

МИНИСТЕРСТВО НЕФТЕПЕРЕРАБАТЫВАЮЩЕЙ
И НЕФТЕХИМИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ СССР
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ НЕФТЕХИМИЧЕСКОЙ И ГАЗОВОЙ
ПРОМЫШЛЕННОСТИ ИМ. И. М. ГУБКИНА

ВИБРАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ
ТРУБОПРОВОДОВ
НА НЕФТЕХИМИЧЕСКИХ
ПРЕДПРИЯТИЯХ

(Сборник статей)

Под общей редакцией
канд. техн. наук А. А. Козобкова

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Владиславлев А. С., Козобков А. А., Писаревский В. М. Пульсирующий поток газа в трубопроводах поршневых компрессорных машин	6
Козобков А. А., Писаревский В. М. К определению давления и скорости газа в сложных разветвленных трубопроводных системах поршневых компрессоров	20
Козобков А. А., Писаревский В. М. К определению спектра собственных частот колебаний газа в сложных трубопроводных системах	29
Старобинский Р. Н. Расчет и моделирование динамических явлений в газовых магистралях	36
Малышев В. А. О некоторых общих методах определения влияния неоднородностей трубопроводов на поток газа, пульсирующий с малыми скоростями	49
Малышев В. А., Писаревский В. М. Расчет влияния поворота на пульсацию газа в трубопроводных системах поршневых компрессоров	60
Малышев В. А., Писаревский В. М. К определению импедансов некоторых типов холодильников	74
Шорин В. П. Расчет частотных характеристик трубопроводов, температура рабочей среды в которых изменяется по длине	83
Платонов А. Г. К определению спектра частот колебаний газа в системах, включающих кожухотрубный холодильник	90
Козлов В. А., Козобков А. А., Мессерман А. С. Электрическое моделирование процесса движения пульсирующего потока газа	98
Аронзон Н. З., Козлов В. А., Козобков А. А., Мессерман А. С., Электрическая модель компрессорной установки	104
Аронзон Н. З., Белоус Ю. Л. Электрическое моделирование технологических объектов по их частотным характеристикам	113
Сафин А. Х. Нелинейные явления при колебаниях газа в коммуникациях поршневых компрессорных машин	120
Козобков А. А., Мессерман А. С., Сердий Л. А. Датчик для измерения параметров вибраций трубопроводов	126
Козлов В. А., Сердий Л. А. Низкочастотный вибростенд для изучения вибраций трубопроводов	132
Владиславлев А. С., Козлов В. А., Мокшин В. А. Лабораторные установки для изучения пульсирующего потока в трубопроводных системах поршневых компрессоров	136
Босняцкий Г. П., Владиславлев А. С., Дуров В. С., Мочалов В. А., Писаревский В. М. Примеры решения задач устранения пульсации давления и вибрации трубопроводов на промышленных предприятиях	142

$$\int_{x_1}^{x_2} LdC = 2,21 \cdot 10^{-5} \left[8 \ln \frac{8}{8-x_2} - x_2 \right];$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dL \int_{x_1}^x LdC = 2,21 \cdot 10^{-2} \left[8x_2 - \frac{x_2^2}{2} - 8(8-x_2) \ln \frac{8}{8-x_2} \right].$$

Из (23), (26), (29) при $x_2=5$ легко определяются характерные величины для схем 2, в, 3, а, 4, а.

Схема 2, в	Схема 3, а	Схема 4, а
$L_1 = L_2 = 2,5 \cdot 10^3$	$L_1 = 0,29 \cdot 10^3$	$L_1 = 0,192 \cdot 10^3$
$C = 2,21 \cdot 10^{-8}$	$L_2 = 0,21 \cdot 10^3$	$L_2 = 0,308 \cdot 10^3$
	$C = 2,21 \cdot 10^{-8}$	$C_1 = 1,51 \cdot 10^{-8}$
		$C_2 = 0,70 \cdot 10^{-8}$

Максимальные погрешности для принятых схем для частоты

$$f = 10 \text{ гц } (\omega = 62,8) \quad \Theta^2 = 0,426$$

$\Delta_{11} < 0,213$	0,0113	0,0113
$\Delta_{22} < 0,213$	0,0113	0,0113
$\Delta_{12}/\omega L < 0,106$	0,106	0,0023
$\Delta_{21}/\omega C < 0,106$	0,106	0,0266

Действительные погрешности, определенные по двум последующим приближениям

$\Delta_{11} = 0,034$	0,0062	0,0062
$\Delta_{22} = 0,034$	0,0085	0,0007
$\Delta_{12}/\omega L = 0,038$	0,035	0,0015
$\Delta_{21}/\omega C = 0,070$	0,070	0,014

Выводы

Предлагаемый в статье метод позволяет схематизировать физические процессы в газовых магистралях сложной формы, по которым течет газ с изменяющимися по длине физическими свойствами, и позволяет свести расчет такой магистрали к расчету некоторой эквивалентной магистрали, состоящей из определенного числа сосредоточенных элементов или построить легко реализуемые модели системы. Схематизация производится на основе интегральных характеристик системы, которые могут быть весьма просто рассчитаны или определены экспериментально. Изложенный здесь метод может быть применен и к задачам схематизации электрических и механических систем.

О НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ МЕТОДАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЛИЯНИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ТРУБОПРОВОДОВ НА ПОТОК ГАЗА, ПУЛЬСИРУЮЩИЙ С МАЛЫМИ СКОРОСТЯМИ

В. А. Малышев

Практическая необходимость расчета пульсаций газа в трубопроводных системах хорошо известна. Не касаясь здесь проблемы в целом [1, 9], остановимся на расчете влияния включений на пульсирующий поток газа.

Работами И. А. Чарного установлено, что при некоторых условиях можно линеаризовать уравнения газовой динамики. Следуя принятой точке зрения, кроме нелинейных эффектов, мы здесь не останавливаемся также на расчете активного влияния включений, т. е. влияния сосредоточенного трения. Это должно быть предметом отдельного исследования.

Кроме некоторых результатов, статья построена так, чтобы служить введением в общие методы расчета неоднородностей.

Для расчета влияния сложных включений недостаточно одномерных волновых уравнений, полученных Чарным для пульсирующего потока газа [9], и требуется переход к двум или даже трем измерениям.

Таким образом, будем считать, что давление $P(x, y, z, t)$, вектор скорости $\bar{q}(x, y, z, t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \nabla P = 0 \quad (\text{закон Ньютона}), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \bar{q}) = 0 \quad (\text{уравнение непрерывности}), \quad (2)$$

где ρ — плотность, ρ_0 — статическая плотность.

Условие адиабатичности $P = c^2 \rho$ дает

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Трубопроводные системы представляют собой области трехмерного пространства, состоящие из однородных участков, являющихся в большинстве случаев прямыми цилиндрами, соединенных некоторым образом между собой. Поперечное сечение этих цилиндров чаще всего бывает круглым (встречаются, однако, кольцевые и другие сечения). Удобно представлять себе типичную трубопроводную систему как изображенную на рис. 1. На нем прямые участки (A_1A_2 , A_3A_4 , A_4A_5 , A_6A_7 и т. д.) соединены областями более сложной формы (так называемыми неоднородностями). Это камера A_2A_3 , диафрагма A_4 и т. д.

Требуется решить волновое уравнение (3) в этой сложной области.

Граничные условия на стенках:

$$\bar{n}\bar{q} = 0 \text{ или, что то же}$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0,$$

где \bar{n} — нормаль к стенке.

Концы A_1, A_{13}, A_{17} могут быть закрыты (условие на стенке), открыты (граничное условие: $P=0$), и на одном из них задается возмущающая сила.

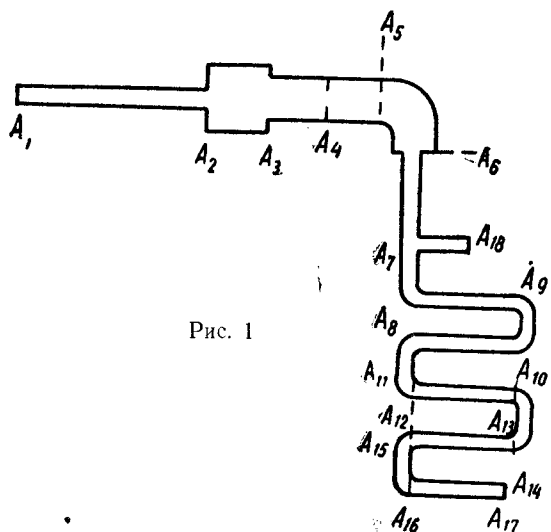


Рис. 1

Мы будем интересоваться установившимся режимом работы, т. е. искать решение уравнения (3) в виде

$$P(x, y, z, t) = P(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 P(x, y, z) + k^2 P(x, y, z) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5)$$

а из (1) — важное в дальнейшем соотношение между давлением и скоростью:

$$\bar{q} = i(\omega \rho_0)^{-1} \nabla P. \quad (6)$$

В соответствии с этим граничное условие для возмущающей силы (например, на конце A_1) запишется для $P(x, y, z, t)$ в виде

$$P(x, y, z, t)|_{A_1} = P(M) e^{i\omega t},$$

* В силу линейности уравнения можно искать решение в комплексном виде, отделяя затем действительную часть от мнимой.

где M — точка на поперечном сечении A_1 .
Отсюда получаем

$$P(x, y, z)|_{A_1} = P(M). \quad (7)$$

Решить уравнение (5) во всей сложной области в замкнутом виде, конечно, невозможно. Поэтому было разработано много приближенных методов решения.

Основная идея, на которой основываются эти методы решения, состоит в сведении задачи с большим количеством неоднородностей к задаче с одной неоднородностью. Поясним это подробно. В цилиндрической области (рис. 2) с граничными условиями

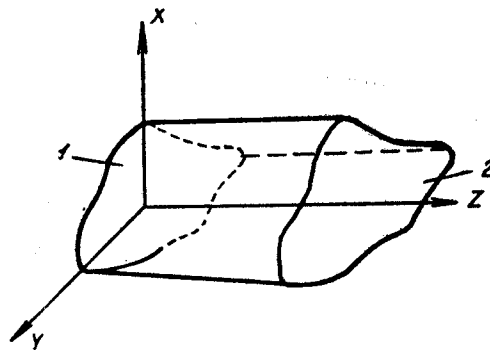


Рис. 2

на поперечном сечении 1

$$P = \psi_1(x, y)$$

и на поперечном сечении 2

$$P = \psi_2(x, y)$$

решение ищется в виде линейной комбинации «прямых и обратных волн»:

$$P(x, y, z) = P(x, y) e^{\pm ihz}, \quad h \geq 0. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5), получим:

$$\nabla^2 P(x, y) + \lambda^2 P(x, y) = 0; \quad \lambda^2 = k^2 - h^2. \quad (9)$$

Известно [14], что это уравнение Гельмгольца для поперечного сечения с граничным условием $\frac{dP}{dn} = 0$ имеет дискретный спектр собственных значений:

$$\lambda_0^2 = 0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \dots < \lambda_n^2 < \dots$$

Пусть $P_j(x, y)$ — соответствующие собственные функции. Если $\lambda_j^2 > k^2$, то волна $P(x, y) e^{\pm ihz}$ с $h_j^2 = k^2 - \lambda_j^2$ либо быстро

затухает (по длине z), либо наоборот; второй случай не удовлетворяет на бесконечности условиям физической реальности [15] и при условии достаточной длины прямого участка может быть отброшен. Таким образом, обычно рассматриваются лишь волны с $\lambda_j^2 \ll k^2$. На практике часто встречаются случаи, когда k^2 весьма мало. При этом неравенству $\lambda_j^2 \ll k^2$ удовлетворяет одно единственное собственное число $\lambda_0^2 = 0$. Собственная функция $P_0(x, y)$ при этом равна постоянной P_0 , которая из условий нормировки получается равной $\frac{1}{\sqrt{S}}$, где S — площадь поперечного сечения.

