\quad \tilde{\delta}=\xi\eta.$$

Положим теперь $\pi(s)=\Pi(\xi s)$. После этого проверка соотношения (5.2) производится очевидным образом.

Случай А) рассматривается, в основном, аналогично предыдущему. Поэтому мы ограничимся формулировкой следующей теоремы.

Теорема 6.3. *Обозначим через s_1 и s_2 точки, обладающие свойством $\xi s_1=\eta s_1=s_2$ (или $A(x(s),y(s))=A_x(x(s),y(s))=A_y(x(s),y(s))$). Тогда $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$ мероморфно продолжаются на всю S с выколотыми точками s_1 и s_2.*

Для приведенного выше примера А) с $a_{10}=a_{11}=a_{01}=0$, отметим также следующий интересный факт. В этом случае $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ рациональны (более того, являются многочленами от x и y соответственно). Действительно, уравнение

$$\pi(x)+\tilde{\pi}(y)=x^n y^m \bmod (a_{-1,-1}+a_{-1,0}y+a_{0,-1}x+a_{00}xy+a_{-1,1}y^2+a_{1,-1}x^2)$$

разрешимо для любых $m, n \geqslant 0$. Будем проводить индукцию по $k=n+m$. Пусть это утверждение доказано для всех n, m таких, что $n+m<k$. Докажем, что тогда $x^n y^m$ при $n+m=k$ можно выразить линейно по $\operatorname{mod} A(x, y)$ через x^k, y^k и члены $x^n y^m$ с $n+m<k$ (обозначаемые далее через $o(k)$). Для этого запишем

$$a_{1,-1}x^{n+1}y^{k-n-1}+a_{00}x^n y^{k-n}+a_{-1,1}x^{n-1}y^{k-n+1}=o(k). \tag{6.8}$$

Для данного $n=n_0$, кроме соотношения (6.8) для $n=n_0$, из соотношений (6.8) для $n>n_0$ можно получить

$$x^{n_0}y^{k-n_0}+c_1x^{n_0-1}y^{k-n_0+1}=o(k)+y^k,$$

а из соотношений (6.8) для $n<n_0$

$$x^{n_0}y^{k-n_0}+c_1x^{n_0+1}y^{k-n_0-1}=o(k)+x^k.$$

Из соотношения (6.8) и двух последних соотношений непосредственно следует утверждение. Особый случай, возникающий при $n=2$, 3, также рассматривается без труда.

§ 7. Точный тип (—1,1; —1,1). Род 1

Если S имеет род 1, то на $\mathbf{P}$ имеется четыре точки ветвления как накрытия h_1, так и h_2 ($\mathbf{P}$ — комплексная сфера).

Лемма 7.1. *У накрытия h_i ($i=1, 2$) ровно две точки ветвления лежат внутри D и ровно две — вне D. При этом для любого i $h_i^{-1}(\Gamma)$ состоит из двух непересекающихся аналитических простых замкнутых кривых.*

Доказательство. То, что внутри D лежит четное число точек ветвления h_i, а также вторая часть леммы, доказывается так же, как лемма 6.1.

Если внутри D нет ни одной точки ветвления h_1, то обе компоненты $h_1^{-1}(\Gamma)$, обозначаемые через Γ_0 и Γ_1, ограничивают соответственно стягиваемые области D_0 и D_1 на торе. При этом у h_2 могут быть следующие возможности для числа точек ветвления внутри D.

1. Две точки ветвления h_2 лежат внутри D. Но тогда, как следует из построения накрывающей римановой поверхности $h_2: S \to \mathbf{P}$, кривые $\widetilde{\Gamma}_0$ и $\widetilde{\Gamma}_1$ не гомотопны нулю и ни одна из них не может целиком принадлежать D_0 или D_1.

2. Ни одной точки ветвления внутри D. Тогда

$$D_0 \subset \widetilde{D}_1, \quad \widetilde{D}_0 \subset D_1, \quad \xi D_0 = D_1, \quad \eta \widetilde{D}_0 = \widetilde{D}_1.$$

Введем на торе риманову метрику, индуцированную метрикой на универсальной накрывающей. Тогда автоморфизмы Галуа ξ и η должны сохранять площади, что противоречит соотношениям (7.1).

3. Четыре точки ветвления внутри D. Тогда $\widetilde{\Gamma}_0$ и $\widetilde{\Gamma}_1$ также гомотопны нулю и ограничивают стягиваемые области $\widetilde{D}_0'$ и $\widetilde{D}_1'$, причем $\widetilde{D}_0' \cup \widetilde{D}_1' = S \diagdown h_2^{-1}(D)$. Аналогично должно быть $\widetilde{\Gamma}_0 \subset D_0$, $D_1 \subset \widetilde{D}_1'$ и, следовательно, $\widetilde{D}_0' \subset D_0$. Теперь мы приходим к противоречию так же, как и в случае 2.

Остается случай, когда h_1 и h_2 имеют внутри D четыре точки ветвления. В очевидных обозначениях тогда должно быть $D_1' \subset D_0$, $D_1 \subset D_0'$, и далее аналогично случаю 2.

Замечание 7.1. Это доказательство можно было бы провести на универсальной накрывающей. Аналогичным образом, учитывая построения § 9, завершается доказательство леммы 5.1.

Следствие 7.1. *Кривые Γ_0, Γ_1, $\widetilde{\Gamma}_0$, $\widetilde{\Gamma}_1$ гомотопны одному из элементов нормального базиса гомологий на торе.*

Таким образом, расположение областей $h_1^{-1}(D)$ и $h_2^{-1}(D)$ имеет вид, изображенный на рис. 4.

Доказательство. То, что Γ_0 и Γ_1 гомотопны одному из элементов нормального базиса гомологий на торе, очевидно из построения накрывающей римановой поверхности. Аналогичное утверждение верно для $\widetilde{\Gamma}_0$ и $\widetilde{\Gamma}_1$. Докажем, что Γ_0 гомотопно $\widetilde{\Gamma}_0$. Но это следует из того, что Γ_0 не пересекается с $\widetilde{\Gamma}_0$ и, следовательно, не может быть гомотопно *другому* элементу нормального базиса гомологий на торе.

