МАТЕМАТИКА

УДК 519.217

И. А. Игнатюк, В. А. Малышев

КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

В настоящей статье содержится доказательство теоремы, сформулированной в [1].

Пусть задана неприводимая непериодическая цепь Маркова L с множеством состояний U и переходными вероятностями $p_0(u, v)$, $u, v \in U$.

Определим марковский процесс $\bar{\xi}_t = \{\xi_t(x),\ x \in \mathbf{Z}^\nu\}$, $t \in \mathbf{Z}_+$, со значениями в $U^{\mathbf{Z}^\nu}$.

Пусть для любого $t \in \mathbf{Z}_+$ при заданном $\bar{\xi}_t$ случайные величины $\xi_{t+1}(x)$ условно независимы для различных $x \in \mathbf{Z}$ и для любых $x \in \mathbf{Z}^\nu$, $t \in \mathbf{Z}_+$

$$P\{\xi_{t+1}(x) = u \mid \bar{\xi}_t\} = p_0(\xi_t(x), u) + \delta c(u, \xi_t(x+e_0), \ldots, \xi_t(x+e_n))$$

для всех $u \in U$, где множество $\{e_0 = 0, e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbf{Z}^\nu$ фиксировано.

Мы считаем, что для цепи L построена функция Ляпунова $f: U \to \mathbf{R}_+$, такая, что

(а) ряд $\sum\limits_{u \in U} \exp\{-bf(u)\}$ сходится при любом $b > 0$;

(б) для любых $u, v \in U$ $p_0(u, v) \neq 0$ только в том случае, если $|f(u) - f(v)| \leqslant M$, где $M = \mathrm{const} > 1$;

(в) существует положительная целочисленная функция $k = \{k(u), u \in U\}$, такая, что $\sup\limits_{u \in U} k(u) < \infty$ и для любого $u \in U$, за исключением единственной точки $u_0 \in U$, имеет место неравенство

$$\sum_{v \in U} p_0^{(k(u))}(u, v) f(v) \leqslant f(u) - \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon = \mathrm{const} > 0;$$

(г) $f(u_0) = 0$ и $f(u) \neq 0$ для любого $u \in U \setminus \{u_0\}$.

Возмущение будем предполагать малым в следующем смысле:

$$\sup_{\bar{u} \in U^n} |c(u_1, u_2, \bar{u})| \leqslant p_0(u_2, u_1), \quad |\delta| < \delta_0. \tag{1}$$

Пусть $A \subset \mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{Z}_+$ — некоторое множество. Обозначим через u_A конфигурацию на $A: u_A = \{u(x, t) \in U \mid (x, t) \in A\}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс всех случайных полей на решетке $\mathbf{Z}^\nu$, для каждого из которых можно указать такие константы $\alpha_0 = \alpha_0(\bar{\xi}) > 0$ и $C_0 = C_0(\bar{\xi}) > 0$, что для любого конечного множества $A \subset \mathbf{Z}^\nu$ и любой конфигурации на нем u_A имеет место неравенство

$$P\{\xi(x) = u(x),\ x \in A\} \leqslant C_0^{|A|} \exp\Big\{-\alpha_0 \sum_{x \in A} f(u(x))\Big\}.$$

Теорема. *Пусть* $\bar{\xi}_0 \in \mathfrak{A}$, $C_0 = C_0(\bar{\xi}_0)$, $\alpha_0 = \alpha_0(\bar{\xi}_0)$. *Тогда при достаточно малом* δ_0 *конечномерные распределения* $\bar{\xi}_t$ *сходятся по вариации при* $t \to \infty$. *Случайное поле* $\bar{\xi}$ *с конечномерными распределениями*

$$\pi(u_1, \ldots, u_N;\ x_1, \ldots, x_N) = \lim_{t \to \infty} P\{\xi_t(x_j) = u_j,\ j = 1, \ldots, N\}, \qquad (2)$$

где $u_j \in U$, $x_j \in \mathbf{Z}^\nu$, $j = 1, \ldots, N$, *принадлежит классу* $\mathfrak{A}$, *и для любых* $x_1, \ldots, x_N \in \mathbf{Z}^\nu$, $u_1, \ldots, u_N \in U$ *предел* $\pi(u_1, \ldots, u_N;\ x_1, \ldots, x_N)$ *является аналитической функцией* δ *в области комплексной плоскости* $|\delta| < \delta_0$.