Таким образом, по каждому из участков распространяется волна главной моды вида

$$(c_1 e^{ikz} + c_2 e^{-ikz}) e^{i\omega t},$$

что представляет собой известное одномерное решение.

Дальнейшая задача заключается в том, чтобы согласовать амплитуды c_1 и c_2 для различных прямых участков трубопроводов.

Из уравнений (3) и (6) для главной моды получим:

$$\begin{aligned} -i\omega\rho_0 v(z) &= \frac{dp(z)}{dz}; \\ -i\left(\frac{k^2}{\omega\rho_0}\right) P(z) &= \frac{dv(z)}{dz}; \\ v &= \bar{q}_z. \end{aligned} \quad (10)$$

Мы видим, что эти уравнения совпадают с уравнениями для электрической линии с распределенными параметрами [6]:

$$\frac{dU(z)}{dz} = -i\omega LI(z); \quad \frac{dI(z)}{dz} = -i\omega CU(z),$$

где $U(z)$ — напряжение, а $I(z)$ — ток, если считать

$$L = \rho_0, \quad c = \frac{1}{\rho_0 c^2}.$$

Отсюда получаем

$$U(z) = P(z), \quad I(z) = v(z).$$

Как известно [2], при этом P, v в поперечном сечении $z=0$ связаны с P, v в поперечном сечении $z=l$ посредством матрицы четырехполюсника:

$$\begin{vmatrix} P & (0) \\ v & (0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} i\omega \frac{l}{c} z_0 \operatorname{sh} i\omega \frac{l}{c} \\ \frac{1}{z_0} \operatorname{sh} i\omega \frac{l}{c} \operatorname{ch} i\omega \frac{l}{c} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P(l) \\ v(l) \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$z_0 = \rho_0 c = \sqrt{\frac{U}{c}}.$$

Если применяется другая система аналогий, а именно:

$$P = U, \quad sv = I, \quad (12)$$

то, как легко проверить, соотношение (11) останется неизменным, только z_0 станет равным $\frac{\rho_0 c}{S} = \sqrt{\frac{L}{c}}$.

Направление U и I будем брать соответственно рис. 3. Вышеупомянутая задача согласования амплитуд требует нахождения

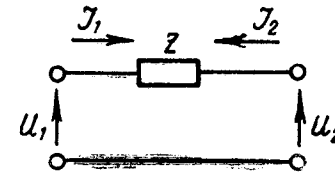


Рис. 3

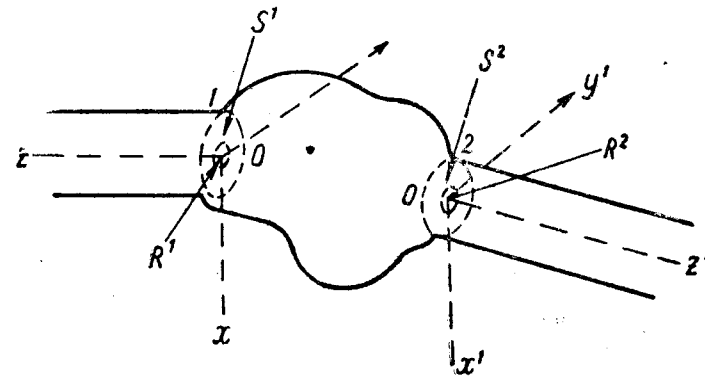


Рис. 4

ния матрицы преобразования вектора (P, v) от поперечного сечения 1 к поперечному сечению 2 каждой неоднородности (рис. 4).

Неоднородность, соединяющая два прямых участка трубы, соответствует, естественно, четырехполюснику в теории электрических линий. Аналогично можно рассматривать $2n$ — полюсники для любого числа прямых труб, соединенных неоднородностью.

Автору неизвестны публикации, содержащие оценку погрешности при сведении расчета сложной системы к последовательному расчету каждой неоднородности, однако эта задача представляет большой интерес.

Следующий этап исследований заключается в решении задачи с одной неоднородностью.

Здесь укажем общий метод расчета четырехполюсных неоднородностей, разобрав отдельно два случая. Причем в первом частном случае плоских неоднородностей мы используем идеи, изложенные в работе [16].

Плоские неоднородности (плоскости поперечных сечений 1 и 2 (рис. 4) совпадают.

В качестве примера может быть приведена диафрагма и любое другое резкое изменение поперечного сечения (возможно даже по форме).

Величины слева от сечения 1 и справа от сечения 2 будем обозначать соответственно индексами 1 и 2 вверху.

$$v^{1,2}(x, y, z) = (a^{1,2} e^{\mp ikz} + b^{1,2} e^{\pm ikz}) \Phi_0^{1,2} + \sum_j b_j^{1,2} \Phi_j^{1,2}(x, y) \exp(\pm |h_j^{1,2}| z), \quad (13)$$

где, например в $e^{\mp ikz}$, верхний знак берется в случае 1, а нижний — в случае 2.

Волны с $e^{+|h_j^1|z}$ и $e^{-|h_j^2|z}$ отсутствуют как не удовлетворяющие условию излучения на бесконечности; $\Phi_j^{1,2}$ — собственные функции для задачи Неймана в соответствующих поперечных сечениях;

$$\Phi_0^{1,2} = \frac{1}{\sqrt{s^{1,2}}};$$

$$b_j^{1,2} = -\delta_j^i a^{1,2} + \int_R v(x, y) \Phi_j^{1,2}(x, y) ds, \quad (14)$$

где δ_j^i — символ Кронекера, а R — соединительное отверстие между двумя трубами (которое может быть меньше S^1 и S^2).

$$P^{1,2}(x, y, z) = \pm \rho_0 c (a^{1,2} e^{\mp ikz} - b^{1,2} e^{\pm ikz}) \Phi_0^{1,2} \pm \sum_j \frac{i \omega \rho_0}{|h_j|} b_j^{1,2} \Phi_j^{1,2}(x, y) e^{\pm |h_j^{1,2}| z}. \quad (15)$$

Согласно (12) имеем, если поперечное сечение соответствует $z = 0$,

$$U^{1,2}(0) = \pm \rho_0 c (a^{1,2} - b^{1,2}) \Phi_0^{1,2}, \\ I^{1,2}(0) = S^{1,2} (a^{1,2} + b^{1,2}) \Phi_0^{1,2}. \quad (16)$$

Интегрируя $v(x, y)$ по поперечному сечению $z=0$ и используя (13), получим:

$$\int_R v(x, y) dS = (a^1 + b^1) (\Phi^1)^{-1} = I^1(0) = (a^2 + b^2) (\Phi^2)^{-1} = I^2(0). \quad (17)$$

Так как $I^1(0) = I^2(0)$, то четырехполюсник, соответствующий линейному преобразованию вектора (U^1, I^1) в (U^2, I^2) , должен иметь вид, показанный на рис. 3. Обращаясь к формуле (15) и вычитая из первого выражения второе, имеем, учитывая (14) и (16):

$$U^2(0) - U^1(0) = \int_R G(x, y, x^1, y^1) v(x^1, y^1) dS^1,$$

где

$$G = \sum_{p=1,2} \sum_j z_j^p \Phi_j^p(x, y) \Phi_j^p(x', y'). \quad (17')$$

Положим

$$f(x, y) (U^2 - U^1) = v(x, y),$$

тогда имеем

$$1 - \int_R \sigma(x, y, x', y') f(x', y') dS', \\ (x, y) \in R. \quad (18)$$

Уравнение (18) будет искомым интегральным уравнением Фредгольда 1 рода, редко разбираемым в литературе. Но в то же время $U^2 - U^1 = I_1 Z = -I_2 Z$. Отсюда, учитывая (17), имеем:

$$z = \frac{1}{\int_R f(x', y') dS'}$$

Умножая обе части уравнения (18) на $z f(x, y) dx dy$ и интегрируя, имеем

$$z = \frac{\int_R \int_R f(x, y) \sigma(x, y, x', y') f(x', y') dx dy dx' dy'}{\left[\int_R f(x, y) dS \right]^2}. \quad (19)$$

Подставляя сюда значение σ из (17'):

$$z = \sum_{p=1,2} \sum_j z_j^p \frac{\left[\int_R f(x, y) \Phi_j^p(x, y) dS \right]^2}{\left[\int_R f(x, y) dS \right]^2}, \quad (20) \\ z_j^p = \frac{i \omega \rho_0}{|h_j|}$$

докажем, что правая часть выражения (20), деленная на i , имеет абсолютный минимум при $f(x, y)$, удовлетворяющий интегральному уравнению (19). Действительно, в силу вида ядра G для

любой функции $g(x, y)$ имеем:

$$\frac{1}{i} \int_R \int_R g(x, y) G(x, y, x' y') g(x', y') dS dS' \geq 0, \quad (21)$$

причем здесь имеет место равенство только, если $g=0$.
Полагаем теперь, что

$$g = \frac{f}{\int f dS} - \frac{f_0}{\int f_0 dS},$$

где f_0 — функция, удовлетворяющая интегральному уравнению.
Подставляя это в (21), получим

$$\frac{\int_R \int_R f G f dS dS'}{(\int f dS)^2} - \frac{2 \int_R \int_R f_0 G f dS dS'}{\int f_0 dS \cdot \int f dS} + \frac{\int_R \int_R f_0 G f_0 dS dS'}{(\int f_0 dS)^2} =$$

$$= \sum_{\rho=1,2} \sum_j \frac{z_j^\rho}{i} \left[\left(\int_R f \Phi_j^\rho dS \right) - \left(\int_R f_0 \Phi_j^\rho dS \right) \right]^2 \geq 0,$$

откуда $f \equiv f_0$.