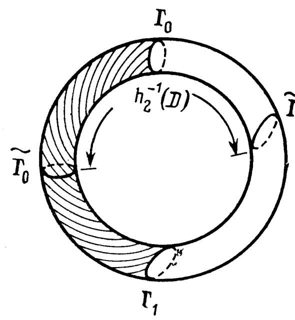

Рис. 4

Напомним, что так же, как и в случае рода 0, группы Галуа расширений $\mathbf{C}_A(x, y)$ над $\mathbf{C}(x)$ и $\mathbf{C}_A(x, y)$ над $\mathbf{C}(y)$ являются циклическими второго порядка, причем явный их вид задается формулами на стр. 509.

Универсальной накрывающей для S является комплексная плоскость $\mathbf{C}$. Пусть при этом фиксировано накрытие (неразветвленное) $\lambda: \mathbf{C} \to S$. Из теории униформизации известно, что S можно рассматривать как комплексную группу Ли, являющуюся фактор-группой аддитивной группы $\mathbf{C}$ по дискретной подгруппе $\{n\omega_1 + m\omega_2\}$, где периоды ω_1 и ω_2 линейно независимы над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, n и m — целые.

При накрытии λ любой отрезок длины $|\omega_i|$ и параллельный вектору ω_i проектируется в замкнутую кривую на S, класс гомологий которой является одним из элементов нормального базиса на S. Мы предположим без ущерба для общности, что $\lambda([0, \omega_1])$ гомологична Γ_0, а следовательно, по следствию 7.1 и всем Γ_1, $\widetilde{\Gamma}_0$, $\widetilde{\Gamma}_1$. Рассмотрим некоторую полосу

$$\Pi = \{\omega\colon \omega = \mu\omega_1 + \nu\omega_2;\ \mu, \nu \in \mathbf{R}, 0 \leqslant \mu < 1\}.$$

Прообраз $\lambda^{-1}\Delta$ будет состоять из счетного числа связных криволинейных полос, сдвинутых друг относительно друга на вектора, кратные ω_2, а $\lambda^{-1}\Delta \cap \Pi$ состоит из некоторой связной области $(\lambda^{-1}\Delta)_0 \cap \Pi$ и ее сдвигов $[(\lambda^{-1}\Delta)_0 \cap \Pi] + n\omega_2$, где n — любое целое число. Область $(\lambda^{-1}\Delta)_0$ мы далее фиксируем и обозначаем через Δ_0. $\Delta_0 \cap \Pi$ является одной из связных компонент $\lambda^{-1}\Delta \cap \Pi$ в полосе Π (далее везде, где это не будет вести к недоразумениям, прообразы кривых и областей в Δ_0 будут обозначаться без индекса λ^{-1}).

Любая функция, заданная в области Δ, может быть поднята на область Δ_0 по формуле

$$f_\lambda(\omega)=f(\lambda\omega), \quad \lambda\omega\in\Delta.$$

Перенесем этим способом функции $x(s)$, $y(s)$, $\pi(s)$, $\tilde\pi(s)$ на Δ_0. Функции $x(\omega)$, $y(\omega)$ и $\eta(\omega)=\eta(x,y)$ оказываются при этом эллиптическими с периодами ω_1 и ω_2, мероморфными на всем $\mathbf{C}$ (индекс λ у перенесенных таким образом функций будем в дальнейшем опускать). При этом $\pi(\omega)$ и $\tilde\pi(\omega)$ определены в действительности на всем Δ_0, где они удовлетворяют уравнениям

$$\pi(\omega+\omega_1)=\pi(\omega), \tag{7.1}$$

$$\tilde\pi(\omega+\omega_1)=\tilde\pi(\omega), \tag{7.2}$$

$$\pi(\omega)+\tilde\pi(\omega)=-x(\omega)y(\omega)\eta(\omega). \tag{7.3}$$

Пусть x_1 и x_2 — точки ветвления алгебраической функции $y(x)$, лежащие внутри единичного круга. Прообразы точек $h_1^{-1}(x_1)$ и $h_2^{-1}(x_2)$ в области Δ_0 обозначим a_1 и a_2. Произвольный конформный автоморфизм $\tilde\zeta$ римановой поверхности S может быть продолжен до конформного автоморфизма $\zeta=\lambda^{-1}\zeta\lambda$ универсальной накрывающей (см. [10]). Это продолжение, конечно, неоднозначно, но оно становится однозначным, если фиксировать образ некоторой точки $\omega\in\mathbf{C}$ при автоморфизме ζ (этот образ должен принадлежать множеству $\{\lambda^{-1}\tilde\zeta\lambda\omega\}$). Поэтому для автоморфизма Галуа ξ мы потребуем, чтобы точка a_1 была неподвижной точкой этого автоморфизма: $\xi a_1=a_1$. Тогда $\xi\omega=-\omega$ в системе координат с началом в точке a_1. Действительно, известно, что самый общий конформный автоморфизм ζ комплексной плоскости $\mathbf{C}$ представляется в виде: $\zeta\omega=a\omega+b$. Так как начало координат является неподвижной точкой, то $b=0$. Но $\xi^2=1$, откуда $a^2=1$ и $a=-1$.

Аналогично определим $b_i=\Delta_0\cap\Pi\cap\{\lambda^{-1}h_2^{-i}(y_i)\}$, $i=1, 2$, где y_1, y_2 — точки ветвления алгебраической функции $x(y)$, лежащие внутри единичного круга, и поднятие автоморфизма Галуа $\tilde\eta$ на универсальную накрывающую в системе координат с началом в точке b_1: $\eta\omega=-\omega$.

Лемма 7.2.

$$\xi\eta\omega=\omega+\omega_3, \textit{ где } \omega_3=2(a_1-b_1),$$

т. е. произведение автоморфизмов Галуа есть сдвиг на вектор, равный удвоенному расстоянию между их неподвижными точками.