Доказательство. Определим основные понятия, используемые в ходе доказательства.

Конусом с вершиной в точке $(x, t) \in \mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{Z}_+$ будем называть такое множество $\Lambda(x, t) \subset \mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{Z}_+$, что $(x, t) \in \Lambda(x, t)$, и если $(y, \tau) \in \Lambda(x, t)$ и $\tau > 0$, то $(y + e_i, \tau - 1) \in \Lambda(x, t)$, $i = 0, \ldots, n$, и либо $(y, \tau) = (x, t)$, либо найдется i, $0 \leqslant i \leqslant n$, такое, что $(y - e_i, \tau - 1) \in \Lambda(x, t)$. Обозначим $\Lambda_0(x, t) = \Lambda(x, t) \cap \{\mathbf{Z}^\nu \times \{0\}\}$, $\Lambda_1(x, t) = \Lambda(x, t) \setminus \Lambda_0(x, t)$.

Для произвольного множества $A \subset \mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{Z}_+$ обозначим через A_0 проекцию этого множества на слой $\mathbf{Z}^\nu \times \{0\}$:

$$A_0 = \{(x, 0),\ x \in \mathbf{Z}^\nu \mid (\{x\} \times \mathbf{Z}_+) \cap A \neq \varnothing\}.$$

Пусть $(x, t) \in \mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{Z}_+$. Множество $\Delta(x, t) = \{(x, t),\ (x + e_i, t - 1),\ i = 0, \ldots, n\}$ будем называть кистью. Элементы этого множества будем называть вершинами кисти, точку (x, t) — главной вершиной, остальные точки — боковыми.

Пусть $x \in \mathbf{Z}^\nu$, t_1, $t_2 \in \mathbf{Z}_+$, $t_1 \leqslant t_2$. Множество $\{(x, t),\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2,\ t \in \mathbf{Z}_+\} = \gamma(x, t_1, t_2)$ будем называть отрезком длины $t_2 - t_1$, точку (x, t_2) — верхним его концом, точку (x, t_1) — нижним, остальные — внутренними точками этого отрезка. Отметим, что, согласно данному определению, любая точка решетки $\mathbf{Z}^\nu \times \mathbf{Z}_+$ является отрезком нулевой длины.

Пусть $A \subset \mathbf{Z}^\nu \times \{1, 2, \ldots\}$, обозначим через $O(A)$ множество $\{(x + e_i, t - 1),\ i = 0, \ldots, n \mid (x, t) \in A\}$.

Для каждого $A \subset \Lambda(x, t)$ рассмотрим множество всех кистей с главными вершинами в A и множество всех отрезков ненулевой длины, таких, что внутренние точки каждого из них не содержат вершин данных кистей, верхний конец является либо боковой вершиной некоторой кисти, либо, если $(x, t) \notin A$, совпадает с точкой (x, t), а нижний — либо лежит в слое $\mathbf{Z}^\nu \times \{0\}$, либо является вершиной некоторой кисти. Выделим в A все те точки, которые являются общими по крайней мере для двух кистей, и точку (x, t), если $(x, t) \in A$, и добавим их к полученным отрезкам. Обозначим множество выделенных таким образом отрезков через Γ_A.

Множество $A \subseteq \Lambda(x, t)$ будем называть кластером, если каждая точка из A является концом некоторого отрезка из Γ_A.

Через $c(u_{\Delta(y, \tau)})$ обозначим величину $c(u(y, \tau),\ u(y + e_0, \tau - 1), \ldots, u(y + e_n, \tau - 1))$.