Из формулы (19) следует, что можно выбирать f с точностью до постоянного множителя, поэтому положим

$$f(x, y) = 1 + \sum_j A_j \Phi_j^3(x, y), \quad (22)$$

где $1, \Phi_j^3(x, y)$ — полная ортогональная система функций на R при условии

$$\left. \frac{\partial \Phi_j^3}{\partial n} \right|_R = 0.$$

Подставляя (22) в (20), получим:

$$B = \frac{Z}{i} = B_0 + 2 \sum_j C_j A_j + \sum_j \sum_k D_{jk} A_j A_k, \quad (23)$$

где

$$B_0 = \sum_{\rho=1,2} \sum_j B_j^\rho \left[\int_R \Phi_j^\rho(x, y) dS \right]^2; \quad (24)$$

$$C_j = \sum_{\rho=1,2} \sum_k B_j^\rho \left[\int_R \Phi_k^\rho(x, y) ds \right] \left[\int_R \Phi_k^\rho \Phi_j^3 dS \right]; \quad (25)$$

$$D_{kk'} = \sum_{s=1,2} \sum_j B_j^s \left[\int_R \Phi_j^s(x, y) \Phi_j^3(x, y) dS \right] \times$$

$$\times \left[\int_R \Phi_k^3(x, y) \Phi_{k'}^3(xy) dS \right], \quad (26)$$

где

$$B_j^\rho = \frac{kc \rho_0}{|h_j|}.$$

Условие минимума искомого решения по A_j после дифференцирования $\frac{\partial}{\partial A_j}$ дает бесконечную систему уравнений

$$-C_j = \sum_k^j D_{jk} A_k. \quad (27)$$

Подставляя в (23), имеем

$$B = B_0 + \sum_j c_j A_j. \quad (28)$$

Интересной задачей является исследование системы (27) с точки зрения существования и единственности решения, а также погрешности возможных приближенных методов ее решения. В ряде случаев эти системы являются квазирегулярными [10] *Общий случай* (рис. 4).

Введем две системы координат: $Oxyz$ — поперечном сечении 1 и $O'x'y'z'$ — в поперечном сечении 2. Уравнения (13), (14), (15) сохранятся, если в случае 2 заменить x, y, z на x', y', z' соответственно. Кроме этого, будут разными $v(x, y, 0) = v^1(x, y)$ и $v(x', y', 0) = v^2(x', y')$.

Система аналогий будет определяться формулами (16), но теперь вместо (17) будем иметь:

$$\int_{S^1} v^1(x, y) dS = \int_{R^1} v'(x, y) dS = (a' + b')(\Phi')^{-1} = I'(0);$$

$$\int_{S^2} v^2(x, y) dS = \int_{R^2} v^2(x', y') dS = (a^2 + b^2)(\Phi^2)^{-1} = I^2(0). \quad (29)$$

Здесь S^i — поперечное сечение i -ой трубы, а R^i — отверстие (площадь которого может быть меньше S^i) из i -ой трубы в объем Ω . Введем обозначения:

$$\frac{v^1(x, y)}{I'(0)} = \tau_1^2(x, y) = A_0^1 + \sum A_j^1 \varphi_j^1(x, y);$$

$$v^2(x, y) = \tau_2^2(x, y) = A_0^2 + \sum A_j^2 \varphi_j^2(x', y'). \quad (30)$$

Имеем из (29):

$$\int_{S^{1,2}} \tau_1^{1,2}(x, y) dS = A_0^{1,2} = 1. \quad (31)$$

Далее необходимо решить задачу Неймана: в сечении $j, j=1,2$, на остальной границе Ω

$$v(\omega) = \begin{cases} \psi^j(x, y) \\ 0 \end{cases}$$

для уравнения Гельмгольца.

Получающееся при этом решение $p(\omega)$ будет линейно зависеть от $v^{1,2} = I^{1,2}(0)\eta^{1,2}$.

Таким образом, будем иметь

$$p(\omega) = I^1(0)F^1(\omega) + I^2(0)F^2(\omega). \quad (32)$$

Приравнявая давления в сечениях 1 и 2, получим:

$$\begin{aligned} I^1(0)F^1(\omega)|_{1,2} + I^2(0)F^2(\omega)|_{1,2} &= p(\omega)|_{1,2} = p^{1,2}(x, y, 0) = \\ &= U^{1,2}(0) \mp \sum_i \frac{i\omega\epsilon_0}{|h_j|} b_j^{1,2} \cdot \Phi_j^{1,2}(x, y). \end{aligned}$$

$$\text{Но } b_j^{1,2} = I^{1,2}(0) \int_{R^{1,2}} \eta_j^{1,2}(x, y) \Phi_j^{1,2} dS. \quad (33)$$

Умножая это уравнение на $\eta^{1,2}(x, y) dx dy$ и интегрируя соответственно по $S^{1,2}$, имеем основные уравнения, для определения коэффициентов четырехполюсника:

$$\begin{aligned} S^1 U^1 &= I^1 \left[\int_{S^1} F^1(\omega) dS + ikc \rho_0 \int_{R'} \int_{R'} \sigma'(x, y, x', y') \eta_1'(x, y) \eta_1' \times \right. \\ &\quad \left. \times (x', y') dS dS' \right] + I^2 \int_{S^1} F^2(\omega) dS; \\ S^2 U^2 &= I^1 \left[\int_{S^2} F^1(\omega) dS + ikc \rho_0 \int_{R^2} \int_{R^2} \sigma(x, y, x', y') \eta_1'(x, y) \eta_1^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times (x', y') dS dS' \right] + I^2 \int_{S^2} F^2(\omega) dS. \end{aligned} \quad (34)$$

Обозначив

$$\begin{aligned} U^1 &= Z_{11} I^1 + Z_{12} I^2; \\ U^2 &= Z_{21} I^1 + Z_{22} I^2, \end{aligned} \quad (35)$$

будем иметь систему интегральных уравнений относительно

$$\eta_1^1, \eta_1^2, Z_{ij}; \quad Z_{11} = \frac{1}{S^1} \int_{S^1} F^1(\omega) dS \text{ и т. д.} \quad (35')$$

Учитывая то, что $F^j(\omega)$ линейно зависят от η_1 и η_2 , а следовательно, и от коэффициентов $A_j^{1,2}$ их разложений, получим бесконечную систему линейных уравнений, которая также в ряде случаев оказывается квазирегулярной.

Из матрицы $\|z_{ij}\|$ четырехполюсника можно затем обычными электрическими приемами [6] получать другие представления четырехполюсника. Иногда применяется упрощенный метод определения параметров четырехполюсника.

После получения уравнений (34) задача разбивается на две части: 1) вычисление $F^{1,2}(\omega)$ и 2) решение системы уравнений (35').

Для решения первой задачи имеются разнообразные приемы: а) Метод Фурье, разделения переменных. Если он применим, то является наиболее удобным методом. Однако и при его применении возникают трудности (см., например, [14]) в вычислении собственных значений и собственных функций для области Ω . Очень удобным является здесь метод разложения по степени малого параметра k^2 (особенно метод Шредингера).

б) В двумерной задаче решение уравнения Гельмгольца можно получить, применяя конформное отображение области $\Omega(x, y)$ на $H(u, v)$ (простой структуры):

$$z = x + iy = f(U + iv) = f(z).$$

Тогда уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2 p = 0$$

перейдет в

$$\frac{\partial^2 p}{\partial U^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} + k^2 g(U, v) p = 0,$$

где

$$g(U, v) = \left| \frac{df(z)}{dw} \right|^2.$$

К этому уравнению применяется теперь метод разложения по k^2 .

в) Использование других параметров малости. Например, введение такой системы координат, которая мало отличается от системы, в которой разделяются переменные.

В связи с этим рассмотрим важный пример — винтовой трубопровод. Здесь мы используем метод, предложенный в работе [13]. Рассмотрим систему координат $Oxyz$. Винтовая линия определяется уравнением

$$x = R \cos \varphi; \quad y = R \sin \varphi; \quad z = \lambda \varphi.$$

Мы рассмотрим отрезок этой линии $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$.

В каждой точке линии проведем нормальную плоскость и в ней — окружность радиуса r с центром — точкой винтовой линии. Внутренность такой поверхности и будет винтовым волноводом. Параметры φ, r, ψ , где ψ — полярный угол в нормальной плоскости можно принять за новую систему координат. Из формул Френе получим следующие выражения для кривизны u и кручения x винтовой линии:

$$k = \frac{R}{R^2 + \lambda^2}; \quad x = \frac{\lambda}{R^2 + \lambda^2}. \quad (36)$$

На практике часто выполняется условие $r \ll R$ (например, в

10—100 раз. Это обеспечивает выполнение условий: $kr \ll 1$, $xr \ll 1$, что позволяет применить метод разложения по параметру $\epsilon = \max\{kr, xr\}$.

Для нас важен тот факт, что такие трубопроводы можно моделировать (или считать при расчетах) прямыми трубами. Более точно, эффект отклонения трубопровода от прямого является величиной не более второго порядка малости относительно ϵ .

Действительно, рассмотрим главную моду $P_0(z)$, распространяющуюся в прямой круглой трубе радиуса r . Она удовлетворяет уравнениям нулевого приближения в нашем случае [13]. Выбираем теперь $F^i(\omega)_{1,2} = U_0|_{1,2}$. Для определения первого возмущения в уравнения (16), (17), (18) работы [13] подставляем k и x из (36) и U_0 . При этом для P_1 получим уравнение Гельмгольца с нулевыми граничными условиями, что и дает отсутствие возмущения первого порядка.

В литературе часто ограничиваются так называемым статическим приближением. В нашем случае это будет означать, что мы ограничиваемся членом B_0 в формуле (23) или полагаем $\tau_1^{1,2}(x, y) = \text{const}$ при применении вариационного принципа к уравнениям (35) аналогично (20).

Полезная библиография и обзор приводятся в монографии [11], а также в другой литературе по электромагнитным волноводам, например в [12].

В заключение отметим, что дальнейшей основной математической задачей здесь является строгая оценка погрешности приближенных методов расчета для классов неоднородностей и сложных систем.

РАСЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПОВОРОТА НА ПУЛЬСАЦИЮ ГАЗА В ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМАХ ПОРШНЕВЫХ КОМПРЕССОРОВ

В. А. Малышев, В. М. Писаревский

Изучение пульсирующего потока газа в трубопроводных системах является одной из основных задач при проектировании и эксплуатации поршневых компрессоров.

Известно [1,17], что наличие пульсирующего потока вызывает изменение рабочей эффективности компрессора; дополнительные динамические нагрузки клапанов и кривошипно-шатунного механизма; вибрацию и связанное с ней усталостное разрушение трубопровода.