Замечание 7.2. Аналогично можно доказать, что

$$a_1-a_2=\pm\frac{\omega_1}{2}, \qquad b_1-b_2=\pm\frac{\omega_1}{2}.$$

Теорема 7.1. *Функции $\pi(\omega)$ и $\tilde\pi(\omega)$ мероморфно продолжаются на всю универсальную накрывающую.*

Доказательство. Ввиду соотношений (7.1) и (7.2) достаточно ограничиться полосой Π или рассматривать некомпактную риманову поверхность S', являющуюся фактором $\mathbf{C}$ по $\{n\omega_1\}$ и топологически эквивалентную бесконечному цилиндру. Так как $\eta\Gamma_0 \subset h_2^{-1}(D)$, то $\eta\xi\Gamma_1 \subset \Delta_0$, и, следовательно, $\Delta_0 \cap (\eta\xi)\Delta_0 \neq 0$. Ввиду того, что $\eta\xi$ есть сдвиг на $-\omega_3$, объединение областей $(\eta\xi)^n\Delta_0$, $n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, покрывает всю плоскость **C**. Отсюда можно показать, что $\pi(\omega)$ и $\tilde{\pi}(\omega)$ продолжаются вдоль любого пути на **C**, и с помощью теоремы о монодромии завершить доказательство теоремы.

Рассмотрим риманову поверхность $\tilde{S}$, являющуюся фактором **C** по $\{n\omega_1 + m\omega_3\}$, т. е. область $\tilde{\Delta}_0$ между Γ_1 и $\eta\Gamma_0$, принадлежащую $\Delta_0 \cap \Pi$, с отождествленными границами. Будем далее отождествлять Γ_1 и $\eta\Gamma_0$. Определим кусочно аналитическую функцию на $\tilde{S}$:

$$\Pi(\omega) = \begin{cases} \pi(\omega), & \omega \in h_1^{-1}(D) \setminus \overline{G}, \\ -\tilde{\pi}(\omega), & \omega \in \tilde{\Delta}_0 \cap h_2^{-1}(D). \end{cases}$$

Таким образом, получаем краевую задачу Римана на римановой поверхности $\tilde{S}$ (см., например, [8]): найти кусочно аналитическую функцию $\Pi(\omega)$ со скачками

$$\begin{aligned} \Pi_+(\omega) - \Pi_-(\omega) &= x(\xi\omega)\, y(\xi\omega)\, \eta(\xi\omega), \quad \omega \in \Gamma_1; \\ \Pi_+(\omega) - \Pi_-(\omega) &= -x(\omega)\, y(\omega)\, \eta(\omega), \quad \omega \in \tilde{\Gamma}_0. \end{aligned} \tag{7.4}$$

(Мы выбираем направление обхода $\Gamma_1 = \eta\Gamma_0$ и $\tilde{\Gamma}_0$ на $\tilde{S}$ по направлению ω_1 и через Π_+ обозначаем значения слева, а через Π_- — справа от соответствующей кривой.)

Рассмотрим теперь ζ-функцию Вейерштрасса

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{n^2+m^2 \neq 0} \left[\frac{1}{(u - n\omega_1 - m\omega_3)} + \frac{1}{n\omega_1 + m\omega_3} + \frac{u}{(n\omega_1 + m\omega_3)^2}\right].$$

Выберем при этом начало координат в точке a_1; тогда $\zeta(u)$ нечетна относительно a_1, a_2, b_1, b_2.

Теорема 7.2.

$$\Pi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1 \cup \tilde{\Gamma}_0} \zeta(\omega - \tau) A(\tau)\, d\tau. \tag{7.5}$$

Кроме того, если $\omega \in h_1^{-1}(D) \setminus \overline{G}$, *то*

$$\pi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} [-\zeta(\omega - \tau) + \zeta(\omega + \tau)]\, x(\tau)\, y(\tau)\, \eta(\tau)\, d\tau, \tag{7.6}$$

а функция $A(\tau)$ *определяется по формуле*

$$A(\tau) = \begin{cases} x(\xi\tau)\, y(\xi\tau)\, \eta(\xi\tau), & \tau \in \Gamma_1, \\ -x(\tau)\, y(\tau)\, \eta(\tau), & \tau \in \tilde{\Gamma}_0. \end{cases}$$

Доказательство. Функция $\Pi(\omega)$, определяемая выражением (7.5), является кусочно аналитической, имеет разрывы на кривых

$\Gamma_1+n\omega_3$, $\widetilde{\Gamma}_0+n\omega_3$, скачки на которых согласуются с формулами (7.4), что легко проверяем, используя формулы Сохоцкого. Достаточно доказать, таким образом (для возможности отождествления Γ_1 и $\eta\Gamma_0$), что $\Pi(\omega)$ имеет периоды ω_1 и ω_3. Так как $\zeta(\omega+\omega_1)=\zeta(\omega)+\eta_1$, $\zeta(\omega+\omega_3)=\zeta(\omega)+\eta_3$, где η_1 и η_3 — константы, то для этого достаточно доказать, что из первого интегрального представления (формула (7.5)) следует второе (формула (7.6)), ибо ядро второго интегрального представления есть эллиптическая функция. Заметив, что $r(\tau)=x(\tau)y(\tau)\eta(\tau)$ не имеет полюсов на G, имеем

$$\int_{\widetilde{\Gamma}_0}\zeta(\omega-\tau)A(\tau)\,d\tau=-\int_{\widetilde{\Gamma}_0}\zeta(\omega-\tau)r(\tau)\,d\tau=-\int_{\Gamma_0}\zeta(\omega-\tau)r(\tau)\,d\tau,$$

$$\int_{\Gamma_1}\zeta(\omega-\tau)r(\xi\tau)\,d\tau=-\int_{\Gamma_1}\zeta(-\omega-\xi\tau)r(\xi\tau)\,d\tau=$$

$$=-\int_{\Gamma_0}\zeta(-\omega-\tau)r(\tau)\,d\tau=\int_{\Gamma_0}\zeta(\omega+\tau)r(\tau)\,d\tau.$$

Решение задачи (7.4) единственно с точностью до константы, ибо разность двух подобных решений аналитична на всей $\widetilde{S}$. Эта константа определяется из условия $\widetilde{\pi}(y(s))=0$ при $y(s)=0$.

Из формулы (7.6) легко можно получить выражение вида

$$\pi(x)=\int_{|x|=1}A(x,x')\,xy_0(x)\,\eta(x,y_0(x))\,dx,$$

где ядро $A(x,x')$ можно задать в явном виде, делая замену переменных в (7.6).

§ 8. Точный тип (—1,1; —1,1). Случай приводимости

Пусть $A(x,y)$ приводим. Тогда с точностью до перестановки x и y возможны следующие случаи.

