РГАСНТИ 27.43.51; 27.45.17 ISSN 0202—7488

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(ВИНИТИ)

# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Том 27

Научный редактор
член-корр. АН СССР Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1966 г.

МОСКВА 1990

1—2527

УДК 519.248+519.171+519.179.3



УДК 519.248

# ОГРАНИЧЕННЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СВОБОДНОЙ ДИНАМИКИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

***В. В. Айзенштадт, Д. Д. Ботвич, В. А. Малышев***

## ВВЕДЕНИЕ

Математическая статистическая физика равновесных систем сейчас является разветвленной наукой с целым арсеналом методов и результатов [7], [50], [86].

Совершенно другое положение в изучении динамики даже близких к равновесию систем. До последнего времени исследование динамики велось в следующих трех направлениях:

1. Общие результаты о существовании динамики как равновесной, так и неравновесной [81]—[82], [91], [50], [41];
2. Исследование свободных систем [12], [19]—[20] или сводимых к ним простым преобразованием (например, модель твердых стержней, $XY$-модель) [11, 23]. В этих случаях все величины явно вычислимы и система допускает полный контроль;
3. Исследование спектра массивных теорий в основном состоянии [50], [6].

Отметим здесь же аксиоматические результаты [29] о безмассовых теориях в основном состоянии.

В последнее время появляются работы по ограниченным возмущениям свободных классических систем [74], [71], [13]. Под ограниченным возмущением мы понимаем либо случай, когда в бесконечной системе частиц есть взаимодействие в ограниченной области, а вне этой области частицы движутся свободно, либо когда в свободную систему частиц помещается выделенная («пробная») частица, которая взаимодействует с остальными. Таким образом, остальные частицы взаимодействуют через нее и можно сказать, что область, где взаимодействие возможно, перемещается в пространстве вместе с частицей. Хотя даже в трансляционно инвариантном случае здесь есть результаты об асимптотической полноте [2], в целом до окончательного понимания далеко.

В этом обзоре мы выделяем важную часть этой проблемы, где можно говорить, что ситуация в основном понята и хорошо контролируется.

Прежде всего, наш технический метод — ряды теории возмущений типа рядов Дайсона—Швингера и их формальные обобщения в классических работах Фридрихса [47] и Хеппа [54]. Ключевые ограничения, в которых получены доказательства сходимости этих рядов [26], [68] таковы:

1. Взаимодействие мало, и сосредоточено в ограниченной области или достаточно быстро убывает на бесконечности (т. е. есть пространственное урезание);

2. Рассматриваются ферми-системы, так как для них операторы рождения-уничтожения ограничены;

3. Система не имеет ультрафиолетовых расходимостей;

Возмущение является малым ограниченным оператором, ввиду всех этих предположений.

Основной проблемой в дальнейшем является переход к трансляционно инвариантному взаимодействию, т. е. снятие пространственного урезания. Нам представляется, что это сейчас единственно реальный путь для доказательства асимптотической полноты.

До статьи [26] не было известно ни одного доказательства асимптотической полноты, но имелись другие более слабые результаты [47], [79], [80], [56]—[61], [17], [83], [28], [44], где строилась теория рассеяния в фоковском пространстве и в $C^*$-алгебрах для различных теорий подобного типа. Однако нигде не доказывалась асимптотическая полнота. Из [26] следовала асимптотическая полнота в температурном состоянии, а также в случае отсутствия поляризации вакуума для основного состояния. В [1], используя стандартный прием теории рассеяния, доказана полнота для случая массовой щели без поляризации вакуума. В [68] доказана сходимость разложений в «linked cluster theorem» из классических книг [47], [54]. Отсюда в частности вытекает асимптотическая полнота в условии поляризации вакуума без массовой щели. Позднее с помощью таких же методов этот результат был перенесен В. В. Айзенштадтом на случай произвольного химического потенциала с четным взаимодействием.

В [1] рассматривается случай взаимодействия отдельно взятого спина со свободным ферми-полем. В этот обзор мы включаем также новые результаты относительно этого случая.

Для чтения статьи необходимо знание спектральной теории самосопряженных операторов, некоторых определений из теории $C^*$-алгебр и небольшое знакомство с современной квантовой физикой.

В главе 0 мы приводим все необходимые сведения о фоковском пространстве, вторичном квантовании, алгебре канонических антикоммутационных соотношений, квазисвободных состояниях и свободной динамике на этой алгебре.

Глава 1 посвящена так называемому фоковскому спектральному представлению свободной динамики в температурном состоянии, то есть представления ее в виде $\Gamma(e^{it(h\oplus h^*)})$, где $h$, $h^*$ — одночастичные гамильтонианы для частицы и античастицы. Техника этого представления использует скобки Вика относительно соответствующего состояния.

В главе 2 мы сначала, следуя [83], [44] показываем, как строится теория рассеяния в $C^*$-алгебрах. В § 2.3 доказывается асимптотическая полнота в $C^*$-алгебре КАС, соответствующая статье [26]. В § 2.4, 2.5 этот результат применяется для доказательства унитарной эквивалентности в основном и КМШ-состоянии.

В главе 3 доказывается центральный результат знаменитой «linked cluster theorem», из которой затем выводится асимптотическая полнота в условиях поляризации вакуума. Это требует существенно более сложной техники кластерных разложений — фермионные сокращения в ячейках «мода-время». Для удобства читателя мы приводим определения диаграмм Фридрихса и формальную теорию перенормировок для этого случая. Эта глава может читаться независимо от главы 2.

В главе 4 рассматривается спин, взаимодействующий со свободным ферми-газом. Для температурных состояний мы имеем две существенно различные ситуации: изоморфизм этой системы свободному ферми-газу или свободному ферми-газу с невзаимодействующим с ним спином. В §4.4 мы классифицируем возмущения свободной динамики в основном состоянии. Доказательства теорем 4.7 и 4.8 принадлежат В. В. Айзенштадту.



# *Глава 0*

## ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

### § 0.1. Пространство Фока. Вторичное квантование

Пространство Фока — это гильбертово пространство с дополнительной структурой.

Пусть задано сепарабельное гильбертово пространство $\mathscr{H}$. Если не оговорено противное, далее оно везде будет считаться комплексным со скалярным произведением, антисимметрическим по второму аргументу.

Мы определим антисимметрическое (фермионное) пространство Фока $\mathscr{F}_a=\mathscr{F}_a(\mathscr{H})$ над $\mathscr{H}$ и симметрическое (бозонное) пространство Фока $\mathscr{F}_s=\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$.

Удобно сначала ввести более общее пространство Фока

$$\mathscr{F}=\mathscr{F}(\mathscr{H})=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}^{(n)}, \tag{0.1.1}$$

где $\mathscr{F}^{(0)}=\mathbf{C}$ (пространство констант), $\mathscr{F}^{(n)}\equiv\mathscr{F}^{(n)}(\mathscr{H})=\mathscr{H}^{\otimes n}=\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}\otimes\ldots\otimes\mathscr{H}$ ($\otimes$ означает тензорное произведение гильбертовых пространств (см. [27]), $\mathcal{F}$ в (0.1.1) означает прямую сумму гильбертовых пространств, т. е. пространство последовательностей

$$\Phi=(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots), \ \varphi_n \in \mathcal{F}^{(n)} \qquad (0.1.2)$$

с конечной нормой

$$(\Phi, \Phi)=\|\Phi\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\|\varphi_n\|^2. \qquad (0.1.3)$$

Заметим, что если $\mathcal{H}=L_2(X, \Sigma, \mu)$, то $\mathcal{F}^{(n)}$ есть пространство квадратично-интегрируемых функций $\varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in X$ по мере $\mu^n=\mu\otimes\ldots\otimes\mu$ ($n$ раз).

В пространстве $\mathcal{F}$ естественным образом действует симметрическая группа $S_n$, переставляющая множители в тензорных произведениях $f_1\otimes\ldots\otimes f_n$, $f_i \in \mathcal{H}$. Подпространство $\mathcal{F}^{(n)}$, инвариантное относительно симметрических перестановок элементов, обозначим через $\mathcal{F}_s^{(n)}$, антисимметрических (умножающихся на знак перестановки) — через $\mathcal{F}_a^{(n)}$.

Определение 0.1. Пусть

$$\mathcal{F}_s=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_s^{(n)}, \ \mathcal{F}_a=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_a^{(n)}. \qquad (0.1.4)$$

В указанном выше случае, когда $\mathcal{H}$ есть пространство функций, $\mathcal{F}_s^{(n)}(\mathcal{F}_a^{(n)})$ состоит из симметрических (антисимметрических) функций. Будем называть $\mathcal{F}_s^{(n)}$ и $\mathcal{F}_a^{(n)}$ $n$-частичными подпространствами.

Если задан ограниченный оператор $U$, $\|U\|\leqslant 1$, в $\mathcal{H}$, то обозначим через $\Gamma(U)$ оператор в $\mathcal{F}$, действующий в каждой компоненте $\mathcal{F}^{(n)}$ по формуле

$$\Gamma(U)(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)=(Uf_1)\otimes\ldots\otimes(Uf_n) \qquad (0.1.5)$$

и продолженный далее по линейности и по непрерывности на все пространство $\mathcal{F}$. Заметим, что $\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{F}_a$ инвариантны относительно $\Gamma(U)$, и поэтому сужения $\Gamma(U)$ на эти подпространства будем обозначать тем же знаком. Если $U$ унитарен в $\mathcal{H}$, то $\Gamma(U)$ унитарен в $\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{F}_a$, соответственно.

Пусть $h$ — самосопряженный оператор с областью определения $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{H}$. Обозначим через $d\Gamma(h)$ самосопряженный оператор, являющийся замыканием симмерического оператора в $\mathcal{F}$, действующего для любого $f=f_1\otimes\ldots\otimes f_n\in\mathcal{D}\otimes\ldots\otimes\mathcal{D}\subseteq\mathcal{F}^{(n)}$ по формуле

$$d\Gamma(h)(f_1\otimes\ldots f_n)=hf_1\otimes f_2\otimes\ldots\otimes f_n+\ldots$$
$$\ldots+f_1\otimes f_2\otimes\ldots\otimes hf_n \qquad (0.1.7)$$

(она получается формальным дифференцированием $\Gamma(e^{ith})$ в точке $t=0$). Тем самым, $d\Gamma(h)$ можно считать действующим в $\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{F}_a$, где он тоже является самосопряженным оператором.



## § 0.2. Операторы рождения и уничтожения. $C^*$-алгебра КАС

Для любого $f\in\mathcal{H}$ определим операторы рождения $a^*(f)$ и уничтожения $a(f)$ в $\mathcal{F}(\mathcal{H})$:

$$a(f)\Omega=0, \quad a^*(f)\Omega=(0, f, 0, \ldots),$$
$$a(f)(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)=\sqrt{n}(f, f_1)(f_2\otimes\ldots\otimes f_n), \qquad (0.2.1)$$
$$a^*(f)(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)=\sqrt{n+1}\,f\otimes f_1\otimes\ldots\otimes f_n,$$

где вектор $\Omega=(1, 0, 0, \ldots)\in\mathcal{F}$ называется вакуумом.

Нетрудно проверить, что

$$(a(f))^*=a^*(f).$$

По линейности они продолжаются до операторов с всюду плотной областью определения $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}_0(\mathcal{H})\subseteq\mathcal{F}$, состоящей из финитных последовательностей (0.1.2), т. е. таких, в которых все $\varphi_n=0$, начиная с некоторого $n$, $\varphi_k\in\mathcal{F}^{(k)}$.

Определим линейный оператор $P_\pm$ в $\mathcal{F}$ формулой

$$P_\pm(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n}(\pm 1)^{|\pi|}(f_{\pi(1)}\otimes\ldots\otimes f_{\pi(n)}) \qquad (0.2.2)$$

где $|\pi|$ — четность перестановки $\pi$.

Они являются ортогональными операторами в $\mathcal{F}_s^{(n)}$ и $\mathcal{F}_a^{(n)}$ соответственно.

Определение 0.2. Положим

$$a_\pm(f)=P_\pm a(f), \ a_\pm^*(f)=P_\pm a^*(f) \qquad (0.2.3)$$

на $\mathcal{F}_{s,0}$ и $\mathcal{F}_{a,0}$ соответственно. Далее эти операторы мы часто будем обозначать без индексов $\pm$, если из контекста ясно, о каком из пространств $\mathcal{F}_s$ или $\mathcal{F}_a$ идет речь. В случае, когда фоковское пространство состоит из последовательностей симметрических (антисимметрических) функций

$$\Phi=(\varphi_0, \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots),$$

операторы рождения и уничтожения действуют по формулам

$$(a(f)\Phi)_n(x_1, \ldots, x_n)=\sqrt{n+1}\int_{R^\nu}\varphi_{n+1}(x, x_1, \ldots, x_n)\bar{f}(x)d\mu(x),$$

$$(a^*(f)\Phi)_n(x_1, \ldots, x_n)= \qquad (0.2.4)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\pi\in S_n}(\pm)^{|\pi|}\varphi_{n-1}(x_1, \ldots, \check{x}_i, \ldots, x_n)f(x_i)$$

где знак «$\vee$» означает, что соответствующая переменная опущена.

Замечание. Если норму (0.1.3) заменить на норму

$$\|\Phi\|^2=\frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\|\varphi_n\|^2, \tag{0.2.5}$$

то операторы $a^*(f)$ и $a(f)$ будут иметь вид (0.2.4), но без множителей $1/\sqrt{n}$ и $\sqrt{n+1}$, которые трудно запомнить.

В антисимметрическом (фермионном) случае имеют место канонические антикоммутационные соотношения (КАС)

$$a^*(f)a(g)+a(g)a^*(f)=(f,g)I, \tag{0.2.6}$$

$$\{a(f),\ a(g)\}=\{a^*(f),\ a^*(g)\}=a^*(f)a^*(g)+a^*(g)a^*(f)=0,$$

где 0, $I$ есть, соответственно, нулевой и единичный операторы в $\mathcal{F}_a$.

Нетрудно убедиться, что на $\mathcal{F}_a$

$$\|a(f)\|=\|a^*(f)\|=\|f\|, \tag{0.2.7}$$

т. е. в фермионном случае операторы рождения и уничтожения ограничены.

В то же время

$$a(f):\mathcal{F}_s^{(n)}\to\mathcal{F}_s^{(n-1)} \text{ и } a^*(f):\mathcal{F}_s^{(n)}\to\mathcal{F}_s^{(n+1)},$$

имеют норму

$$\|a(f)\|_{n,n-1}=\|a^*(f)\|_{n-1,n}=\sqrt{n}\|f\|. \tag{0.2.8}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{F}_{s,0}$ образует плотное множество аналитических векторов для $a^\#(f)$, где $a^\#=a$ или $a$, т. е. для всех $\Phi\in\mathcal{F}_{s,0}$ и всех $z\in\mathbf{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}\|(a^\#(f))^n\Phi\|<\infty.$$

Нас будет интересовать $C^*$-алгебра КАС, порожденная операторами рождения и уничтожения, действующими в фоковском пространстве $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$.

Определение 0.3. $C^*$-алгебра $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ (или ей изоморфная), порожденная операторами $a(f)$, $a^*(f)$, $f\in\mathcal{H}$ в $\mathcal{F}_a$, называется $C^*$-алгеброй канонических антикоммутационных соотношений ($C^*$-алгеброй КАС) над $\mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — некоторое гильбертово пространство.

Если $\mathcal{H}=L_2(\mathbf{R}^\nu,dx)$ или $l_2(\mathbf{Z}^\nu)$, то обозначим через $\mathfrak{A}_\Lambda=\mathfrak{A}(L_2(\Lambda,dx))$, $\Lambda\subseteq\mathbf{R}^\nu$ и $\mathfrak{A}(l_2(\Lambda))$, $\Lambda\subseteq\mathbf{Z}^\nu$, $C^*$-алгебры над $L_2(\Lambda,dx)$ и $l_2(\Lambda)$, соответственно.



## § 0.3. Свободная динамика и квазисвободное состояние на $C^*$-алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$. ГНС-представление

Пусть $h=h^*$ — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ с плотной областью определения $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{H}$, который мы будем называть одночастичным гамильтонианом.

Определение 0.4. Динамикой $\tau_t$ на $C^*$-алгебре $\mathfrak{A}$ называется любая ее сильно непрерывная группа $*$-автоморфизмов.

Определение 0.5. $C^*$-динамической системой называется пара $(\mathfrak{A},\tau_t)$, где $\mathfrak{A}$ есть $C^*$-алгебра, $\tau_t$ — ее динамика.

Определение 0.6. Пусть $(\mathfrak{A}_1,\tau_t^1)$, $(\mathfrak{A}_2,\tau_t^2)$ — две $C^*$-динамические системы. Они называются эквивалентными, если существует $*$-изоморфизм $C^*$-алгебр $\gamma:\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2$ такой, что

$$\tau_t^2=\gamma\tau_t^1\gamma^{-1}$$

для всех $t\in\mathbf{R}$.

Определение 0.7. Однопараметрическая сильно непрерывная группа $\tau_t^0$ на $C^*$-алгебре КАС $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, действующая на операторах рождения и уничтожения по формулам

$$\tau_t^0(a^\#(f))\overset{\text{def}}{=}e^{itd\Gamma(h)}a^\#(f)e^{-itd\Gamma(h)}=a^\#(e^{ith}f), \tag{0.3.1}$$

называется свободной динамикой на $C^*$-алгебре КАС $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, порожденной одночастичным гамильтонианом $h$.

Правое равенство в (0.3.1) требует доказательства. Пусть $\{e_x,\ x\in\mathbf{Z}^\nu\}$ — некоторый базис в $\mathcal{H}$ и $(he_x,e_y)=c_{xy}=\bar{c}_{yx}$, тогда

$$H_0\equiv d\Gamma(h)=\sum_{x,y}c_{xy}a_x^*a_y,$$

$$i[H_0,\ a(e_z)]=ia\Big(-\sum_y c_{zy}a_z\Big)=$$

$$=-ia\Big(\sum_y c_{yz}e_z\Big)=-ia(he_z)=\frac{d}{dt}a(e^{ith}e_z)|_{t=0}.$$

Аналогично можно легко получить

$$i[H_0,\ a^*(e_z)]=\frac{d}{dt}a^*(e^{ith}e_z)|_{t=0}. \tag{0.3.2}$$

Из этих равенств и следует правое равенство в (0.3.1).

Далее, пусть всегда $\mathfrak{A}$ есть некоторая $C^*$-алгебра с единицей.

Определение 0.8. Состоянием $<\ >$ на $C^*$-алгебре $\mathfrak{A}$ называется непрерывный положительный нормированный линейный функционал, т. е. непрерывный линейный функционал, обладающий свойством положительности:

$$\langle A^*A\rangle\geq 0 \qquad \forall\ A\in\mathfrak{A}$$

и нормированности:

$$\langle I \rangle = 1,$$

где $I \in \mathfrak{A}$ есть единица в $C^*$-алгебре $\mathfrak{A}$.

Определение 0.9. Квазисвободное состояние $\langle \ \rangle_0$ на $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ есть линейный положительный функционал такой, что

$$\langle I \rangle_0 = 1,$$

$$\langle a^\#(f_1) \ldots a^\#(f_{2k}) \rangle_0 = \sum_\pi (-1)^{|\pi|} \prod_{s=1}^{k} \langle a^\#(f_{i_s}) a^\#(f_{j_s}) \rangle_0,$$

где сумма берется по всем разбиениям множества индексов $(1, \ldots, 2k)$ на $k$ пар $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)$, причем $i_s < j_s$, $|\pi|$ — четность перестановки $\pi = (i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k)$.

Определение 0.10. Квазисвободное состояние $\langle \ \rangle_0$ на $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ называется калибровочно-инвариантным, если выполнено условие калибровочной инвариантности

$$\langle a(f) a(g) \rangle_0 = \langle a^*(f) a^*(g) \rangle_0 = 0. \qquad (0.3.4)$$

Замечание. Для того чтобы так определенный функционал был состоянием, т. е. был положительно определен, необходимы дополнительные условия. Очевидно, что если $\langle \ \rangle_0$ — состояние, то имеет место равенство

$$\langle a^*(f), a(g) \rangle_0 = (f, Bg), \qquad (0.3.5)$$

где $B$ — линейный положительный оператор в $\mathscr{H}$ такой, что

$$0_{\mathscr{H}} \leqslant B_{\mathscr{H}} \leqslant I_{\mathscr{H}}, \qquad (0.3.6)$$

где $0_{\mathscr{H}}$ — нулевой оператор, а $I_{\mathscr{H}}$ — тождественный оператор в $\mathscr{H}$.

Можно доказать, что условие (0.3.6) является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы $\langle \ \rangle_0$ было квазисвободным калибровочно-инвариантным состоянием (см. [87]).

Мы будем обозначать через $\langle \ \rangle_0^B$ квазисвободное калибровочно-инвариантное состояние, определяемое с помощью оператора $B$ (см. формулу (0.3.5)), и через $\langle \ \rangle_0$ просто квазисвободное состояние на $C^*$-алгебре $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$.

Заметим, что случай $B = 0_{\mathscr{H}}$ соответствует так называемому фоковскому состоянию на $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$.

Из определения квазисвободного калибровочно инвариантного состояния $\langle \ \rangle_0^B$ и (0.3.5) вытекает следующая полезная формула

$$\langle a^*(f_1) \ldots a^*(f_m) a(g_n) \ldots a(g_1) \rangle_0^B = \delta_{mn} \det \{(f_i, Bg_j)\}. \quad (0.3.7)$$

Определение 0.11. Состояние $\langle \ \rangle$ называется инвариантным относительно динамики $\tau_t$, если

$$\langle \tau_t(A) \rangle = \langle A \rangle \qquad (0.3.8)$$

для любых $A \in \mathfrak{A}(\mathscr{H})$, $t \in \mathbf{R}$.



Если выполнено (0.3.8), мы будем также говорить, что динамика $\tau_t$ инвариантна относительно состояния $\langle \ \rangle$.

Следующее утверждение является необходимым и достаточным условием для того, чтобы свободная динамика была инвариантна относительно квазисвободного калибровочно-инвариантного состояния.

Утверждение 0.1. Квазисвободное состояние $\langle \ \rangle_0^B$, порожденное оператором $B$, инвариантно относительно свободной динамики $\tau_t^0$ тогда и только тогда, когда операторы $B$ и $h$ коммутируют, т. е. имеет место равенство

$$Be^{ith} = e^{ith} B \qquad \forall t \in \mathbf{R}. \qquad (0.3.9)$$

Доказательство. Достаточность следует из очевидной выкладки

$$\langle \tau_t^0(a^*(f) a(g)) \rangle_0^B = (e^{ith} f, Be^{ith} g) = (e^{ith} f, e^{ith} Bg) =$$
$$= (f, Bg) = \langle a^*(f) a(g) \rangle_0^B.$$

Докажем теперь необходимость условия (0.3.9). Из инвариантности состояния $\langle \ \rangle_0^B$ относительно динамики $\tau_t^0$ следует, что для всех $f, g \in \mathscr{H}$

$$\langle \tau_t^0(a^*(f) a(g)) \rangle_0^B = \langle a^*(f) a(g) \rangle_0^B.$$

Откуда имеем

$$(e^{ith} f, Be^{ith} g) = (f, Bg),$$

или

$$(f, e^{-ith} Be^{ith} g) = (f, Bg).$$

Так как последнее равенство имеет место для всех $f, g \in \mathscr{H}$, то это означает, что

$$e^{-ith} Be^{ith} \equiv B \quad \forall t \in \mathbf{R},$$

то есть выполнено условие (0.3.9).

Теперь мы определим так называемое физическое гильбертово пространство $\mathscr{H}_{\text{физ.}}$ и физический гамильтониан $H_{\text{физ.}}$ Для этого нам придется кратко описать конструкцию ГНС-представления $C^*$-алгебры $\mathfrak{A}$ по состоянию $\langle \ \rangle$.

Определим тройку $(\mathscr{H}_{\langle \ \rangle}, \pi_{\langle \ \rangle}, \Omega_{\langle \ \rangle})$, составляющую циклическое ГНС-представление $C^*$-алгебры $\mathfrak{A}$ по состоянию $\langle \ \rangle$, где $\mathscr{H}_{\langle \ \rangle}$ — гильбертово пространство, $\pi_{\langle \ \rangle}$ — представление, а $\Omega_{\langle \ \rangle}$ — циклический вектор.

Сначала мы определим $\mathscr{H}_{\langle \ \rangle}$. Алгебра $\mathfrak{A}$ есть банахово пространство, а с помощью $\langle \ \rangle$ его можно наделить структурой предгильбертова пространства, если ввести положительно-определенное скалярное произведение

$$(A, C) = \langle C^* A \rangle, \qquad A, C \in \mathfrak{A}. \qquad (0.3.10)$$

Множество

$$\mathfrak{B}_{\langle\ \rangle}=\{A\in\mathfrak{A}:\ \langle A^*A\rangle=0\},\qquad(0.3.11)$$

как легко проверить, оказывается левым идеалом $\mathfrak{A}$.