В результате происходит увеличение эксплуатационных расходов и снижение надежности работы установки. Трубопроводные системы поршневых компрессоров имеют сложную пространствен-

ную конфигурацию и большое количество включений (неоднородностей): фасонные части, трубопроводную арматуру и различные технологические объекты. Поэтому задача определения влияния фасонных частей, арматуры и технологических объектов на пульсирующий поток приобретает большое значение.

Наиболее распространенный вид фасонных частей — поворот. Изучение поворотов оси трубопровода особенно важно, так как поворот является [1,17] источником вибрации системы. Пульсирующий поток газа, проходя через поворот, создает динамическую силу, обусловленную разностью внешней и внутренней площади поворота (эффект трубки Бурдона) и вызывающую вибрацию участка.

Теоретические исследования пульсирующего потока газа в трубопроводах основываются на линеаризованных уравнениях, связывающих давление P и скорость v . Эти уравнения были выведены И. А. Чарным [18] и оказались совпадающими с уравнениями распространения электрического тока в линии с распределенными параметрами и звука в трубах. Эта аналогия была использована С. А. Хачатуряном для характеристики влияния неоднородностей в трубопроводе на пульсацию газа с помощью их импедансов [1].

Несмотря на то что расчет многих неоднородностей может быть проведен с помощью одномерных уравнений, ряд наиболее важных неоднородностей требует рассмотрения волновых процессов большего числа измерений [4].

Разберем случай плавного поворота, который является более сложным и более распространенным (если не единственно применяемым) в трубопроводных системах поршневых компрессоров, чем рассмотренный ранее (Д. Майлсом [19] «резкий» поворот (рис. 1). При этом будем использовать двумерное приближение и то обстоятельство, что практически длина волны существенно больше геометрических размеров неоднородности.

Наиболее рациональным методом решения задач пульсирующего потока в трубных обвязках поршневых компрессоров является метод электрического моделирования, сводящийся к замене изучаемой неоднородности эквивалентным четырехполюсником.

Таким образом, задача определения импеданса плавного поворота сводится к нахождению параметров эквивалентного четырехполюсника.

Рассмотрим плоскую область (рис. 2), представляющую плавный поворот прямой полосы. Здесь две бесконечные в одну сторо-

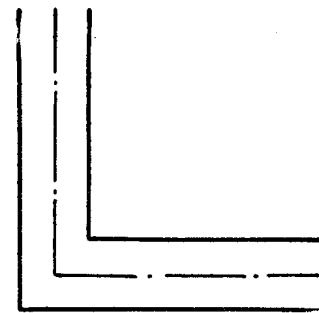


Рис. 1

ну прямые полосы $CDEF$ и $ABKG$ соединены посредством кольцевой полоски, образованной дугами концентрических окружностей радиусов соответственно r_1 и r_2 . В заключение укажем очевидные изменения, которые надо провести для получения формулы при произвольном угле поворота φ . В этой области распространяется волна давления $p(x, y, t)$.

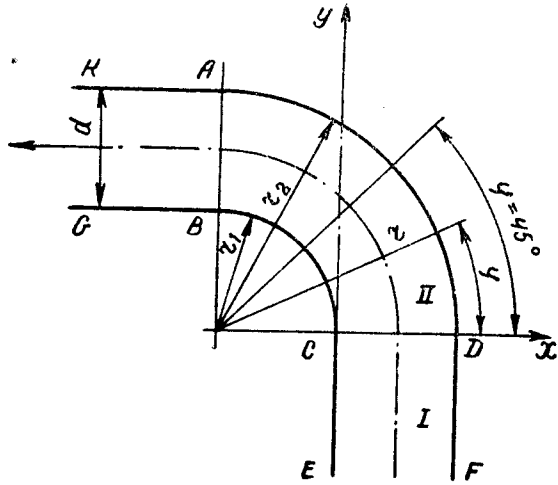


Рис. 2

В известных предположениях [2] можно записать волновое уравнение:

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Рассмотрим распространение гармонической волны частоты ω :

$$p(x, y, t) = p(x, y) e^{j\omega t}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), имеем

$$\Delta p + k^2 p = 0; \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (3)$$

Вектор скорости

$$\vec{q}(x, y) = j(k\rho c) \text{grad } p(x, y). \quad (4)$$

Граничными условиями на стенках, как всегда, будет равенство 0 нормальных составляющих вектора скорости:

$$\vec{q}(x, y) \vec{n} = 0.$$

Нам надо знать, как распространяется волна главной моды (с волновым числом k) через неоднородную область $ABCD$, т. е. как связаны давление и продольная скорость в сечениях AB и CD :

$$p_{AB} = z_{11} v_{AB} + z_{12} v_{CD};$$

$$p_{CD} = z_{12} v_{AB} + z_{22} v_{CD},$$

чтобы иметь возможность построить эквивалентный четырехполюсник. Этот четырехполюсник будет, очевидно, симметричным, а следовательно, его можно реализовать в виде рис. 3а, используя T — ячейку с импедансами. Далее выпишем уравнения аналогии между p, v, U, I , но прежде несколько преобразуем четырехполюсник (см. рис. 3б).

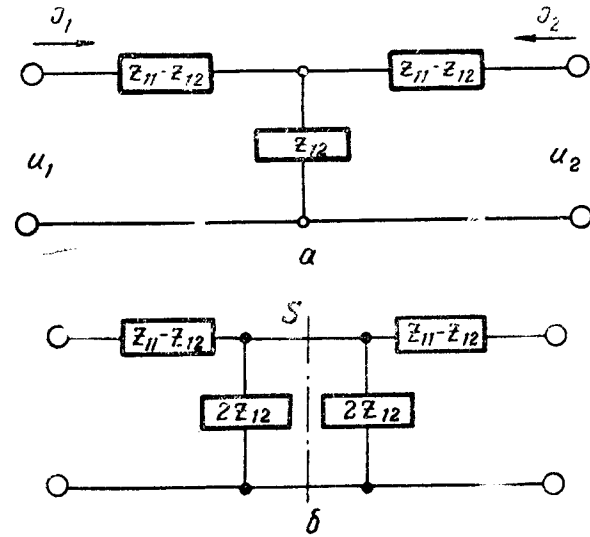


Рис. 3

Заметим, что z_{11} и z_{12} будут определены, если мы будем знать соотношение между U_1 и I_1 в следующих двух случаях (см. рис. 4, а и б).

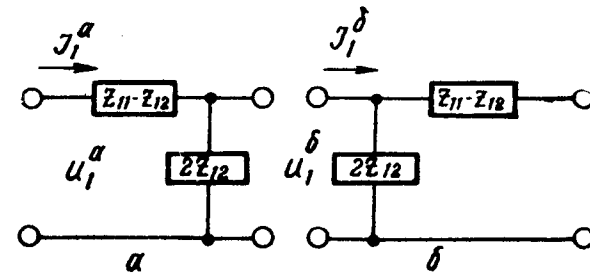


Рис. 4

Действительно, например,

$$\frac{U_1^a}{I_1^a} = z_{11} + z_{12}; \quad \frac{U_1^b}{I_1^b} = z_{11} - z_{12},$$

откуда

$$z_{11} = 0,5 \left(\frac{U_1^a}{I_1^a} + \frac{U_1^b}{I_1^b} \right); \quad z_{12} = 0,5 \left(\frac{U_1^a}{I_1^a} - \frac{U_1^b}{I_1^b} \right).$$

Согласно системе аналогий между U_1 ; p_{CD} и I_1 ; v_{CD} , записанной ниже (см. формулы 14 а), эти два случая соответствуют отношению между p_{CD} и v_{CD} в геометрических областях на рис. 5, а и 5, б, иначе говоря, закрытой и открытой в сечении S половинки трубы.

Следовательно, для нахождения связи между U_1^{ab} и I_1^{ab} необходимо решить уравнение (3) в областях на рис. 5 (а и б).

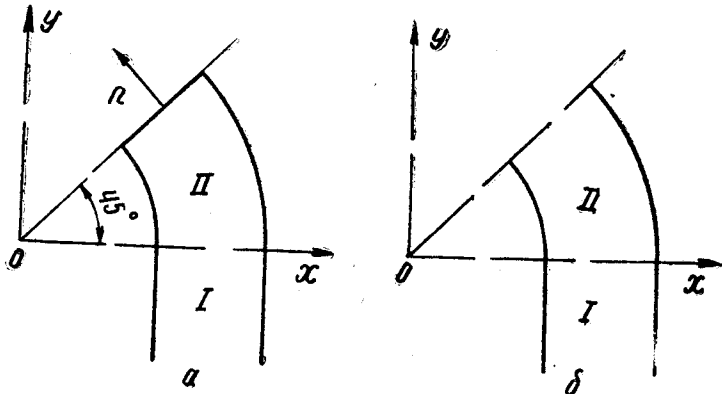


Рис. 5

Граничные условия на прямой S следующие:

$$\begin{aligned} \bar{q}(x, y) \bar{n} &= 0, \\ p(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В каждом из случаев а и б план первого этапа решения будет следующий. Обозначив $\psi(x)$ продольную скорость CD, выведем интегральное уравнение для $\psi(x)$ и выражение для $\frac{U_1}{I_1}$ через $\psi(x)$.

Вывод интегрального уравнения

Решим уравнение (3) в области I. Система координат показана на рис. 2. Граничные условия:

$$\bar{q}_x(0, y) = \bar{q}_x(a, y) = 0 \quad y < 0;$$

$$v^I(x, 0) = \bar{q}_y(x, 0) = \psi(x) \quad 0 < x < a.$$

Стандартный метод разделения переменных дает:

$$v^I(x, y) = \bar{q}_y(x, y) = \left(\alpha_0 e^{-i \frac{\theta y}{a}} + \beta_0 e^{i \frac{\theta y}{a}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{i \frac{k_n y}{a}} \psi_n(x), \quad (6)$$

где

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2 - \delta_n^0}{a}} \cos \frac{n \pi y}{a},$$

$$\theta = ka; \quad k_n^2 = \theta^2 - (n \pi)^2,$$

δ_n^j — символ Кронекера.

Условие $v^I(x, 0) = \psi(x)$ дает

$$\psi(x) = (\alpha_0 + \beta_0) \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \psi_n(x), \quad (7)$$

откуда

$$\beta_n = -\delta_n^0 \alpha_0 + \int_0^a \psi(x) \psi_n(x) dx. \quad (8)$$

Используя (4), получим:

$$p^I(x, y) = \rho c \left(\alpha_0 e^{-i \frac{\theta y}{a}} - \beta_0 e^{i \frac{\theta y}{a}} \right) \psi_0 - \rho c \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\theta}{k_n} e^{i \frac{k_n y}{a}} \psi_n(x).$$

Перейдем к решению уравнения в области II. Введем систему полярных координат (рис. 2).