1) $A(x,y)=A(x)\widetilde{A}(y)$, где $A(x)$ и $\widetilde{A}(y)$ зависят лишь от x и от y соответственно. Этот случай легко решается методом факторизации (см. [15])

2) $A(x,y)=B(x,y)C(y)$, где $C(y)$ зависит лишь от y и имеет по y первую степень. В этом случае также применим метод факторизации. Действительно, если $C(y)=y+c$, где $|c|>1$, то $B(x,y)=b_1(x)y+b_2(x)$, и можно выбрать факторизацию так, чтобы $a_{-+}(x,y)=1$. Отсюда и следует утверждение (см. [15]). Случай $|c|<1$ разбирается аналогично.

3) $A(x,y)=A_1(x,y)A_2(x,y)$, где A_1 и A_2 — многочлены первой степени как по x, так и по y.

Пусть сначала

3А) $A_1(x_0(y),y)=A_1(x,y_0(x))=0$. Если $A_1(x,y)=(cx+d)y+ax+b$, то это возможно, например, когда $|c|$ велико по сравнению с модулями остальных коэффициентов.

Лемма 8.1. *В случае* 3А) $\pi(x)$ *и* $\widetilde{\pi}(y)$ *рациональны.*

Доказательство. Рассмотрим риманову поверхность S рода 0, определенную уравнением $A_1(x, y) = 0$, с однолистными неразветвленными накрытиями $h_1 : S \to \mathbf{P}$ и $h_2 : S \to \mathbf{P}$. Области $h_i^{-1}(D)$ однолистно накрывают D, и так как $h_1^{-1}(\Gamma) \subset h_2^{-1}(D)$, $h_2^{-1}(\Gamma) \subset h_1^{-1}(D)$, то $h_1^{-1}(D) \cup h_2^{-1}(D) = S$. Отсюда и следует рациональность π и $\tilde{\pi}$.

Явный вид решения в случае 3А).

Функция $-xy\eta(x, y)$ должна иметь ровно два полюса на S, причем один $y(s) = y_0$ — в области $h_1^{-1}(D)$, а второй $x(s) = x_0$ — в области $h_2^{-1}(D)$. Обозначая главные части в этих полюсах через $\tilde{\pi}(y)$ и $\pi(x)$ соответственно, будем иметь решение с точностью до констант, определяемых, например, из условия $\tilde{\pi}(0) = 0$.

3Б) $A_1(x_0(y), y) = A_2(x, y_0(x)) = 0$. В этом случае рассмотрим две римановы поверхности: S_1, определенную уравнением $A_1(x, y) = 0$, с накрытиями $h_{11} : S_1 \to \mathbf{P}$ и $h_{12} : S_2 \to \mathbf{P}$; S_2, определяемую уравнением $A_2(x, y) = 0$, с накрытиями $h_{21} : S_2 \to \mathbf{P}$ и $h_{22} : S_2 \to \mathbf{P}$. Имеем, очевидно, $h_{12}^{-1}(D) \subset h_{11}^{-1}(D)$, $h_{21}^{-1}(D) \subset h_{22}^{-1}(D)$. Поднятия $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ на S_1 обозначим через $\pi(s)$ и $\tilde{\pi}(s)$, а на S_2 — $\Pi(t)$ и $\tilde{\Pi}(t)$ соответственно. $h_{11}^{-1}(D)$ и $h_{21}^{-1}(D)$ естественно конформно эквивалентны (как прообразы D). Обозначим этот изоморфизм $\xi : h_{11}^{-1}(D) \to h_{21}^{-1}(D)$. Аналогично вводится $\eta : h_{22}^{-1}(D) \to h_{12}^{-1}(D)$. Будем считать ξ и η продолженными до конформных изоморфизмов $\xi : S_1 \to S_2$ и $\eta : S_2 \to S_1$.

Так же, как и в случае В) § 6, $\xi\eta$ оказывается гиперболическим или локсодромическим, и строится последовательность областей

$$D_1 = h_{11}^{-1}(D) \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset \ldots,$$

где $D_k = (\eta\xi)^k D_1$.

При этом *функции* $\pi(s)$ *и* $\tilde{\pi}(s)$ *мероморфно продолжаются на* $S_1 \setminus \{s_1\}$, *где* s_1 *— неподвижная точка автоморфизма* $\eta\xi$, *лежащая вне* D_1. Явный вид функций получается аналогично случаю В) § 6, и мы не будем его выписывать.

§ 9. Построение автоморфизмов Галуа на универсальной накрывающей

Далее всегда будет предполагаться, что реализуется случай неприводимости (см. § 2) и род римановой поверхности S' $g \geqslant 2$. Далее используются терминология и результаты монографии [9] (см. также [10] и [11]).

Пусть $\mathbf{D}$ — неевклидова плоскость Лобачевского, реализованная как внутренность единичного круга. $\mathbf{D}$ является универсальной накрывающей для S с фиксированным накрытием $\lambda : \mathbf{D} \to S$ и группой преобразований наложения F. F является дискретной фуксовой группой первого рода движений плоскости Лобачевского, состоящей лишь из гиперболических элементов.

Рассмотрим прообраз $\lambda^{-1}\Delta$ связной (см. лемму 5.1) области Δ и одну из его связных компонент. Именно, фиксируем прообраз ω_0 некоторой точки $s_0 \in \Delta$ и рассмотрим компоненту $\Delta_0 \subset \lambda^{-1}\Delta$, содержащую ω_0.

Пусть точка ω_1 такова, что $\lambda\omega_1 = \lambda\omega_0 = s_0$, а C_{01} — произвольная кривая на $\mathbf{D}$, соединяющая ω_0 и ω_1. Тогда обозначим через $[\lambda C_{01}]$ элемент фундаментальной группы $\pi_1(S, s_0)$, соответствующий кривой λC_{01}. Очевидно, что этот элемент не зависит от C_{01} при данном ω_1, но различен для разных ω_1. Таким образом, получаем изоморфизм $\varphi: F \to \pi_1(S, s_0)$, причем если $\omega_1 = f\omega_0$, $f \in F$, то $\varphi(f) = [\lambda C_{01}]$.