Задав классы эквивалентности

$$A_{\langle\ \rangle}=\{\hat{A}\ni\mathfrak{A}:\ \hat{A}=A+I,\ I\in\mathfrak{B}_{\langle\ \rangle}\}\in\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_{\langle\ \rangle}\qquad(0.3.12)$$

и положив

$$(A_{\langle\ \rangle},\ C_{\langle\ \rangle})=\langle C^*A\rangle,\qquad(0.3.13)$$

где $A\in A_{\langle\ \rangle}$, $B\in B_{\langle\ \rangle}$ — некоторые элементы классов эквивалентности, мы корректно определим скалярное произведение на $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_{\langle\ \rangle}$. Пополнение $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_{\langle\ \rangle}$ по этому скалярному произведению и есть $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}$. Отображение $\pi_{\langle\ \rangle}$ на плотном множестве в $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}$ определяется следующим образом:

$$\pi_{\langle\rangle}(A)C_{\langle\rangle}=(AC)_{\langle\rangle},\qquad(0.3.14)$$

а потом распространяется на все $\mathscr{H}_{\langle\rangle}$ в силу его ограниченности на $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}_{\langle\rangle}$. Остается указать циклический вектор $\Omega_{\langle\rangle}$:

$$\Omega_{\langle\rangle}=I_{\langle\rangle},\qquad(0.3.15)$$

где $I$ — единица $C^*$-алгебры $\mathfrak{A}$.

Определим для некоторой динамики $\tau_t$ и инвариантного относительно нее состояния $\langle\ \rangle$ самосопряженный оператор $H_{\text{физ}}$. Сильно непрерывная однопараметрическая группа $U_t$ в $\mathscr{H}_{\langle\rangle}$

$$U_t(\pi_{\langle\rangle}(A)\Omega_{\langle\rangle})=\pi_{\langle\rangle}(\tau_t(A)\Omega_{\langle\rangle})\qquad(0.3.16)$$

является, в силу инвариантности динамики $\tau_t$ относительно состояния $\langle\ \rangle$, унитарной, которая по теореме Стоуна имеет инфинитиземальный генератор $H_{\text{GNS}}$ такой, что

$$e^{itH_{\text{GNS}}}(\pi_{\langle\rangle}(A)\Omega_{\langle\rangle})=\pi_{\langle\rangle}(\tau_t(A)\Omega_{\langle\rangle}).\qquad(0.3.17)$$

Мы будем называть пространство $\mathscr{H}_{\text{физ}}\equiv\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}$ физическим гильбертовым пространством, а оператор $H_{\text{физ}}\equiv H_{\text{GNS}}$ физическим гамильтонианом.

Далее унитарная однопараметрическая группа $U_t$ также будет называться динамикой. Из контекста будет ясно, о какой динамике — в $C^*$-алгебре или в физическом гильбертовом пространстве — идет речь.

### § 0.4. Свободный ферми-газ. КМШ-состояния

Определение 0.12 ([28]). Пусть на $C^*$-алгебре $\mathfrak{A}$ заданы динамика $\tau$ и состояние $\langle\ \rangle$. Состояние $\langle\ \rangle$ называется $(\tau,\beta)$-КМШ-состоянием ($\beta\in\overline{\mathbf{R}}\equiv\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$), если для любых $A,\ B\in\mathfrak{A}$ существует функция $F_{A,B}$ такая, что:

а) $F_{A,B}$ аналитична в $\mathbf{D}_\beta$;

б) $F_{A,B}$ непрерывна и ограничена в $\overline{\mathbf{D}}_\beta$;



в) $F_{A,B}(t)=\langle A\tau_t(B)\rangle,\quad\forall\, t\in\mathbf{R},$

$$F_{A,B}(t+i\beta)=\langle\tau_t(B)A\rangle,\quad\forall\, t\in\mathbf{R},\qquad(0.4.1)$$

где $\mathbf{D}_\beta=\{z:\ 0<\operatorname{Im}z<\beta\}$ при $\beta>0$ и

$$\mathbf{D}_\beta=\{z:\ \beta<\operatorname{Im}z<0\}\quad\text{при}\quad\beta<0$$

Если $\beta=+\infty$, $(\tau,\beta)$-КМШ-состояние называется основным.

Определим КМШ-состояние относительно свободной динамики $\tau_t^0$, порожденной одночастичным гамильтонианом $h$.

Утверждение 0.2. Для каждого $\beta\in\mathbf{R}$ существует единственное состояние $\langle\ \rangle$, которое является $(\tau^0,\beta)$-КМШ-состоянием. Состояние $\langle\ \rangle$ оказывается при этом квазисвободным калибровочно-инвариантным с

$$B=\exp(-\beta h)\,(I_{\mathscr{H}}+\exp(-\beta h))^{-1},\qquad(0.4.2)$$

т. е. $\langle\ \rangle\equiv\langle\ \rangle_0^B$.

Доказательство. По определению $\beta$-КМШ-состояния имеем

$$\langle a(g)a^*(f)\rangle=\langle a^*(e^{-\beta h}f)a(g)\rangle=(e^{-\beta h}f,\ g)\ -\langle a^*(f)a(g)\rangle,$$

если $f$ — аналитический вектор для $h$, откуда

$$\langle a^*((I_{\mathscr{H}}+e^{-\beta h})f)a(g)\rangle=(e^{-\beta h}f,\ g),$$

т. е. имеет место (0.4.2). Для монома общего вида эту выкладку надо итерировать (см. [27]), откуда следует, что $\langle\ \rangle$ квазисвободно и $B$ имеет вид (0.4.2). ■

## Глава 1

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СВОБОДНОЙ ДИНАМИКИ В КВАЗИСВОБОДНОМ СОСТОЯНИИ

### § 1.1. Виковские скобки

Определим некоторое специальное отображение $C^*$-алгебры КАС $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ в себя, которое будем называть скобками Вика. Оно будет определяться по квазисвободному состоянию $\langle\ \rangle_0$, которое необязательно должно быть калибровочно-инвариантным. Из контекста будет ясно, о каком состоянии идет речь.

Зафиксируем некоторое квазисвободное состояние $\langle\ \rangle\equiv\langle\ \rangle_0$ на $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$. Мы будем определять мономы Вика, т. е. результат применения виковских скобок к моному вида

$$W=a^\#(f_1)\ldots a^\#(f_m),\quad f_i\in\mathscr{H}$$

с помощью индуктивной формулы, которая похожа на ту, с помощью которой определяются виковские мономы для гауссовских систем (см. [6]).

Определим сначала виковские скобки $::\equiv::_{\langle\,\rangle}$ на мономах, а потом распространим их по линейности на всю $C^*$-алгебру.

**Определение 1.1.** (Мономы Вика на $C^*$-алгебре КАС $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$). Положим

$$:I:=0,$$

$$a_T\equiv a_1^{\#}\dots a_n^{\#}=\sum_{T'}:a_{T'}^{\#}:\langle a_{T\setminus T'}^{\#}\rangle(-1)^{\pi(T,T')}, \qquad (1.1.1)$$

где $T=(1,\dots,n)$, $T'$ — подпоследовательность $T$, сохраняющая порядок, $T\setminus T'$ — оставшаяся подпоследовательность $\pi(T,T')$ — четность перестановки $(1,\dots,n)\to(T\setminus T',T')$, $a_i^{\#}=a^{\#}(f_i)$, $f_i\in\mathscr{H}$.

**Утверждение 1.1.** Имеет место формула обращения

$$:a_T:=\sum_{T'}a_{T'}^{\#}\langle a_{T\setminus T'}^{\#}\rangle(-1)^{\pi(T,T')+|T\setminus T'|/2}. \qquad (1.1.2)$$

**Доказательство** формулы обращения в точности такое же, как и для гауссовских систем (см. [6]).

В дальнейшем мы часто будем обозначать виковские скобки по квазисвободному калибровочно-инвариантному состоянию, определяемому с помощью оператора $B$, через $:\ :_B$.

Замечание. Из определения 1.1 легко выводится следующая формула, с помощью которой ранее и вводились виковские скобки $:\ :\equiv:\ :_B$ в [25], [46] по квазисвободному калибровочно-инвариантному состоянию ($\langle\ \rangle\equiv\langle\ \rangle_0^B$)

$$:a^*(f_1)\dots a^*(f_m)a(f_{m+1})\dots a(f_{m+n}):=$$

$$=\sum_{k=0}^{\min(m,n)}(-1)^k\sum_{\pi}(-1)^{|\pi|}\prod_{s=1}^{k}\langle a^*(f_{i_s})a(f_{j_s})\rangle a^*(f_1)\dots$$

$$\dots a^*(\check{f}_{i_1})\dots a^*(\check{f}_{i_k})\dots a^*(f_m)a(f_{m+1})\dots \check{a}(f_{j_1})\dots$$

$$\dots a(\check{f}_{j_k})\dots a(f_{m+n}), \qquad (1.1.3)$$

где сумма $\sum_{\pi}$ берется по всем перестановкам $\pi\in S_{m+n}$ таким, что

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & 2k-1 & 2k & 2k+1 & \dots & m+n\\ i_1 & j_1 & \dots & i_k & j_k & r_1 & \dots & r_{m+n-2k}\end{pmatrix}$$

для любой последовательности $1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant m$, $m+1\leqslant j_s\leqslant m+n$, $s=1,\dots,k$ и любой возрастающей последовательности $r_1,\dots,r_{m+n-2k}$ чисел $1,2,\dots,m+n$ без $i_1,\dots,i_k$, $j_1,\dots,j_k$. Знак «$\vee$» означает, что соответствующий оператор рождения-уничтожения в произведении отсутствует.

В следующей теореме рассматриваются основные свойства виковских скобок.



**Теорема 1.2** ([25]). Пусть $::\equiv::_{\langle\,\rangle}$ есть виковские скобки по квазисвободному состоянию $\langle\ \rangle\equiv\langle\ \rangle_0$. Тогда

1) $(:A_1A_2:)^*=:A_2^*A_1^*:$

1′) $(:a^{\#}(f_1)\dots a^{\#}(f_m):)^*=:a^{i(\#)}(f_m)\dots a^{i(\#)}(f_1):$,

где $i$(«$*$»)=« », $i$(« »)=«$*$».

2) $\langle :a^{\#}(f_1)\dots a^{\#}(f_m):\rangle=0$ при $m>0$.

3) $\langle :a^{\#}(f_m)\dots a^{\#}(f_1)::a^{\#}(g_1)\dots a^{\#}(g_n):\rangle=$

$$=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \sum(-1)^{|\pi|}\langle a^{\#}(f_1)a^{\#}(g_{\pi(1)})\rangle\dots\langle a^{\#}(f_n)a^{\#}(g_{\pi(n)})\rangle, & \end{cases} \qquad (1.1.4)$$

где сумма берется по всем подстановкам $\pi=\begin{pmatrix}1 & \dots & n\\ \pi(1) & \dots & \pi(n)\end{pmatrix}$. Если состояние $\langle\ \rangle_0$ калибровочно-инвариантно, т. е. $\langle\ \rangle\equiv\langle\ \rangle_0^B$, то имеет место формула

3′) $\langle :a^*(f_m)\dots a^*(f_1)a(g_1)\dots a(g_n)::a^*(h_k)\dots a^*(h_1)a(u_1),\dots a(u_s):\rangle=\langle a^*(f_m)\dots a^*(f_1)a(u_1)\dots a(u_s)\rangle$

$$\langle a(g_1)\dots a(g_n)a^*(h_k)\dots a^*(h_1)\rangle=\delta_{ms}\delta_{kn}\det\{(Bf_i,u_j)\}\ \det\{((I_{\mathscr{H}}-B)g_i,h_j)\} \qquad (1.1.5)$$

для всех $f_i,g_i,u_i,h_i\in\mathscr{H}$.

Свойства 1) и 1′) очевидным образом следуют из определения виковских скобок, а свойства 2) и 3) — из 3′).

Докажем свойство 3′). Заметим, что обе части равенства (1.1.5) линейны или антилинейны по одним и тем, же аргументам. Поэтому достаточно проверить это равенство для случая, когда все $f_i,g_i,u_i,h_i$, $i=1,\dots,n$ являются элементами некоторого базиса в $\mathscr{H}$.

Очевидно, что если равенство (1.1.5) выполнено для виковских скобок $:\ :_{B_k}$ по квазисвободным калибровочно-инвариантным состояниям $\langle\ \rangle_0^{B_k}$, определяемым с помощью операторов $B_k$, где

$$0_{\mathscr{H}}\leqslant B_k\leqslant I_{\mathscr{H}},$$

и

$$(x,B_ky)\to(x,By)\ \forall x,y\in\mathscr{H},$$

то оно выполнено и для виковских скобок $:\ :_B$ по квазисвободному калибровочно-инвариантному состоянию, определяемому с помощью оператора $B$.

Для любого оператора $B$, $0_{\mathscr{H}}\leqslant B\leqslant I_{\mathscr{H}}$ можно, очевидно, выбрать последовательность операторов $B_k$, таких, что $0_{\mathscr{H}}\leqslant B_k\leqslant I_{\mathscr{H}}$, $B_k$ имеет дискретный спектр и

$$(x,B_ky)\to(x,By)\ \forall x,\ y\in\mathscr{H}.$$

Докажем равенство (1.1.5) для оператора $B_k$, имеющего дискретный спектр $\{\lambda_i, 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1, i\in\mathbf{N}\}$. Пусть $e_i$ есть нормированный собственный вектор оператора $B_k$, соответствующий собственному значению $\lambda_i$, причем набор векторов $\{e_i, i\in\mathbf{N}\}$ является ортонормированным базисом.

Так как $(e_i, e_j)=\delta_{ij}$ и $\langle a^*(e_i)a(e_j)\rangle_0^{B_k}=\delta_{ij}\lambda_i$, то из определения виковских скобок следует, что

$$:a^*(e_{i_1})\dots a^*(e_{i_q})a^*(e_{j_1})\dots a^*(e_{j_p})a(e_{j_p})\dots a(e_{j_1})a(e_{r_1})\dots$$
$$\dots a(e_{r_s}):_{B_k}=a^*(e_{i_1})\dots a^*(e_{i_q})a(e_{r_1})\dots a(e_{r_s}):a^*(e_{j_1})\dots$$
$$\dots a^*(e_{j_p})a(e_{j_p})\dots a(e_{j_1}):_{B_k}=a^*(e_{i_1})\dots a^*(e_{i_q})a(e_{r_1})\dots$$
$$\dots a(e_{r_s}):a^*(e_{j_1})a(e_{j_1}):\dots :a^*(e_{j_p})a(e_{j_p}):_{B_k}=$$
$$=\prod_{k=1}^{q}a^*(e_{i_k})\prod_{k=1}^{s}a(e_{r_k})\prod_{k=1}^{p}(a^*(e_{j_k})a(e_{j_k})-\lambda_{j_k}I_{\mathscr{H}}),\qquad(1.1.6)$$

где $I=\{i_1,\dots,i_q\}$, $J=\{j_1,\dots,j_p\}$, $R=\{r_1,\dots,r_s\}$, причем

$$I\cap J=I\cap R=R\cap J=\varnothing.$$

Перестановками антикоммутирующих операторов $a^*(f)$ и $a^*(g)$, а также $a(f)$ и $a(g)$, к виду (1.1.6) приводится любое выражение

$$:a^*(e_{l_1})\dots a^*(e_{l_m})a(e_{l_{m+1}})\dots a(e_{l_{m+n}}):_{B_k}.\qquad(1.1.7)$$

Заметим, что такие перестановки в (1.1.7) ведут к одинаковой смене знаков в обеих частях равенства (1.1.5). Следовательно (1.1.5), достаточно проверить для выражений вида (1.1.6).

Имеем

$$\langle :a^*(e_i)a(e_i):_{B_k} :a^*(e_j)a(e_j):_{B_k}\rangle^{B_k}=$$
$$=\langle (a^*(e_i)a(e_i)-\lambda_i)(a^*(e_j)a(e_i)-\lambda_j)\rangle_0^{B_k}=$$
$$=\delta_{ij}\langle(1-2\lambda_i)a^*(e_i)a(e_i)+\lambda_i^2 I_{\mathscr{H}}\rangle_0^{B_k}=$$
$$=\delta_{ij}(\lambda_i^2-\lambda_i)=\delta_{ij}\lambda_i(1-\lambda_i)=$$
$$=\delta_{ij}\langle a^*(e_i)a(e_j)\rangle_0^{B_k}\langle a(e_j)a^*(e_i)\rangle_0^{B_k}\qquad(1.1.8)$$

для всех $i, j\in\mathbf{N}$.

Из (1.1.8) и (1.1.6) следует равенство (1.1.5).



## § 1.2. Фоковское представление свободной динамики в квазисвободном состоянии

Для краткости обозначений в этом параграфе будем считать, что $\langle\ \rangle\equiv\langle\ \rangle_0^B$. Рассмотрим ГНС-представление $(\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}, \pi_{\langle\ \rangle}, \Omega_{\langle\ \rangle})$ $C^*$-алгебры $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, по квазисвободному калибровочно-инвариантному состоянию $\langle\ \rangle_0^B$.

Пусть свободная динамика $\tau_t^0$, порождаемая одночастичным гамильтонианом $h=h^*$ с плотной областью определения $\mathscr{D}_0\subseteq\mathscr{H}$, оставляет $\langle\ \rangle_0^B$ инвариантным, т. е. $B$ и $h$ коммутируют.

Рассмотрим оператор $H_{\mathrm{GNS}}$, порождаемый свободной динамикой $\tau_t^0$ в $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}\equiv\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}$.

Для гильбертова пространства $\mathscr{H}$ со скалярным произведением $(\ ,\ )_{\mathscr{H}}$ определим сопряженное пространство $\mathscr{H}^{\iota}$ со скалярным произведением $(\ ,\ )_{\mathscr{H}^{\iota}}$, где $\mathscr{H}^{\iota}$ совпадает с $\mathscr{H}$ как множество и $\iota:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ есть отображение, обладающее следующими свойствами

$$\iota^2=1, \iota(\lambda f)=\bar{\lambda}\iota(f),\quad f\in\mathscr{H}$$
$$(\iota(f),\ \iota(g))_{\mathscr{H}^{\iota}}=(g, f)_{\mathscr{H}},\quad f, g\in\mathscr{H}.$$

Для любого оператора $D:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$, положим

$$D^{\iota}:\mathscr{H}^{\iota}\to\mathscr{H}^{\iota},\quad D^{\iota}(\iota(f))\overset{\mathrm{def}}{=}\iota(Df),\quad f\in\mathscr{H}.$$

Введем обозначения $B_1=(1_{\mathscr{H}}-B)^{\frac{1}{2}}$, $B_2=B^{\frac{1}{2}}$.

**Теорема 1.3.** Пусть квазисвободное состояние $\langle\ \rangle_0^B$ инвариантно относительно свободной динамики $\tau_t^0$, порожденной $h$. Определим $\mathscr{H}_1=B_1\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_2^{\iota}=B_2^{\iota}\mathscr{H}^{\iota}$. Пусть

$$\hat{\mathscr{H}}_{m,n}=(\underbrace{\mathscr{H}_1\otimes\dots\otimes\mathscr{H}_1}_{m\ \text{раз}})_{\mathrm{as}}\otimes(\underbrace{\mathscr{H}_2^{\iota}\otimes\dots\otimes\mathscr{H}_2^{\iota}}_{n\ \text{раз}})_{\mathrm{as}},$$
$$\hat{\mathscr{H}}\equiv\bigoplus_{m,n=0}^{\infty}\hat{\mathscr{H}}_{m,n},\qquad(1.2.1)$$

где $(\otimes\dots\otimes)_{\mathrm{as}}$ означает антисимметризованное тензорное произведение гильбертовых пространств.

Тогда существует разложение $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$ на ортогональные и инвариантные подпространства оператора $H_{\mathrm{GNS}}$

$$\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}\equiv\bigoplus_{m,n=0}^{\infty}\mathscr{H}_{m,n}$$

и унитарный оператор $U\colon \mathcal{H}_{\mathrm{GNS}}\to\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{GNS}}$ такой, что:

$$U_{m,n}\stackrel{\mathrm{def}}{=}U|_{\mathcal{H}_{m,n}}\colon \mathcal{H}_{m,n}\to\hat{\mathcal{H}}_{m,n}.$$

Причем

$$U_{m,n}H_{\mathrm{GNS}}U_{m,n}^{-1}=\sum_{i=1}^{m} 1_{\mathcal H}\otimes\dots\otimes 1_{\mathcal H}\otimes \overset{i}{h}\otimes 1_{\mathcal H}\otimes\dots\otimes 1_{\mathcal H}-$$

$$-\sum_{i=m+1}^{m+n} 1_{\mathcal H}\otimes\dots\otimes 1_{\mathcal H}\otimes\overset{i}{h^{\iota}}\otimes 1_{\mathcal H}\otimes\dots\otimes 1_{\mathcal H} \qquad (1.2.2)$$

на плотной области определения $\hat{\mathcal D}_{m,n}\subseteq\hat{\mathcal H}_{m,n}$, где

$$\hat{\mathcal D}_{m,n}=(\underbrace{\mathcal D_1\otimes\dots\otimes\mathcal D_1}_{m\ \text{раз}})_{\mathrm{as}}\otimes(\underbrace{\mathcal D_2^{\iota}\otimes\dots\otimes\mathcal D_2^{\iota}}_{n\ \text{раз}})_{\mathrm{as}},$$

где $\mathcal D_1=B_1\mathcal D\subseteq\mathcal H_1$, $\mathcal D_2^{\iota}=B_2\mathcal D^{\iota}\subseteq\mathcal H_2^{\iota}$.

Доказательство теоремы 1.3. Для краткости обозначений положим $\Omega=\Omega_{\langle\,\rangle}$, $\pi\equiv\pi_{\langle\,\rangle}$.

Рассмотрим следующие подпространства $\mathcal H_{\mathrm{GNS}}$:

$$\mathcal H_{m,n}=\{\pi(:a^*(f_1)\dots a^*(f_m)a(f_{m+1})\dots a(f_{m+n}):)\Omega,\ f_i\in\mathcal H\}.$$

Утверждение 1.4. Подпространства $\mathcal H_{m,n}$ взаимно ортогональны и инвариантны относительно свободной динамики

$$\mathcal H^0=\bigoplus_{m,n=0}^{\infty}\mathcal H_{m,n}. \qquad (1.2.3)$$

Доказательство. Ортогональность подпространств $\mathcal H_{m,n}$ следует из свойств мономов Вика (теорема 1.2).

Из определения виковских скобок и из того факта, что $h$ и $B$ коммутируют, следует, что

$$\tau_t(:a^*(f_1)\dots a(f_{m+n}):=:\tau_t(a^*(f_1)\dots a(f_{m+n})):, \qquad (1.2.4)$$

что и означает инвариантность подпространств $\mathcal H_{m,n}$ относительно оператора $H_{\mathrm{GNS}}$.

Пусть пространства $\hat{\mathcal H}_{m,n}$ задаются (1.2.1). Определим операторы $U_{m,n}\colon\mathcal H_{m,n}\to\hat{\mathcal H}_{m,n}$ следующим образом:

$$U_{m,n}\pi(:a^*(f_1)\dots a^*(f_m)a(g_1)\dots a(g_n):)\Omega=$$

$$=(B_1f_1\otimes\dots\otimes B_1f_m)_{\mathrm{as}}\otimes(B_2^{\iota}g_1\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}g_n)_{\mathrm{as}}. \qquad (1.2.5)$$



Проверим изометричность оператора $U_{m,n}$. Имеем

$$(U_{m,n}\pi(:a^*(f_1)\dots a^*(f_m)a(g_n)\dots a(g_1):)\Omega,$$
$$U_{m,n}\pi(:a^*(u_1)\dots a^*(u_m)a(v_n)\dots a(v_1):)\Omega)=$$
$$=((B_1f_1\otimes\dots\otimes B_1f_m)_{\mathrm{as}}\otimes(B_2^{\iota}g_n\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}g_1)_{\mathrm{as}},$$
$$(B_1u_1\otimes\dots\otimes B_1u_m)_{\mathrm{as}}\otimes(B_2^{\iota}v_n\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}v_1)_{\mathrm{as}})=$$
$$=\det((B_1f_i,\,B_1u_j))\det((B_2v_i,\,B_2g_j))=$$
$$=\det((f_i,(1_{\mathcal H}-B)u_j))\det((v_i,\,Bg_j)).$$

Последнее произведение в силу свойства 3′ (теорема 1.2) равно

$$\langle :a^*(f_1)\dots a^*(f_m)a(g_n)\dots a(g_1)::a^*(u_1)\dots a^*(u_m)a(v_n)\dots$$
$$\dots a(v_1):\rangle=(\pi(:a^*(f_1)\dots a^*(f_m)a(g_n)\dots a(g_1):)\Omega,$$
$$\pi(:a^*(u_1)\dots a^*(u_m)a(v_n)\dots a(v_1):)\Omega),$$

откуда следует унитарность оператора $U_{m,n}$.

