АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ • ТОМ 7 • ВЫПУСК 3

МОСКВА • 1973

Функциональный анализ и его приложения,
т. 7, вып. 3, 1973, 86—87.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. А. Малышев

В данной заметке основные теоремы работы [1] об аналитическом продолжении обобщаются на случай произвольных рациональных коэффициентов.

1. Рассмотрим краевую задачу с рациональными коэффициентами

$$A_1F_{++} = A_2F_{+-} + A_3F_{-+} + A_4F_{--} + H(x, y), \qquad (1)$$

где $A_i = A_i(x, y)$, $H \in \mathbf{C}(x, y)$ и, например, $F_{++}(x, y)$ аналитична в поликруговой области $D_+^1 \times D_+^2 \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ и непрерывна на ее границе, где D_+^i, $\mathbf{P} \setminus D_+^i$ — связные открытые области на комплексной сфере $\mathbf{P}$ с гладкими границами Γ^1 и Γ^2.

Лемма 1. *Для любого решения краевой задачи* (1) *правую часть* (1) *можно представить в виде (для некоторых m, n)*

$$\sum_{i=0}^{n-1} q_i(x, y)\pi_i(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \widetilde{q}_j(x, y)\widetilde{\pi}_j(y) + q^0(x, y),$$

где q_i, $\widetilde{q}_i$, q^0 рациональны, а $\pi_i(x)$, $\widetilde{\pi}_j(y)$ аналитичны в D_+^1 и D_+^2 соответственно и непрерывны на границе этих областей.

Можно считать, что $A_1 \in \mathbf{C}[x, y]$, причем будет предполагаться, что A_1 неприводим, а алгебраические функции $y(x)$ и $x(y)$, определенные уравнением $A_1(x, y) = 0$, удовлетворяют следующему условию: для всех $x \in \Gamma^1$ ($y \in \Gamma^2$), кроме, может быть, конечного числа, существует не менее n (m) значений $y_k(x)$ ($x_k(y)$) таких, что $y_k(x) \in D_+^2$ ($x_k(y) \in D_+^1$).

Пусть риманова поверхность S_0 функций $y(x)$ и $x(y)$ имеет род $\rho(S_0) \geqslant 2$, F_0 — поле мероморфных функций на S_0.

2. Пусть дано поле F_0 алгебраических функций над $\mathbf{C}$ и два его элемента x и y ($x, y \notin \mathbf{C}$). Алгебраическое расширение E поля F_0 будем называть *двойным расширением Галуа* (относительно x и y), если E есть расширение Галуа как поля $\mathbf{C}(x)$, так и поля $\mathbf{C}(y)$. Рассмотрим последовательность полей $F_0 \subset F_1 \subset \ldots$, причем F_{2i} есть наименьшее расширение Галуа поля $\mathbf{C}(y)$, содержащее F_{2i-1}, а F_{2i+1} есть наименьшее расширение Галуа поля $\mathbf{C}(x)$, содержащее F_{2i}. $F = \varinjlim F_i$ есть наименьшее двойное расширение Галуа поля F_0 относительно x и y.

Лемма 2. *В предположениях п. 1 последовательность F_i стабилизируется (т. е. F конечно) тогда и только тогда, когда $A_1(x, y)$ является делителем в $\mathbf{C}[x, y]$ многочлена вида $\psi_1(x)\psi_2(y) - \psi_3(x)\psi_4(y)$.*

Случаи стабилизации допускают в некоторых случаях естественную вероятностную интерпретацию [2]. Далее предполагается, что F является бесконечным алгебраическим расширением F_0. Пусть S_k — риманова поверхность поля F_k, λ_k: $\widetilde{S}_k \to S_k$ — универсальное накрытие. Последовательности $F_0 \subset F_1 \subset \ldots$ соответствует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{S}_0 & \xleftarrow{\widetilde{f}_1} & \widetilde{S}_1 & \xleftarrow{\widetilde{f}_2} & \ldots \\
\lambda_0 \downarrow & & \lambda_1 \downarrow & & \ldots \\
S_0 & \xleftarrow{f_1} & S_1 & \xleftarrow{f_2} & \ldots
\end{array}$$

Она определяет гомоморфизм λ: $\widetilde{S} = \varprojlim \widetilde{S}_k \to S = \varprojlim S_k$. Обозначим каноническую проекцию S на S_i через π_i. Имеем индуктивную систему подпучков $\mathfrak{O}_i = \pi_i^*[\theta(S_i)]$*) (см. [3]) пучка непрерывных функций на S. Пучок $\mathfrak{O}(S) = \varinjlim \mathfrak{O}_i$ назовем *пучком голоморфных функций* на S. Его слой в точке $\mathfrak{O}(s)$ является областью целостности; поля частных $\mathfrak{M}(s)$ для $\mathfrak{O}(s)$ образуют пучок $\mathfrak{M}(S)$ «мероморфных функций» на S. Аналогично определяются $\mathfrak{O}(\widetilde{S})$ и $\mathfrak{M}(\widetilde{S})$. Пучок $\mathfrak{M}(\widetilde{S})$ отделим, т. е. два сечения над связным локально связным множеством R, равные в одной точке, равны всюду на R. В отличие от $\mathfrak{M}(S)$, вообще говоря, $\Gamma(\widetilde{S}, \mathfrak{M}(\widetilde{S})) \neq \varinjlim \Gamma(\widetilde{S}_i, \mathfrak{M}(\widetilde{S}_i))$. Однако для любой мероморфной функции $\widetilde{f}$ на $\widetilde{S}$ существуют некоторая риманова поверхность

*) $\theta(S_i)$ — пучок ростков голоморфных функций на S_i.