Рассмотрим теперь всевозможные точки $\omega_i \in \Delta_0$ такие, что $\lambda\omega_i = s_0$. Множество $f_i \in F$ таких, что $f_i\omega_0 = \omega_i$, образует подгруппу $F_0 \subset F$, причем имеется канонический гомоморфизм $\psi: F_0 \to \pi_1(\Delta, s_0)$, и коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(\Delta, s_0) \\ \cap\downarrow & & \downarrow \\ F & \xrightarrow{\varphi} & \pi_1(S, s_0). \end{array}$$

(Очевидно, что F_0 не зависит от выбора точки s_0.) Граница области Δ_0 состоит из кусочно аналитических кривых, являющихся прообразами Γ_1, $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_k, \widetilde{\Gamma}_1, \ldots, \widetilde{\Gamma}_l$ (см. § 5). Эти прообразы мы будем обозначать через $\lambda_0^{-1}\Gamma_1, \ldots, \lambda_0^{-1}\Gamma_k, \ldots, \lambda_0^{-1}\widetilde{\Gamma}_l$ соответственно. Если на $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, $\widetilde{\Gamma}_1, \ldots, \widetilde{\Gamma}_l$ нет точек ветвления накрытий h_1 или h_2 соответственно, то $\lambda_0^{-1}\Gamma_1, \ldots, \lambda_0^{-1}\Gamma_k, \ldots, \lambda_0^{-1}\widetilde{\Gamma}_l$ аналитичны.

Мы будем предполагать далее, что *поле* $\mathbf{C}(S)$ *мероморфных функций на* S *является нормальным расширением как поля* $\mathbf{C}(x)$ *так и поля* $\mathbf{C}(y)$. Аналогично можно было бы рассмотреть случай, когда существует конечное алгебраическое расширение поля $\mathbf{C}(S)$, нормальное над $\mathbf{C}(x)$ и над $\mathbf{C}(y)$. Для этого надо было бы поднять предварительно уравнения на риманову поверхность этого расширения.

Лемма 9.1. *Для любых Γ_i и $\widetilde{\Gamma}_j$ существует неевклидово движение (гиперболическое или эллиптическое) g_i такое, что $g_i(\lambda_0^{-1}\Gamma_0) = \lambda_0^{-1}\Gamma_i$, а также неевклидово движение $\widetilde{g}_j$ такое, что $\widetilde{g}_j(\lambda_0^{-1}\widetilde{\Gamma}_0) = \lambda_0^{-1}\widetilde{\Gamma}_j$.*

Докажем, что $\lambda_0^{-1}\Gamma_1, \ldots, \lambda_0^{-1}\widetilde{\Gamma}_1, \ldots, \lambda_0^{-1}\widetilde{\Gamma}_l$ аналитичны. Действительно, в §5 было показано, что Γ_0 является аналитической простой замкнутой кривой. Обозначим через γ_i конформный автоморфизм римановой поверхности S такой, что $\gamma_i\Gamma_0 = \Gamma_i$. Легко показать, что он существует и индуцируется соответствующим автоморфизмом Галуа поля $\mathbf{C}(S)$ над $\mathbf{C}(x)$. Аналогично введем автоморфизм $\widetilde{\gamma}_j$ такой, что $\widetilde{\gamma}_j\widetilde{\Gamma}_0 = \widetilde{\Gamma}_j$.

Для доказательства леммы 9.1 нам достаточно, таким образом, доказать следующую лемму и положить в ней $\gamma_i = \widetilde{g}$, $g_i = g$.

Лемма 9.2. *Пусть $\widetilde{g}$ — конформный автоморфизм S, причем для некоторых точек $s_0, s \in S$ имеет место $\widetilde{g}(s_0) = s$. Тогда, если $\lambda\omega = s$, $\lambda\omega_0 = s_0$,* *то существует конформный автоморфизм g универсальной накрывающей* **D** *такой, что $\lambda g = \tilde{g}\lambda$ и $\tilde{g}\omega_0 = \omega$. При этом g является эллиптическим или гиперболическим.*

Действительно, если s_0 и s — две точки на S, не являющиеся точками ветвления накрытия $h_1: S \to \mathbf{P}$ и такие, что $x(s_0) = x(s)$, то существует и единственен конформный автоморфизм $\tilde{g}$ римановой поверхности S такой, что $\tilde{g}s_0 = s$. Далее мы не будем делать различия между $\tilde{g}$ и соответствующим автоморфизмом Галуа.

Произвольный конформный автоморфизм $\tilde{g}$ поверхности S_x может быть поднят на универсальную накрывающую $\mathbf{D}$: $g = \lambda^{-1}\tilde{g}\lambda$. Это перенесение неоднозначно, но становится однозначным, если фиксировать образ $g\omega$ одной точки $\omega \in \mathbf{D}$. При этом должно выполняться только условие $g\omega \in \{\lambda^{-1}g\lambda\omega\}$. Автоморфизм g является неевклидовым движением плоскости Лобачевского (см. [10]).

Докажем, что g является либо гиперболическим, либо эллиптическим. Если $\tilde{g}$ имеет неподвижную точку на S, то можно поднять его на $\mathbf{D}$ так, чтобы g имел неподвижную точку внутри $\mathbf{D}$. Тогда g является эллиптическим. Пусть теперь g не имеет неподвижных точек в $\mathbf{D}$. Это будет иметь место, в частности, когда $\tilde{g}$ не имеет неподвижных точек на S. Докажем, что тогда

$$d = \inf_{\omega \in \mathbf{D}} \rho(\omega, g\omega) > 0, \tag{9.1}$$

где $\rho(\omega, \omega')$ — расстояние между двумя точками на плоскости Лобачевского.

Пусть сначала $\tilde{g}$ не имеет неподвижных точек на S. Введем на S риманову метрику, порожденную неевклидовой метрикой на $\mathbf{D}$. Из компактности S следует, что

$$\inf_{s \in S} \rho(s, \tilde{g}s) > 0. \tag{9.2}$$

Отсюда легко следует и формула (9.1). Пусть теперь $\tilde{g}$ имеет неподвижную точку на S, а g не имеет неподвижных точек на $\mathbf{D}$. Тогда проведем для каждой неподвижной точки на S достаточно малую неевклидову окружность с центром в этой точке. Ограничиваемую ею открытую окрестность этой точки обозначим через O_i. Тогда $S \setminus [\bigcup_i O_i]$ инвариантна относительно $\tilde{g}$, и так же, как и в предыдущем случае, можно доказать, что

$$\inf_{\omega \in \lambda^{-1}[S \setminus \{\bigcup_i O_i\}]} \rho\,(\omega, g\omega) > 0. \tag{9.3}$$

Точки же из любой компоненты O множества $\lambda^{-1}O_i$ под действием g могут перейти лишь в точки конгруэнтного множества fO для некоторого $f \in F$, $f \neq 1$, откуда

$$\inf_{\omega \in \lambda^{-1}O_i} \rho(\omega, g\omega) > 0. \tag{9.4}$$

Ввиду конечности множества индексов i из (9.3) и (9.4) следует формула (9.1).