Докажем, что выполнено соотношение (1.2.2). Имеем

$$(U_{m,n}H_{\mathrm{GNS}}U_{m,n}^{-1}(B_1f_1\otimes\dots\otimes B_1f_m)_{\mathrm{as}}\otimes(B_2^{\iota}g_n\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}g_1)_{\mathrm{as}},$$
$$(B_1u_1\otimes\dots\otimes B_1u_m)_{\mathrm{as}}\otimes(B_2^{\iota}v_n\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}v_1)_{\mathrm{as}})=$$
$$=i\frac{d}{dt}(\pi(:a^*(e^{ith}f_1)\dots a^*(e^{ith}f_m)a(e^{ith}g_n)\dots a(e^{ith}g_1):)\Omega),$$
$$\pi(:a^*(u_1)\dots a^*(u_m)a(v_n)\dots a(v_1):)\Omega)=$$
$$=\Bigl(\sum_{k=1}^{m}(B_1f_1\otimes\dots\otimes hB_1f_k\otimes\dots\otimes B_1f_m)_{\mathrm{as}}\otimes(B_2^{\iota}g_n\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}g_1)_{\mathrm{as}}-$$
$$-\sum_{k=m+1}^{m+n}(B_2f_1\otimes\dots\otimes B_2f_m)_{\mathrm{as}}\otimes(B_2^{\iota}g_n\otimes\dots\otimes h^{\iota}B_2^{\iota}f_k\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}g_1)_{\mathrm{as}},$$
$$(B_1f_1\otimes\dots\otimes B_1f_m)_{\mathrm{as}}\otimes(B_2^{\iota}g_n\otimes\dots\otimes B_2^{\iota}g_1)_{\mathrm{as}}),$$

откуда и следует равенство (1.2.2). Подмножество $\mathcal D_{m,n}$, очевидно, плотно в $\mathcal H_{m,n}$. Теорема 1.3 полностью доказана.

Заметим, что из того факта, что самосопряженные операторы $h$ и $B$ коммутируют, следует, что их, в силу спектральной теоремы, можно реализовать как операторы умножения на одном и том же пространстве $L_2(X,d\mu)$.

## § 1.3. Фоковское представление свободной динамики в КМШ-состоянии

Рассмотрим свободный ферми-газ в равновесном температурном состоянии при температуре $\frac{}{\beta}$, которое является квазисвободным калибровочно-инвариантным состоянием с

$$B = \exp(-\beta h)(I_{\mathscr{H}} + \exp(-\beta h))^{-1}, \tag{1.3.1}$$

где $h = -\Delta + \mu$ оператор в $\mathscr{H} = L_2(\mathbf{R}^\nu, dx)$, $\mu \in \mathbf{R}$ есть химический потенциал, $-\Delta$ — оператор Лапласа.

Положим

$$\mathscr{F}_a^\iota \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_a^{(n)}(\mathscr{H}^\iota).$$

Теорема 1.5. Оператор $H_{\text{GNS}}$ для свободного ферми-газа в равновесном состоянии при температуре $\frac{1}{\beta}$, $\beta \in \mathbf{R}$ действует в пространстве

$$\mathscr{H}_{\text{GNS}} = \mathscr{F}_a \otimes \mathscr{F}_a^\iota = \bigoplus_{m,n=0}^{\infty} \mathscr{H}_{m,n}, \tag{1.3.2}$$

где $\mathscr{H}_{m,n} = L_2^{\text{as}}((\mathbf{R}^\nu)^m, dx) \otimes L_2^{\text{as}}((\mathbf{R}^\nu)^n, dx)$ есть подпространство $L_2((\mathbf{R}^\nu)^{m+n}, dx)$ функций, антисимметрических по первым $m$ и последним $n$ аргументам. $H_{\text{GNS}}$ оставляет эти подпространства инвариантными и его ограничение на $\mathscr{H}_{m,n}$ совпадает с оператором

$$-\Delta_1 - \ldots \Delta_m + \Delta_{m+1} + \ldots \Delta_{m+n} + \mu(m-n), \tag{1.3.3}$$

где $-\Delta_i$ есть оператор Лапласа, действующий на $i$-ую переменную.

Доказательство теоремы 1.5 следует из теоремы 1.3.

Следствие. Динамика $e^{itH_{\text{GNS}}}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_{\text{GNS}} = \mathscr{F}_a \otimes \mathscr{F}_a^\iota$ задается следующей формулой:

$$\Gamma(e^{ith}) \otimes \Gamma(e^{-ith^\iota}). \tag{1.3.4}$$

Замечание. Очевидно, что

$$\mathscr{H}_{\text{GNS}} = \mathscr{F}(\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2), \quad H_{\text{GNS}} = d\Gamma(h), \tag{1.3.5}$$

где

$$h = h \otimes 1 - 1 \otimes h^\iota. \tag{1.3.6}$$

Теорема 1.5 позволяет нам реализовать оператор $H_{\text{GNS}}$ на инвариантных подпространствах как оператор умножения. Заметим, что такое представление оператора не зависит от $\beta \in \mathbf{R}$. Если же $\beta = +\infty$ (основное состояние), то $B = 0$ и для него $\mathscr{H}_{\text{GNS}} = \mathscr{F}_a$ — фоковское пространство, а не тензорное произведение фоковских пространств. В основном состоянии спектр оператора $H_{\text{GNS}}$ ограничен снизу, а в температурном состоянии (КМШ-состоянии) он неограничен ни снизу, ни сверху. Поэтому изучение спектральных свойств $H_{\text{GNS}}$ в температурном состоянии наталкивается на ряд трудностей, проистекающих из этого факта.

## § 1.4. Основное состояние для свободной динамики

Следующее утверждение является необходимым и достаточным условием на оператор $B$, чтобы квазисвободное калибровочно-инвариантное состояние $\langle\ \rangle_0^B$ было основным.

Утверждение 1.6. Для того, чтобы квазисвободное калибровочно-инвариантное состояние $\langle\ \rangle_0^B$ было основным, необходимо и достаточно, чтобы

$$1_{\mathscr{H}} - B = E_{(0,+\infty)} + c\,(E_{[0,+\infty)} - E_{(0,+\infty)}), \tag{1.4.1}$$

где $0 \leqslant c \leqslant 1$, а $E_\Delta$ — спектральная мера оператора $h$.

Доказательство. Проведем для случая $\dim \mathscr{H} = n < \infty$. Можно считать, что $d\Gamma(h)$ представим в виде

$$d\Gamma(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i a_i^* a_i, \tag{1.4.2}$$

где $\{e_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ — некоторый базис в $\mathscr{H}$ из нормированных собственных векторов оператора $h$, $he_i = h_i e_i$, причем $a_i = a(e_i)$, $a_i^* = a^*(e_i)$, $h_i = (e_i, he_i)$. В силу коммутативности операторов $h$ и $B$, каждый вектор $e_i$ является собственным вектором и оператора $B$, $Be_i = b_i e_i$.

Пусть $T = \{i_1, \ldots, i_k\}$; положим

$$a_T^* = a^*(e_{i_1}) \ldots a^*(e_{i_k}), \quad a_T = a(e_{i_1}) \ldots a(e_{i_k}).$$

Заметим, что элементы

$$:a_T^* a_{T'}: \tag{1.4.3}$$

для $T, T' \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ортогональны относительно скалярного произведения $(A, A') = \langle (A')^* A \rangle_0^B$ и имеют нулевую норму, если в $T$ имеются нулевые собственные значения оператора $B$ или в $T'$ — нулевые собственные значения оператора $1_{\mathscr{H}} - B$. Элементы вида (1.4.3) с ненулевой нормой и порождают $\mathscr{H}_{\text{GNS}}$.

Так как

$$[a_i^* a_i, :a_T^* a_{T'}:] = r_i(T, T') :a_T^* a_{T'}:, \tag{1.4.4}$$

где

$$r_i(T, T') = \begin{cases} -1, & i \in T',\ i \notin T, \\ 1, & i \notin T',\ i \in T, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

собственное значение $H_{\mathrm{GNS}}$ для собственного вектора $:a^*_T a_{T'}:$ равно

$$\sum_{i\in T} h_i - \sum_{j\in T'} h_j. \qquad (1.4.5)$$

Из (1.4.5) и определения основного состояния следует утверждение 1.6. ■

Следствие из утверждения 1.6. Основное состояние свободного ферми-газа является квазисвободным калибровочно-инвариантным состоянием с

$$B=0, \qquad (1.4.5)$$

где $h=-\Delta$ — оператор в $\mathscr{H}=L_2(\mathbf{R}^\nu, dx)$, $-\Delta$ — оператор Лапласа.

Доказательство. В силу того, что $h$ в преобразовании Фурье есть оператор умножения на функцию

$$h(k)=\sum_{i=1}^{\nu} k_i^2, \quad k=(k_1,\dots,k_\nu)\in\mathbf{R}^\nu,$$

имеем $B=0$. ■

## *Глава 2*

## ФЕРМИ-СИСТЕМА С ОГРАНИЧЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

### § 2.1. Ограниченные возмущения свободной динамики. Морфизмы Меллера. Критерий Кука

В предыдущих главах мы рассматривали в качестве динамики $C^*$-алгебры $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ так называемую свободную динамику $\tau_t^0$, которая строилась с помощью одночастичного гамильтониана $h$.

Существует некоторый стандартный прием построения новой $C^*$-динамической системы $(\mathfrak{A}, \tau_t^V)$ по произвольной $C^*$-динамической системе $(\mathfrak{A}, \tau_t)$ и по $V=V^*\in\mathfrak{A}$.

Его можно пояснить следующим образом. Пусть $\tau_t^0$ — свободная динамика на $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, порожденная одночастичным гальмитонианом $h$. Если $V=V^*\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, то определим динамику $\tau_t^V$, являющуюся ограниченным возмущением свободной динамики $\tau_t^0$, следующим образом

$$\tau_t^V(A)\stackrel{\mathrm{def}}{=}e^{itH}Ae^{-itH}=$$

$$=\tau_t^0(A)+\sum_{n=1}^{\infty} i^n\int_{\Delta_n^t}[\tau_{s_1}^0(V), [\tau_{s_2}^0(V), [\dots[\tau_{s_n}^0(V), \tau_t^0(A)]\cdots]]],$$

$$ds_1\dots ds_n,\ A\in\mathfrak{A}, \qquad (2.1.1)$$



где $\Delta_n^t=\{0<s_1<s_2<\dots<s_n<t\}$ и $H=H_0+V$, $H_0=d\Gamma(h)$, причем ряд в правой части (2.1.1) при любом $t\in\mathbf{R}$ сходится по норме. Действительно, так как

$$\|\tau_t^0(A)\|=\|A\|,\ \forall A\in\mathfrak{A}(\mathscr{H}),$$

то

$$\|[\tau_{s_1}^0(V), [\tau_{s_2}^0(V), [\dots[\tau_{s_n}^0(V), \tau_t^0(A)]\cdots]]\|\leqslant(2\|V\|)^n\|A\|,$$

и, следовательно,

$$\|\tau_t^V(A)\|\leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\|V\|)^n\|A\||t|^n}{n!}=\exp(2|t|\|V\|)\|A\|.$$

Докажем, что $\tau_t^V$ — действительно динамика, т. е. является однопараметрической группой $*$-автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$. Для этого достаточно доказать только последнее равенство (2.1.1), так как по определению отображения $\tau_t^V$ (первое равенство в (2.1.1)) оно, в силу самосопряженности оператора $H=d\Gamma(h)+V$, является группой $*$-автоморфизмов в более широкой алгебре $B(\mathscr{F}_a)$ — ограниченных операторов в $\mathscr{F}_a$. Последнее же равенство утверждает, что $\tau_t^V$ оставляет $\mathfrak{A}(\mathscr{H})\subseteq B(\mathscr{F}_a)$ инвариантной.

Действительно, величина

$$B_t=i\tau_t^V\tau_{-t}^0(B)\stackrel{\mathrm{def}}{=}e^{it(H_0+V)}e^{-itH_0}Be^{itH_0}e^{-it(H_0+V)},$$

как легко проверить, дифференцируя $B_t$ по $t$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dB_t}{dt}=i\tau_t^V\tau_{-t}^0([\tau_t^0(V), B]), \qquad (2.1.2)$$

откуда

$$B_t=B_0+i\int_0^t \tau_s^V\tau_{-s}^0([\tau_s(V), B])\,ds. \qquad (2.1.3.)$$

Если в (2.1.3) мы подставим представление $\tau_s^V\tau_{-s}^0([\tau_t^0(V), B])$ в виде (2.1.3), то получим первые два члена ряда (2.1.1) для $A=\tau_{-t}^0(B)$. Повторяя эту процедуру многократно, мы получим требуемое.

Но оказывается, что с помощью ряда (2.1.1) можно определить ограниченное возмущение любой динамики на произвольной $C^*$-алгебре $\mathfrak{A}$.

Определение 2.1. Взаимодействие $V=V^*$ называется ограниченным, если $V\in\mathfrak{A}$.

Утверждение 2.1. Пусть $\mathfrak{A}$ произвольная $C^*$-алгебра и $\tau_t$ — динамика на ней, $V=V^*\in\mathfrak{A}$. Тогда $\tau_t^V$ — тоже динамика на $\mathfrak{A}$, где

$$\tau_t^V(A)=\tau_t(A)+\sum_{n=1}^{\infty} i^n\int_{\Delta_n^t}[\tau_{s_1}(V),\ [\tau_{s_2}(V),\ [\ldots[\tau_{s_n}(V),\tau_t(A)]\cdots]]]$$

$$ds_1\ldots ds_n,\qquad A\in\mathfrak{A},$$

Доказательство смотрите, например в [27].

Определим теперь морфизмы Меллера в $C^*$-алгебре $\mathfrak{A}$, которые являются аналогами волновых операторов в теории рассеяния, где с помощью их доказывается асимптотическая полнота. С помощью морфизмов Меллера мы также докажем асимптотическую полноту для ферми-газа с малым ограниченным взаимодействием.

Пусть заданы на $C^*$-алгебре $\mathfrak{A}$ две динамики $\tau_t^1$ и $\tau_t^2$.

Определение 2.2 ([83]). Морфизмами Меллера для упорядоченной пары динамик $(\tau^1,\tau^2)$ называются отображения $\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, определяемые как следующие пределы

$$\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}(A)=\lim_{t\to\pm\infty}\tau_{-t}^2\tau_t^1(A),\ A\in\mathfrak{A}, \tag{2.1.4}$$

если пределы существуют.

Утверждение 2.2. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая $C^*$-алгебра и $\tau^1$, $\tau^2$ — две динамики на алгебре $\mathfrak{A}$. Тогда:

а) если существуют $\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}$ и $\gamma_\pm^{\tau^2,\tau^1}$, то

$$\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}\equiv(\gamma_\pm^{\tau^2,\tau^1})^{-1}; \tag{2.1.5}$$

б) если существуют $\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}$, то

$$\tau_t^2\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}=\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}\tau_t^1\quad \forall t\in\mathbf{R}; \tag{2.1.6}$$

в) если существуют $\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}$ и $\gamma_\pm^{\tau^2,\tau^1}$, то

$$\tau_t^2=\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}\tau_t^1\gamma_\pm^{\tau^2,\tau^1}\quad \forall t\in\mathbf{R}. \tag{2.1.7}$$

Доказательство. а) Очевидно следует из определения морфизмов Меллера.

б) Имеем $\forall A\in\mathfrak{A}$, $\forall t\in\mathbf{R}$

$$\tau_t^2\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}(A)=\lim_{s\to\pm\infty}\tau_t^2\tau_{-s}^2\tau_s^1(A)=\lim_{s\to\pm\infty}\tau_{-(s-t)}^2\tau_{s-t}^1\tau_t^1(A)=\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}\tau_t^1(A).$$

Пункт в) следует из б) и определения морфизмов Меллера для пары динамик $\tau^1$, $\tau^2$. ■

Наибольший интерес для нас будет представлять случай, когда динамики $\tau_t^1$, $\tau_t^2$ совпадают с $\tau_t^0$ или $\tau_t^V$. Для этого специального случая введем следующее определение.

Определение 2.3 ([83]). Прямыми морфизмами Меллера называются морфизмы Меллера для пары динамик $(\tau^0,\tau^V)$, т. е. отображения $\gamma_\pm:\mathfrak{A}(\mathscr{H})\to\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, определяемые как пределы

$$\gamma_\pm(A)=\lim_{t\to\pm\infty}\tau_{-t}^V\tau^0(A),\ A\in\mathfrak{A}\ (\mathscr{H}), \tag{2.1.8}$$

если пределы существуют.

Обратными морфизмами Меллера называются морфизмы Меллера для пары динамик $(\tau^V,\tau^0)$, т. е. отображения $\hat\gamma_\pm:\mathfrak{A}(\mathscr{H})\to\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, определяемые как пределы

$$\hat\gamma_\pm(A)=\lim_{t\to\pm\infty}\tau_{-t}^0\tau_t^V(A),\quad A\in\mathfrak{A}(\mathscr{H}), \tag{2.1.9}$$

если пределы существуют.

Утверждение 2.3 ([83]) (Метод Кука). Если существует плотное по норме подмножество $\mathfrak{A}^0\subseteq\mathfrak{A}$, такое, что для всех $A\in\mathfrak{A}^0$ существует $R\geqslant 0$ такое, что

$$\|[\tau_t^1(V),A]\|\in L_1((-\infty,-R]\cup[R,\infty)), \tag{2.1.10}$$

то $\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}(A)$ существуют для любого $A\in\mathfrak{A}$.

Доказательство. Интегрируя обе части равенства (2.1.2), после замены времени $t\to -t$ от $t_1$ до $t_2$, получаем

$$\tau_{-t_2}^2\tau_{t_2}^1(B)-\tau_{-t_1}^2\tau_{t_1}^1(B)=i\int_{t_1}^{t_2}\tau_{-t}^2\tau_t^1([\tau_{-t}^1(V),B])\,dt.$$

Откуда

$$\|\tau_{-t_2}^2\tau_{t_2}^1(B)-\tau_{-t_1}^2\tau_{t_1}^1(B)\|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\|[\tau_{-t}^1(V),B]\|\,dt<\infty,$$

так как $\tau_t^2$ и $\tau_t^1$ сохраняют норму.

Следовательно для всех $B\in\mathfrak{A}^0$ $\gamma_\pm^{\tau^1,\tau^2}(B)$ существуют. Так как

$$\|\gamma_\pm(B)\|=\|B\|\quad\forall B\in\mathfrak{A}^0,$$

то, как легко видеть, пределы для $\gamma_\pm$ существуют на всей $C^*$-алгебре $\mathfrak{A}$. ■

## § 2.2. Существование прямых морфизмов Меллера при ограниченных возмущениях свободной динамики

В $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ плотной $*$-подалгеброй является множество $\mathfrak{A}^0(\mathscr{H})$ конечных линейных комбинаций мономов от операторов рождения-уничтожения от функций, преобразования Фурье которых из $C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)$.

Рассмотрим в алгебре $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ $C^*$-подалгебру $\mathfrak{A}_e(\mathscr{H})$, порождаемую полиномами от четного в сумме числа операторов рождения и уничтожения. Элементы $C^*$-подалгебры $\mathfrak{A}_e(\mathscr{H})$ мы будем в дальнейшем называть четными. В $\mathfrak{A}_e(\mathscr{H})$ плотной $*$-подалгеброй является множество $\mathfrak{A}_e^0(\mathscr{H})=\mathfrak{A}^0(\mathscr{H})\cap\mathfrak{A}_e(\mathscr{H})$.

В этом параграфе мы докажем, что на множестве четных самосопряженных элементов $C^*$-алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ существует всюду плотное подмножество, для которого существуют прямые морфизмы Меллера.

Введем следующие классы гладких ограниченных взаимодействий. Пусть $V=V^*$ и $V$ имеет вид

$$V=\sum_{l=1}^{d} V_l.$$

$$V_l=\sum_{k=1}^{M_l} c_k a^*\left(f_{l,1}^{(k)}\right)\ldots a^*\left(f_{l,m_l}^{(k)}\right) a\left(f_{l,m_l+1}^{(k)}\right)\ldots a\left(f_{l,m_l+n_l}^{(k)}\right), \quad (2.2.1)$$

где $d$, $M_l$ — конечны, $m_l+n_l>0$, $\hat{f}_{l,j}^{(k)}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ для всех $l$, $j$, $k$.

Скажем, что $V\in\mathcal{A}_e^0$, если в (2.2.1) для всех $l$ $m_l+n_l$ — четны, и, соответственно, $V\in\mathcal{A}^0$ если для всех $l$ $m_l>0$, $n_l>0$.

Очевидно, что оба класса принадлежат $\mathfrak{A}^0(\mathcal{H})$, причем $\mathcal{A}_e^0\subseteq\mathfrak{A}_e^0(\mathcal{H})$.

Замечание. Все дальнейшие результаты будут верны и для более широких классов гладких ограниченных взаимодействий $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_e$. В этом случае $V=V^*$ имеет вид

$$V=\sum_{l=1}^{d}\int \mathscr{V}_l(x_1,\ldots,x_{m_l},x_{m_l+1},\ldots,x_{m_l+n_l})\,a^*(x_1)\ldots$$

$$\ldots a^*(x_{m_l})\,a(x_{m_l+1})\ldots a(x_{m_l+n_l})\,dx_1\ldots dx_{m_l+n_l} \quad (2.2.1)'$$

$$\mathscr{V}_l\in S(\mathbf{R}^{\nu(m_l+n_l)}),\quad m_l+n_l>0.$$

Если $m_l+n_l$ — четны для всех $l$, то $V\in\mathcal{A}_e$. Если же $m_l>0$, $n_l>0$, то $V\in\mathcal{A}$.

Все теоремы этой и следующих глав мы будем в основном доказывать только для взаимодействий из $\mathcal{A}_e^0$, $\mathcal{A}^0$, и лишь кратко будем отмечать особенности доказательств для взаимодействий из $\mathcal{A}_e$, $\mathcal{A}$, соответственно.

Обозначим в (2.2.1) и в (2.2.1)$'$, соответственно,

$$m_{\max}=\max_l m_l=\max_l n_l,$$

$$m_{\min}=\min_l m_l=\min_l n_l.$$

Введем также класс $\mathbf{H}$ одночастичных гамильтонианов. Скажем, что $h\in\mathbf{H}$, если $h$ в Фурье представлении есть оператор умножения на функцию $h(k)$, $h\in C^\infty(\mathbf{R}^\nu)$, $k\in\mathbf{R}^\nu$, причем сама функция и ее первые две производные ограничены некоторым



полиномом на $\mathbf{R}^\nu$, и

$$\operatorname{dist}(\bar{S}_h, G_h)>0,$$
$$\operatorname{mes} S_h=\operatorname{mes} G_h=0,$$

где $S_h=\{k\colon\ \nabla h(k)=0\}$ — множество стационарных точек функции $h$, а $G_h$ множество тех $k\in\mathbf{R}^\nu$, где матрица ее вторых производных вырождена.

Заметим, что в класс $\mathbf{H}$ вошли одночастичные нерелятивистские гамильтонианы $-\Delta+\mu$, $\mu\in\mathbf{R}$, в $\mathbf{R}^\nu$ и на решетке $\mathbf{Z}^\nu$, а также релятивистский гамильтониан $\sqrt{-\Delta+m^2}$, $m>0$.

Будем в дальнейшем считать, что свободная динамика $\tau_t^0$ порождена одночастичным гамильтонианом $h$ из класса $\mathbf{H}$.

Теорема 2.4 (Существование прямых морфизмов Меллера). Пусть $\nu\geq 1$, тогда для $V=V^*\in\mathcal{A}_e$ существуют морфизмы

$$\gamma_\pm(A)=\lim_{t\to\pm\infty}\tau_{-t}^V\tau_t^0(A)\ \ \forall A\in\mathfrak{A}(\mathcal{H}).$$

Замечание. Существование морфизмов Меллера впервые было доказано Робинсоном в [83] и обобщено Эвансом [44].

Доказательство. Случай $\nu=1$, 2 немного отличается от случая $\nu\geq 3$.

Пусть $\nu\geq 3$. В силу критерия Кука нам достаточно указать плотное подмножество $\mathfrak{A}^0\subseteq\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, для которого выполнено условие (2.1.10).

Пусть $\mathfrak{A}^0\equiv\mathfrak{A}^0(\mathcal{H})$, то есть

$$\mathfrak{A}^0=\{a^*(f_1)\ldots a^*(f_m)\,a(g_1)\ldots a(g_n),\ \ m,\ n\geqslant 0,\ \hat{f}_i,\ \hat{g}_j\in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)\}.$$

Если мы докажем выполнение условия (2.1.10) для $A=a^\#(f)$, где $\hat{f}\in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ — произвольная функция, то, в силу того, что $\tau_{-t}^V\tau_t^0$ есть $*$-автоморфизм для любого фиксированного $t\in\mathbf{R}$, будет следовать существование $\gamma_\pm(A)$ для всех $A\in\mathfrak{A}^0$.