Перейдем к доказательству теоремы. Выпишем в явном виде вероятность $P\{\xi_t(x) = u\}$.

Из (1) нетрудно получить

$$P\{\xi_t(x) = u\} = \sum_{m=0}^{M_t} \delta^m \sum\nolimits^{(m)} K_A(x, t;\ u) = \sum_{m=0}^{M_t} \delta^m C_m(x, t;\ u), \qquad (3)$$

где $M_t = |\Lambda_1(x, t)|$, $\sum^{(m)}$ означает, что сумма берется по всем множествам $A \subset \Lambda_1(x, t)$, содержащим ровно m точек, и для каждого такого A

$$K_A(x, t; u) = \sum' \prod^{(1)} c(u_{\Delta(y,\tau)}) \prod^{(2)} p_0(u(y, \tau-1), u(y, \tau)) \times$$
$$\times P\{\xi_0(z) = u(z, 0), (z, 0) \in \Lambda_0(x, t)\}, \tag{4}$$

где сумма Σ' берется по всем конфигурациям на $\Lambda(x, t)$, для которых $u(x, t) = u$, произведение $\Pi^{(1)}$ — по всем точкам $(y, \tau) \in A$, а $\Pi^{(2)}$ — по всем точкам $(y, \tau) \in \Lambda_1(x, t) \setminus A$.

Таким образом, чтобы доказать существование предела $\pi(u) = \lim\limits_{t\to\infty} P\{\xi_t(x) = u\}$, достаточно доказать существование предела $C_m(x, u) = \lim\limits_{t\to\infty} C_m(x, t; u)$ для каждого $m \in \mathbf{Z}_+$ и показать, что для любого $m \in \mathbf{Z}_+$ и для любого $t \in \mathbf{Z}_+$ $|C_m(x, t, u)| \leqslant \tilde{C}_m$ и ряд $\Sigma \tilde{C}_m \delta^m$ сходится при $|\delta| < \delta_0$, если δ_0 достаточно мало.

Очевидно, что $K_\varnothing = \sum\limits_{v \in U} p_0^{(t)}(v, u) P\{\xi_0(x) = v\}$, и, следовательно, существование предела для $C_0(x, t, u)$ непосредственно следует из эргодичности цепи L. Рассмотрим теперь случай, когда $A \subseteq \Lambda_1(x, t)$, $A \neq \varnothing$. Нетрудно видеть, что если множество A не является кластером, то $K_A(x, t, u) = 0$ и, следовательно, суммирование в (3) фактически происходит лишь по всевозможным кластерам. Из (4) для произвольного кластера $A \subseteq \Lambda_1(x, t)$ получаем

$$K_A(x, t, u) = \sum' \prod^{(1)} \Big\{ \sum_{u(y,\tau) \in U} c(u_{\Delta(y,\tau)}) p_0^{(\tau'-\tau)}(u(y, \tau), u(x, \tau')) \Big\} \times$$
$$\times \prod^{(2)} p_0^{(\tau'-\tau)}(u(y, \tau), u(y, \tau')) P\{\xi_0(z) = u(z, 0), (z, 0) \in A_0\},$$

где сумма $\sum'$ берется по всевозможным конфигурациям на множестве $O(A) \cup A_0$, произведение $\prod^{(1)}$ — по всем тем отрезкам $\gamma(y, \tau, \tau') \in \Gamma_A$, нижний конец которых принадлежит множеству A (обозначим множество таких отрезков через $\Gamma^0{}_A$), произведение $\prod^{(2)}$ — по всем остальным отрезкам из Γ_A.

Лемма. *Пусть $A \subseteq \Lambda_1(x, t)$ — кластер, тогда*

$$|K_A(x, t; u)| \leqslant C^{|A|} \exp\Big\{-\alpha \sum_{\gamma(y,\tau,\tau') \in \Gamma_A^0} (\tau'-\tau) - \alpha f(u)\Big\}, \tag{5}$$

где C, α — некоторые положительные константы.