Нам осталось доказать таким образом, что если выполнено неравенство (9.1), то g — гиперболический элемент. Легко доказывается теперь, что существует z такой, что $\rho(z, gz) = d$. Если мы докажем теперь, что точки z, gz, g^2z лежат на некоторой неевклидовой прямой l, то эта прямая инвариантна относительно g, и, таким образом, g — неевклидов перенос (гиперболический элемент). Для доказательства обозначим через ζ середину неевклидова сегмента $[z, gz]$. Тогда $g\zeta$ является серединой сегмента $[gz, g^2z]$ и $\rho(\zeta, g\zeta) \leqslant \rho(\zeta, gz) + \rho(gz, g\zeta) = d$. Но в то же время $\rho(\zeta, g\zeta) \geqslant d$, откуда и следует утверждение.

Для окончания доказательства леммы 9.1 остается заметить, что для любого i и произвольной точки $\omega \in \lambda_0^{-1}\Gamma_i$ найдется такая точка $\omega' \in \lambda_0^{-1}\Gamma_0$, что $x(\omega) = x(\omega')$, и воспользоваться приведенными выше построениями. При этом g_i оказывается поднятием на $\mathbf{D}$ соответствующего автоморфизма Галуа.

Определение. Группой уравнения (1.1), риманова поверхность S для которого имеет род $g \geqslant 2$, будем называть группу $\varkappa$ неевклидовых движений плоскости Лобачевского, порожденную группой F_0 и всеми автоморфизмами g_i и $\widetilde{g}_j$.

§ 10. Теорема об аналитическом поведении решения

Функции $x(s)$, $y(s)$, $\pi(s)$ и $\widetilde{\pi}(s)$, определенные на $\Delta \subset S$, поднимем на Δ_0 по формуле $\pi_\lambda(\omega) = \pi(\lambda\omega)$, $\lambda\omega \in \Delta$, $\omega \in \Delta_0$ (в дальнейшем индекс λ у π и $\widetilde{\pi}$ опускаем). Очевидно, что $\pi(\omega)$ и $\widetilde{\pi}(\omega)$ удовлетворяют следующим соотношениям при $\omega \in \Delta_0$ и $h \in F_0$:

$$\begin{gathered} \pi(h\omega) = \pi(\omega), \\ \widetilde{\pi}(h\omega) = \widetilde{\pi}(\omega), \\ \pi(\omega) + \widetilde{\pi}(\omega) = -x(\omega)\,y(\omega)\,\eta(x(\omega), y(\omega)). \end{gathered} \tag{10.1}$$

Теорема 10.1. *Функции $\pi(\omega)$ и $\widetilde{\pi}(\omega)$ допускают мероморфное продолжение на всю универсальную накрывающую* $\mathbf{D}$.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 10.1. *Объединение областей $h\Delta_0$, где $h \in \varkappa$, покрывает всю неевклидову плоскость* $\mathbf{D}$.

Доказательство. Заметим, что $\lambda_0^{-1}\Gamma_0 \cup \lambda_0^{-1}\widetilde{\Gamma}_0$ лежит на положительном неевклидовом расстоянии ε от границы $\dot{\Delta}_0$ в плоскости Лобачевского. Выберем произвольным образом точку $\omega_0 \in \Delta_0$. Область Δ_0 обладает следующими свойствами:

1) граница области Δ_0 принадлежит объединению конечного числа аналитических кривых;

2) пусть l — одна из таких граничных аналитических кривых (мы не требуем, чтобы $l \cap \dot{\Delta}_0$ было связным). Тогда существует $h \in \varkappa$ такой, что любая точка $l \cap \dot{\Delta}_0$ принадлежит $\Delta_0 \cup h\Delta_0$ вместе со своей неевклидовой

ε-окрестностью. По лемме 9.1, в качестве h можно выбрать одну из образующих группы $\varkappa$: g_i или $\widetilde{g}_j$.

Построим теперь по индукции последовательность областей

$$\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n, \ldots$$

и последовательность аналитических кривых

$$l_0, l_1, \ldots, l_n, \ldots$$

следующим образом. Положим $l_0 = \Gamma_0$, $l_1 = \widetilde{\Gamma}_0$; далее в произвольном порядке расположим аналитические кривые, имеющие общую дугу с границей $\dot{\Delta}_0$, затем аналитические кривые, имеющие общую дугу с границей $\dot{\Delta}_1$, не совпадающие с ранее построенными, и т. д.

Выберем $h_0 = g_i$ или $\widetilde{g}_j$ так, чтобы $l_2 = g_i l_0$ или $\widetilde{g}_j l_1$. Положим $\Delta_1 = \Delta_0 \bigcup h_0 \Delta_0$. Пусть мы уже построили Δ_n. Тогда существует $h_n = g_i$ или $\widetilde{g}_j$ такой, что $l_{n+2} = h_n l_{i_n}$ для некоторого $i_n \leqslant n+1$. Полагаем $\Delta_{n+1} = \Delta_n \bigcup h_n \Delta_n$. При этом l_{n+2} принадлежит Δ_{n+1} вместе со своей неевклидовой ε-окрестностью. Выполнение свойств 1) и 2) для Δ_{n+1} очевидно. Кроме того, по построению для любого n существует $N > n$ такое, что $\rho(\omega_0, \dot{\Delta}_N) > \rho(\omega_0, \dot{\Delta}_n) + \varepsilon$. Отсюда и следует, что объединение возрастающей последовательности связных областей Δ_n совпадает со всей $\mathbf{D}$.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 1. Имеем, в силу сделанных в § 9 построений,

$$\pi(g_i\omega) = \pi(\omega), \qquad \widetilde{\pi}(\widetilde{g}_j\omega) = \widetilde{\pi}(\omega), \tag{10.2}$$

если $g_i\omega, \omega \in \Delta_0$ и $\widetilde{g}_j\omega, \omega \in \Delta_0$, соответственно. По индукции функции $\pi(\omega)$ и $\widetilde{\pi}(\omega)$ продолжаются на области Δ_n. Пусть они определены в области Δ_n. Тогда, если $h_n = g_i$, то продолжаем $\pi(\omega)$ на область Δ_{n+1} с помощью соотношения $\pi(h_n\omega) = \pi(\omega)$. Функция $\widetilde{\pi}(\omega)$ определяется тогда из уравнения (10.1); аналогично поступаем, если $h_n = \widetilde{g}_j$. Теперь можно легко доказать, что $\pi(\omega)$ и $\widetilde{\pi}(\omega)$ могут быть продолжены вдоль любой кривой на $\mathbf{D}$, и, следовательно, они оказываются однозначными на $\mathbf{D}$ (по теореме о монодромии).