Пусть $A=a(f)$. Имеем

$$\|[\tau_t^0(V),A]\|=\|[\tau_{-t}^0(A),V]\|\leqslant\|[a(e^{-ith}f),V]\|=$$

$$=\left\|\sum_{l=1}^{d}\sum_{k=1}^{M_l}\sum_{j=1}^{m_l}(-1)^{j-1}(f_{l,j}^{(k)},e^{-ith}f)\,a^*(f_{l,1}^{(k)})\ldots \check{a}^*(f_{l,j}^{(k)})\ldots\right.$$

$$\left.\ldots a^*(f_{l,m_l}^{(k)})\,a(f_{l,m_l+1}^{(k)})\ldots a(f_{l,m_l+n_l}^{(k)})\right\|\leqslant\frac{C(V,f)}{(1+|t|)^{\nu/2}}, \quad (2.2.2)$$

так как в силу теоремы о стационарной фазе (см., например, [77])

$$|(f_{l,j}^{(k)},e^{-ith}f)|\leqslant\frac{C(f,f_{l,j}^{(k)})}{(1+|t|)^{\nu/2}}, \quad (2.2.3)$$

где $C\left(f, f_{i,j}^{(k)}\right)$ — некоторая константа, и

$$C(V, f)=\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{M_i}\sum_{j=1}^{m_i}|c_k|\,C\left(f, f_{i,j}^{(k)}\right)\prod_{l\neq j}^{m_i+n_i}\|f_{i,l}^{(k)}\|<\infty. \qquad (2.2.4)$$

Так в выражении (2.2.2) справа стоит функция из $L_1(\mathrm{R})$, то в силу критерия Кука $\gamma_\pm(a(f))$ существует. Случай $a=a^*(f)$ разбирается аналогично.

Для $\nu=1, 2$ плотное подмножество $\mathfrak{A}^0$ в $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ выберем следующим образом:

$$\mathfrak{A}^0=\{a^*(f_1)\dots a^*(f_m)\,a(g_1)\dots a(g_n),\ m, n\geqslant 0,$$
$$\hat f_i,\ \hat g_j\in C_0^\infty(\mathrm{R}^\nu\setminus\{S_h\})\}.$$

Для функции $\hat f\in C_0^\infty(\mathrm{R}^\nu\setminus\{S_h\})$ с помощью $q$-кратного интегрирования по частям при $|t|\geqslant 1$ получаем оценку

$$\left|\left(f, e^{ith}f_{i,j}^{(k)}\right)\right|\leqslant \frac{C_q\left(f, f_{i,j}^{(k)}\right)}{|t|^q}, \qquad (2.2.5)$$

где константа $C_q\left(f, f_{i,j}^{(k)}\right)>0$ зависит еще от $q$. Если взять $q\geqslant 2$, то мы получим в (2.2.4) функцию из $L_1(\mathrm{R}\setminus[-1, 1])$.

Теорема 2.4 доказана для взаимодействий из $\mathscr{A}_e^0$. Чтобы доказать теорему 2.4 для $V\in\mathscr{A}_e$, заметим, что нам достаточно проверить лишь оценку (2.2.4).

Для этого нам достаточно $V\in\mathscr{A}_e$ представить в следующем виде

$$V=\sum_{i=1}^{d}\sum_{N_1}\dots\sum_{N_{m_i+n_i}} C_i(N_1, \dots, N_{m_i+n_i})\,a^*(e_{N_1})\dots$$
$$\dots a^*(e_{N_{m_i}})\,a^*(e_{N_{m_i+1}})\dots a^*(e_{N_{m_i+n_i}}), \qquad (2.2.6)$$

где $\|e_N\|=1$, $e_N\in C_0^\infty(\mathrm{R}^\nu)$, $N_j$ пробегают некоторое счетное множество $\mathscr{N}$, причем

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{N_1}\dots\sum_{N_{m_i+n_i}}|C_i(N_1, \dots, N_{m_i+n_i})|<\infty \qquad (2.2.7)$$

и для любых $N$, $N'\in\mathscr{N}$ и $f\in C_0^\infty(\mathrm{R}^\nu)$ имеют место оценки

$$|(e_N, e^{-ith}f)|\leqslant\frac{C(f)}{(1+|t|)^\delta}; \qquad (2.2.8)$$

$$|(e_N, e^{-ith}e_{N'})|\leqslant\frac{C}{(1+|t|)^\delta}, \qquad (2.2.9)$$

где $C(f)$ — некоторая константа, зависящая только от $f$, а $C$, $\delta$ — абсолютные константы, причем $\delta>1$.



Легко видеть, что из (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8) и (2.2.9) следует оценка (2.2.4).

Докажем, что $V\in\mathscr{A}_e$ представимо в виде (2.2.6).

Пусть сначала преобразования Фурье ядер $\mathscr{V}_i$

$$\hat{\mathscr{V}}_i\in C_0^\infty\left(R^{\nu(m_i+n_i)}\right),$$

тогда можно выбрать $\mathscr{N}$ так, что

$$\operatorname{supp}\hat{\mathscr{V}}_i\subseteq[-\mathscr{N}, \mathscr{N}]^{\nu(m_i+n_i)} \text{ для любого } i.$$

Пусть

$$e_n(k)=\frac{\varkappa(k)\exp(2\pi ink/A)}{d_n},\ k\in\mathrm{R}, \qquad (2.2.10)$$

где функция $\varkappa(k)$ из $C_0^\infty(R)$, $0\leqslant\varkappa(k)\leqslant 1$, $\varkappa(k)=1$ для $|k|\leqslant B$ и $\varkappa(k)=0$ для всех $|k|\geqslant B+1$. Константы $d_n$ выбраны так, чтобы было $\|e_n\|=1$.

Выберем $A$ и $B$ так, что $\mathscr{N}<B<2\mathscr{N}<A$,

$$\hat{\mathscr{V}}_i=\sum_{\bar N} C_i(\bar N)\prod_{j=1}^{D_i} e_{n_j}(k_j), \qquad (2.2.11)$$

где $\bar N=(n_1, \dots, n_{D_i})$, $D_i=\nu(m_i+n_i)$. Очевидно, что для любого $q$ существует константа $C(q)$ такая, что

$$|C_N|\leqslant\frac{C(q)}{|\bar N|^q},\ |\bar N|=\sum_i|n_i|. \qquad (2.2.12)$$

Очевидно, что при $q>D_i$ имеет место оценка

$$\sum_{\bar N}|C_{\bar N}|<\infty.$$

Для функций

$$e_N=\prod_{j=1}^{\nu}e_{n_j}(k_j),\ e_{N'}=\prod_{j=1}^{\nu}e_{n'_j}(k_j)$$

равномерно по $N$, $N'\in Z^\nu$, $t$, $t'\in\mathrm{R}$ выполнены оценки:

$$\text{а) } |(e_N, e^{-ith}e_{N'})|\leqslant\frac{C}{(|t|+1)^{\nu/2-\delta'}}; \qquad (2.2.13)$$

$$\text{б) } |(e_N, e^{-ith}f)|\leqslant\frac{C(f)}{(1+|t|)^{\nu/2-\delta'}}, \qquad (2.2.14)$$

где константу $\delta'>0$ можно сделать сколь угодно малой, $C=C(\nu, \delta')$, $C(f)=C(f, \nu, \delta')$. Выбрав $\delta=\nu/2-\delta'>1$ при $\nu\geqslant 3$, $\delta'<\frac{1}{2}$ в (2.2.13) и (2.2.14) мы получим неравенства (2.2.8) и (2.2.9).

Если же $\hat{\mathscr{V}}_l \in S(R^{\nu(m_l+n_l)})$, то воспользуемся разложением единицы

$$\sum_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}}(k) = 1, \tag{2.2.15}$$

где diam supp $\alpha_{\bar{k}} \leqslant$ const равномерно по $\bar{N}$.
Затем представляем ядро $\hat{\mathscr{V}}_l$ в виде суммы $\hat{\mathscr{V}}_l \alpha_{\bar{k}}$ финитных ядер и используя аналогичное (2.2.6) разложение для $\hat{\mathscr{V}}_l \alpha_{\bar{k}}$, с соответствующим образом сдвинутыми функциями $e_{\bar{k}}$, повторяем доказательство.

Теорема 2.4 полностью доказана. ■

## § 2.3. Обратимость морфизмов Меллера при малых ограниченных возмущениях свободной динамики

Для доказательства обратимости прямых морфизмов Меллера достаточно доказать существование обратных морфизмов Меллера. Как и в случае волновых операторов, доказать существование обратных морфизмов Меллера оказывается значительно труднее, чем существование прямых морфизмов Меллера.

Теорема 2.5 ([26]). (Обратимость прямых морфизмов Меллера). Пусть $\nu \geqslant 3$, тогда для $V = V^* \in \mathscr{A}_e$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, существуют и обратимы прямые морфизмы Меллера

$$\gamma_\pm(A) = \lim_{t\to\pm\infty} \tau_{-t}^{\varepsilon V} \tau_t^0(A), \ \forall A \in \mathfrak{A},$$

причем

$$\tau_t^{\varepsilon V} = \gamma_\pm \circ \tau_t^0 \circ \gamma_\pm^{-1} \ \forall t \in \mathbf{R}. \tag{2.3.1}$$

Следствие. Пусть $\nu \geqslant 3$, тогда для $V = V^* \in \mathscr{A}_e$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $C^*$-динамические системы $(\mathfrak{A}(\mathscr{H}), \tau_t^0)$ и $(\mathfrak{A}(\mathscr{H}), \tau_t^{\varepsilon V})$ эквивалентны.

Прежде чем доказывать теорему 2.5, сделаем два замечания.

Замечание 1. В отличие от прямых морфизмов Меллера, обратные могут не существовать при $\nu = 1$, 2 ([66]) при сколь угодно малом значении константы связи $\varepsilon$. Соответствующий пример можно построить следующим образом.

Пример. Пусть $V = -a^*(f_0) a(f_0)$, тогда $\tau_t^{\varepsilon V}$ — тоже свободная динамика, порожденная оператором $h_\varepsilon = h + \varepsilon P_0$, где $P_0$ — проектор на вектор $-f_0$. При $A = a^\#(f)$ обратные морфизмы Меллера выглядят так

$$\hat{\gamma}_\pm(A) = \lim_{t\to\pm\infty} \tau_{-t}^0 \tau_t^{\varepsilon V}(a^\#(f)) = \lim_{t\to\pm\infty} a^\#(e^{-ith} e^{ith_\varepsilon} f) =$$
$$= a^\#(\hat{W}_\pm f), \tag{2.3.2}$$

где $\hat{W}_\pm$ — есть обычные обратные волновые операторы. Хорошо известно, что если $h = -\Delta$, а функция $f_0$ такова, что $\hat{f}_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ и

$$\int_{\mathbf{R}^\nu} \hat{f}_0(k)\, dk < 0, \tag{2.3.3}$$

то у оператора $h_\varepsilon$ есть собственное значение $\lambda_\varepsilon < 0$ при сколь угодно малом $\varepsilon$ с собственным вектором $e_\varepsilon$. Поэтому $\hat{W}_\pm(e_\varepsilon)$ не существует, а следовательно не существует и $\hat{\gamma}_\pm(a^\#(e_\varepsilon))$.

Замечание 2. В теореме 2.3. при $\nu \geqslant 3$ требуется малость параметра связи, и это по существу, так как при больших значениях константы связи $\varepsilon$ могут возникать связанные состояния. Предыдущий пример при $\nu \geqslant 3$ и больших $|\varepsilon|$, как легко видеть, демонстрирует указанное явление.

Доказательство. По критерию Кука и в силу замечания при доказательстве теоремы 2.4 для существования $\hat{\gamma}_+$ нам достаточно доказать, что

$$\| [\tau_t^{\varepsilon V}(V), a^\#(f)] \| \in L_1(\mathbf{R}_+),$$

то есть, что

$$\int_0^\infty \| [\tau_t^{\varepsilon V}(V), a^\#(f)] \| < \infty$$

для всех $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu)$.

Имеем

$$\int_0^\infty \| [\tau_t^{\varepsilon V}(V), a^\#(f)] \| \, dt \leqslant \int_0^\infty \| [\tau_t^0(V), a^\#(f)] \| \, dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty |\varepsilon|^n \int_0^\infty \int_{\Delta_n^t} \| [a^\#(f), [\tau_{s_1}^0(V), [\ldots [\tau_{s_n}^0(V), \tau_t^0(V)] \ldots ]]] \| \, ds_1 \ldots$$

$$\ldots ds_n dt.$$

Лемма 2.6. В условиях теоремы 2.5 существует константа $C = C(V, \nu) > 0$, независящая от $f$ и константа $C(f, V) >$, такие, что имеют место оценки:

$$\text{а)}\quad \int_0^\infty \| [\tau_s^0(V),\, a^{\#}(f)] \| \, ds \leqslant C C(f, V) \tag{2.3.5}$$

$$\text{б)}\quad \int_0^\infty \int_{\Delta_n^s} \| [a^{\#}(f), [\tau_{s_1}^0(V), [\tau_{s_2}^0(V), [\ldots[\tau_{s_n}^0(V), \tau_s^0(V)]\ldots]]] \| \, ds_1 \ldots$$

$$\ldots ds_n ds \leqslant C^{n+1} C(f, V). \tag{2.3.6}$$

Замечание. Очевидно, что из леммы 2.6 при $\varepsilon_0 = \frac{1}{C}$ следует теорема 2.5.

Доказательство леммы 2.6. Рассмотрим $n$-ый член ряда. Мы сначала оценим подинтегральное выражение (2.3.6) некоторой суммой

$$\| [a^{\#}(f), [\tau_{s_1}^0(V), [\ldots[\tau_{s_n}^0(V), \tau_s^0(V)]\ldots]] \| \leqslant \sum_G W_G(s_1, \ldots, s_n, s),$$

где $\sum\limits_G$ берется по всем допустимым диаграммам с весом $W_G$. Допустимые диаграммы $G$ и их вес мы опишем ниже. А затем уже оценим

$$\int_0^\infty \int_{\Delta_n^s} \sum_G W_G(s_1, \ldots, s_n, s) \, ds_1 \ldots ds_n ds \leqslant C^{n+1} C(f, V)$$

с помощью новой техники оценки суммы диаграмм.

Сопоставим каждому $s_i$, $i=0, 1, \ldots, n+1$, где $s_{n+1} \equiv s$, $s_0 \equiv 0$, вершину с номером $n+1-i$.

Имеем

$$\tau_{s_v}^0(V) = \sum_{l=1}^{d} \sum_{k=1}^{M_l} c_k a^*(e^{is_v h} f_{l,l_1}^{(k_v)}) \ldots a^*\left(e^{is_v h} f_{l,m_l}^{(k_v)}\right) a\left(e^{is_v h} f_{l,m_l+1}^{(k_v)}\right) \cdots$$

$$\ldots a\left(e^{is_v h} f_{l,m_l+n_l}^{(k_v)}\right). \tag{2.3.7}$$

Рассмотрим выражение под интегралом. Это есть $(n+1)$-кратный коммутант. Мы будем его раскрывать последовательно, за $(n+1)$ шагов.

На первом шаге в самом внутреннем коммутанте $[\tau_{s_n}^0(V), \tau_s^0(V)]$ будем с помощью канонических антикоммутационных соотношений «протаскивать» вправо операторы рождения и уничтожения, относящиеся к $\tau_{s_n}^0(V)$, т. е. вида

$$a^{\#}(e^{is_n h} f_{l,j}^{(k_1)})$$



«сквозь» оператор $\tau_s(V)$. Иначе говоря, мы используем формулы

$$a(f) a(g) = -a(g) a(f),$$

$$a(f) a^*(g) = -a^*(g) a(f) + (f, g) I,$$

или аналогичные — для $a^*(f)$. При этом «протаскивании» будут возникать множители вида

$$(e^{is_n h} f_{l,j}^{(k_1)},\, e^{ish} f_{l',j'}^{(k_0)}) \tag{2.3.8}$$

или сопряженные к ним. Причем такое «протаскивание» мы делаем поочередно: сначала $\tau_{s_n}^0(v)$ «протаскиваем» через самый левый оператор рождения-уничтожения в $\tau_s^0(V)$. Если возникло спаривание, дальнейшее «протаскивание» $\tau_{s_n}^0(V)$ через $\tau_s^0(V)$ прекращаем и говорим, что возникло «ребро» с вкладом (2.3.8). Если же спаривание не произошло, то $\tau_{s_n}^0(V)$ «протаскиваем» через следующий оператор рождения-уничтожения в $\tau_s^0(V)$ и т. д. Заметим, что в силу четности $V$ члены, в которых не возникло спариваний, сократятся, так как войдут в выражение для коммутанта

$$W_1 = [\tau_{s_n}^0(V), \tau_s^0(V)]$$

с разными знаками. Таким образом, на первом шаге возникло ровно одно ребро.

Далее, таким же образом представим следующий коммутант $[\tau_{s_{n-1}}^0(V), W_1]$, т. е. с помощью аналогичной процедуры «протаскивания» операторов рождения-уничтожения вида

$$a^{\#}(e^{is_{n-1} h} f_{l,j}^{(k_2)})$$

«сквозь» $W_1$. На втором шаге возникнут множители вида

$$(e^{is_{n-1} h} f_{l,j}^{(k_2)},\, e_{f_{l',j'}}^{ish(k_0)}) \text{ или } \left(e^{is_{n-1} h} f_{l,j}^{(k_{n-1})},\, e^{is_n h} f_{l',j'}^{(k_n)}\right)$$

и тоже только одно ребро.

И так далее до $(n+1)$-го шага, когда мы будем «протаскивать» оператор $a^{\#}(f)$.

На $v$-ом шаге возникнет ребро, причем ему будет соответствовать множитель вида

$$r_v = \left(e^{is_v h} f_{l,j}^{(k_v)},\, e^{is_{v'} h} f_{l',j'}^{(k_{v'})}\right), \tag{2.3.9}$$

где $v' = v'(v) > v$.

Очевидно, что для всех $1 \leqslant i, j, i', j' \leqslant d$, $0 \leqslant v \leqslant n+1$ имеет место оценка

$$|r_v| \leqslant \frac{C}{(|s_v - s_{v'(v)}| + 1)^\delta}, \tag{2.3.10}$$

где $\delta = \nu/2 - \delta' > 0$, $\delta'$ — сколь угодно малая константа, $C > 0$ не зависит от $i$, $j$, $i'$, $j'$, $s_v$, $s_{v'}$, $k_v$, $k_{v'}$.

Диаграмма — это граф с вершинами $n+1$, $n$, ..., 1, 0. Ребро графа между вершинами $v$ и $v'$ возникает при нашей процедуре «протаскивания» вместе с множителем

$$\frac{C}{(|s_v-s_{v'(v)}|+1)^{\delta}}. \tag{2.3.10}$$

Все возникшие в результате диаграммы назовем допустимыми.

Из каждой вершины $v$ выходит ровно одно ребро вправо, которое спаривается с вершиной $v'(v)<v$, причем в каждой вершине не более $2m_{\max}$ выходящих влево ребер. По построению каждая допустимая диаграмма связана. Обозначим множество всех допустимых диаграмм через $\mathrm{G}$.

Каждая диаграмма входит в выражение (3.3.6) со своим

Вес диаграммы. Пусть множество ребер $\{(v, v'(v))\}$ соответствует допустимой диаграмме $G$, тогда ее вес определяется формулой

$$W_G=C^n\prod_v \frac{1}{(|s_v-s_{v'(v)}|+1)^{\delta}}.$$

Из оценки (2.3.10), после замены переменных в каждом слагаемом, следует, что $n$-ый член ряда оценивается как

$$\int\limits_{\Delta^{\infty}_{n+1}} C^n\left[\sum_{\{v'(v)\}\in\mathrm{G}^{n+1}}\prod_v \frac{1}{(|s_v-s_{v'(v)}|+1)^{\delta}}\right]ds_1\ldots ds_{n+1}, \tag{2.3.11}$$

где каждому $v$ соответствует единственное $v'(v)>v$, и сумма $\Sigma$ берется по всем наборам $\{v'(v),\ v=1, \ldots, n+1\}$ таким, что среди чисел $\{v'(1), \ldots, v'(n+1)\}$ не более чем $2m_{\max}$ совпадающих с $l$, где $l$ принимает значения 0, 1, ..., $n$.

Для оценки суммарного вклада всех диаграмм воспользуемся следующей леммой:

Лемма 2.7. Пусть $g\in L_1(\mathbf{R})$, $g(t)\geqslant 0$ для всех $t\in\mathbf{R}$. Тогда для всех $n$ имеет место следующая оценка

$$\int\limits_{\Delta^{\infty}_{n}}\left[\sum_{\{v'(v)\}\in\mathrm{G}^n}\prod_v g(t_v-t_{v'(v)})\right]ds_1\ldots ds_n\leqslant C^n\left[\int\limits_{\mathbf{R}} g(t)\,dt\right]^n, \tag{2.3.12}$$

где сумма $\Sigma$ берется по всем наборам допустимых диаграммам, а константа $C>0$ не зависит от $n$.

Очевидно, что из оценок (2.3.11) и (2.3.12) следует теорема 2.5.

Доказательство леммы. Доказательство оценки (2.3.12) аналогично доказательству оценки (4.1) работы [26], где она доказана для случая $m_{\min}=m_{\max}=2$,

$$g(t)=\frac{1}{(1+|t|)^{\nu/2}}.$$



Рассмотрим римановы суммы обеих частей неравенства (2.3.12) и докажем, что это неравенство верно при любом $d>0$ для римановых сумм, где $d$ есть шаг аппроксимации

$$d^n\left[\sum_{0<t_1<\ldots<t_n}\ \sum_{\{v'(v)\}}\prod_v g(t_v-t_{v'(v)})\right]\leqslant$$

$$\leqslant d^nC^n\left[\sum_{s\neq 0} g(s)\right]^n\leqslant d^nC^n\left[\sum_{s_1\neq 0}\ldots\sum_{s_{n+1}\neq 0}\prod_{i=1}^{n} g(s_i)\right]. \tag{2.3.13}$$

Суммы в неравенстве (2.3.13) берутся по всем $t_i$, $s_i$, $s_i\in\mathbf{Z}_d$, где $\mathbf{Z}_d$ одномерная решетка с шагом $d>0$.

Покажем с помощью некоторого алгоритма, что для любого набора $(s_0, \ldots, s_n)$, $s_0=0$ из суммы в правой части неравенства (2.3.13) можно отнести не более $C^n$ возможных диаграмм из левой части с вкладом

$$g(s_1)\ldots g(s_n).$$

Алгоритм будет состоять не более чем из $2m_{\max}\,n$ шагов. Мы будем нумеровать шаги

$$(1,1), \ldots, (1, 2m_{\max}), \ldots, (n, 1), \ldots, (n, 2m_{\max}).$$

На шаге (1, 1) мы возьмем $s_1$ и построим ребро из 1-ой вершины в $s_1$. Мы построили вершины $1, s_1$ и ребро между ними. Далее действуем по индукции. Пусть линии длины $s_1, \ldots, s_q$ построены и следующий шаг $(i, j)$. Далее действуем по правилам.

Правила алгоритма будут следующие.

1. На каждом шаге мы строим либо одно ребро, либо не строим ни одного ребра, и соответственно, одну или ни одной вершины.

2. Если на шаге $(i, j)$ мы решаем не строить ребро, то на следующих шагах $(i, j')$, $j'>j$ мы также не строим ребер.

3. На шаге $(i, 1)$ мы выбираем одну из построенных уже вершин $v_i$ и на следующих шагах $(i, 1), \ldots, (i, 2m_{\max})$ мы можем строить ребра только из вершины $v$. При этом мы будем называть вершину $v_1$ «использованной» на шаге $(i, 1)$.

4. Выбор вершины $v_i$ определяется однозначно с помощью следующего правила: $v_i$ первая (с наименьшим номером) из уже построенных вершин, но не «использованных» на предыдущих шагах, исключая нулевую вершину; если все построенные вершины являются «использованными», то выбирается непостроенная вершина с наименьшим номером, исключая нулевую вершину.

5. Алгоритм останавливается или на шаге $(n, 2m_{\max})$, или, если нет неиспользованных вершин, все $n$ ребер построены, т. е. все $s_1, \ldots, s_n$ исчерпаны. Очевидно, что каждая диаграмма $G$ будет построена алгоритмом и каждый набор $s_1, \ldots, s_n$ будет использован не более чем $C^n$ раз, где $C$ зависит от $m_{\max}$,

так как на шагах $(i, 1), \ldots, (i, 2m_{\max})$ при каждом $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ алгоритм имеет следующие разветвления:

а) ребро ведется либо вправо, либо влево;

б) в $v_i$-ой вершине на этих шагах строится не более $2m_{\max}$ ребер;

в) Если ребро ведется вправо, то мы можем либо попасть в нулевую вершину, либо нет.

При $d \to 0$ из неравенства (2.3.13) следует неравенство (2.3.12).