Известно, что уравнение (3) в этой системе координат будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + k^2 p = 0.$$

Разделяем переменные

$$p(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi),$$

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} + k^2 r^2 = 0,$$

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + k^2 r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda;$$

получаем два уравнения:

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (k^2 r^2 + \lambda) R(r) = 0;$$

$$\Phi''(\varphi) - \lambda \Phi(\varphi) = 0.$$

на отрезках

$$r_1 \leq r \leq r_2; \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

с граничными условиями на концах, следующими из (5):

$$R'(r_1) = R^I(r_2) = 0, \quad (9)$$

$$\Phi'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad (10)$$

$$\Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad (11)$$

$$\rho(r, 0) = \psi(r - r_1). \quad (12)$$

Как следует из общей теории дифференциальных операторов [20], уравнение

$$\frac{d}{dr} [rR'(r)] + \left(k^2r + \frac{\lambda}{r}\right)R(r) = 0 \quad (13)$$

при условии (9) имеет дискретный спектр собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, каждое из которых простое.

Соответствующую ортонормированную с весом $\frac{1}{r}$ систему собственных значений обозначим $R_1(r), R_2(r), \dots$.

Решение уравнения (3) в области II будет:

$$\rho_{II}^{a,b}(r, \varphi) = -jk\rho c \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{a,b} R_n(r) \left(e^{V\lambda_n \varphi} \pm e^{-V\lambda_n \varphi + \frac{\pi}{2} V\lambda_n} \right),$$

причем здесь, как и в дальнейшем, сразу будем выписывать решение для случаев a и b , уславливаясь первый знак (в верхней формуле) понимать для случая a , а второй (в предыдущей формуле) — для случая b .

Вычисления λ_n и $R_n(r)$ приведены ниже. Продолжим вывод основных уравнений. $C_n^{a,b}$ находится из условия

$$\rho_{II}^{a,b}(x, 0) = \psi^{a,b}(x),$$

и так как в силу (4)

$$\rho_{II}^{a,b}(r, \varphi) = j(k\rho c)^{-1} \frac{\partial \rho(r, \varphi)}{rd\varphi} = V\lambda_n \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{a,b} R_n(r) \frac{1}{r} \times \left(e^{V\lambda_n \varphi} \pm e^{-V\lambda_n \varphi + V\lambda_n \frac{\pi}{2}} \right), \quad (14)$$

то

$$C_n^{a,b} = \int_{r_1}^{r_2} \psi^{a,b}(r - r_1) R_n(r) dr \frac{1}{1 \pm e^{V\lambda_n \frac{\pi}{2}}} \cdot \frac{1}{V\lambda_n}.$$

Отметим здесь следующее обстоятельство. В работе Майлса [19] в двух соответствующих областях собственные функции получились одинаковыми, поэтому удалось очень просто выразить константы $C_n^{a,b}$ через β_n .

В нашем случае это не имеет места. Более того, ряды (6) и (14) будут сходиться только в открытом интервале $0 < x < a$. На концах же будет разрыв, что нетрудно проследить, исходя из элементарных свойств тригонометрических рядов и формулы (7).

Система аналогий и метод вычисления параметров эквивалентного четырехполюсника

Рассмотрим электрическую линию с распределенными параметрами, эквивалентную основной моде волны в области I. Система аналогий для нее будет такая:

$$I(y) = y_0 \left(\alpha_0 e^{-j\frac{\theta y}{a}} + \beta_0 e^{j\frac{\theta y}{a}} \right);$$

$$U(y) = \alpha_0 e^{-j\frac{\theta y}{a}} - \beta_0 e^{j\frac{\theta y}{a}};$$

$$I_1 = (\alpha_0 + \beta_0) y_0; \quad U_1 = \alpha_0 - \beta_0;$$

$$y_0 = \frac{1}{z_0}. \quad (14a)$$

Используя непрерывность давления на прямой CD , получим:

$$\begin{aligned} U_1^{a,b} \psi_0 &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\theta}{k_n} e^{j\frac{k_n y}{a}} \psi_n(x) - jk\rho c \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{a,b} R_n(r) \times \left(e^{V\lambda_n \varphi} \pm e^{-V\lambda_n \varphi + V\lambda_n \frac{\pi}{2}} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \psi^{a,b}(x') \psi_n(x') dx' \frac{\theta}{k_n} e^{j\frac{k_n y}{a}} \psi_n(x) - \\ &- \frac{jk}{V\lambda_n} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_1}^{r_2} \psi^{a,b}(r' - r_1) R_n(r') dr' R_n(r) \frac{e^{V\lambda_n \varphi} \pm e^{-V\lambda_n \varphi + V\lambda_n \frac{\pi}{2}}}{1 \pm e^{V\lambda_n \frac{\pi}{2}}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначив

$$\psi^{a,b}(x) = \eta^{a,b}(x) I_1^{a,b} \cdot z_0, \quad (16)$$

из (8) получим:

$$\begin{aligned} I_1^{a,b} z_0 &= \int_0^a \psi^{a,b}(x) \psi_0 dx \\ \text{и} \int_0^a \eta(x) \psi_0 dx &= 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме того, подставляя (16) в (15), получим:

$$\frac{U_1^{a,b} \psi_0}{I_1^{a,b} z_0} = \left(\frac{z_{11} \pm z_{12}}{z_0} \right) \psi_0 = \int_0^a G^{a,b}(x, x') \eta(x') dx', \quad (18)$$

где

$$G^{a,b}(x, x') =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\theta}{k_n} \psi_n(x') \psi_n(x) - \frac{jk \left(1 \pm e^{\sqrt{\lambda_n} \frac{\pi}{2}}\right)}{\sqrt{\lambda_n} \left(1 \pm e^{\sqrt{\lambda_n} \frac{\pi}{2}}\right)} R_n(r_1 + x') R_n(r_1 + x) \right].$$

Уравнение (18) вместе с условием (17) и есть исконое интегральное уравнение для $\eta^{a,\delta}(x)$ и для параметров эквивалентного четырехполюсника. Решение этого уравнения, являющегося уравнением Фредгольма первого рода, будет дано ниже.

Собственные функции в области II

Вычисление собственных функций и значений уравнения (13) при условии (9) является одним из основных препятствий на пути получения полного решения задачи о плавном повороте.

Вообще говоря,

$$R_n(r) = I_{\nu_n}(kr) N'_{\nu_n}(kr_2) - N_{\nu_n}(kr) I'_{\nu_n}(kr_2),$$

т. е. решение есть линейная комбинация функции Бесселя и Неймана I_{ν_n} ; N_{ν_n} порядка $\nu_n = \sqrt{-\lambda_n}$, который определяется из уравнения

$$\frac{I'_{\nu_n}(r_1 k)}{I'_{\nu_n}(r_2 k)} = \frac{N'_{\nu_n}(r_1 k)}{N'_{\nu_n}(r_2 k)},$$

следующего очевидным образом из условий (9). В диссертации Воскресенского [21] дан обзор работ по вычислению собственных частот. Оказалось, что, кроме полного несогласования численных данных, в ряде работ имеются прямые ошибки. Рассмотрим особо важный практический случай больших длин волн λ в сравнении с поперечным сечением a трубы.

Будем вычислять μ_n методом теории возмущений в форме Шредингера. Невозмущенное уравнение (13) возьмем в виде

$$r^2 R'' + rR' + \lambda R = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$C_1 x^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 x^{-\sqrt{-\lambda}} = C_1 (x^{\sqrt{-\lambda}} + C x^{-\sqrt{-\lambda}}).$$

Константу C определяем из условий (10) при $x=r_1$, а собственные числа λ из условия: при $x=r_2$,

$$r_1^{\sqrt{-\lambda}} - C r_1^{-\sqrt{-\lambda}} = 0, \quad C = r_1^{2\sqrt{-\lambda}}; \quad r_2^{\sqrt{-\lambda}} - C r_2^{-\sqrt{-\lambda}} = 0;$$

$$r_2^{2\sqrt{-\lambda}} = r_1^{2\sqrt{-\lambda}}; \quad e^{+2\sqrt{-\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}} = e^{j2\sqrt{-\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}} = 1 = e^{j2\pi n}$$

$$\lambda_{0n} = \frac{\pi^2 n^2}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)^2}; \quad n = 0; 1; \dots$$

Нетрудно найти теперь вещественное решение данной граничной задачи:

$$R_{0n}(r) = C_n \cos \left(\frac{\pi \cdot n}{\ln \frac{r_2}{r_1} \ln \frac{r}{r_1}} \right).$$

Константа определяется из условий нормировки:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{R_{0n}^2(r)}{r} dr = 1.$$

Можно установить, что

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}; \quad n \geq 1, \quad \text{а } R_{00} = \sqrt{\frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}.$$

В возмущенном уравнении будем искать решение в виде разложения по k^2 :

$$\lambda_{m+1} = \lambda_{0m} + k^2 \lambda_{1m} + k^4 \lambda_{2m} + \dots +$$

$$R_{m+1}(r) = R_{0m}(r) + k^2 R_{1m}(r) + \dots$$

Подставляя это в (13) и используя формулу Грина, в силу самосопряженности оператора $\frac{d}{dr}(rR')$ для первого возмущения получим:

$$\int_{r_1}^{r_2} r R_{0m} R_{0j} dr + \lambda_{1m} \int \frac{R_{0m} R_{0j}}{r} dr + (\lambda_{0m} - \lambda_{0j}) \int \frac{R_{1m} R_{0j}}{r} dr = 0.$$

Разлагая

$$R_{1m} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{1mj} R_{0j},$$

Получим

$$\lambda_{1m} = - \int_{r_1}^{r_2} r R_{0m}^2 dr; \quad a_{1mj} = \frac{\int r R_{0m} R_{0j} dr}{\lambda_{0m} - \lambda_{0j}}; \quad j \neq m.$$

$a_{1mm} = 0$ (из условий нормировки $R_m(r)$).

Отсюда

$$\lambda_{01} = - \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad a_{101} = - \left(\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\pi} \right) \frac{\sqrt{2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} r \cos \left(\frac{\pi}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \ln \frac{r}{r_1} \right) dr$$

и т. д.