D, непрерывное отображение Λ: $\widetilde{S} \to D$ и мероморфная функция f на D такие, что $\widetilde{f}(s) = f(\Lambda s)$.

3. Пусть $G = \{s: x(s) \in D_+^1, y(s) \in D_+^2\}$, $G_1, \ldots, G_k$ — его связные компоненты; $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ — связные компоненты $\{s: x(s) \in D_+^1, s \in S_0\}$, пересекающиеся с $G_1, \ldots, G_k$ соответственно. Для любого i фиксируем некоторую связную компоненту $\widetilde{\Delta}_i^0$ множества $\lambda_0^{-1}(\Delta_i) \subset \widetilde{S}_0$. Через $\widetilde{\Delta}_i^0(r)$ будем обозначать множество точек $\widetilde{S}_0$, находящихся на расстоянии, не большем r (в фиксированной метрике Лобачевского), от $\widetilde{\Delta}_i^0$. Определим по индукции $\widetilde{\Delta}_i^j(r)$, $\widetilde{\Delta}_i^0(r) \supset \widetilde{\Delta}_i^0$, как связные компоненты $f_j^{-1}(\widetilde{\Delta}_i^{j-1}(r))$. Функции π_l естественным образом поднимаются на $\widetilde{\Delta}_i = \varinjlim \widetilde{\Delta}_i^j$, т. е., например, $\pi_l \in \Gamma(\widetilde{\Delta}_i, \mathfrak{M}(\widetilde{S}))$.

Будем говорить, что π_l *допускают безграничное мероморфное продолжение*, если соответствующие сечения пучка $\mathfrak{M}(\widetilde{S})$ над $\widetilde{\Delta}_i$ продолжаются на $\bigcup_r \varinjlim \widetilde{\Delta}_i^j(r)$, $i = 1, \ldots, k$.

Теорема 1. *Пусть существуют такие наборы* $(i_1, \ldots, i_n)$, $(j_1, \ldots, j_m)$, *что* $\det \| q_k(x, y_{i_l}(x)) \|_{k,l=\overline{1,n}} \not\equiv 0$, $\det \| \widetilde{q}_k(x_{j_l}(y), y) \|_{k,l=\overline{1,m}} \not\equiv 0$. *Тогда* π_l *допускают безграничное мероморфное продолжение.*

Заметим, что условия теоремы 1 выполняются, например, для дискретных уравнений Винера — Хопфа в четверти плоскости [1].

Следствие 1. *В нётеровом случае* [4] π_l *допускают аналитическое продолжение в окрестность* $\overline{D}_1^+$.

Следствие 2. *Риманова поверхность* $\pi_l(x)$ *как накрытие комплексной сферы* x *имеет только алгебраические точки ветвления в нётеровом случае.*

Следствие 3. *В нётеровом случае в случае стабилизации последовательности* F_i *функции* $\pi_l(x)$ *допускают мероморфное продолжение на соответствующую* $\widetilde{S}_j$.

Таким образом, возникает классификация аналитических продолжений решений краевых задач, характеризующая в некотором смысле сложность задачи. В связи с этим отметим следующий результат.

Теорема 2. *Пусть дискретные уравнения Винера — Хопфа в четверти плоскости разрешимы методом Винера — Хопфа в смысле* [2] (стр. 31). *Тогда* π_l *являются мероморфными функциями на* S_2.

Автор признателен Ю. И. Манину за ценные советы по теории Галуа.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 16 июля 1971 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Малышев В. А., Матем. сб. 84 (1971), 499—525. 2. Малышев В. А., Случайные блуждания. Уравнения Винера — Хопфа в четверти плоскости, Автоморфизмы Галуа, М., Изд. МГУ, 1970. 3. Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, М., ИЛ, 1961. 4. Симоненко И. Б., ДАН СССР 199, № 3 (1971), 551—552.

СОДЕРЖАНИЕ

А. М. Вершик. Четыре определения шкалы автоморфизма 1

А. М. Габриэлов. Матрицы пересечений для некоторых особенностей 18

Л. В. Гончарова. Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой 33

М. Г. Крейн. Об одном предположении А. М. Ляпунова 45

В. И. Ломоносов. Об инвариантных подпространствах семейства операторов, коммутирующих с вполне непрерывным 55

А. М. Переломов. Когерентные состояния для плоскости Лобачевского 57

В. Г. Романов. Абстрактная обратная задача и вопросы ее корректности 67

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

В. И. Арнольд. Классификация унимодальных критических точек функций 75

В. Я. Голодец. Модулярные операторы и множество асимптотических отношений 77

И. Ц. Гохберг, Ю. Лайтерер. О локальном принципе в задаче факторизации непрерывных оператор-функций 79

Р. Я. Грабовская, С. Г. Крейн. О формуле перестановки функций от операторов, представляющих алгебру Ли 81

Г. Г. Каспаров. Обобщенный индекс эллиптических операторов 82

Н. Б. Левина. Об обратной теореме Винера — Леви . . 84

В. А. Малышев. Аналитическое продолжение в краевых задачах для функций двух комплексных переменных . 86

Г. А. Маргулис. Арифметичность неравномерных решеток 88

М. Е. Новодворский. Единственность некоторых функционалов на представлениях $\mathfrak{p}$-адических унитарных групп 90

М. Д. Окунский, Э. Р. Цекановский. К теории обобщенных самосопряженных расширений полуограниченных операторов 92

Л. А. Назарова, А. В. Ройтер. Поликолчаны и схемы Дынкина 94

Е. В. Токарев. Об одном вопросе Линденштрауса и Фелпса 96