Лемма 2.7 доказана и, следовательно, доказана теорема 2.5. для взаимодействий из $\mathscr{A}_e^0$. ■

Для обобщения доказательства теоремы 2.6 на класс $\mathscr{A}_e$ легко видеть, что достаточно $V \in \mathscr{A}_e$ представить в виде (2.2.6) так, чтобы были выполнены оценки (2.2.7), (2.2.8), (2.2.9), что и было показано в параграфе 2.2. Теорема 2.5 полностью доказана. ■

## § 2.4. Унитарная эквивалентность гамильтонианов свободного и ограниченно возмущенного ферми-газа в основном состоянии

Рассмотрим свободный и ограниченно возмущенный ферми-газ в основном состоянии, т. е. при $\beta = +\infty$. Основное состояние $\langle\ \rangle$ задается следующим образом

$$\langle A \rangle = (A\Omega, \Omega). \tag{2.4.1}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.8. Пусть $\mathscr{H} = L_2(\mathbf{R}^\nu, dx)$, $H_0 = d\Gamma(h)$, $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$, где $h \in \mathbf{H}$, $V \in \mathscr{A}$. Тогда при $\nu \geqslant 3$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ существуют и обратимы прямые волновые операторы

$$W_\pm = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{-it(H_0 + \varepsilon V)} e^{itH_0}, \tag{2.4.2}$$

причем

$$H_0 + \varepsilon V = W_\pm H_0 W_\pm^{-1}. \tag{2.4.3}$$

Замечание. Для взаимодействия $V \in \mathscr{A}_e$ утверждение теоремы 2.8 следует из теоремы 2.5. Действительно, в силу того, что в этом случае нет поляризации вакуума, т. е. $V\Omega = 0$, имеем

$$e^{it(H_0 + \varepsilon V)}\Omega = e^{itH_0}\Omega \equiv 0 \tag{2.4.4}$$

для всех $t \in \mathbf{R}$.

Поэтому, для

$$A = a^*(f_1) \ldots a^*(f_n), \quad \hat{f}_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu) \tag{2.4.5}$$



предел

$$\lim_{t \to \pm\infty} e^{-it(H_0 + \varepsilon V)} e^{itH_0} A\Omega =$$

$$= \lim_{t \to \pm\infty} e^{-it(H_0 + \varepsilon V)} e^{itH_0} A e^{-itH_0} e^{it(H_0 + \varepsilon V)} \Omega = \hat{\gamma}(A)\Omega \tag{2.4.6}$$

существует в силу теоремы 2.5 при достаточно малых $\varepsilon$. А так как линейные комбинации векторов вида (2.4.5) плотны в $\mathscr{F}_a$, то существуют обратные волновые операторы. То же, очевидно, верно и для прямых волновых операторов.

Доказательство теоремы 2.8. В случае $V \in \mathscr{A}$ тоже нет поляризации вакуума, но мы не можем воспользоваться теоремой 2.5, так как в $V$ могут содержаться нечетные мономы. Но мы воспользуемся идеей доказательства теоремы 2.5.

Пусть

$$\Phi_N = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N, 0, \ldots), \quad \Phi_N \in \mathscr{F}_{a,0}, \quad \hat{\varphi}_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{\nu i}).$$

Обратный волновой оператор $\hat{W}_\pm \Phi_N$ можно представить в виде ряда теории возмущений

$$\hat{W}_\pm(t)\Phi_N = \Phi_N + \sum_{i=1}^{\infty} (-i\varepsilon)^n \int_{\Delta_n^{0,t}} dt_1 \ldots dt_n V(t_n) \ldots V(t_1)\Phi_N \tag{2.4.6}$$

$$\hat{W}_\pm \Phi_N = \lim_{t \to \pm\infty} \hat{W}_\pm(t)\Phi_N,$$

где $\Delta_n^{0,t} = \{(t_1, \ldots, t_n),\ 0 < t_1 < \ldots < t_n < t\}$ и

$$V(t) = e^{itH_0} V e^{-itH_0}.$$

Выражение под интегралом является произведением виковских мономов и может быть представлено в виде суммы

$$V(t_1) \ldots V(t_n) = \sum_G V_G(t_1, \ldots, t_n) \tag{2.4.7}$$

виковских мономов, индексируемых диаграммами Фридрихса $G$ (см. § 3.1). Но таких диаграмм слишком много, и мы воспользуемся другим разложением. В этом новом разложении мы фактически проделаем частичное пересуммирование фридрихсовских диаграмм.

Сопоставим $V(t_v)$ вершину $v$ некоторого графа и выделим в нем крайний справа оператор уничтожения вида

$$a(f^{(v)}(t_v)),$$

где

$$f^{(v)}(t_v) = e^{it_v h} f^{(v)},$$

который, пользуясь антикоммутационными соотношениями,

$$a(f^{(v)}(t_v))\,a^*(f^{(v')}(t_{v'}))=$$
$$=-a^*(f^{(v')}(t_{v'}))\,a(f^{(v)}(t_{v'}))+(f^{(v')}(t_{v'}),\ f^{(v)}(t_v)) \qquad (2.4.8)$$

будем переносить вправо к вакуумному вектору $\Omega$.

При каждой такой перестановке возникает один из двух членов в правой части (2.4.6). Если возник первый член, мы продолжаем перенос, если возник второй, т. е. спаривание, то скажем, что возникла линия $(v, v')$ диаграммы. Если в результате перестановок спаривание так и не возникло, то такой член даст нулевой вклад, так как $a(f)=0$ для всех $f\in\mathscr{H}$. Таким образом у нас возникнет ровно $n$ линий $(v, v'(v))$, $v=1, \ldots, n$. При этом, если спаривание возникло с вектором $\Phi_N$, то скажем, что $v'(v)=0$.

Очевидно, что

$$|(f^{(v')}(t_{v'}),\ f^{(v)}(t_v))|\leqslant C\frac{1}{(1+|t_v-t_{v'}|)^{\nu/2}}. \qquad (2.4.9)$$

Рассмотрим возникший граф $G$ с вершинами $n, n-1, \ldots, 1, 0$ и ребрами (линиями) $(v, v'(v))$, который по построению является связным. Обозначим класс всех таких графов через $\mathrm{G}_N^n$.

Заметим, что единственное отличие графов из $\mathrm{G}_N^n$ от соответствующих графов из $\mathrm{G}^n$ заключается в том, что в нулевую вершину может входить не одно, а много ребер, но не более чем $N$.

Нетрудно видеть, что в этом случае имеет место оценка

$$\|V(t_n)\ldots V(t_1)\Phi_N\|\leqslant$$
$$\leqslant C(\Phi_N)\,C^n\Bigg(\sum_{\{v'(v)\}\in\mathrm{G}_N^n}\prod_v\frac{1}{(|t_v-t_{v'(v)}|+1)^{\delta}}\Bigg),\quad \delta>1. \qquad (2.4.10)$$

Лемма 2.7′. Пусть $g\in L_1(\mathbf{R})$, $g(t)\geqslant 0$ для всех $t\in\mathbf{R}$. Тогда для всех $n$ имеет место следующая оценка

$$\int_{\Delta_n^\infty}\Bigg(\sum_{\{v'(v)\}\in\mathrm{G}_N^n}\prod_v g(t_v-t_{v'(v)})\Bigg)ds_1\ldots$$
$$\ldots ds_n\leqslant N!\,C^n\Bigg(\int_{\mathbf{R}}g(t)\,dt\Bigg)^n, \qquad (2.4.11)$$

где сумма $\Sigma$ берется по всем наборам допустимых диаграмм, а константа $C$ не зависит от $n$.

Доказательство леммы 2.7′ полностью аналогично доказательству леммы 2.7. ■

Из леммы 2.7′ следует теорема 2.8. ■



## § 2.5. Унитарная эквивалентность гамильтонианов свободного и ограниченно возмущенного ферми-газа в КМШ-состоянии

Рассмотрим свободный и ограниченно возмущенный ферми-газ в температурном состоянии, т. е. при $\beta\in\mathbf{R}$, $\beta\neq 0$.

Пусть $\mathscr{H}=L_2(\mathbf{R}^\nu, dx)$ и

$$h=-\Delta+\mu, \qquad (2.5.1)$$

где $\mu\in\mathbf{R}$ — химический потенциал, $-\Delta$ — оператор Лапласа в $\mathscr{H}$.

Определим свободный ферми-газ и ферми-газ с ограниченным взаимодействием $V=V^*\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ при температуре $\frac{1}{\beta}$.

Определение 2.4 (см. [28]). Свободный ферми-газ при температуре $\frac{1}{\beta}$ — это $(\mathfrak{A}(\mathscr{H}), \tau_t^0, \langle\ \rangle_0, \beta)$, где свободная динамика $\tau_t^0$ порождена одночастичным гамильтонианом $h$ вида (2.5.1), а $\langle\ \rangle_0$ — единственное $(\tau_t^0, \beta)$-КМШ-состояние.

Определение 2.5 (см. [28]). Ферми-газ с ограниченным взаимодействием $V=V^*\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ при температуре $\frac{1}{\beta}$ — это $(\mathfrak{A}(\mathscr{H}), \tau_t^V, \langle\ \rangle_V, \beta)$, где $\tau_t^V$ — ограниченно возмущенная динамика, а $\langle\ \rangle_V$ — единственное $(\tau_t^V, \beta)$-КМШ-состояние, которое определяется через $\langle\ \rangle_0$ следующим образом:

$$\langle A\rangle_V=\frac{\langle F^*AF\rangle_0}{\langle F^*F\rangle_0},\quad A\in\mathfrak{A}(\mathscr{H}), \qquad (2.5.2)$$

где $F\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ ([28]) и

$$F\overset{\mathrm{def}}{=}e^{-\beta/2(H_0+V)}e^{\beta/2H_0}=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\beta/2}\int_0^{s_1}\ldots\int_0^{s_{n-1}}\tau_{is_1}(V)\tau_{is_2}(V)\ldots\tau_{is_n}(V)\,ds_1\ldots ds_n, \qquad (2.5.3)$$

где ряд (2.5.3) сходится по норме

Определение 2.6. $C^*$-динамическая система $(\mathfrak{A}, \tau)$ называется $L_1(\mathfrak{A}^0)$ асимптотически абелевой, если

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|[A, \tau_t(B)]\|\,dt<\infty \qquad (2.5.5)$$

для любых $A$, $B$ из плотной по норме в $\mathfrak{A}^*$-подалгебры $\mathfrak{A}^0$.

Между КМШ-состояниями и морфизмами Меллера существует следующая простая связь.

Утверждение 2.9 ([28]). Пусть $(\mathfrak{A}, \tau)$ является $L_1(\mathfrak{A}^0)$ асимптотически абелевой, тогда для любого $V=V^*\in\mathfrak{A}^0$ существуют прямые морфизмы Меллера

$$\gamma_\pm(A)=\lim_{t\to\pm\infty}\tau^V_{-t}\tau^0_t(A),\quad A\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$$

и если $\langle\ \rangle_V$ есть $(\tau^V_t,\beta)$-КМШ-состояние при $\beta\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, то и состояние $\langle\gamma_\pm(\circ)\rangle$ есть $(\tau_t,\beta)$-КМШ-состояние.

Заметим, что $(\mathfrak{A}_e(\mathscr{H}),\tau^0_t)$ является $L_1(\mathfrak{A}^0_e(\mathscr{H}))$ асимптотически абелевой, где $\tau^0_t$ порождена одночастичным гамильтонианом $h$.

Теорема 2.10. Пусть $\nu\geqslant 3$, $\beta\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ и $V=V^*\in\mathscr{A}_e$. Тогда существует $\varepsilon_0=\varepsilon_0(V,\nu)>0$ такое, что при $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ операторы $H^0_{\mathrm{GNS}}$ и $H^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}$ унитарно эквивалентны.

Доказательство. В силу теоремы 2.5 существует $\varepsilon_0=\varepsilon_0(V,\nu)>0$ такое, что при $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ существуют и обратимы морфизмы Меллера $\gamma_\pm$. Из утверждения 2.9 следует, что состояние $\langle\gamma_\pm(\circ)\rangle_{\varepsilon V}$ является $(\tau_t,\beta)$-КМШ-состоянием на $\mathfrak{A}_e(\mathscr{H})$, но такое состояние единственно (см. [28]). А в силу калибровочной инвариантности $\langle\ \rangle_0$ и $\langle\ \rangle_{\varepsilon V}$ имеет место равенство

$$\langle\gamma_\pm(A)\rangle_{\varepsilon V}\equiv\langle A\rangle_0 \tag{2.5.6}$$

для всех $A\in\mathfrak{U}(\mathscr{H})$.

Определим оператор $U_\pm:\mathscr{H}^0_{\mathrm{GNS}}\to\mathscr{H}^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}$ следующим образом:

$$U_\pm(\pi_0(A)\Omega_0)=\pi_{\varepsilon V}(\gamma_\pm(A))\Omega_{\varepsilon V}, \tag{2.5.7}$$

где мы для краткости положили $\pi_0\equiv\pi_{\langle\ \rangle_0}$, $\pi_{\varepsilon V}\equiv\pi_{\langle\ \rangle_{\varepsilon V}}$, $\Omega_0\equiv\Omega_{\langle\ \rangle_0}$, $\Omega_{\varepsilon V}\equiv\Omega_{\langle\ \rangle_{\varepsilon V}}$.

Операторы $U_\pm$ унитарны. Действительно

$$(U_\pm\pi_0(A)\Omega_0,\ U_\pm\pi_0(B)\Omega_0)=(\pi_{\varepsilon V}(\gamma_\pm(A))\Omega_{\varepsilon V},\ \pi_{\varepsilon V}(\gamma_\pm(B))\Omega_{\varepsilon V})=$$
$$=\langle(\gamma_\pm(B))^*\gamma_\pm(A)\rangle_{\varepsilon V}=\langle\gamma_\pm(B^*A)\rangle_{\varepsilon V}=\langle B^*A\rangle_0=$$
$$=(\pi_0(A)\Omega_0,\pi_0(B)\Omega_0).$$

Очевидно, что $\operatorname{Ran}U_\pm=\mathscr{H}^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}$ и обратные операторы $U^{-1}_\pm$ задаются следующим образом:

$$U^{-1}_\pm(\pi_{\varepsilon V}(A)\Omega_{\varepsilon V})=\pi_0(\gamma^{-1}_\pm(A))\Omega_0) \tag{2.5.8}$$

для всех $A\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$.

По определению операторов $H^0_{\mathrm{GNS}}$ и $H^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}$

$$e^{itH^0_{\mathrm{GNS}}}\pi_0(A)\Omega_0=\pi_0(\tau^0_t(A))\Omega_0,$$

$$e^{itH^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}}\pi_{\varepsilon V}(A)\Omega_{\varepsilon V}=\pi_{\varepsilon V}(\tau^{\varepsilon V}_t(A))\Omega_{\varepsilon V}.$$



Откуда в силу того, что $\tau^{\varepsilon V}_t(A)=\gamma_\pm\tau^0_t\gamma^{-1}_\pm$, имеем

$$U^{-1}_\pm e^{itH^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}}U_\pm\pi_0(A)\Omega_0=U^{-1}_\pm e^{itH^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}}\pi_{\varepsilon V}(\gamma_\pm(A))\Omega_{\varepsilon V}=$$
$$=U^{-1}_\pm\pi_{\varepsilon V}(\tau^{\varepsilon V}_t(\gamma_\pm(A)))\Omega_{\varepsilon V}=\pi_0(\gamma^{-1}_\pm\tau^{\varepsilon V}_t\gamma_\pm(A))\Omega_0=$$
$$=\pi_0(\tau^0_t(A))\Omega_0=e^{itH^0_{\mathrm{GNS}}}\pi_0(A)\Omega_0.$$

Таким образом

$$e^{itH^0_{\mathrm{GNS}}}\equiv U^{-1}_\pm e^{itH^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}}U_\pm,\quad\forall t\in\mathbf{R}. \tag{2.5.9}$$

И следовательно

$$U^{-1}_\pm H^{\varepsilon V}_{\mathrm{GNS}}U_\pm=H^0_{\mathrm{GNS}}.\ \blacksquare \tag{2.5.10}$$

## Глава 3

### «LINKED CLUSTER THEOREM». АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА ДЛЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ, ПОЛЯРИЗУЮЩИХ ВАКУУМ

#### § 3.0. Введение

Мы теперь откажемся от ограничения на взаимодействие $V\Omega=0$. Мы докажем, что, вообще говоря, спектр гамильтониана возмущенной динамики $H_0+\varepsilon V$ сдвигается, точнее, для малых $\varepsilon$ существует действительное число $\lambda_\varepsilon$, что $H_0+\varepsilon V$ унитарно эквивалентен оператору $H_0+\lambda_\varepsilon E$. На формальном уровне этот факт хорошо известен, например, из знаменитой «linked cluster theorem», являющейся основным инструментом в вычислениях по теории возмущений в квантовой теории многих частиц. Основной результат этой главы состоит в доказательстве сходимости рядов в этой теореме. Это позволит нам строго доказать также все формальные следствия из нее, имеющиеся в классических книгах Фридрихса [47] и Хеппа [54].

Мы будем рассматривать следующие две ситуации:

1) $\mathscr{F}_a=\mathscr{F}_{\mathrm{as}}(L_2(\mathbf{R}^\nu))$ — антисимметрическое фоковское пространство над $L_2(\mathbf{R}^\nu)$, $\nu\geq 3$, $H=H_0+\varepsilon V$, где $H_0=d\Gamma(h)$, или в $k$-представлении

$$H_0=\int_{\mathbf{R}^\nu}h(k)a^*(k)a(k)\,dk, \tag{3.0.1}$$

где $V\in\mathscr{A}_e$ и

$$h(k)=\sqrt{m^2+k^2},\quad m>0\ \text{(релятивистский случай)},$$

или

$$h(k)=Kk^2\text{ — (безмассовый случай)}.$$

Так как $V=V^*\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$, то $H=H_0+\varepsilon V$ является самосопряженным оператором в $\mathscr{F}_a$, с той же плотной областью определения, что и $H_0$.

2) $\mathscr{F}_a=\mathscr{F}_{as}(l_2(\mathbf{Z}^\nu))$, $H_0=d\Gamma(h)$, $h=-\Delta+\mu$ — решетчатый лапласиан плюс константа $\mu$. Выпишем оператор $H_0$ в $k$-представлении. После преобразования Фурье $l_2(\mathbf{Z}^\nu)$ перейдет в $L_2(\mathbf{T}^\nu)$, $\mathbf{T}^\nu=[0, 2\pi]^\nu$ — $\nu$-мерный тор, $\mathscr{F}_a=\mathscr{F}_{as}(L_2(\mathbf{T}^\nu))$ и

$$H_0=\int_{\mathbf{T}^\nu} h(k)\,a^*(k)\,a(k)\,dk, \tag{3.0.2}$$

где $V=V^*\in\mathscr{A}_e$ и

$$h(k)=\sum_{i=1}^{\nu} 2(1-\cos(k_i))+\mu. \tag{3.0.3}$$

В этом случае мы будем предполагать, что $\mu\geq 0$. Таким образом, спектр оператора $H_0$ неотрицателен. Причем в этом случае мы ограничимся взаимодействием $V$ вида

$$V=\sum_{i=1}^{d} a^*(f_{i,1})\ldots a^*(f_{i,m_i})\,a(f_{i,m_i+1})\ldots a(f_{i,m_i+l_i}), \tag{3.0.4}$$

где $m_i+l_i$ — четно, $f_{i,j}\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$ для всех $i$, $j$.

Все результаты, доказываемые ниже, верны в обоих случаях, однако для удобства изложения мы будем проводить его для случая 2).

В дальнейшем (§ 3.6) мы снимем требование неотрицательности одночастичного гамильтониана ($\mu\geq 0$).

## § 3.1. Диаграммы Фридрихса. Алгебра виковских экспонент. Операции $\Gamma_\pm$ и $\Gamma$

Рассмотрим вакуумное (основное) состояние на $C^*$-алгебре КАС $\mathfrak{U}(L_2(\mathbf{R}^\nu))$

$$\langle A\rangle=(A\Omega, \Omega), \tag{3.1.1}$$

которое является квазисвободным калибровочно-инвариантным состоянием с $B\equiv 0$.

Скобки Вика относительно этого состояния (см. главу 1) означают просто, что операторы уничтожения надо переставить вправо от операторов рождения с учетом правила знаков. Иначе говоря, на мономах вида

$$w=a^*(f_1)\ldots a^*(f_m)\,a(f_{m+1})\ldots a(f_{m+p})$$

виковские скобки действуют тождественно.

Произведение нескольких мономов Вика может быть разложено в сумму мономов Вика. Соответствующее правило легко формулируется на языке диаграмм.



С мономом

$$W_i=\int w_i(k_{i1}, \ldots, k_{im_i}, k_{i,m_i+1}, \ldots, k_{i,m_i+l_i})\,a^*(k_{i1})\ldots a^*(k_{i,m_i})\,a(k_{i,m_i+1})\ldots a(k_{i,m_i+l_i})\,dk_{i1}\ldots dk_{i,m_i+l_i} \tag{3.1.2}$$

связывается диаграмма $G_i$ с $m_i(l_i)$ занумерованными левыми (правыми) отростками, причем $j$-му левому отростку соответствует $a^*(k_{ij})$, а $j$-му правому отростку соответствует $a(k_{i,m_i+j})$.

Тогда

$$W_1\ldots W_n=\sum_G W_G, \tag{3.1.3}$$

где сумма берется по всевозможным спариваниям, дающим диаграмму $G$, в несвязном объединении диаграмм $G_i$ и

$$W_G=\int\prod_i w_i\prod_{ij} dk_{ij}\prod{}'\delta(k_{ij}-k_{i'j'}){:}\prod{}''a^\#(k_{ij}){:}(-1)^{\pi(G)}, \tag{3.1.4}$$

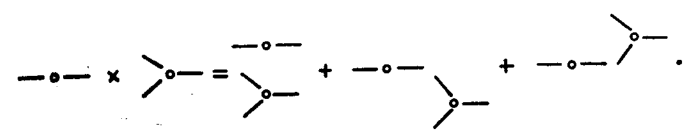
где произведение $\Pi'$ берется по всем линиям (парам связанных отростков $i, j$ и $i', j'$) диаграммы $G$, а $\Pi''$ — по всем неспаренным отросткам. Формулы (3.1.3) и (3.1.4) легко доказать, если пользуясь антикоммутационными соотношениями, переносить каждый оператор уничтожения вправо от операторов рождения. При этом $\pi(G)$ будет общим числом таких транспозиций.

Следующий пример поясняет обозначения

$$W_1=a^*(f_1)\,a(f_2),\quad W_2=a^*(f_3)\,a^*(f_4)\,a(f_5),$$

$$W_1W_2={:}W_1W_2{:}+W_1\!-\!\circ\!-W_2=a^*(f_1)\,a^*(f_3)\,a^*(f_4)\,a(f_2)\,a(f_5)+$$
$$+(f_3, f_2)\,a^*(f_1)\,a^*(f_4)\,a(f_5)-(f_4, f_2)\,a^*(f_1)\,a^*(f_3)\,a(f_5)$$

Или



Заметим, что ${:}W_1W_2{:}$ — тот член в разложении $W_1W_2$, в котором при переносах операторов уничтожения не возникло ни одного спаривания.

Введем следующие обозначения (см. [54]):

$(W_1\ldots W_n)_C$ — сумма по всем связным диаграммам $G$ в (3.1.3);

$(\ldots)_{00}$ — сумма по всем связным диаграммам без внешних линий в (3.1.3);

$(\ldots)_L=(\ldots)_C-(\ldots)_{00}$ — сумма по всем связным диаграммам по крайней мере с одной внешней линией в (3.1.3);

$(\ldots)_{\mathrm{CR}}$ — сумма по всем диаграммам из класса $(\ldots)_{\mathrm{L}}$ с внешними линиями, относящимися только к операторам рождения.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые алгебраические свойства рядов из мономов Вика.

Для формального степенного ряда

$$A=\sum_{m,l=0}^{\infty} x^m y^l A_{ml},$$

где $A_{ml}$ — мономы Вика, положим по определению

$$:A:=\sum_{m,l=0}^{\infty} x^m y^l :A_{ml}:$$

Утверждение 3.1 (см. [54]). Пусть

$$A=\sum_{\substack{m,l=0\\ m+l>0}}^{\infty} x^m y^l A_{ml},\quad B=\sum_{\substack{m,l=0\\ m+l>0}}^{\infty} x^m y^l B_{ml},$$

— формальные степенные ряды по четным мономам Вика, где $m(l)$ есть степень по операторам рождения (уничтожения).

Тогда верны тождества

$$A :\exp B:=:(A: \exp \mathbf{B}:)_C \exp B:; \qquad (3.1.5)$$

$$:\exp B: A=:(:\exp B:A)_C\exp B:, \qquad (3.1.6)$$

где $(\quad)_C$, как и раньше, выделяет связные диаграммы.

Доказательство сводится к простым комбинаторным рассуждениям при одних и тех же степенях $x^m y^l$ (см. [47], [54]).

Определение 3.1 ([47], [54]). Левое связное $W_1 \angle W_2 \ldots \ldots W_n$: (правое связное $: W_2 \ldots W_n \angle : W_1$) произведение есть сумма всех виковских мономов из $W_1 : W_2 \ldots W_n :$ (соответственно, из $: W_2 \ldots W_n : W_1$), графы которых связны, где каждому $W_i$ соответствует своя вершина.