Нетрудно подсчитать, что

$$\int_{r_2}^{r_1} r \cos\left(\frac{\pi}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \ln \frac{r}{r_1}\right) dr = -\frac{4r_2^2}{4 + \pi^2 \left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)^2}.$$

Решение интегрального уравнения

Положим

$$\eta(x) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(x)$$

и подставим это в (18); умножая обе части на ψ_0 и интегрируя \int_0^a , получим:

$$\frac{z_{11} \pm z_{12}}{z_0} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{jk}{V\lambda_n} \cdot \frac{1 \pm e^{V\lambda_n \frac{\pi}{2}}}{1 \pm e^{-V\lambda_n \frac{\pi}{2}}} \cdot \int_0^a R_n(r_1 + x) dx.$$

Отсюда

$$z_1 = \frac{z_{11} + z_{12}}{z_0} \approx -\frac{jk}{V\lambda_{01}} \cdot \frac{1 + e^{V\lambda_{01} \frac{\pi}{2}}}{1 - e^{-V\lambda_{01} \frac{\pi}{2}}} \cdot \int_0^a R_{00}(r_1 + x) dx \times$$

$$\times \left[\int_0^a R_{00}(r_1 + x') \psi_0^2 dx' + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a R_{00}(r_1 + x') \psi_0 A_k \psi_k(x') dx' \right] =$$

$$= \frac{-j 4 \ln \frac{r_2}{r_1}}{k (r_2^2 - r_1^2)} \cdot 2a \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = -j \frac{8}{k \pi (r_2 + r_1)}; \quad (19)$$

$$z_2 = \frac{z_{11} - z_{12}}{z_0} \approx \frac{jk \pi}{4} a \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (20)$$

В формуле (19) мы ограничимся так же, как и Майлс в работе [19], первым приближением для решения бесконечной системы линейных уравнений относительно A_k . Однако, как можно было бы доказать, формула (19) дает точную асимптотику, а формула (20) — асимптотику с точностью до близкой к единице константы.

Таким образом, окончательно

$$\frac{z_{12}}{z_0} = \frac{8}{jk \pi} \cdot \frac{1}{r_1 + r_2}; \quad (21)$$

$$\frac{z_{11} - z_{12}}{z_0} = \frac{jk \pi}{4} \frac{a}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad (22)$$

а коэффициент отражения

$$|R| = \left| \frac{z_1 z_2 - 1}{(z_1 + 1)(z_2 + 1)} \right| \approx \left| \frac{\frac{a}{(r_2 + r_1) \ln \frac{r_2}{r_1}} - 1}{\lambda \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r_2 + r_1}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\pi ka}{8} \left| \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} - \frac{r_1 + r_2}{a} \right| \dots \right| \quad (23)$$

Укажем, какие изменения надо провести для произвольного угла φ_0 . Соответственно изменившимся условиям (10, 11) вместо

$$l^{V\lambda_n \varphi} \pm l^{-V\lambda_n \varphi + V\lambda_n \frac{\pi}{2}}$$

будет, очевидно,

$$l^{V\lambda_n \varphi} \pm l^{-V\lambda_n \varphi + V\lambda_n \varphi}$$

Нетрудно проследить далее, что

$$\frac{z_{12}}{z_0} = \frac{4}{jk \varphi_0} \cdot \frac{1}{r_2 + r_1}, \text{ а } \frac{z_{11} - z_{12}}{z_0} = \frac{jk \varphi_0}{2} \cdot \frac{a}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Отводы, используемые в трубопроводных системах поршневых компрессоров, изготавливаются в соответствии с нормами МН-4754-63, МН-2909-62, МН-2921-62. Геометрические характеристики этих отводов, параметры эквивалентного четырехполюсника и модуль коэффициента отражения приведены в табл. 1.

Экспериментальная проверка формул (21) и (22) заключалась в определении спектра собственных частот системы, состоящей из прямолинейного участка трубы и отвода 90° , закрытого на конце.

При распространении волны давления различной частоты, создаваемых гибкой мембраной, помещенной в начале системы, максимальные амплитуды, зафиксированные микрофоном, расположенным у закрытого конца отвода, соответствуют спектру собственных частот системы.

Перед началом работы весь исследуемый диапазон частот проверялся путем сравнения со спектром частот прямой трубы, закрытой с двух концов. Уравнение спектра собственных частот изучаемой системы выводится на основании [2]:

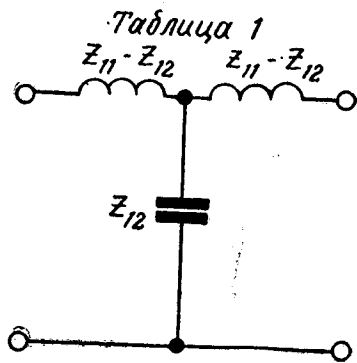
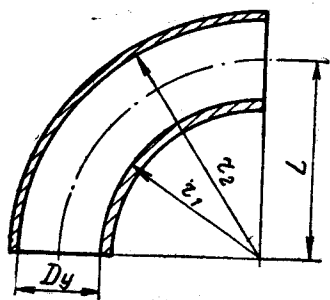
$$\text{ctg } kl = y_{11}, \quad (24)$$

где l — длина прямолинейного участка трубы;

y_{11} — реактивная составляющая концевого импеданса.

Для T-образного четырехполюсника, разомкнутого на конце,

$$y_{11} = \frac{z_{11} - z_{12}}{z_0} = \frac{z_{12}}{z_0} = \frac{z_{11}}{z_0}$$



N/n	$a=D_4$ M	L	$r_1 = \frac{a}{2}$	$r_2 = r_1 + a$	$r_1 + r_2$	$\rho_n = \frac{r_2}{r_1}$	$\frac{Z_{12}}{Z_0} = \frac{8}{j k \pi (r_1 + r_2)}$	$\frac{Z_{11} - Z_{12}}{Z_0} = \frac{j k \pi a}{4 \rho_n r_1}$	$(R) = \frac{Z_{11} - Z_{12}}{8} = \frac{1}{\rho_n^2 r_1} \frac{r_2}{a}$
1	0,04	0,08	0,06	0,1	0,16	0,514	$\frac{15,9}{j k}$	$j k \cdot 0,0811$	0,9322k
2	0,05	0,1	0,075	0,125	0,2	0,514	$\frac{12,7}{j k}$	$j k \cdot 0,0765$	0,403k
3	0,07	0,14	0,105	0,175	0,28	0,514	$\frac{9,7}{j k}$	$j k \cdot 0,107$	0,0564k
4	0,08	0,16	0,12	0,2	0,32	0,514	$\frac{7,98}{j k}$	$j k \cdot 0,124$	0,0844k
5	0,1	0,15	0,1	0,2	0,3	0,695	$\frac{8,5}{j k}$	$j k \cdot 0,113$	0,071k
6	0,125	0,19	0,138	0,263	0,4	0,695	$\frac{6,47}{j k}$	$j k \cdot 0,141$	0,129k
7	0,15	0,225	0,15	0,3	0,45	0,695	$\frac{5,68}{j k}$	$j k \cdot 0,17$	0,151k
8	0,175	0,265	0,178	0,353	0,53	0,695	$\frac{4,81}{j k}$	$j k \cdot 0,193$	0,176k
9	0,2	0,3	0,2	0,4	0,6	0,695	$\frac{4,25}{j k}$	$j k \cdot 0,228$	0,213k
10	0,25	0,375	0,25	0,5	0,75	0,695	$\frac{3,4}{j k}$	$j k \cdot 0,283$	0,253k
11	0,3	0,45	0,3	0,6	0,9	0,695	$\frac{2,83}{j k}$	$j k \cdot 0,339$	0,302k
12	0,4	0,6	0,4	0,8	1,2	0,695	$\frac{2,12}{j k}$	$j k \cdot 0,452$	0,403k

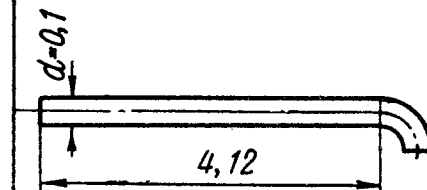
или, при учете (21) и (22),

$$y_{11} = \frac{k \pi}{4} \frac{a}{\ln \frac{r_2}{r_1}} - \frac{8}{k \pi} \frac{1}{r_1 + r_2}$$

Геометрические характеристики отвода берутся из табл. 1. Уравнение (24) решается численными методами.

Таблица 2

Исследуемая система	N гармоник	Эксперимент. спектр соотв. частот	Расчетный спектр соотв. частот	$\Delta f / \Delta f_{max}, \%$
	6	200	200	0
	7	238	238	0
	8	276	277	2,6
	9	314	316	5,3
	10	352	354	5,3
	11	391	394	7,9
	12	434	437	7,9
	13	472	476	10,5
	14	514	520	15
	15	553	560	18,3



В табл. 2 приведен спектр собственных частот, полученный экспериментальным путем, а также рассчитанный по уравнению (24).

Экспериментальные частоты оказались несколько больше расчетных, причем разность увеличивалась с увеличением частоты. Абсолютная ошибка отнесена к максимально возможному сдвигу резонансной частоты участка прямой трубы данной длины при установке импеданса на конце. Максимально возможный сдвиг определяется как разность резонансных частот при открытом и закрытом концах.

Отсутствие полного совпадения можно прежде всего объяснить недостаточностью двумерного приближения, а увеличение ошибки с увеличением частоты связано с предположением о больших длинных волн, положенным в основу при выводе формул (21) и (22).

В заключение можно сказать, что формулы (21), (22) хорошо согласуются с экспериментом (особенно на низких частотах) и могут быть рекомендованы для расчета пульсирующего потока в трубопроводных системах поршневых компрессоров.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ИМПЕДАНСОВ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ХОЛОДИЛЬНИКОВ

В. А. Малышев, В. М. Писаревский

Трубопроводные системы поршневых компрессоров с включенным комплексом технологического оборудования, трубопроводной арматуры и фасонных частей представляют собой своеобразные волноводы, по которым происходит движение компримируемого газа. При расчете пульсации газа в таких системах или при применении для расчета метода электрического моделирования неизбежно определение импедансов включений.

Под технологическим оборудованием будем понимать всевозможные теплообменные, маслолагоотделительные и т. д. аппараты, имеющиеся в обвязке почти любого компрессора и предназначенные для измерения параметров газа. Определение импедансов подобных включений особенно важно, поскольку наличие пульсирующего потока в них связано с резким увеличением потерь дав-

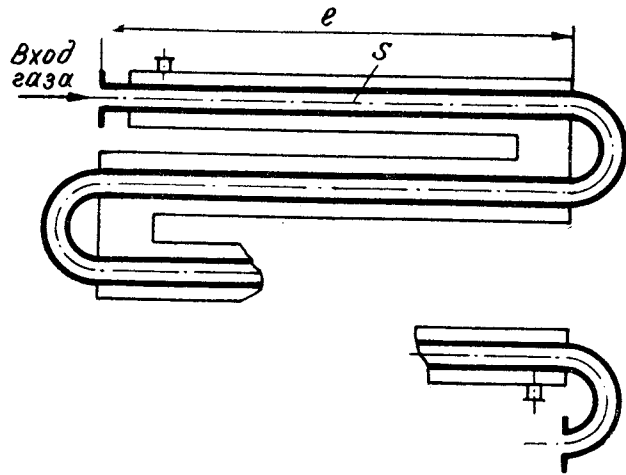


Рис. 1

ления и с возможными большими потерями мощности компрессора [22]. Подобные явления становятся особенно ощутимыми в аппаратах с большой длиной газового столба или с резкими изменениями направления движения потока. Кроме того, в конструкциях большинства аппаратов имеются элементы, вызывающие вибрацию как самого аппарата, так и присоединенных трубопроводов.