Доказательство этой леммы опирается на следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $\{\eta_t\}$ — марковская последовательность случайных величин, соответствующая цепи L. Тогда найдутся такие константы $\alpha_1 > 0$, $q_1 > 1$ и $b_1 > 1$, что для любого $u \in U$ и $t > q_1 f(u)$ имеет место неравенство*

$$\sum |\pi_0(v) - p_0^{(t)}(u, v)| \leqslant b_1 e^{-\alpha_1 t}, \tag{6}$$

где сумма берется по всем тем $v \in U$, для которых $p_0^{(t)}(u, v) \neq 0$.

Утверждение 2. *Пусть $\{\eta_t\}$ — марковская последовательность случайных величин, соответствующая цепи L. Тогда существует такое*

$h_0>0$, *что для любого* $h_1 \in (0, h_0)$ *можно указать* $\alpha_2>0$ и $b_2>1$, *такие, что для любого* $t \in \mathbf{Z}_+$ *имеет место неравенство*

$$P\{\eta_\tau \neq u_0,\quad 0<\tau \leqslant t \mid \eta_0=u\} \leqslant b_2 \exp\{h_1 f(u)-\alpha_2 t\}. \tag{7}$$

Утверждение 1 было доказано в работе [2] (см. лемму 4.6). Утверждение 2 было получено в [2] при доказательстве лемм 1.1 и 1.2.

Используя (7) и условие ограниченности скачков, нетрудно проверить индукцией по m следующее неравенство:

$$P\{f(\eta_{t_i}) \geqslant \varkappa (t_i'-t_i)-M,\quad i=\overline{1,\, m} \mid \eta_0=u\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b^m}{(1-e^{-\alpha_2})^m} \exp\left[h_1 f(u)-\alpha_3 \sum_{i=1}^{m} (t_i'-t_i)\right\} \tag{8}$$

для любого $\varkappa$, $0<\varkappa<1$, где $\alpha_3>0$, $\quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_1' \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m'$.

Доказательство леммы. Рассмотрим множество $\{0, 1\}^A$. Будем говорить, что конфигурация $u_{O(A)}$ согласована с $\sigma \in \{0, 1\}^A$, если для любого $\gamma(y, \tau, \tau') \in \Gamma^0{}_A$ справедливы неравенства:

$$q_1(f(u(y, \tau-1))+M) < \tau'-\tau, \text{ если } \sigma(y, \tau)=0, \text{ и}$$

$$q_1(f(u(y, \tau-1))+M) \geqslant \tau'-\tau, \text{ если } \sigma(y, \tau)=1.$$

Для каждого $\sigma \in \{0, 1\}^A$ определим значение $K_A^\sigma(x, t, u)$ согласно (4), где сумма берется уже не по всем конфигурациям на $O(A)$, а лишь по тем, которые согласованы с σ. Достаточно доказать неравенство, аналогичное (5), для $K_A^\sigma(x, t, u)$. Для каждого $\gamma(y, \tau, \tau') \in \Gamma_A^0$ воспользуемся неравенствами

$$\Big|\sum_{u(y,\tau)\in U} c(u_{\Delta(y,\tau)})\, p_0^{(\tau'-\tau)}(u(y, \tau), u(y, \tau'))\Big| \leqslant p_0^{(\tau'-\tau+1)}(u(y, \tau-1), u(y, \tau')),$$

если $\sigma(y, \tau)=1$, и

$$\Big|\sum_{u(y,\tau)\in U} c(u_{\Delta(y,\tau)})\, p_0^{(\tau'-\tau)}(u(y, \tau), u(y, \tau'))\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{u(y,\tau)\in U} p_0(u(y, \tau-1), u(y, \tau))\, |p_0^{(\tau'-\tau)}(u(y, \tau), u(y, \tau'))-\pi_0(u(y, \tau'))|.$$

Далее, выбрав $\varkappa=\frac{1}{q_1}$, $h_1 \in (0, h_0)$ так, что $\alpha_0>h_1$ и $h_1(M+\varkappa)<\alpha_1$, в силу (6) и (8) получим нужную оценку для $K_A^\sigma(x, t, u)$. Лемма доказана.