Замечание. Обычно тождества (3.1.5), (3.1.6) записывают в виде (см. [47], [54])

$$A : \exp B : = : (A \angle : \exp B:) \exp B:$$

$$:\exp B: A=:(:\exp B: \angle A)\exp B:$$

Определение 3.2 (см. [54]). Определим операции Фридрихса $\Gamma_{\pm\varkappa}$ на мономах

$$U_{mp}=\int u_{mp}(k_1,\ldots,k_{m+p})a^*(k_1)\ldots a^*(k_m)a(k_{m+1})\ldots$$
$$\ldots a(k_{m+p})dk_1\ldots dk_{m+p}$$



при $\varkappa>0$ как

$$\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp})\overset{\mathrm{def}}{=} i\int_{\pm\infty}^{0} e^{-\varkappa|t|}\tau_t^0(U_{mp})\,dt=$$

$$=\int u_{mp}(k_1,\ldots,k_{m+p})(E_C-E_A\pm i\varkappa)^{-1}a^*(k_1)\ldots a^*(k_m) \qquad (3.1.7)$$
$$a(k_{m+1})\ldots a(k_{m+p})dk_1\ldots dk_{m+p}$$

и $\Gamma_{\pm}(U_{mp})$ как сильный предел $\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp})$ при $\varkappa\to 0$, где

$$E_C=\sum_{j=1}^{m} h(k_j),\quad E_A=\sum_{j=m+1}^{m+p} h(k_j),$$

а операцию Глимма $\Gamma$ как

$$\Gamma(U_{mp})=\int u_{mp}(k_1,\ldots,k_{m+p})E_C^{-1}a_1^*(k_1)\ldots a_m^*(k_m)\times$$
$$\times a(k_{m+1})\ldots a(k_{m+p})dk_1\ldots dk_{m+p}. \qquad (3.1.8)$$

Определим также операцию

$$[H_0^{(\pm\varkappa)},U_{mp}]\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{d}{dt}[e^{-\varkappa|t|}\tau_t^0(U_{mp})]|_{t=\pm 0}. \qquad (3.1.9)$$

Она сводится к замене ядра $U_{mp}$ на ядро

$$u_{mp}(k_1,\ldots,k_{m+p})(E_A-E_C\pm i\varkappa).$$

Утверждение 3.2. При $\varkappa>0$ имеют место следующие формулы

$$[H_0^{(\pm\varkappa)},\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp})]=U_{mp}, \qquad (3.1.10)$$

$$[H_0^{(\pm\varkappa)}, :\exp(\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp})):]=:U_{mp}\exp\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp}): \qquad (3.1.11)$$

Доказательство. Первое равенство следует из определения операции $\Gamma_{\pm\varkappa}$. Из первого равенства утверждения 3.2 имеем

$$[H_0^{(\pm\varkappa)}, :\exp(\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp}))]=$$
$$=[H_0^{(\pm\varkappa)}-\overset{\circ}{\underset{1}{}}-\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp})-\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp})-\overset{\circ}{\underset{1}{}}-H_0^{(\pm\varkappa)}]\exp(\Gamma_{\pm\varkappa}(U_{mp})):$$

где $-\overset{\circ}{\underset{1}{}}-$ указывает на то, что берутся мономы Вика с одним спариванием. Но выражение в квадратных скобках равно (3.1.11).

## § 3.2. Адиабатические волновые операторы. «Linked cluster theorem»

Введем дополнительно следующие обозначения (см. [54]).

Определим для $-\infty<t,\ s<\infty,\ \varkappa>0$, оператор эволюции без адиабатического урезания

$$U(t,s)=e^{itH_0}e^{-i(t-s)H}e^{isH_0} \qquad (3.2.1$$

и с адиабатическим урезанием

$$U^{(\varkappa)}(t, s)=1-\int_s^t dr V^{(\varkappa)}(r) U^{(\varkappa)}(r, s), \tag{3.2.2}$$

где $V^{(\varkappa)}(r) \overset{\mathrm{def}}{=} e^{-i\varkappa|r|} e^{irH_0} V e^{-irH_0}$.

Хорошо известно, что для конечных $t$ и $s$ и $\varkappa \geqslant 0$ (см. [54])

$$U^{(\varkappa)}(t,s)=1+\sum_{l=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n \int_{\Delta_n^{s,t}} dt_1 \ldots dt_n V^{(\varkappa)}(t_1)\ldots V^{(\varkappa)}(t_n), \tag{3.2.3}$$

где $\Delta_n^{s,t}=\{(t_1, \ldots, t_n),\ s<t_1<\ldots<t_n<t\}$ и ряд (3.2.3) сходится по норме.

Выражение под интегралом является произведением виковских мономов и может быть представлено в виде суммы

$$V^{(\varkappa)}(t_1)\ldots V^{(\varkappa)}(t_n)=\sum_G W_G(t_1, \ldots, t_n) \tag{3.2.4}$$

виковских мономов, индексируемых диаграммами Фридрихса $G$ (см. [54]).

Если воспользоваться равенством при $\varkappa>0$

$$(\Gamma_{\pm\varkappa}(U))(t)=i\int_{\pm\infty}^{t} U^{(\varkappa)}(s)ds,$$

то после интегрирования по $\Delta_n^{0,\pm\infty}$ в каждом члене ряда (3.2.3) имеем

$$U^{(\varkappa)}(0, \pm\infty)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n \Gamma_{\pm n\varkappa}(V\ldots$$
$$\ldots\Gamma_{\pm 2\varkappa}(V\Gamma_{\pm\varkappa}(V))\ldots), \tag{3.2.5}$$

а после интегрирования по $\Delta_n^{\pm\infty,0}$

$$U^{(\varkappa)}(\pm\infty, 0)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n \Gamma_{\pm n\varkappa}(\ldots\Gamma_{\pm 2\varkappa}(\Gamma_{\pm\varkappa}(V)V)\ldots V). \tag{3.2.6}$$

Теорема 3.3. Существует $\varepsilon_0>0$ такое, что для $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ и любого из двух случаев:

i) $-\infty<t, s<\infty$ и $\varkappa\geq 0$;

ii) $-\infty\leqslant t, s\leqslant\infty$ и $\varkappa>0$;



ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n \int_{\Delta_n^{t,s}} dt_1 \ldots dt_n (V^{(\varkappa)}(t_1)\ldots V^{(\varkappa)}(t_n))_C \overset{\mathrm{def}}{=} U^{(\varkappa)}(t, s)_C \tag{3.2.7}$$

сходится по норме, и $\varepsilon_0$ не зависит от $t$, $s$, $\varkappa$. То же верно, если вместо $(\ldots)_C$ поставить $(\ldots)_{00}$, $(\ldots)_L$, $(\ldots)_{CR}$.

Из этой теоремы неформально можно вывести следующую теорему.

Теорема 3.4 («linked sluster theorem») (см. теорему 2.7 в [54]). В условиях теоремы 3.3 имеют место равенства

$$U^{(\varkappa)}(t, s)=:\exp(U^{(\varkappa)}(t, s)_C):; \tag{3.2.8}$$

$$\frac{U^{(\varkappa)}(t, s)}{(\Omega, U^{(\varkappa)}(t, s)\Omega)}=:\exp(U^{(\varkappa)}(t, s)_L):, \tag{3.2.9}$$

где ряды в правых частях (3.2.8) и (3.2.9) сходятся по норме.

Пусть

$$T_{t,s}^{(\varkappa)} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{U^{(\varkappa)}(t, s)}{(\Omega, U^{(\varkappa)}(t, s)\Omega)}. \tag{3.2.10}$$

Теорема 3.5. Если $\nu\geq 3$, то существует $\varepsilon_0>0$ такое, что для $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ существуют следующие пределы

$$\underset{\varkappa\to 0}{\mathrm{s}-\lim}\, T_{0,\pm\infty}^{(\varkappa)} \overset{\mathrm{def}}{=} T^{\pm} \quad \text{(прямые адиабатические волновые операторы)} \tag{3.2.11}$$

$$\underset{\varkappa\to 0}{\mathrm{s}-\lim}\, T_{\pm\infty,0}^{(\varkappa)} \overset{\mathrm{def}}{=} \hat{T}^{\pm} \quad \text{(обратные адиабатические волновые операторы)} \tag{3.2.12}$$

Теорема 3.6. В условиях теоремы 3.5 константа перенормировки

$$Z^{-1}=\left\|\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-\varepsilon)^n(\Gamma(V\ldots\Gamma(V))_{CR}\Omega\right)\right\|^2, \tag{3.2.13}$$

где $n$ — число операций Фридрихса (см. [54]), конечна. Оператор $\sqrt{Z}T^{\pm}$ унитарен и осуществляет унитарную эквивалентность

$$HT^{\pm}=T^{\pm}(H_0+\lambda_\varepsilon), \tag{3.2.14}$$

где $\lambda_\varepsilon$ задается сходящимся рядом Голдстоуна (см. [54])

$$\lambda_\varepsilon=(\Omega,\ \varepsilon V \mathbin{\underline{/}} T^{\pm}\Omega), \tag{3.2.15}$$

где $V \mathbin{\underline{/}}\ T^{\pm}$ — левое связное произведение.

Формальные аналоги теорем 3.3—3.6 имеются в работе [54], где тождество (3.2.10) доказывается формально, т. е. без доказательства сходимости соответствующих рядов. Неформальное доказательство этих теорем впервые было дано в [68].

Перед тем, как доказывать теоремы 3.3—3.6, мы приведем формальное доказательство теоремы 3.6 (см. [54]).

Доказательство (формальное) теоремы 3.6.

В силу (3.2.5) и (3.2.9)

$$T^{(\varkappa)}(0, \pm\infty) = :\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n \Gamma_{\pm n\varkappa}(V \ldots \Gamma_{\pm 2\varkappa}(V\Gamma_{\pm\varkappa}(V))\ldots)_L\right):,$$

поэтому при $\varkappa \to 0$ получим

$$T^{\pm} = :\exp(\Gamma_{\pm}(Q_{\pm})):, \tag{3.2.16}$$

где

$$Q_{\pm} = \sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n (V\Gamma_{\pm}(V \ldots \Gamma_{\pm}(V\Gamma_{\pm}(V))\ldots))_L.$$

Используя утверждения 3.1 и 3.2, имеем

$$H_0 T = T^{\pm} H_0 + :Q_{\pm} T^{\pm}: \tag{3.2.17}$$

и

$$\varepsilon V T^{\pm} = \varepsilon:(V \angle T^{\pm})\quad T^{\pm}: = \varepsilon:(VT^{\pm})_C T^{\pm}: =$$
$$= \varepsilon:(VT^{\pm})_L T^{\pm}: + \varepsilon:(VT^{\pm})_{00} T^{\pm}: =$$
$$= :\sum_{n=1}^{\infty}(-\varepsilon)^n (V\Gamma_{\pm}(V \ldots \Gamma_{\pm}(V\Gamma_{\pm}(V))\ldots))_L T^{\pm}: +$$
$$+ (\Omega, \varepsilon(VT^{\pm})_{00}\Omega) T^{\pm}, \tag{3.2.18}$$

где последнее равенство следует из соотношения (см. [47])

$$Q_{\pm} = \varepsilon V \angle :\exp(-\Gamma_{\pm}(Q_{\pm})): - \varepsilon(\Omega, V \angle :\exp(-\Gamma_{\pm}(Q_{\pm})):\Omega).$$

Из (3.2.17) и (3.2.18) получаем теорему 3.6 с

$$\varepsilon_{\lambda} = (\Omega, \lambda(VT^{\pm})_{00}\Omega) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-\varepsilon)^n (\Omega, (V\Gamma(V \ldots \Gamma(V\Gamma(V))\ldots))_{00}\Omega), \tag{3.2.19}$$

где $n$ — число $\Gamma$, и мы заменили $\Gamma_{\pm}$ на $\Gamma$, так как в (3.2.19) лишь при отсутствии операторов уничтожения возможен ненулевой вклад в силу того, что $a(f)\Omega = 0$ для всех $f \in \mathscr{H}$. ■

Замечание. Все эти утверждения можно доказать и не переходя к операциям $\Gamma_{\pm}$, если использовать тождество

$$\frac{d}{dt} U^{(\varkappa)}(t, s)_C = -i\varepsilon(V^{(\varkappa)}(t):\exp U^{(\varkappa)}(t, s)_C:),$$
$$U^{(\varkappa)}(t, t)_C = 1. \tag{3.2.20}$$



Определение 3.3. Определим $S$-матрицу (или матрицу рассеяния)

$$S \overset{\text{def}}{=} Z(T^{+})^{*} T^{-} =$$
$$= :\exp\left(2\pi i \sum_{n=1}^{\infty}(-\varepsilon)^n \Delta(V\Gamma_{-}(V \ldots \Gamma_{-}(V\Gamma_{-}(V))\ldots)\right)_L, \tag{3.2.21}$$

где операция $\Delta$, примененная к моному Вика $U_{mp}$, означает замену его ядра $u_{mp}$ на ядро

$$u_{mp}(k_1, \ldots, k_{m+p})\,\delta(E_C - E_A).$$

Из теоремы 3.6 следует, что $S$-матрица унитарна.

## § 3.3. Доказательство теоремы 3.3. Разбиение на кластеры и разложение по модам

Рассмотрим сначала случай $\varkappa = 0$, $-\infty < s$, $t < \infty$, $\nu \geq 3$.

Далее мы будем заниматься оценкой выражения

$$\int_{\Delta_n^{s,t}} (V(t_1) \ldots V(t_n))_C dt_1 \ldots dt_n \tag{3.3.1}$$

и покажем, что оно ограничено по модулю величиной $|t-s|C^n$, где $C$ константа, не зависящая от $s$, $t$, $n$. Из этой оценки мы выведем теорему 3.3.

Основная трудность в доказательстве этой оценки заключается в большом количестве диаграмм. Необходимые сокращения диаграмм мы будем производить во «временных кластерах или секторах».

Разбиения. Индексы $1, \ldots, n$ являются вершинами диаграмм. Любое подмножество $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$ множества $(1, \ldots, n)$ определяет разбиение $(1, \ldots, n)$ на интервалы

$$I_1 = [1, \alpha_1) = \{i:\ 1 \leqslant i < \alpha_1\}, \ldots$$
$$I_k = [\alpha_{k-1}, \alpha_k),\ I_{k+1} = [\alpha_k, n].$$

Сектора. Любое разбиение $\alpha$ определяет подмножество $\Delta_{\alpha}$ области $\Delta_n^{s,t}$, которое мы назовем сектором. Оно единственным образом определяется следующими условиями:

а) если $i$, $j$ принадлежат одному интервалу $I_l$ разбиения $\alpha$, то существует целое $M$ такое, что

$$t_i,\ t_j \in [M, M+1) \overset{\text{def}}{=} \hat{I}_l;$$

б) если $i$, $j$ принадлежат разбиениям $I_m$ и $I_l$ соответственно, то $t_i$ и $t_j$ принадлежат различным $[M, M+1) = \hat{I}_m$, $[L, L+1) = \hat{I}_l$, т. е. $M \neq L$.

Ясно, что $\bigcup_{\alpha}\Delta_\alpha=\Delta_n^{s,t}$. В дальнейшем мы будем называть $I_l$ $l$-ой группой сектора $\Delta_\alpha$.

**Подсектора.** Подсектор $(M_1,\ldots,M_{k+1})$ сектора $\Delta_\alpha$ определяется разбиением $\alpha$ и целыми числами $M_1<M_2<\ldots<M_{k+1}$. Это множество всех $(t_1,\ldots,t_n)$, $s<t_1<\ldots<t_n<t$ таких, что, если $i\in I_l$, то $t_i\in[M_l,\ M_l+1)$.

**Моды.** Выберем в пространстве $L_2(\mathrm{T}^\nu)$ ортонормированный базис $\{e_N\}_{N\in Z^\nu}$, где $e_N=C\exp[i(N,k)]$, $k\in\mathrm{T}^\nu$. Элементы этого базиса мы и назовем модами.

Пусть

$$S\overset{\mathrm{def}}{=}\bigcup_{i=1}^{d}\{f_{i,1},\ldots,f_{i,m_i+l_i}\}.$$

Зафиксируем некоторый подсектор $\Delta_\alpha(M_1,\ldots,M_{k+1})$. Если $t\in[M_l,\ M_l+1]$, то $t=M_l+\delta t$, $0\leqslant\delta t\leqslant1$. Поэтому

$$V(t)=\sum_{l=1}^{d}a^*(e^{iM_lh}e^{i\delta th}f_{l,1})\ldots a(e^{iM_lh}e^{i\delta th}f_{l,m_l+l_l}).\qquad(3.3.2)$$

**Разложение по модам.** Разложим векторы вида $e^{i\delta th}f$, $f\in S$ по базису $\{e_N\}$.

$$e^{i\delta th}f=\sum_{N\in Z^\nu}C_{N,f}(\delta t)e_N.\qquad(3.3.3)$$

Отметим, что для любого $\gamma>0$ существует константа $C(\gamma)$, такая, что равномерно по $f\in S$, $|\delta t|\leqslant1$ коэффициенты $C_{N,f}(\delta t)$ ряда (3.3.3) удовлетворяют неравенству

$$|C_{N,f}(\delta t)|\leqslant\frac{C(\gamma)}{|N|^\gamma},\quad |N|=\sum_{i=1}^{\nu}|N^i|.\qquad(3.3.4)$$

Это неравенство доказывается интегрированием по частям. Мы выберем $\gamma>\nu+1$, так, чтобы было выполнено неравенство

$$\sum_{N\in Z^\nu}|C_{N,f}(\delta t)|<C<\infty,\qquad(3.3.5)$$

где константа $C$ не зависит от $f\in S$ и $|\delta t|\leqslant1$.

Для некоторого разбиения $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, обозначим через $\mathfrak{B}_\alpha$ следующее подмножество $[0,\ 1)^\nu$

$$\mathfrak{B}_\alpha=\{(\delta t_1,\ldots,\delta t_n)\colon 0\leqslant\delta t_1<\ldots<\delta t_{\alpha_1-1},$$
$$0\leqslant\delta t_{\alpha_1}<\ldots<\delta t_{\alpha_2-1},\ldots,0<\delta t_{\alpha_k}<\ldots<\delta t_n<1\}.$$

Используя введенные обозначения, мы можем записать выражение (3.3.1) в виде

$$\sum_\alpha\sum_{M_1,\ldots,M_{k+1}}\int_{\mathfrak{B}_\alpha}\prod_{i=1}^{n}d(\delta t_i)\sum_{\{N_{i,f_j}\}}\sum_G W_G,\qquad(3.3.6)$$

где, если рассматривать выражение (3.3.6) слева направо, мы имеем

1) суммы по всем разбиениям;
2) суммы по всем подсекторам;
3) интегрирование внутри всех подсекторов;
4) суммы по всем модам;
5) суммы по всем допустимым диаграммам.

**Диаграммы.** Диаграмма — это граф с вершинами $1, 2,\ldots,n$. Каждой вершине инцидентны $m_i$ правых отростков (им соответствуют операторы уничтожения) и $l_i$ левых отростков (им соответствуют операторы рождения). Выбор мод соответствует тому, что каждому отростку ставится в соответствие элемент $e_N$ базиса $\{e_N\}_{N\in Z^\nu}$. Каждый отросток занумерован индексом $(v,p)$, где $v$ — номер вершины, $p$ — номер отростка в вершине $v$. Допустимой диаграммой является связный граф, образующийся спариванием некоторых из отростков $(v_1,p_1)$ и $(v_2,p_2)$, $v_1<v_2$, если первый отросток правый, а второй отросток левый. Спаренные отростки являются ребрами допустимой диаграммы. Мы будем называть их внутренними (int). Неспаренные отростки назовем внешними ребрами (out).

Каждая диаграмма входит в выражение (3.3.6) со своим весом.

**Вес диаграммы.** Пусть зафиксировано разбиение $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ подсектор $(M_1,\ldots,M_{k+1})$, вектор $(\delta t_1,\ldots,\delta t_n)$, моды $N_{vp}$. Введем функцию $M(v)$, $v=1,\ldots,n$, $M(v)=M_i$, если $v\in\delta_i$, $i=1,\ldots,k+1$. Вес диаграммы $G$ это следующее выражение

$$W_G=(-1)^{\pi(G)}\prod_{\mathrm{int}}(e^{ih(M(v)-M(v'))}e_{N_{vp}},e_{N_{v'q}})\times$$
$$\times C_{N_{vp}}(\delta t_v)C_{N_{v'q}}(\delta t_{v'})\prod_{\mathrm{ext}}a^{\#}(e^{iM(v)h}e_{N_{vp}}),\qquad(3.3.7)$$

где $a^{\#}=a^*$, если отросток $vp$ — правый и $a^{\#}=a$, если отросток $vp$ — левый.

**Замечание.** Рассмотрим диаграмму $G$, у которой внутреннее ребро $(vp,v'q)$ лежит целиком в интервале $I_l$ для некоторого $l$. Выражение (3.3.7) показывает, что если $N_{vp}\neq N_{v'q}$, то $W_G=0$, поскольку $M(v)=M(v')$ и $(e_{N_{vp}},e_{N_{v'q}})=0$. Этот факт позволит нам сократить большое число диаграмм.

Назовем подмножество вершин $I_l$ диаграммы $G$, $l$-ой группой вершин. Пусть $A_l(B_l)$ — множество ребер диаграммы (внешних и внутренних), выходящих из $l$-ой группы вершин вправо (влево) и не спаривающих две вершины этой группы.

Зафиксируем сектор $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, $\Delta_\alpha(M_1,\ldots,M_{k+1})$, моды $\{N_{vp}\}$. Для каждого $l=1,\ldots,k+1$ обозначим через $N_l$ некоторое заданное множество мод $N_l=\{e_1,\ldots,e_{i_l}\}$. Пусть $G(N_1,\ldots,N_{k+1})$ — множество диаграмм, у которых моды отростков $A_l$ есть в точности $N_l$.

Лемма 3.7. а) Существует не более одной диаграммы $G$ из $G(N_1,\ldots,N_{k+1})$ с ненулевым весом $W_G$.

б) Для каждой такой диаграммы множества $N_l$ содержат различные моды.

Доказательство леммы 3.7. Утверждения данной леммы являются очевидными следствиями того, что

$$\{a^\#(e^{iMh}e_{N_1}),\ a^\#(e^{iMh}e_{N_2})\}=0, \tag{3.3.8}$$

если $N_1\neq N_2$ ($\{,\}$—антикоммутатор) и

$$(a^\#(e^{iMh}e_N))^2=0. \tag{3.3.9}$$

Если $I_l=\{i_1,\ldots,i_q\}$, то обозначим $V_{I_l}=V(t_{i_1})\ldots V(t_{i_q})$. Зафиксируем некоторое $l$, $1\leqslant l\leqslant k+1$.

Представим $V_{I_l}$ в виде суммы по виковским мономам (диаграммам Фридрихса). Из соотношений (3.3.8) и (3.3.9) следует, что существует только одна ненулевая диаграмма, для которой моды правых свободных отростков совпадают с $N_l$, причем эти моды различны. Из этих замечаний и вытекают утверждения а) и б) леммы 3.7. ■

Вернемся к оценке выражения (3.3.6). Поскольку все суммы в нем кроме сумм по модам конечны, мы можем перенести суммирование по модам интегрирование по $\mathfrak{B}_\alpha$ налево. Из неравенства (3.3.4) и того, что $\mathfrak{B}_\alpha\subseteq[0,1]^n$, нам для доказательства теоремы 3.3 достаточно доказать равномерно по модам следующее неравенство

$$\left|\sum_\alpha\sum_{M_1,\ldots,M_{k+1}}\sum_G W_G\right|\leqslant C^n|t-s|, \tag{3.3.10}$$

где $C$ не зависит от $n$, $s$, $t$, мод, а $W_G$ задается выражением вида (3.3.7), в котором убраны все $C_{N_{vp}}(\delta t_v)$.

Пусть далее зафиксирован набор мод. Множества $N_1,\ldots$ $\ldots,N_{k+1}$ мы можем выбрать не более чем $[2^{m_{\max}}]^n$ способами, где $m_{\max}$ максимальное число операторов рождения в мономах Вика, входящих в $v$. Поэтому можно считать, что $N_1,\ldots,N_{k+1}$ тоже фиксированы. В силу леммы 3.7 мы можем каждой допустимой диаграмме $G$ поставить в соответствие связную диаграмму $\tilde G$ с $k+1$ вершиной $M_1,\ldots,M_{k+1}$ и суммарным числом ребер, не превосходящим $m_{\max}n$.

При этом вес $\tilde W_{\tilde G}$ диаграммы $\tilde G$ находится по формуле

$$\tilde W_{\tilde G}=\prod_{\text{Int}}|[e^{ih(M(v)-M(v'))}e_{N_{vp}},\ e_{N_{v'q}}]|. \tag{3.3.11}$$



Причем

$$\|W_G\|\leqslant C_1^n\tilde W_{\tilde G}, \tag{3.3.12}$$

где $C_1$ — некоторая константа.

Для любых $M$, $N\in\mathbf{Z}^\nu$ имеет место оценка

$$\left|\int_{\mathbf{R}^\nu}dk\,e_N(k)\,e_M(k)\,e^{ith(k)}\right|\leqslant\frac{C}{(1+|t|)^{\nu/2}}, \tag{3.3.13}$$

где $C$ не зависит от $N$, $M$, $t$.

Откуда, учитывая (3.3.11) и (3.3.13), следует

$$\|W_G\|\leqslant(\text{const})^n\prod_{\text{Int}}\frac{1}{|M_{l(v,p)}-M_{l(v',q)}|^{\nu/2}}, \tag{3.3.14}$$

где $l(v,p)$ — это группа $\delta$, к которой принадлежит вершина $l$.