В настоящее время опубликован целый ряд работ по определению импедансов отдельных включений. Но вопросы эффективного расчета систем, состоящих из большого числа элементов, не

разработаны. В данной статье выделяется класс таких систем, для которого возможен эффективный расчет импеданса и приводится пример расчета импеданса системы, состоящей из небольшого числа включений.

Гладкотрубные теплообменные аппараты типа «труба в трубе» широко используются в трубопроводных системах поршневых компрессоров среднего и высокого давления. В подобных теплообменниках движение газа происходит по внутренней трубе, а охлаждающей воды — по кольцевому каналу. Схема холодильника представлена на рис. 1. Газовый тракт аппарата представляет собой периодическую структуру, состоящую из одинаковых секций — прямой участка трубы и плавный поворот на 180° .

Акустический метод расчета импеданса подобных систем основан на применении формулы входного импеданса. При этом окончательный результат получается в виде непрерывной дроби, число знаменателей которой равно числу секций [2]. Уже для трехслойной системы результат оказывается громоздким, а увеличение количества секций практически исключает возможность прямого исследования системы. Поэтому подобный метод не может быть рекомендован для определения импеданса холодильника, состоящего из 10—16 секций.

Выделим и рассмотрим одну секцию газового тракта изучаемого холодильника. Как известно, прямой участок трубы длиной l можно рассматривать как симметричный четырехполюсник, уравнения которого запишутся следующим образом:

$$P_0 = \operatorname{ch} \gamma l \cdot P_l + \frac{\rho c}{S} \operatorname{sh} \gamma l W_l;$$

$$W_0 = \frac{S}{\rho c} \operatorname{sh} \gamma l + P_l \operatorname{ch} \gamma l W_l,$$

где P_0 и W_0 — давление и скорость газа в начале участка;

P_l и W_l — давление и скорость газа в конце участка;

ρc — волновое сопротивление;

S — площадь трубы;

$\gamma = \alpha + j\beta$ — постоянная распространения.

Это соотношение можно записать в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} P_0 \\ W_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AB \\ CD \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_l \\ W_l \end{vmatrix},$$

причем

$$\begin{vmatrix} AB \\ CD \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \gamma l & \frac{\rho c}{S} \operatorname{sh} \gamma l \\ \frac{S}{\rho c} \operatorname{sh} \gamma l & \operatorname{ch} \gamma l \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Если длина участка l мала так, что можно пренебречь потерями на трение, то матрица

$$\begin{vmatrix} AB \\ CD \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos kl j \frac{\rho c}{S} \sin kl \\ j \frac{S}{\rho c} \sin kl \cos kl \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число.

Как и для участка трубы, для плавного поворота на 180° выписаны уравнения симметричного четырехполюсника. Выразив коэффициенты четырехполюсника через сопротивления T -образной ячейки, получим:

$$\left. \begin{aligned} A' &= D' = 1 + j \frac{\pi}{4} Rk (r_1 + r_2), \\ B' &= \frac{\rho c}{S} \left\{ R + j \pi k \left[\frac{R^2 (r_1 + r_2)}{8} + \frac{2a}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right] \right\}, \\ C' &= j \frac{S}{\rho c} \frac{\pi}{2} (r_1 + r_2), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где r_2 и r_1 — внешний и внутренний радиусы; $a = r_2 - r_1$;

$\frac{R}{2}$ — активная часть горизонтальных сопротивлений в симметрич-

ной T -образной ячейке.

Весь газовый тракт холодильника, состоящий из α_i участков труб и β_i неоднородностей, можно изобразить в виде слова: $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_n \beta_n$ (рис. 2).

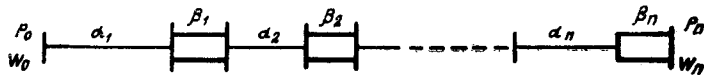


Рис. 2

Матрица преобразования величин P_0, W_0 в начале системы в величины P_n, W_n в конце системы, очевидно, является произведением матриц четырехполюсников. При этом должно выполняться условие, чтобы следующие друг за другом неоднородности не находились слишком близко друг от друга; в пределах всей системы волна тогда может считаться плоской. Волны другого рода, возникающие в результате отражения и в сумме дающие картину дифракции, должны затухать вблизи неоднородности и не распространяться вдалеке.

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} P_0 \\ W_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{vmatrix} \alpha_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_n \\ W_n \end{vmatrix}.$$

В системах с периодической структурой можно разбить слово на подслова

$$(\alpha_1 \beta_1) (\alpha_2 \beta_2) \dots (\alpha_n \beta_n)$$

так, чтобы произведение матриц в каждом подслове были равны. Это соответствует разделению трубопроводной системы на ряд участков, четырехполюсники которых эквивалентны. В подобных случаях решение задачи сводится к возвышению матрицы в степень.

Итак, если

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_2 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} \alpha_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E \end{vmatrix},$$

то

$$\begin{vmatrix} P_0 \\ W_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E \end{vmatrix}^n \begin{vmatrix} P_n \\ W_n \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Для возведения матрицы в степень необходимо привести ее к Жордановой нормальной форме, т. е. подобрать такую матрицу x , чтобы выполнялось условие

$$x \cdot E \cdot x^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \quad (5)$$

или

$$x \cdot E \cdot x^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} \quad (6)$$

в случаях соответственно, если корни характеристического уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_{11} - \lambda & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

различны или совпадают.

Элементы матрицы x определяются при решении уравнения (5) в случае различных корней характеристического уравнения:

$$\begin{cases} x_{11} l_{11} + x_{12} l_{21} = \lambda_1 x_{11} \\ x_{21} l_{11} + x_{22} l_{21} = \lambda_2 x_{21} \\ x_{11} l_{12} + x_{12} l_{22} = \lambda_1 x_{12} \\ x_{21} l_{12} + x_{22} l_{22} = \lambda_2 x_{22} \end{cases} \quad (8)$$

или уравнения (6) в случае равных корней.

$$\begin{cases} x_{11} l_{11} + x_{12} l_{21} = \lambda x_{11} + x_{21} \\ x_{21} l_{11} + x_{22} l_{21} = \lambda x_{21} \\ x_{11} l_{12} + x_{12} l_{22} = \lambda x_{12} + x_{22} \\ x_{21} l_{12} + x_{22} l_{22} = \lambda x_{22} \end{cases} \quad (9)$$

Элементы матрицы x^{-1} так связаны с элементами матрицы x :

$$x'_{11} = \frac{x_{22}}{\Delta x}; \quad x'_{22} = \frac{x_{11}}{\Delta x}; \quad x'_{12} = -\frac{x_{21}}{\Delta x}; \quad x'_{21} = -\frac{x_{12}}{\Delta x}, \quad (10)$$

где Δx — определитель матрицы x .

Далее запишем очевидное равенство

$$E^n = x^{-1} x E^n x^{-1} x$$

и подставив в правую часть $E = Ex^{-1} x$, сгруппируем сомножители:

$$E^n = \underbrace{x^{-1} (xEx^{-1}) (xEx^{-1}) \dots (xEx^{-1}) x}_n. \quad (11)$$

Заменив в (9) выражение в скобках согласно (5) или (6), получим:

$$\|E\|^n = \|x^{-1}\| \left\| \begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array} \right\|^n \|x\|$$

или

$$\|E\|^n = \|x^{-1}\| \left\| \begin{array}{cc} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{array} \right\| \|x\|. \quad (12)$$

В случае равных корней уравнения (7) окончательный результат имеет вид

$$\|E\|^n = \|x^{-1}\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{array} \right\| \cdot \|x\|. \quad (13)$$

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть требуется определить связь между давлением и скоростью в начале и в конце гладкотрубного холодильника типа «труба в трубе», диаметр внутренней трубы которого равен 0,1 м. Длина прямого участка одной секции холодильника 6 м. Средние по длине (с учетом изменения температуры) плотность газа $\rho = 40 \text{ кг/м}^3$ и скорость звука $C = 400 \text{ м/сек}$. В системе распространяется синусоидальная волна давления с частотой 10 гц.

Потери на трение на прямых участках будем считать сосредоточенными в активной части импеданса угла поворота.

Матрицу α , характеризующую четырехполюсник, эквивалентный отрезку прямой трубы длиной 6 м для частоты $f = 10 \text{ гц}$, определим по формуле (2):

$$\alpha = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,59 & j 1,65 \cdot 10^6 \\ j 4,0 \cdot 10^{-7} & 0,59 \end{vmatrix}.$$

Пусть активная часть сопротивления плавного поворота на 180° с учетом потерь на прямом участке

$$R = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/м}^2 \text{сек}.$$

Матрицу β , характеризующую четырехполюсник, эквивалентный плавному повороту на 180° , определим согласно (3):

$$\beta = \begin{vmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + j 7,4 \cdot 10^3 & 4,08 \cdot 10^{11} + j 1,51 \cdot 10^{15} \\ j 3,63 \cdot 10^{-8} & 1 + j 7,4 \cdot 10^3 \end{vmatrix}.$$

Матрица E равна произведению матриц α и β :

$$E = \begin{vmatrix} -0,09 + j 4,37 \cdot 10^3; & 2,28 \cdot 10^{11} + j 8,9 \cdot 10^{14} \\ -2,96 \cdot 10^3 + j 3,78 \cdot 10^{-7}; & -6,04 \cdot 10^8 + j 1,68 \cdot 10^5 \end{vmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения (7) вычисляются по формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [(l_{11} + l_{22}) \pm \sqrt{(l_{11} - l_{22})^2 + 4 l_{12} l_{21}}].$$

Подставив значение элементов матрицы E , получим:

$$\lambda_1 = -6,04 \cdot 10^8 + j 1,72 \cdot 10^5;$$

$$\lambda_2 = 0.$$

Решая систему (8), определим элементы матрицы x . Положив $x_{12} - x_{21} = 1$, имеем:

$$x_{12} = \frac{l_{21}}{\lambda_1 - l_{11}} = 4,9 \cdot 10^{-12}; \quad x_{22} = \frac{\lambda_{12} - l_{11}}{l_{21}} = j \cdot 1,47.$$

Элементы матрицы x^{-1} связаны с элементами матрицы x соотношениями (11):

$$x'_{11} = -j 1,47; \quad x'_{22} = -4,9 \cdot 10^{-12}; \quad x_{12} = x'_{21} = 1.$$

Окончательный результат, согласно (12), равен:

$$\|E\|^n = \|x^{-1}\| \left\| \begin{array}{cc} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{array} \right\| \cdot \|x\| = \begin{vmatrix} -j 4,6 \cdot 10^{75} & -9,4 \cdot 10^{86} \\ 3,14 \cdot 10^{75} & 6,4 \cdot 10^{86} \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} P_0 \\ W_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -j 4,6 \cdot 10^{75} & -9,4 \cdot 10^{86} \\ 3,14 \cdot 10^{75} & 6,4 \cdot 10^{86} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_n \\ W_n \end{vmatrix}.$$

Необходимо отметить, что в трубопроводных обвязках поршневых компрессоров довольно часто встречаются включения или участки систем, имеющие периодическую структуру. Для определения входных импедансов этих объектов может быть применена изложенная методика.