Существование предела $C_m(x, u)$ для произвольного $m \in \mathbf{Z}_+$ следует из леммы и существования предела

$$K_A(x, u)=\lim_{\tau\to\infty} K_{A_\tau}(x, t+\tau, u), \tag{9}$$

где $A_\tau=\{y, t'+\tau) \mid (y, t') \in A\}$.

Предел (9) существует в силу эргодичности цепи L.

Кроме того, при помощи стандартных рассуждений из техники кластерных разложений (см. [3]) нетрудно показать, что для любого $m \in \mathbf{Z}_+$ справедливо неравенство

$$|C_m(x, t, u)| \leqslant C(n)^m \frac{e^{-\alpha f(u)}}{(1-e^{-\alpha})^m}, \tag{10}$$

откуда и следует существование предела $\pi(u)$ при $|\delta|<\frac{1-e^{-\alpha}}{C(n)}$. Кроме того, из (10) получаем

$$P\{\xi_t(x)=u\}\leqslant \mathrm{const}\, e^{-\alpha f(u)}.$$

Аналогично доказываются существование предела для $P\{\xi_t(x_1)=u_1,\ldots\ldots,\xi_t(x_N)=u_N\}$ при $t\to\infty$ и неравенство

$$P\{\xi_t(x_1)=u_1,\ \ldots,\ \xi_t(x_N)=u_N\}\leqslant(\mathrm{const})^N\exp\left\{-\alpha\sum_{i=1}^{N}f(u_i)\right\}. \tag{11}$$

Из (11) следует сходимость конечномерных распределений $\bar{\xi}_t$ при $t\to\to\infty$ по вариации и то, что случайное поле $\bar{\xi}$ с конечномерными распределениями (2) принадлежит классу $\mathfrak{A}$. Переходя в разложении $P\{\xi_t(x_i)=u_i,\ i=1,\ \ldots,\ m\}$ к пределу при $t\to\infty$, получаем явный ряд для $\pi(u_1,\ldots,u_m;\ x_1,\ldots,x_m)$. Аналитичность $\pi(u_1,\ldots,u_m;\ x_1,\ldots,x_m)$ в точке $\delta=0$ очевидна.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малышев В. А., Игнатюк И. А. Локально взаимодействующие процессы с некомпактным множеством значений//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1987. № 2. 3—6.
2. Малышев В. А., Меньшиков М. В. Эргодичность, непрерывность, аналитичность счетных цепей Маркова//Тр. Моск. матем. о-ва. 1979. 1—48.
3. Малышев В. А., Минлос Р. А. Гиббсовские случайные поля. М., 1985.

Поступила в редакцию
02.06.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1988. № 5

УДК 519.152:517.928

Г. И. Фалин, Ю. И. Сухарев

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

Решение многих важных задач, возникающих при проектировании и эксплуатации систем передачи информации, сводится к расчету стационарных характеристик многолинейных систем массового обслуживания с повторными вызовами [1]. Наличие последействия ранее блокированных вызовов в таких системах приводит к серьезным математическим трудностям при получении явных аналитических формул для их характеристик. Понятна поэтому особая роль качественных, и в первую очередь асимптотических, методов исследования таких систем. Цель настоящей работы — получить асимптотики при малой интенсивности повторения и в случае большой загрузки. Теорема 1 и метод ее доказательства принадлежат Г. И. Фалину, теоремы 2, 3, 4 — Ю. И. Сухареву.

Мы будем вести изложение на примере основной, базовой, многолинейной системы с повторными вызовами типа M/M/c. Пусть c — число каналов, λ — интенсивность входящего потока первичных вызовов,