Учитывая все вышесказанное, имеем

$$\left|\sum_\alpha\sum_{M_1,\ldots,M_{k+1}}\sum_G W_G\right|\leqslant(\text{const})^n\sum_{M_1,\ldots,M_{k+1}}\prod_{\text{Int}}\frac{1}{|M_{l(v,p)}-M_{l(v',q)}|^{\nu/2}} \tag{3.3.15}$$

Зафиксируем $M_1$ — целое, принадлежащее отрезку $[s,t]$.

Лемма 3.8. Имеет место оценка

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{M_2,\ldots,M_{k+1}}\prod_{\text{Int}}\frac{1}{|M_{l(v,p)}-M_{l(v',q)}|^{\nu/2}}\right|\leqslant\left[\sum_{M=-\infty}^{\infty}\frac{C}{(1+|M|)^{\nu/2}}\right]^{nm_{\max}}. \tag{3.3.16}$$

Данный результат получается после применения к левой части (3.3.16) стандартной техники кластерных разложений (см. [6]).

Суммирование по $M_1$ дает в оценке (3.3.10) множитель $|t-s|$. Доказательство теоремы 3.3 закончено.

## § 3.4. Асимптотическая полнота

Теперь мы можем неформально доказать теоремы 3.5 и 3.6, из которых следует асимптотическая полнота гамильтониана $H_0+\varepsilon V$ при малых $\varepsilon$ в случае, когда взаимодействие $V$ поляризует вакуум, но является четным.

Доказательство теоремы 3.5. Докажем, что для $\psi=a^*(f_1)\dots a^*(f_m)\Omega$, $f_i\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$

$$\lim_{\varkappa\to 0}\sum_n(-i\varepsilon)^n\int\limits_{\pm\infty}^{0}dt_1\dots\int\limits_{\pm\infty}^{0}dt_n(V^{(\varkappa)}(t_1)\dots V^{(\varkappa)}(t_n))_L\psi \quad (3.4.1)$$

существует.

Рассмотрим $n$-ый член ряда (3.4.1). Докажем сначала это утверждение для диаграмм из $L'$, т. е. таких, что они имеют хотя бы одно внешнее ребро уничтожения. Для таких диаграмм, повторяя доказательство теоремы 3.3, получим оценку сверху $C^n\varepsilon^n$, равномерно по $\varkappa$.

Далее рассмотрим сумму по диаграммам без внешних ребер уничтожения. Они имеют внешние ребра рождения, которые дают вклад

$$\begin{aligned}&\prod_{v,p}a^*(e^{it_vh-\varkappa|t_v|}e_{N_{vp}})=\\&=\int\prod_{v,p}a^*(k_{vp}]\,e^{it_vh(k_{vp})-\varkappa|t_v|}e_{N_{vp}}(k_{vp})\,dk_{vp}.\end{aligned}\quad (3.4.2)$$

Сделаем замену

$$t_1'=t_1,$$
$$t_2'=t_2-t_1,$$
$$\dots\dots$$
$$t_n'=t_n-t_{n-1}$$

и проинтегрируем по $t_1'$.

Заметим, что

$$\lim_{\varkappa\to 0}i\int\limits_{\pm\infty}^{0}dt_1'\exp\left(it_1'\sum_{v,p}h(k_{vp})-\varkappa|t_t'|\right)=\frac{1}{\sum\limits_{v,p}h(k_{vp})}\quad (3.4.3)$$

принадлежит локально $L_2$, если $\mu\geqslant 0$.

Поэтому можно разложить $\left(\sum\limits_{v,p}h(k_{vp})\right)^{-1}$ по модам. Интегрирование по $t_1'$ эквивалентно тому, что вся диаграмма сдвигается в точку $t_1=0$. Далее применим технику, развитую при доказательстве теоремы 3.3. ■

Замечание (Об адиабатическом урезании). Выше мы рассматривали волновые операторы, зависящие от двух параметров: параметра адиабатического урезания $\varkappa$ и времени $t$. При этом исследовались повторные пределы $\lim\limits_{\varkappa\to 0}\lim\limits_{t\to\infty}$. Как вытекает из теорем 3.3—3.6, эти пределы существуют по норме или в сильном смысле. Возникает вопрос: какую роль играет адиабатическое урезание и нельзя ли обойтись без него? Отметим, что использование адиабатического урезания характерно для стационарной теории рассеяния.



Заметим также, что если существует предел без урезания

$$s-\lim_{t\to\infty}U(0,t),$$

то существует и предел с адиабатическим урезанием

$$s-\lim_{\varkappa\to 0}U^{(\varkappa)}(0,\infty)$$

и они равны. Эта ситуация возникает, например, когда $V\in\mathscr{A}$, $V\Omega=0$.

Анализ доказательств теорем 3.3—3.6 показывает, что этим теоремам соответствуют аналогичные утверждения для соответствующих волновых операторов без адиабатического урезания. Только в этом случае нужно все пределы по норме (сильные пределы) заменить на слабые пределы, однако сейчас неясно, как это можно использовать для доказательства асимптотической полноты.

## § 3.5. Существование возмущенного вакуумного вектора

В этом и последующем параграфе мы покажем, что динамика рассматриваемой ферми-системы не зависит существенно от химического потенциала $\mu$. Результаты § 3.2—3.4 показывают, что возмущенная система унитарно эквивалентна «смещенной» свободной системе, если $\mu\geq 0$. Это условие существенно используется в доказательстве теорем 3.3—3.6.

Заметим, что если $\mu\geq 0$, то точка $\lambda_0=0$ дискретного спектра оператора $H_0=d\Gamma h$ лежит вне или на границе непрерывной части спектра этого оператора. При «включении» взаимодействия $\varepsilon V$ она сдвигается в точку $\lambda_\varepsilon$.

Если $\mu<0$, то дискретный спектр $H_0$ содержится во внутренности его непрерывного спектра. Оказывается, что и в этом случае дискретный спектр не исчезает, как это можно было ожидать. Например, подобная ситуация возникает для модели взаимодействующего ферми-газа со спином, когда собственное значение, лежащее внутри непрерывного спектра, при включении взаимодействия ($\varepsilon\neq 0$) исчезает.

В данном параграфе мы докажем это утверждение. Мы воспользуемся техникой получения оценок диаграмм, развитой в § 3.2—3.4. Все обозначения этого параграфа при этом сохраняются.

Теорема 3.9. Пусть одночастичный гамильтониан $h$ имеет вид (3.0.3), $\mu\in\mathbf{R}$, а оператор $V$ вид (3.0.4). Тогда для достаточно малых $\varepsilon$ оператор $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$ имеет собственный вектор $\Omega_\varepsilon$.

Доказательство. По теореме 3.6 для достаточно малых $\varepsilon$ величина

$$Z^{-1} = \left\| \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-\varepsilon)^n (\Gamma(V \ldots \Gamma(V)))_{CR} \right\} \Omega \right\|^2$$

конечна. С другой стороны, из результатов § 3.3 следует, что

$$Z^{-1} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{|(\Omega, U(0, t)\,\Omega)|^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{|(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)|^2}. \tag{3.5.1}$$

Поэтому, величина

$$\frac{e^{itH_\varepsilon}}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)}$$

равномерно ограничена по $t$. Тем же методом, что и теорема 3.3 может быть доказана следующая лемма.

Лемма 3.10. Для плотного в $\mathcal{F}_a$ множества $\mathcal{D}$ существует конечный предел

$$\langle F \rangle = \lim_{t\to\infty} \frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, F)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)}, \quad F \in \mathcal{D}. \tag{3.5.2}$$

Как показывает следующая общая лемма, этот предел существует и конечен для любого $F \in \mathcal{F}$.

Лемма 3.11. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\alpha_t$ — равномерно ограниченная функция, $\alpha$: $\mathbf{R} \to \mathcal{H}$, т. е.

$$\|\alpha_t\| < M < \infty. \tag{3.5.3}$$

Пусть для плотного в $\mathcal{H}$ множества векторов $\{F\}$ существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} (\alpha_t, F). \tag{3.5.4}$$

Тогда этот предел существует и конечен для всех $F \in \mathcal{F}$.

Гильбертово пространство слабо полно. Поэтому существует некоторый вектор $\Omega_\varepsilon$, такой, что для всех $F \in \mathcal{F}_a$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, F)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)} = (\Omega_\varepsilon, F)\,. \tag{3.5.5}$$

Мы покажем, что $\Omega_\varepsilon$ — собственный вектор возмущенного оператора $H_\varepsilon$.

Во-первых, полагая в (3.5.5) $F = \Omega$,

$$(\Omega_\varepsilon, \Omega) = 1,$$

т. е. $\Omega_\varepsilon \neq 0$.



Далее, для любого $s \in \mathbf{R}$

$$(\Omega_\varepsilon, F) = \lim_{t\to\infty} \frac{(e^{i(t+s)H_\varepsilon}\Omega, F)}{(e^{i(t+s)H_\varepsilon}\Omega, \Omega)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, e^{-isH_\varepsilon}F)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, e^{-isH_\varepsilon}\Omega)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, e^{-isH_\varepsilon}F)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, e^{-isH_\varepsilon}\Omega)} \frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)} =$$

$$= \frac{(\Omega_\varepsilon, e^{-isH_\varepsilon}F)}{(\Omega_\varepsilon, e^{-isH_\varepsilon}\Omega)} = \frac{(e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, F)}{(e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, \Omega)}.$$

То есть для любых $s \in \mathbf{R}$, $F \in \mathcal{F}$ выполняется тождество

$$(\Omega_\varepsilon, F) = \frac{(e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, F)}{(e^{isH_\varepsilon}\Omega, \Omega)}. \tag{3.5.6}$$

Или

$$(\Omega_\varepsilon, F)\,(e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, \Omega) = (e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, F). \tag{3.5.7}$$

Дифференцируя обе части (3.5.7) по $s$ и полагая $s = 0$, получим

$$(\Omega_\varepsilon, F)(H_\varepsilon\Omega_\varepsilon, \Omega) = (H_\varepsilon\Omega_\varepsilon, F). \tag{3.5.8}$$

Поскольку (3.5.8) выполняется для любых $F \in \mathcal{F}_a$, то

$$H_\varepsilon\Omega_\varepsilon = (H_\varepsilon\Omega_\varepsilon, \Omega)\,\Omega_\varepsilon, \tag{3.5.9}$$

то есть $\Omega_\varepsilon$ — собственный вектор $H_\varepsilon$. Теорема 3.8 полностью доказана.

## § 3.6. Унитарная эквивалентность. Общий случай

Здесь мы рассмотрим дальнейшее обобщение результатов § 3.1, заключающееся в снятии ограничения на химический потенциал.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.12. Пусть одночастичный гамильтониан $h$ имеет вид (3.0.3), $\mu \in \mathbf{R}$, а оператор $V$ вид (3.0.4). Тогда существует $\varepsilon_0 >$, такое, что для $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ и $\lambda_\varepsilon \in \mathbf{R}$, операторы $H_\varepsilon$ и $H_0 + \lambda_\varepsilon E$ унитарно эквивалентны.

Замечание. Основой доказательства теоремы 3.12 будут результаты предыдущего параграфа о существовании возмущенного вакуумного вектора $\Omega_\varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим следующие две динамики в $C^*$-алгебре $\mathfrak{U}(\mathcal{H})$:

$$\tau_t^0(A) = e^{itH_0} A e^{-itH_0},$$

$$\tau_t^{\varepsilon V}(A) = e^{it(H_0 + \varepsilon V)} A e^{-it(H_0 + \varepsilon V)}.$$

По теореме 2.5 для достаточно малых $\varepsilon$ существуют и обратимы морфизмы Меллера в $C^*$-алгебре $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$

$$\gamma_\pm(A)=\lim_{t\to\pm\infty}\tau_{-t}^{\varepsilon V}\tau_t^0(A),\quad A\in\mathfrak{A}(\mathscr{H}).$$

Пусть $\Omega_\varepsilon$ — возмущенный вакуумный вектор оператора $H_0+\varepsilon V$, существующий в силу теоремы 3.9. Мы можем считать его нормированным, т. е. $\|\Omega_\varepsilon\|=1$. Положим $\gamma=\gamma_+$.

Лемма 3.13. Для любого $f\in\mathscr{H}$ имеет место равенство

$$(\gamma a(f))\Omega_\varepsilon=0. \tag{3.6.1}$$

Доказательство. Обозначим $\tilde a(f)=\gamma a(f)$. С одной стороны имеем

$$\lim_{t\to+\infty}\tau_{-t}^{\varepsilon V}\tau_t^0(a(f))\Omega_\varepsilon=\tilde a(f)\Omega_\varepsilon. \tag{3.6.2}$$

С другой стороны, пользуясь тем, что $\Omega_\varepsilon$ — собственный вектор оператора $H_\varepsilon=H_0+\varepsilon V$, имеем

$$\|\tau_{-t}^{\varepsilon V}\tau_t^0(a(f))\Omega_\varepsilon\|=\|e^{-itH_\varepsilon}a(e^{ith}f)e^{itH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon\|=$$
$$=\|a(e^{ith}f)\Omega_\varepsilon\|\to 0 \tag{3.6.3}$$

при $t\to+\infty$.

Действительно, пусть по норме $\Omega_\varepsilon^{(n)}\to\Omega_\varepsilon$ при $n\to\infty$, где $\Omega_\varepsilon^{(n)}$ — конечная линейная комбинация векторов вида

$$a^*(f_1)\ldots a^*(f_m)\Omega,\quad f_i\in C_0^\infty(\mathbf{R}^\nu).$$

Пусть $\|\Omega_\varepsilon^{(n)}-\Omega_\varepsilon\|<\delta$ при $n>N_\delta$. Тогда

$$\|a(e^{-ith}f)\Omega_\varepsilon\|\leqslant\|a(e^{-ith}f)\Omega_\varepsilon^{(n)}\|+\delta\|f\|. \tag{3.6.4}$$

Пользуясь антикоммутационными соотношениями, мы можем перенести оператор $a(e^{ith}f)$ через операторы $a^*(f_1)\ldots a^*(f_m)$ слева направо. После этого, $a(e^{ith}f)$ будет содержать конечное число слагаемых, каждое из которых будет содержать множитель вида

$$(e^{ith}f,f_j). \tag{3.6.5}$$

Из спектральной теории и теоремы Лебега (используя абсолютную непрерывность спектра $h$) следует, что выражение вида (3.6.5) стремится к нулю при $t\to\infty$. Отсюда в силу произвольности выбора $\delta>0$ следует утверждение леммы 3.13.

Из леммы 3.12 легко следует лемма 3.14.

Лемма 3.14. Для любого $A\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ имеет место равенство

$$(A\Omega,\Omega)=(\gamma(A)\Omega_\varepsilon,\Omega_\varepsilon). \tag{3.6.6}$$

Определим оператор $U$: $\mathscr{F}_a\to\mathscr{F}_a$ следующим образом

$$U(A\Omega)=\gamma(A)\Omega_\varepsilon. \tag{3.6.7}$$

Оператор $U$ сохраняет норму, так как

$$\|A\Omega\|^2=(A^*A\Omega,\Omega)=(\gamma(A^*A)\Omega_\varepsilon,\Omega_\varepsilon)=\|\gamma(A)\Omega_\varepsilon\|^2.$$



Поэтому он корректно определен и изометричен. Так как $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ неприводима в $\mathscr{F}_a$, то $\mathfrak{A}\Omega_\varepsilon=\mathscr{F}_a$ и, следовательно, образ оператора $U$ совпадает со всем $\mathscr{F}_a$. Значит, оператор $U$ унитарен.

Для любого $A\in\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ имеем

$$e^{it(H_0+\varepsilon V)}UA\Omega=e^{it(H_0+\varepsilon V)}\gamma(A)\Omega_\varepsilon=\tau_t^{\varepsilon V}(\gamma(A))e^{it(H_0+\varepsilon V)}\Omega_\varepsilon=$$
$$=e^{it\lambda_\varepsilon}\gamma(\tau_t^0(A))\Omega_\varepsilon=e^{it\lambda_\varepsilon}U\tau_t^0(A)\Omega=e^{it\lambda_\varepsilon}Ue^{ith}A\Omega. \tag{3.6.8}$$

Здесь мы воспользовались сплетающим свойством морфизмов Меллера:

$$\tau_t^{\varepsilon V}\circ\gamma=\gamma\circ\tau_t^0$$

и тем, что $\Omega_\varepsilon$ — собственный вектор оператора $H_0+\varepsilon V$ с собственным значением $\lambda_\varepsilon$.

Из выражения (3.6.8) следует, что

$$e^{it(H_0+\varepsilon V)}=e^{it\lambda_\varepsilon}Ue^{itH_0}U^* \tag{3.6.9}$$

или

$$H_0+\varepsilon V=U(H_0+\lambda_\varepsilon)U^*. \tag{3.6.10}$$

Теорема 3.12 полностью доказана. ■

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.15. Морфизмы Меллера $\gamma_\pm$, определяемые (3.6.2), унитарно представимы.

Доказательство. Для любого $B\in\mathfrak{A}$ и оператора $U$ из выражения (3.6.7)

$$\gamma(A)B\Omega_\varepsilon=\gamma(A\gamma^{-1}(B))\Omega_\varepsilon=UA\gamma^{-1}B\Omega=UAU^*B\Omega_\varepsilon.$$

И поскольку $B$ произволен, то

$$\gamma(A)=UAU^*. \ ■ \tag{3.6.11}$$

## *Глава 4*

## СПИНОВАЯ ЧАСТИЦА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩАЯ СО СВОБОДНЫМ ФЕРМИ-ГАЗОМ

### § 4.0. Введение

Здесь мы рассмотрим свободный ферми-газ на решетке и спин, локализованный, например, в точке $0\in\mathbf{Z}^\nu$.

Наш первый результат (теорема 4.4) описывает случай, когда система эквивалентна идеальному ферми-газу. Здесь спин «исчезает» в «море» ферми-частиц. Эта ситуация во многом аналогична рассмотренной в [1]. Мы получим спектральное объяснение этого явления: собственный вектор становится резонансом.

Второй результат § 4.3 (только для квадратических возмущений) относится к случаю, когда система эквивалентна идеальному ферми-газу плюс свободная спиновая квазичастица.

В § 4.4 мы исследуем случай частицы, взаимодействующей с ферми-газом в основном состоянии. Для ограниченных возмущений мы получим полное спектральное представление возмущенной динамики. Она оказывается унитарно эквивалентной динамике, состоящей из свободного ферми-газа и не взаимодействующей с ним частицы с измененными параметрами.

## § 4.1. Система «ферми-газ»+«спиновая частица». Квадратическое взаимодействие

Пусть $\mathscr{H}=l_2(\mathbf{Z}^\nu)$, $\nu\geq 3$, $\mathfrak{A}_F=\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ — $C^*$-алгебра КАС, описывающая решетчатый ферми-газ и $\mathfrak{A}(\mathbf{C})$ конечномерная $C^*$-алгебра КАС, порожденная $\{1, b, b^*\}$. Эта $C^*$-алгебра описывает спин и $b, b^*$ удовлетворяют каноническим антикоммутационным соотношениям

$$bb=b^*b^*=0_b, \qquad b^*b+bb^*=1_b. \tag{4.1.1}$$

Тензорное произведение этих С*-алгебр (в смысле произведения суперелгебр) есть опять С*-алгебра КАС

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}(\mathbf{C})=\mathfrak{M}_2,$$

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\otimes\mathfrak{A}_F(\mathscr{H})=\mathfrak{A}(\mathbf{C}\oplus\mathscr{H}), \tag{4.1.2}$$

где $\mathfrak{A}$ порождена $1$, $b\otimes 1_F$, $b^*\otimes 1_F$, $1_b\otimes a(f)$, $1_b\otimes a^*(f)$, $f\in\mathscr{H}$.

Положим

$$b=a(\Phi_0), \quad \Phi_0=(1,0)\in\mathbf{C}\oplus\mathscr{H}. \tag{4.1.3}$$

Для краткости обозначений, когда это не вызывает путаницы, мы будем отождествлять $b^*\otimes 1_F$ с $b^*$, $1_b\otimes a^*(f)$ с $a^*(f)$.

Из определения $\mathfrak{U}$ следует, что выполняются соотношения

$$ba^*(f)=-a^*(f)b,$$

$$b^*a^*(f)=-a^*(f)b^*,$$

для всех $f\in\mathscr{H}$.

Свободная динамика в $\mathfrak{A}$ задается следующим образом

$$\tau_t^0(1_b\otimes a^\#(f))=1_b\otimes a^\#(e^{ith}f),$$

$$\tau_t^0(b\otimes 1_F)=e^{-it\lambda}b\otimes 1_F, \quad \tau_t^0(b^*\otimes 1_F)=e^{it\lambda}b^*\otimes 1_F, \tag{4.1.4}$$

где $h=-\Delta+\mu$ — решетчатый лапласиан плюс константа, $\lambda\in\mathbf{R}$.

Мы рассмотрим сначала случай квадратического взаимодействия ферми-газа со спином

$$V_{\text{КВ}}=V_2=\varepsilon(b^*a(f)+a^*(f)b) \tag{4.1.5}$$

для некоторого $f\in\mathscr{H}$ с конечным носителем.



Откуда следует, что

$$\tau_t^{V_2}(a^\#(G))=a^\#(e^{it(h_0(\lambda)+\varepsilon P)}G), \quad G\in\mathbf{C}\oplus\mathscr{H},$$

где $h_0(\lambda)=\lambda\otimes 1+1\otimes h$. И для $F=(0,f)$ имеем

$$PG=\varepsilon(P((0,f)+\varphi_0)-P((0,f)-P(\varphi_0))G=$$

$$\varepsilon((G\varphi_0)F+(G,F)\varphi_0).$$

Следовательно возмущенная динамика является свободной и порождается оператором $h_\varepsilon$, который соответствует оператору в хорошо известной модели Фридрихса. Нам понадобится ряд фактов о спектральных свойствах этой модели.

## § 4.2. Модель Фридрихса

Мы сформулируем теоремы, которые относятся к модели Фридрихса и которые мы будем существенно использовать.

Пусть $\hat{\mathscr{H}}=L_2(\mathbf{T}^\nu)$, $\nu\geqslant 3$. Рассмотрим в $\mathscr{H}=\mathbf{C}\oplus\hat{\mathscr{H}}$ оператор

$$h_0(\lambda)\begin{pmatrix}c\\ g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda c\\ hg\end{pmatrix}, \tag{4.2.1}$$

где $\lambda\in\mathbf{R}$, $c\in\mathbf{C}$, $g\in\hat{\mathscr{H}}$,

$$h(k)=\sum_{i=1}^{\nu}2(1-\cos(k_i))+\mu. \tag{4.2.2}$$

Рассмотрим оператор $h_\varepsilon(\lambda)=h_0(\lambda)+\varepsilon V$, где возмущение $\varepsilon V$ имеет вид

$$V\begin{pmatrix}c\\ g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int g(k)\bar{\Phi}(k)\,dk\\ c\Phi\end{pmatrix}, \tag{4.2.3}$$

где $\varphi\in L_2(\mathbf{T}^\nu)$.

Очевидно, возмущение $V$ имеет ранг 2. Оператор $h_0$ имеет абсолютно непрерывный спектр на $[\mu, \mu+4\nu]$ и собственное значение $\lambda$.

Теорема 4.1. Пусть $\lambda\notin(\mu, \mu+4\nu)$, $\varphi\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$. Тогда существует такое действительное $\lambda_\varepsilon\in(\mu, \mu+4\nu)$, $|\lambda-\lambda_\varepsilon|=O(|\varepsilon|^2)$, что операторы $h_0(\lambda)+\varepsilon V$ и $h_0(\lambda')$ унитарно эквивалентны, то есть при достаточно малых $\varepsilon$, абсолютно непрерывная часть спектра не меняется, сингулярной не появляется, а собственное значение $\lambda_\varepsilon$ лежит вне $(\mu, \mu+4\nu)$.

Теорема 4.2. Пусть $\varphi\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$ и $\varphi$ не равно тождественно нулю ни на какой поверхности уровня функции

$$h(k)=\sum_{i=1}^{\nu}2(1-\cos(k_i))+\mu. \tag{4.2.4}$$

Если $\lambda\in(\mu, \mu+4\nu)$, то тогда существует $\varepsilon_0(V)>0$ такое, что для любого $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, $\varepsilon\neq 0$, оператор $h_0(\lambda)+\varepsilon V$ и $h$ унитарно эквивалентны, то есть при достаточно малых $\varepsilon$, дискретный спектр исчезает, абсолютно непрерывная часть спектра не меняется.

Теорема 4.3. Пусть выполнены все условия теоремы 4.1 и $F=(c_1, f)$, $G=(c_2, g)\in \mathbf{C}\oplus\mathscr{H}$, где $\hat{f}, \hat{g}\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon$

$$(e^{it(h_0(\lambda)+\varepsilon V)}F, G)\in L_1(-\infty, \infty). \qquad (4.2.5)$$

Доказательства этих теорем основаны на анализе хорошо известной модели Фридрихса, и мы приведем в § 4.5 доказательство только теоремы 4.1 и 4.2. Доказательство теоремы 4.3 смотрите в [18].

## § 4.3. Локальные возмущения в модели «ферми-газ+спин»

Сформулированные ниже теоремы 4.4 и 4.5 относятся к случаю квадратического взаимодействия, а теорема 4.6 — для неквадратического.