В некоторых случаях удается эффективно определить импеданс сложного включения, если представить его в виде соединения простых составляющих, импеданс которых либо известен, либо проще поддается определению. Подобный подход позволяет, в частности, определить импеданс кожухотрубного холодильника с током газа по трубам. Холодильники такого типа применяются в основном при сжатии загрязненного газа, а также в случаях, когда интенсивная вибрация перегородок, связанная с пульсирующим

потоком газа, вызывает разрушение трубок в холодильниках с током газа в межтрубном пространстве.

Газовый тракт кожухотрубного холодильника с током газа по трубкам состоит из лучка гладких труб, развальцованных в трубных решетках и помещенных в кожух (рис. 3).

Метод определения импеданса сложных включений как соединения простых составляющих совпадает с методом расчета акустических систем и основан на применении формулы входного импеданса [2, 6]. При этом должно выполняться условие, чтобы высокочастотные составляющие, возникающие в результате отра-

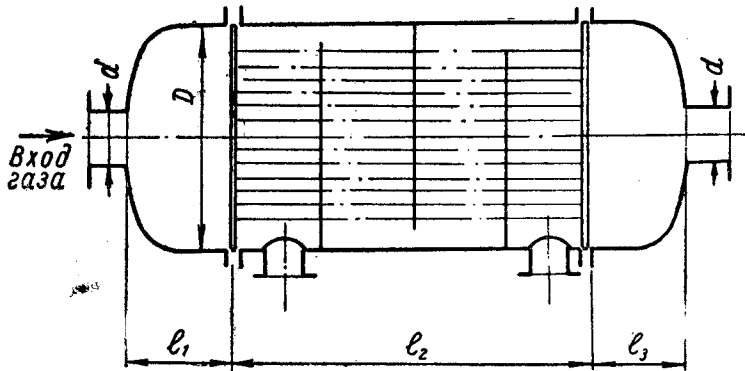


Рис. 3

жения волны главной моды от неоднородности, не искажали поле, создаваемое соседней неоднородностью.

Импеданс главного тракта всего холодильника можно разбить на три участка: l_1 ; l_2 ; l_3 .

Участок l_1 состоит из импедансов выхода газа из трубчатки, соединительной полости объема v_2 и импеданса выхода газа из аппарата.

Участок l_2 состоит из импеданса входа в трубчатку и импеданса трубчатки.

Участок l_3 состоит из импеданса входа газа в аппарат и импеданса соединительной полости v_1 .

Определим входной импеданс участка l_1 . Если отверстия в трубчатке расположены не очень близко друг от друга, так что $d_1 < 0,8d_2$ (где d_1 — диаметр отверстия в трубке; $d_2 = \frac{D}{n}$ — диаметр площади трубной решетки, приходящейся на одно отверстие), то при входе газа из трубчатки возникает присоединенная масса, равная [2]:

$$M_1 = \frac{\rho \sigma^2}{2 d_1 F \left(\frac{d_1}{d_2} \right) n}$$

где $\sigma = \frac{\pi d^2}{4}$;

ρ — плотность газа;
 $F \left(\frac{d_1}{d_2} \right)$ — функция Фока;

n — число трубок в трубчатке.

Если же $d_1 > 0,8d_2$, то влиянием присоединенной массы пренебрегают. Наряду с возникновением присоединенной массы, внезапное увеличение площади поперечного сечения газового потока связано и с активными потерями R_1 , пропорциональными относительной величине увеличения сечения, скорости потока и обратно пропорциональными числу трубок n . Таким образом, импеданс выхода из трубчатки

$$Z_{1,2} = R + \frac{j \omega \rho \sigma^2}{2 d_1 F \left(\frac{d_1}{d_2} \right) n}$$

При выходе газа из корпуса аппарата диаметром D в патрубок диаметром d также возникает присоединенная масса M_2 и активные потери R_2 . Импеданс выхода газа из аппарата, пересчитанный на площадь $S_1 = \frac{\pi \sigma^2}{4}$, равен

$$Z_{1,3} = \left(R_2 + \frac{j \omega \rho S^2}{2 d F \left(\frac{d}{D} \right)} \right) \frac{S_1^2}{S_2}$$

причем, если $d < 0,2D$, то присоединенная масса $M_2 = \frac{\rho}{D}$. Поскольку объем полости v_2 велик, а длина l_3 , как правило, мала, то, пренебрегая потерями на трение, можно считать импеданс соединительной емкости чисто емкостным:

$$Z_{1,2} = \frac{\rho c^2 S_1^2}{j \omega v_2}$$

Кроме этого, так как l_3 мало, то $\cos kl_3 \approx 1$, а $\sin kl_3 \approx 0$ и формула входного импеданса

$$Z_{\text{вх}} = Z_0 + S \rho c \frac{S \rho c \operatorname{sh} \gamma l + Z_l \operatorname{ch} \gamma l}{Z_l \operatorname{sh} \gamma l + S \rho c \operatorname{ch} \gamma l}$$

для изучаемого участка примет вид:

$$Z_1 = Z_{11} + \frac{Z_{1,2} \cdot Z_{1,3}}{Z_{1,2} \cdot Z_{1,3}}$$

или

$$Z_1 = R_1 + \frac{j \omega \rho \sigma^2}{2 d_1 F \left(\frac{d_1}{d_2} \right) n} +$$

$$+ \frac{2 \rho c^2 dF \left(\frac{d}{D} \right) R_2 S_1^4 + j \omega \rho^2 c^2 S^2 S_1^2}{2 \rho c^2 dF \left(\frac{d}{D} \right) S_1^2 S^2 - \omega^2 \rho v_2 S_1^2 S^2 + j 2 \omega v_2 dF \left(\frac{d}{D} \right) S_1^2}$$

Далее перейдем к рассмотрению участка l_2 . Для этой части системы конечный импеданс в формуле входного импеданса $Z_{l_2} = Z_{2,3} = Z_1 \frac{(n\sigma)^2}{S_1^2}$, а начальный импеданс Z_0 — импеданс входа газа в трубчатку. Этот импеданс запишется по аналогии с импедансом $Z_{l_1,1}$ так:

$$Z_{2,1} = R_3 + \frac{j \omega \rho \cdot \sigma^2}{2 d_1 F \left(\frac{d_1}{d_2} \right) n}$$

Между импедансами $Z_{2,3}$ и $Z_{2,1}$ расположена трубчатка. Диаметр труб, составляющих трубчатку подобных аппаратов, не превышает 25 мм. Поэтому трение будет оказывать существенное влияние на распространение пульсирующего потока в трубчатке. В первом приближении можно учитывать уменьшение амплитуды по длине трубчатки активной частью постоянной распространения, тогда импеданс трубчатки $Z_{тр} = \frac{\sigma \rho c}{n}$; постоянная распространения, равная для одной трубы $\gamma = j\alpha + \beta$, для пучка n труб в первом приближении равна $\gamma_{тр} = j\alpha + n\beta$. Входной импеданс второго участка

$$Z_2 = Z_{21} + Z_{тр} \cdot \frac{Z_{тр} \operatorname{sh} \gamma_{тр} l_2 + Z_{2,3} \operatorname{ch} \gamma_{тр} l_2}{Z_{2,3} \operatorname{sh} \gamma_{тр} l_2 + Z_{тр} \operatorname{ch} \gamma_{тр} l_2}$$

или

$$Z_2 = R_3 + \frac{j \omega \rho \sigma^2}{2 d_1 F \left(\frac{d_1}{D} \right) n} + \frac{\frac{\sigma \rho c}{n} \operatorname{sh} (j\alpha + n\beta) l_2 + Z_1 \left(\frac{n\sigma}{S} \right) \operatorname{ch} (j\alpha + n\beta) l_2}{Z_1 \left(\frac{n\sigma}{S_1} \right)^2 \operatorname{sh} (j\alpha + n\beta) l_2 + \frac{\sigma \rho c}{n} \operatorname{ch} (j\alpha + n\beta) l_2}$$

Для третьего участка

$$Z_{3,1} = Z_0 = R_4 + \frac{j \omega \rho S^2}{2 d F \frac{d}{D}} \quad \text{— импеданс входа в аппарат.}$$

Импеданс полости v_1 , так же, как и полости v_2 , можно считать чисто емкостным:

$$Z_{3,2} = \frac{\rho c^2 S^2}{j \omega v_1},$$

а конечный импеданс третьего участка, пересчитанный на площадь S ,

$$Z_{33} = Z_{l_1} = Z_2 \frac{S^2}{(n\sigma)^2}.$$

Формула входного импеданса этого участка аналогична выражению для участка 1:

$$Z_3 = Z_{3,1} + \frac{Z_{32} \cdot Z_{33}}{Z_{32} + Z_{33}}.$$

Таким образом, импеданс кожухотрубного теплообменника с током газа по трубкам

$$Z = Z_3 = R_4 + \frac{j \omega \rho S^2}{2 d F \left(\frac{d}{D} \right)} + \frac{\rho c^2 S^4 \cdot Z_3}{\rho c^2 S^2 (n\sigma)^2 + j \omega v_1 S^2 Z_2}.$$

Подобным же образом может быть определен и импеданс холодильника радиаторного типа.

В заключение необходимо отметить, что трудоемкость изложенного метода исключает его применение для расчета систем, состоящих из большого числа включений. Задачи по выделению других классов сложных систем, допускающих прямой эффективный расчет, представляет большой интерес.

РАСЧЕТ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРУБОПРОВОДОВ, ТЕМПЕРАТУРА РАБОЧЕЙ СРЕДЫ В КОТОРЫХ ИЗМЕНЯЕТСЯ ПО ДЛИНЕ

В. П. Шорин

Условные обозначения:

- ρ — плотность среды;
- T — температура среды;
- χ — показатель адиабаты;
- R — газовая постоянная;
- a — скорость распространения звука;
- λ — коэффициент сопротивления в формуле Дарси-Вейсбаха;
- S — площадь поперечного сечения трубопровода;
- l — длина трубопровода;
- ω — круговая частота;
- P_0 — давление в магистрали;
- P_x, P_e — амплитуды колебаний давления в сечении X и на конце трубопровода;
- v_x, v_e — амплитуды колебаний объемной скорости в сечении X и на конце трубопровода;
- g — ускорение силы тяжести.

Задача расчета частотных характеристик трубопроводов, температура рабочей среды в которых изменяется по длине, является