Таким образом, из теоремы 1 и замечания 3.1 получается полное описание возможностей аналитического продолжения решения.

§ 11. Дискретность группы уравнения

Здесь мы изучим группу $\varkappa$ уравнения в случае рода $g \geqslant 2$ и случая неприводимости.

Лемма 11.1. *Если род римановой поверхности S $g \geqslant 2$ и реализуется случай неприводимости, то группа $\varkappa$ уравнения* (1.1) *дискретна.*

Доказательство. По теореме Пуанкаре (см. [9], стр. 99), для групп движений неевклидовой плоскости дискретность и разрывность эквивалентны. Таким образом, если $\varkappa$ недискретна, то она не может быть разрывной. Следовательно, каждая точка $\omega \in \mathbf{D}$ является предельной точкой $\varkappa$. Но по теореме 4А главы 3, [9], стр. 103, множество $\varkappa z$ плотно тогда в любой (предельной) точке $\omega \in \mathbf{D}$ для любого $z \neq \omega$, кроме, может быть, одного значения $z = z_0$, для которого $\{\varkappa z_0\} = \{z_0\}$, т. е. в нашем случае для любого $z \in \mathbf{D}$.

Известно (см. [10]), что группа конформных автоморфизмов E произвольной римановой поверхности S рода $g \geqslant 2$ конечна. Отсюда легко следует, что множество точек $\{\lambda^{-1} e_i \lambda\omega\}$ для любой точки $\omega \in \mathbf{D}$, где $E = \{e_0, \ldots, e_n\}$, дискретно. Тем более является дискретным и множество точек $\varkappa\omega$ для любого ω. Лемма доказана.

Лемма 11.2. *$\varkappa$ может состоять лишь из эллиптических и гиперболических элементов.*

Доказательство. Фиксируем некоторую точку $s_0 \in \Delta \subset S$ и один из ее прообразов $\omega_0 \in \{\lambda^{-1} s_0\} \cap \Delta_0 \subset \mathbf{D}$. Для любой точки $s \in \Delta$ обозначим

$$\rho_\Delta(s_0, s) = \inf_l \rho(l),$$

где $\rho(l)$ — длина спрямляемой кривой $l \subset \Delta$, соединяющей точки s_0 и s_1, в римановой метрике, индуцированной метрикой плоскости Лобачевского, а inf берется по всем таким спрямляемым кривым. Аналогично определяется $\rho_{\Delta_0}(\omega_0, \omega)$ для любой точки $\omega \in \Delta_0$. Легко видеть, что существует такая константа C_0, что для любой точки $\omega \in \Delta_0$

$$\inf_{1 \neq h \in F_0} \rho_{\Delta_0}(\omega, h\omega) < C_0. \tag{11.1}$$

Рассмотрим нормальный фундаментальный многоугольник N (см. [10]) относительно точки ω_0 в предположении, что ω_0 не является неподвижной точкой для $\varkappa$. Докажем, что N компактен. Действительно, в противном случае существовала бы точка $\omega \in \Delta_0$, удаленная от ω_0 на сколь угодно большое расстояние, что противоречит условию (11.1).

Из компактности нормальной фундаментальной области следует, что $\varkappa$ не содержит параболических элементов (см. [9], теорема 7Е, стр. 149).

При этом группа $\varkappa$ имеет образующие $h_1, h_2, \ldots, h_l$, $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$ и определяющие соотношения:

$$h_1 \ldots h_l a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_m b_m a_m^{-1} b_m^{-1} = 1,\ h_i^{k_i} = 1,\ i = 1, \ldots, l$$

(см. [9], стр. 241).

Лемма 11.3. *Для некоторого n существует нормальный делитель $\varkappa_0$ группы $\varkappa$ с образующими $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n$ и единственным определяющим соотношением:*

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_n B_n A_n^{-1} B_n^{-1} = 1.$$

Доказательство. Сельберг доказал (см. [13]), что в любой матричной группе над полем комплексных чисел с конечным числом образующих существует нормальный делитель конечного индекса, не содержащий элементов конечного порядка. Этот результат, очевидно, можно применить к нашей группе $\varkappa$. Тогда такой нормальный делитель оказывается состоящим лишь из гиперболических элементов, а в силу конечности индекса его фундаментальная группа компактна. Откуда (см. [9]) и следует, что он имеет единственное указанное выше определяющее соотношение.

§ 12. Задача Карлемана для фундаментального многоугольника и явный вид решения

Несмотря на получаемое ниже явное представление для решения, очень важную роль играет метод аналитического продолжения из § 10. В частности, с его помощью мы получаем все полюса функций $\pi(\omega)$ и $\tilde{\pi}(\omega)$ на $\mathbf{D}$ и их главные части в этих полюсах. Процедура выделения главных частей очевидна из доказательства теоремы 10.1.

Замечание 12.1. В частности, отсюда вытекает, что асимптотическое поведение коэффициентов функций $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ определяется либо ближайшими к единичному кругу их алгебраическими точками ветвления, либо ближайшими к единичному кругу полюсами и может быть вычислено в конкретных случаях (то, что других особых точек у $\pi(x)$ и $\tilde{\pi}(y)$ нет, следует из теоремы 10.1).

Этот факт играет основную роль в вероятностных приложениях, но здесь мы на нем не останавливаемся.

Рассмотрим нормальный делитель $\varkappa_0$ из леммы 11.3. Используя соотношения (10.1), (10.2) и следующие из них соотношения

$$\pi(\tilde{g}_j\omega)-\pi(\omega)=x(\omega)y(\omega)\eta(\omega)-x(\tilde{g}_j\omega),\ y(\tilde{g}_j\omega)\eta(\tilde{g}_j\omega), \tag{12.1}$$

можно получить уравнения для функций π, $\tilde{\pi}$ и образующих $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n$ этого нормального делителя

$$\pi(A_i\omega)-\pi(\omega)=\alpha_i(\omega),\quad \pi(B_i\omega)-\pi(\omega)=\beta_i(\omega),\quad i=1,\ldots,n, \tag{12.2}$$

где $\alpha_i(\omega)$ и $\beta_i(\omega)$ — линейные комбинации автоморфных функций относительно группы F, сдвинутых на элементы группы $\varkappa$.

Соотношения (12.2) представляют собой задачу Карлемана для фундаментального многоугольника $N: A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\ \ldots\ A_nB_nA_n^{-1}B_n^{-1}=1$, который мы в дальнейшем фиксируем и который можно выбрать так, чтобы $\alpha_i, \beta_i, \pi, \tilde{\pi}$ не имели полюсов на его границе (относительно задачи Карлемана см. библиографию в [8]).

Рассмотрим ядро Беенке — Штейна $\mathfrak{A}(\omega,\omega')$ ([8]) для римановой поверхности $\mathbf{D}/\varkappa_0$, явную конструкцию которого приводил по существу еще Вейерштрасс ([12]). На $\mathbf{D}$ $\mathfrak{A}(\omega,\omega')$ представляет собой автоморфную функцию по ω и автоморфную форму по ω'.

Одно из автоморфных в $\mathbf{D}$ решений задачи (12.2) представляется в виде

$$\Pi(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\sum_i\left[\int_{A_i}\mathfrak{A}(\omega,\omega')\alpha_i(\omega')\,d\omega'+\int_{B_i}\mathfrak{A}(\omega,\omega')\beta_i(\omega')\,d\omega'\right]. \tag{12.3}$$

Обозначим через $\Pi'(\omega)$ — сумму главных частей в полюсах $\Pi(\omega)$ в N, а через $\Pi''(\omega)$ — такую же сумму главных частей для $\pi(\omega)$ (см. замечания в начале параграфа).

Разность $\pi(\omega)$ и частного решения $\Pi(\omega)$ неоднородной задачи (12.2) должна совпадать в N с автоморфной функцией $\widetilde{\Pi}(\omega)$ относительно группы $\varkappa_0$. При этом $\widetilde{\Pi}(\omega) = \pi(\omega) - \Pi(\omega)$ не имеет полюсов на границе N. $\widetilde{\Pi}(\omega)$ определяется тем фактом, что сумма главных частей $\widetilde{\Pi}(\omega)$ для полюсов, лежащих в N, должна совпадать с $\Pi''(\omega) - \Pi'(\omega)$. Сформулируем полученный результат.

Теорема 12.1. *В фундаментальном многоугольнике N функция $\pi(\omega)$ имеет следующее явное представление:*

$$\pi(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\sum_i\left(\int_{A_i}\mathfrak{A}(\omega,\omega')\,\alpha_i(\omega')\,d\omega' + \int_{B_i}\mathfrak{A}(\omega,\omega')\,\beta_i(\omega')\,d\omega'\right) + \widetilde{\Pi}(\omega) + \mathrm{const},$$

где $\widetilde{\Pi}(\omega)$ — автоморфная относительно группы $\varkappa_0$ функция, определенная выше. Аналогичное представление имеет функция $\tilde{\pi}(\omega)$, а константы в их правых частях определяются из условия $\tilde{\pi}(y) = 0$ при $y = 0$.

Замечание 12.2. Можно было бы построить аналогичное интегральное представление непосредственно для группы $\varkappa$. При этом выражение стало бы более явным, но ввиду наличия эллиптических элементов формулы были бы более громоздкими.

В заключение хочу поблагодарить И. И. Пятецкого-Шапиро за ценную консультацию по дискретным группам.

(Поступила в редакцию 24/III 1970 г. и 7/VII 1970 г.)

Литература

1. И. Б. Симоненко, Операторы типа свертки в конусах, Матем. сб., **74** (**116**) (1967), 298—313.
2. И. Б. Симоненко, О многомерных дискретных свертках, Матем. исследования, Кишинев, 3, № **1** (1968), 108—122.
3. В. А. Малышев, О решении дискретных уравнений Винера — Хопфа в четверти плоскости, ДАН СССР, **187**, № **6** (1969), 1243—1246.
4. N. Wiener, E. Hopf, Ueber Eine Klasse Singularen Integralgleichungen, Sitzungsb. Preus. Akad. Wiss., (1931), 696—706.
5. М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, Успехи матем. наук, **XIII**, вып. **5** (83) (1958), 3—120.
6. И. Ц. Гохберг, Л. С. Гольденштейн, О многомерном интегральном уравнении на полупространстве с ядром, зависящим от разности аргументов, и его дискретном аналоге, ДАН СССР, **131**, № **1** (1960), 9—12.
7. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, Москва, Физматгиз, 1960.
8. Э. И. Зверович, Г. С. Литвинчук, Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения, Успехи матем. наук, **XXIII**, вып. **3** (**141**) (1968), 67—121.

9. J. Lehner, Discontinuous groups and automorphic functions (1964), Providence (American Math. Soc. Math. Survey No. 8).
10. Дж. Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей, Москва, ИЛ, 1960.
11. Л. Р. Форд, Автоморфные функции, Москва — Ленинград, ОНТИ, 1936.
12. K. Weierstrass, Vorlesungen über die theorie der Abelschen transzendenten, Math. Werke, Bd. 4 (1902), Berlin.
13. A. Selberg, On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces, Tata Inst, of Fundam. Research (1960), 147—164.
14. В. А. Малышев, Аналитический метод в теории случайных блужданий в четверти плоскости: простое блуждание с косым отражением, Труды Советско-Японского симпозиума по теории вероятностей, Хабаровск, 1969, 176—184.
15. В. С. Рабинович, Многомерное уравнение Винера — Хопфа для конусов, Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. **5** (1957), 59—67.
16. В. А. Какичев, Краевые задачи линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях, Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. **5** (1967), 37—58.