Теорема 4.4. Пусть квадратическое возмущение $\mathbf{V}_2$ имеет вид (4.1.5), причем $\hat{f}\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$ и $\hat{f}$ не равно тождественно нулю ни на какой поверхности уровня функции

$$h(k)=\sum_{i=1}^{\nu}2(1-\cos(k_i))+\mu. \qquad (4.2.4)$$

Если $\lambda\in(\mu, \mu+4\nu)$, то тогда существует $\varepsilon_0>0$ такое, что для любого $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, $\varepsilon=0$, существует изоморфизм $\alpha$: $\mathfrak{A}(C\oplus\mathscr{H})\to\mathfrak{A}_F(\mathscr{H})$ такой, что

$$\tau_t^{\mathbf{V}_2}=\alpha^{-1}\circ\tau_t\circ\alpha, \qquad (4.3.1)$$

где $\tau_t$ — свободная динамика идеального ферми-газа.

Доказательство. Пусть $U$ — унитарный оператор такой, что

$$U\colon\ \mathbf{C}\oplus\mathscr{H}\to\mathscr{H},\ U(h_0(\lambda)+\varepsilon V)U^{-1}=h.$$

Он существует в силу теоремы 4.2. Положим

$$\alpha a^\#(G)=a^\#(UG),\quad G\in\mathbf{C}\oplus\mathscr{H}.$$

Тогда

$$\tau_t^{\mathbf{V}_2}(a(G))=\alpha a^\#(e^{it(h_0(\lambda)+\varepsilon V_2)}G)=a^\#(e^{it(h_0(\lambda)+\varepsilon V_2)}G),$$
$$a(e^{ith}UG)=\tau_t(\alpha(a(G))). \blacksquare \qquad (4.3.2)$$

Теорема 4.5. Пусть квадратическое возмущение $\mathbf{V}_2$ имеет вид (4.1.5), причем $\hat{f}\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$, $\lambda\notin(\mu, \mu+4\nu)$. Тогда существует такое $\varepsilon_0>0$, что при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ существует действительное $\lambda_\varepsilon\in(\mu, \mu+4\nu)$, $|\lambda-\lambda_\varepsilon|=O(|\varepsilon|^2)$, и $*$-автоморфизм $\theta$ $C^*$-алгебры $\mathfrak{A}(\mathbf{C}\oplus\mathscr{H})$ в себя, такой, что

$$\theta\tau_t^{\mathbf{V}_2}\theta^{-1}=\tau_t', \qquad (4.3.3)$$

где $\tau_t'(a^\#(G))=a^\#(e^{ith_0(\lambda_\varepsilon)}G)$.

Доказательство. Теорема 4.6 доказывается аналогично теореме 4.4 и следует из теоремы 4.2.

Теперь рассмотрим неквадратическое возмущение вида

$$\mathbf{V}=\varepsilon\mathbf{V}_2+\varepsilon'\overline{\mathbf{V}}, \qquad (4.3.4)$$

где $\overline{\mathbf{V}}=\overline{\mathbf{V}}^*$ есть конечная сумма мономов вида

$$a^*(F_1)\ldots a^*(F_m)a(G_1)\ldots a(G_n), \qquad (4.3.5)$$

где $m+n$ — четно и $F_i$, $G_j\in\mathbf{C}\oplus\mathscr{H}$.

Теорема 4.6. Пусть квадратическое возмущение $\mathbf{V}_2$ имеет вид (4.1.5), причем $\hat{f}\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$ и $\hat{f}$ не равно тождественно нулю ни на какой поверхности уровня функции

$$h(k)=\sum_{i=1}^{\nu}2(1-\cos(k_i))+\mu.$$

Пусть $\overline{\mathbf{V}}$ имеет вид (4.3.5), причем все $F_i$, $G_i$ имеют вид $F_i=(c_i, f_i)$, $G_i=(d_i, g_i)\in\mathbf{C}\oplus\mathscr{H}$, где $\hat{f}_i$, $\hat{g}_i\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$.

Если $\lambda\in(\mu, \mu+4\nu)$, то тогда существуют $\varepsilon_0>0$, такие, что для любого $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, $\varepsilon\neq 0$, существует $\varepsilon'(\varepsilon)>0$ такое, что при $|\varepsilon_0'|\leqslant\varepsilon'$, существует $*$-изоморфизм $\alpha:\mathfrak{A}(\mathbf{C}\oplus\mathscr{H})\to\mathfrak{A}_F(\mathscr{H})$ такой, что

$$\alpha\tau_t^{\mathbf{V}}\alpha^{-1}=\tau_t^0, \qquad (4.3.6)$$

то есть, динамика $\tau_t^{\mathbf{V}}$ изоморфна свободной динамике $\tau_t^0$ идеального ферми-газа.

Доказательство. По теореме 4.1. достаточно доказать изоморфизм $\tau_t^{\mathbf{V}}$ и $\tau_t^{\mathbf{V}_2}$. Данный факт будет следовать из существования прямых и обратных морфизмов Меллера

$$\gamma=s-\lim_{t\to\infty}\tau_{-t}^{\mathbf{V}}\tau_t^{\mathbf{V}_2}, \qquad (4.3.7)$$

$$\hat{\gamma}=s-\lim_{t\to\infty}\tau_{-t}^{\mathbf{V}_2}\tau_t^{\mathbf{V}}. \qquad (4.3.8)$$

Воспользуемся критерием Кука. Рассмотрим плотное множество

$$\mathfrak{A}_0=\{a^*(F_1)\ldots a^*(F_m)a(G_1)\ldots a(G_n),\ m, n\geqslant 0,\ \hat{f}_i, \hat{g}_i\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)\}$$

в $C^*$-алгебре $\mathfrak{A}$.

Повторяя доказательство теоремы 2.4, видим, что нам достаточно доказать, что

$$(e^{it(h_0(\lambda)+V_2)}F, G)\in L_1(-\infty, \infty)$$

для любых $F=(c,f)$, $G=(d,g)\in\mathbf{C}\oplus\mathcal{H}$, где $\hat{f},\hat{g}\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{T}^\nu)$, что и утверждается теоремой 4.3. Заметим, что как и в теореме 2.4, здесь не требуется малость параметра $\varepsilon'\in\mathbf{R}$.

Аналогично, повторяя доказательство теоремы 2.6 для малых $\varepsilon'$, мы докажем существование обратных морфизмов Меллера $\hat{\gamma}_\pm$. ■

## § 4.4. Ферми-газ и частица в основном состоянии

Результаты данного параграфа относятся к динамике системы, состоящей из ферми-газа и взаимодействующего с ним спина, в основном состоянии.

Пусть $\langle\ \rangle^F$ — основное состояние ферми-газа, т. е. квазисвободное состояние с $B=0$, $\beta=+\infty$, $\langle\ \rangle^{sp}$ — основное состояние на $\mathfrak{B}$. Тогда

$$\langle\ \rangle=\langle\ \rangle^{sp}\otimes\langle\ \rangle^F \tag{4.4.1}$$

есть состояние на $\mathfrak{A}$.

Оператор $\mathcal{H}_{GNS}$ имеет следующую структуру, похожую на структуру фоковского пространства:

$$\mathcal{H}_{GNS}=\mathcal{F}_{as}(\mathbf{C})\otimes\mathcal{F}_{as}(\mathcal{H})\equiv\mathcal{F}_{as}(\mathbf{C}\oplus\mathcal{H}).$$

1) В $\mathcal{H}_{GNS}$ выделен вектор $\Omega$, $\|\Omega\|=1$, называемый вакуумным, причем

$$(1_b\otimes a(f))\Omega=0,\ \forall f\in\mathcal{H} \tag{4.4.2}$$
$$(b\otimes 1_F)\Omega=0;$$

2) линейная оболочка векторов

$$1_b\otimes a^*(f_1)\ \dots\ a^*(f_n)\Omega,$$
$$b^*\otimes a^*(f_1)\ \dots\ a^*(f_n)\Omega,$$

где $f_i$, $g_j\in\mathcal{H}$, $n, m\geq 0$, плотна в $\mathcal{H}_{GNS}$.

Свободная динамика $\tau_t^0$ в $\mathfrak{A}$, определенная (4.1.4), индуцирует в $\mathcal{H}_{GNS}$ динамику, задаваемую оператором

$$H=H_0(\lambda)=d\Gamma(h_0(\lambda)):$$
$$e^{itH_0(\lambda)}1_b\otimes a^*(f_1)\dots a^*(f_n)\Omega=$$
$$=1_b\otimes a^*(e^{ith}f_1)\dots a^*(e^{ith}f_n)\Omega, \tag{4.4.3}$$
$$e^{itH_0(\lambda)}b^*\otimes a^*(f_1)\dots a^*(f_n)\Omega=$$
$$=e^{it\lambda}b^*\otimes a^*(e^{ith}f_1)\dots a^*(e^{ith}f_n)\Omega. \tag{4.4.4}$$

Заметим, что $H_0(\lambda)$ имеет единственную точку (кроме нуля) дискретного спектра $\lambda$, которая соответствует собственному вектору $(b^*\otimes 1_F)\Omega$.

Пусть

$$H_\varepsilon(\lambda)=H_0(\lambda)+\varepsilon\mathbf{V}, \tag{4.4.5}$$



причем возмущенный оператор $\mathbf{V}$ имеет вид

$$\mathbf{V}=b^*\otimes C+b\otimes C^*, \tag{4.4.6}$$

где

$$C=\sum_{j=1}^{M}a^\#(f_1^{(j)})\dots a^\#(f_{k_j}^{(j)}),\quad k_j>0,\quad M<\infty. \tag{4.4.7}$$

Далее, мы будем иметь две существенно разные ситуации, которые зависят от того, изменяется или нет дискретный спектр оператора $H_0(\lambda)$ при возмущении оператором $\mathbf{V}=\mathbf{V}^*$, то есть выполнено или нет условие

$$\mathbf{V}b^*\Omega=0. \tag{4.4.8}$$

Условие (4.4.8) имеет место, если оператор $a^\#(f_{k_j}^{(j)})$ является оператором умножения, а оператор $a^\#(f_1^{(j)})$ — оператором рождения. В этом случае вектор $b^*\otimes 1_F\Omega$ является собственным для $H_\varepsilon(\lambda)$ с собственным значением $\lambda$.

Таким образом, в этом случае дискретный спектр $H_\varepsilon(\lambda)$ совпадает с дискретным спектром $H_0(\lambda)$. Более того, в этом случае верна теорема:

Теорема 4.7. Пусть взаимодействие $\mathbf{V}$ имеет вид (4.4.6), причем для всех $j=1,\dots,M$ оператор $a^\#(f_{k_j}^{(j)})$ есть оператор уничтожения, а оператор $a^\#(f_1^{(j)})$ — рождения. Тогда существует $\varepsilon_0(\mathbf{V})>0$, такое, что для $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ операторы $H_0(\lambda)$ и $H_\varepsilon(\lambda)$ унитарно эквивалентны при любом $\lambda\in\mathbf{R}$.

Доказательство. Мы докажем существование прямых $W_\pm$ и обратных $W_\pm$ волновых операторов при малых $\varepsilon$.

Например, докажем, что $W_\pm$ существует на плотном множестве $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{H}_{GNS}$, где $\mathcal{D}$ состоит из конечных линейных комбинаций векторов вида

$$1_b\otimes a^*(f_1)\ \dots\ a^*(f_n)\Omega,$$
$$b^*\otimes a^*(f_1)\ \dots\ a^*(f_n)\Omega,$$

а $f_i$, $g_j\in\mathcal{H}$ имеют конечные носители в $\mathbf{Z}^\nu$.

Воспользуемся выражением $\widehat{W}_\pm$ в виде ряда (2.4.6). Для $\Phi\in\mathcal{D}$ имеем

$$\widehat{W}_\pm(t)\Phi=\Phi+\sum_{i=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n\int_{\Delta_n^{0,t}}dt_1\dots dt_n\mathbf{V}(t_n)\dots\mathbf{V}(t_1)\Phi, \tag{4.4.9}$$

$$\widehat{W}_\pm\Phi=\lim_{t\to\pm\infty}\widehat{W}_\pm(t)\Phi,$$

где $\Delta_n^{0,t}=\{(t_1,\dots,t_n),\ 0<t_1<\dots<t_n<t\}$ и

$$\mathbf{V}(t)=e^{itH_0(\lambda)}\mathbf{V}e^{-itH_0(\lambda)}=$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\{e^{it\lambda}b^*\otimes a^\#(e^{ith}f_1^{(j)})\ldots a^\#(e^{ith}f_{k_j}^{(j)})+$$

$$+e^{-it\lambda}b\otimes(a^\#(e^{ith}f_{k_1}^{(j)})\ldots a^\#(e^{ith}f_{k_j}^{(j)}))^*\}. \quad (4.4.10)$$

Так как в каждом члене оператора $\mathbf{V}(t_i)$ крайний справа есть оператор уничтожения, мы перенесем его к вакуумному вектору $\Omega$, пользуясь каноническими антикоммутационными соотношениями. Далее, дословно повторяя доказательство теоремы 2.8, получаем требуемое.

Если же

$$C=a(f_1)\ldots a(f_k), \quad (4.4.11)$$

то $\mathbf{V}b\otimes 1_F\Omega=1_b\otimes C^*\Omega\neq 0$, и мы оказываемся в гораздо более сложной ситуации, когда точечный спектр сдвигается при возмущении. В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 4.8. Пусть

$$\mathbf{V}=(b^*\otimes a(f_1)\ \ldots\ a(f_k)+b\otimes a^*(f_1)\ \ldots\ a^*(f_k)), \quad (4.4.12)$$

где $f_i\in\mathscr{H}$ и имеют конечный носитель, $k\geq 1$, нечетно.

Пусть $\lambda\notin(k\mu,\ k(\mu+4\nu))$. Тогда существует $\varepsilon_0(\mathbf{V})>0$, такое, что для $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ оператор $H_0(\lambda)+\varepsilon\mathbf{V}$ унитарно эквивалентен $H_0(\lambda_\varepsilon)$, где

$$|\lambda_\varepsilon-\lambda|=O(|\varepsilon|^2). \quad (4.4.13)$$

Доказательство. Рассмотрим подпространства $\mathscr{K}_n\subseteq\mathscr{H}_{GNS}$, порожденное векторами вида

$$b^*\otimes a^*(g_1)\ldots a^*(g_{n-k})\Omega,\quad 1_b\otimes a^*(g_1)\ldots a^*(g_n)\Omega,$$

при $n>k$,

$$b^*\otimes 1_F\Omega,\quad 1_b\otimes a^*(g_1)\ldots a^*(g_n)\Omega,$$

при $n=k$, и

$$1_b\otimes a^*(g_1)\ldots a^*(g_n)\Omega,$$

при $n<k$.

Подпространство $\mathscr{K}_n$ инвариантно относительно $H_0(\lambda)$ и $H_\varepsilon(\lambda)$. Докажем это, например, при $n=k$. Действительно, имеем

$$Vb^*\otimes 1_F=C^*\Omega\in\mathscr{K}_n$$

$$V1_b\otimes a^*(g_1)\ldots a^*(g_k)\Omega=b^*\otimes Ca^*(g_1)\ldots a^*(g_k)\Omega=$$

$$=\mathrm{const}\,(b^*\otimes 1_F)\,\Omega\in\mathscr{K}_n.$$

Инвариантность $\mathscr{K}_n$ относительно $H_0(\lambda)$ очевидна.

Таким образом, мы представили наше $\mathscr{H}_{GNS}$ в виде

$$\mathscr{H}_{GNS}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathscr{K}_n.$$

Собственный вектор оператора $H_0(\lambda)$ будем искать в подпространстве $\mathscr{K}_k$.



Подпространство $\mathscr{K}_k$ изоморфно пространству

$$L=\mathbf{C}\oplus L_{2,\mathrm{as}}((\mathbf{T}^\nu)^k), \quad (4.4.14)$$

где $L_{2,\mathrm{as}}((\mathbf{T}^\nu)^k)$ есть пространство антисимметрических функций $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$, $x_i\in\mathbf{T}^\nu$ с интегрируемым квадратом.

При этом изоморфизме вектор $b^*\otimes 1_F\Omega\in\mathscr{K}_k$ переходит в вектор

$$\psi_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in L.$$

Вектор вида $1_b\otimes a^*(g_1)\ldots a^*(g_k)$ переходит в

$$\frac{1}{\sqrt{k!}}P_-(\hat{g}_1(x_1)\ldots\hat{g}_k(x_k))\in L_{2,\mathrm{as}}((\mathbf{T}^\nu)^k), \quad (4.4.15)$$

где $q_i\in L_2(\mathbf{T}^\nu)$ есть преобразование Фурье функции $g_i\in l_2(\mathbf{Z}^\nu)$, а $P_-$ есть оператор антисимметризации. Обозначим образ вектора $\varepsilon(1_b\otimes C^*)\Omega$ через $\varphi_\varepsilon\in L$. Так как все $f_i$ имеют конечный носитель в $\mathbf{Z}^\nu$, то $f_i$ — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbf{T}^\nu$, а $\varphi_\varepsilon$ — бесконечно дифференцируемая функция на $(\mathbf{T}^\nu)^k$. Легко видеть, что оператор $H_\varepsilon(\lambda)$ в этом представлении на $L$ выглядит следующим образом

$$(H_\varepsilon(\lambda))\begin{pmatrix}d\\g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda d+(g,\varphi_\varepsilon)\\\varphi_\varepsilon+ug\end{pmatrix}, \quad (4.4.16)$$

для всех $\begin{pmatrix}d\\g\end{pmatrix}\in L$, где

$$u(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\nu}2\,(1-\cos(x_i^{(j)})),\quad x_i\in\mathbf{T}^\nu. \quad (4.4.17)$$

Так как $\lambda$ не принадлежит непрерывному спектру оператора умножения на $u$, который, очевидно, есть $[k\mu,\ k(\mu+4\nu)]$, то при достаточно малых $\varepsilon$ у оператора $H_\varepsilon(\lambda)$ существует собственное значение $\lambda_\varepsilon\notin[k\mu,\ k(\mu+4\nu)]$, причем собственный вектор $f_\varepsilon$ с точностью до нормирующего множителя есть

$$f_\varepsilon=\frac{\varphi_\varepsilon}{u-\lambda_\varepsilon}\in L_{2,\mathrm{as}}((\mathbf{T}^\nu)^k). \quad (4.4.18)$$

Из (4.4.18) видно, что $f_\varepsilon$ есть бесконечно дифференцируемая функция, поэтому собственный вектор $b_\varepsilon^*$ оператора $H_\varepsilon(\lambda)$ в пространстве $\mathscr{K}_k$ имеет вид

$$b_\varepsilon^*=(b^*\otimes 1_F)\,\Omega+1_b\otimes F_\varepsilon\Omega, \quad (4.4.19)$$

где $F_\varepsilon$ принадлежит подпространству, порожденному векторами вида

$$a^*(g_1)\ldots a^*(g_k)\Omega_F. \quad (4.4.20)$$

Рассмотрим предел

$$\gamma(A)=\lim_{t\to\infty}\tau_{-t}^{\varepsilon\mathbf{V}}\tau_t^0(A) \tag{4.4.21}$$

для всех $A\in 1_b\otimes\mathfrak{A}_F(\mathscr{H})$.

Предел (4.4.21) существует при всех $\varepsilon$. Действительно, нетрудно заметить, что мы можем повторить доказательство теоремы 2.4, так как в нашем случае взаимодействие $\mathbf{V}$ четно и

$$(i^{ith}f_j, f_j)\in L_1(-\infty, +\infty). \tag{4.4.22}$$

Лемма 4.9. Положим

$$\bar{a}^{\#}(f)\overset{\text{def}}{=}\gamma(a^{\#}(f)), \tag{4.4.23}$$

тогда

$$\bar{a}(f)\,b_\varepsilon^*=0, \tag{4.4.24}$$

$$\bar{a}(f)\,\bar{\Omega}=0, \tag{4.4.25}$$

где $\bar{\Omega}$ есть собственный вектор оператора $H_\varepsilon(\lambda)$ в $\mathscr{K}_k$.

Доказательство. Заметим, что если $X\in\mathscr{K}_k$, то $\bar{a}(f)X\in\mathscr{K}_{k-1}$, потому, что в силу инвариантности всех $\mathscr{K}_k$ относительно операторов $H_0(\lambda)$, $H_\varepsilon(\lambda)$, и того, что $a(f):\mathscr{K}_k\to\mathscr{K}_{k-1}$, имеем

$$\tau_{-t}^{\varepsilon\mathbf{V}}\tau_t^0(a(f))X=e^{-itH_\varepsilon(\lambda)}e^{itH_0(\lambda)}a(f)\,e^{-itH_0(\lambda)}e^{itH_\varepsilon(\lambda)}X\in\mathscr{K}_{k-1}$$

при любом $t\in\mathbf{R}$.

Следовательно $\bar{a}(f)\,b_\varepsilon^*\in\mathscr{K}_{k-1}$. Пусть $1_b\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1})\Omega$, где $g_i\in\mathscr{H}$ выбраны произвольно. Докажем, что

$$(\bar{a}(f)\,b_\varepsilon^*,\ 1_b\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1})\Omega)=0.$$

Действительно

$$\tau_{-t}^{\varepsilon\mathbf{V}}\tau_t^0(1_b\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1}))\Omega=1_b\otimes a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1})\Omega,$$

так как $\mathbf{V}\mathscr{K}_{k-1}\equiv 0$, поэтому

$$\bar{a}^*(g_1)\dots\bar{a}^*(g_{k-1}))\,\Omega=a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1})\Omega. \tag{4.4.26}$$

Далее имеем

$$(\bar{a}(f)\,b_\varepsilon^*,\ a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1})\Omega)=(\bar{a}(f)\,b_\varepsilon^*,\ \bar{a}^*(g_1)\dots\bar{a}^*(g_{k-1})(\Omega)=$$
$$=(b_\varepsilon^*,\ a^*(f)\,a^*(g_1)\dots a^*(g_{k-1})\Omega)=0,$$

где во втором равенстве мы воспользовались тождеством (4.4.26).

Таким образом, мы получаем, что вектор $\bar{a}(b_\varepsilon^*)$, с одной стороны, принадлежит $\mathscr{K}_{k-1}$, а с другой стороны, ортогонален любому элементу из $\mathscr{K}_{k-1}$. Это означает, что $\bar{a}(f)\,(b_\varepsilon^*)$ равен нулю. Равенство (4.4.24) доказано. Равенство (4.4.25) очевидно в силу отсутствия поляризации вакуума.



Определим подпространства $\mathscr{F}'\subseteq\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$, как замыкание линейной оболочки векторов вида

$$\bar{a}^*(g_1)\dots\bar{a}^*(g_n)\Omega,\quad \bar{a}^*(g_1)\dots\bar{a}^*(g_m)\,b_\varepsilon^*,\quad m,n\geqslant 0.$$

Пусть $\{e_n,\ n\geq 1\}$ есть некоторый ортонормированный базис в $\mathscr{H}$.

Положим

$$\varphi_{i_1,\dots,i_n}=1_b\otimes a^*(e_{i_1})\dots a^*(e_{i_n})\Omega,$$
$$\psi_{i_1,\dots,i_n}=b^*\otimes a^*(e_{i_1})\dots a^*(e_{i_n})\Omega.$$

Тогда

$$S=\{\Omega,\ b^*\otimes 1_F\Omega,\ \varphi_{i_1,\dots,i_n},\ \psi_{i_1,\dots,i_n},\ 1\leqslant i_1<\dots<i_n,\ n\geqslant 1\}$$

есть ортонормированный базис в $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$. Это легко проверить, если использовать канонические антикоммутационные соотношения.

Аналогично, пусть

$$\hat{\varphi}_{i_1,\dots,i_n}=\bar{a}^*(e_{i_1})\dots\bar{a}^*(e_{i_n})\Omega,$$
$$\hat{\psi}_{i_1,\dots,i_n}=\bar{a}^*(e_{i_1})\dots\bar{a}^*(e_{i_n})\,b_\varepsilon^*/\|b_\varepsilon\|.$$

Тогда

$$S=\{\Omega,\ b_\varepsilon^*,\ \hat{\varphi}_{i_1,\dots,i_n},\ \hat{\psi}_{i_1,\dots,i_n},\ 1\leqslant i_1<\dots<i_n,\ n\geqslant 1\}$$

есть ортонормированный базис в $\mathscr{F}'$. В этом также нетрудно убедиться.

Определим изометрический оператор $U:\mathscr{H}_{\mathrm{NGS}}\to\mathscr{F}'$ следующим образом

$$U\Omega=\Omega,$$
$$U(b^*\otimes 1_F)\Omega=b_\varepsilon^*,$$
$$U\varphi_{i_1,\dots,i_n}=\hat{\varphi}_{i_1,\dots,i_n},$$
$$U\psi_{i_1,\dots,i_n}=\hat{\psi}_{i_1,\dots,i_n}.$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$(H_0(\lambda)+{}_\varepsilon\mathbf{V})\,U=UH_0(\lambda_\varepsilon), \tag{4.4.27}$$

которое является следствием сплетающего свойства волнового оператора.

Чтобы доказать унитарную эквивалентность $H_\varepsilon(\lambda)$ и $H_0(\lambda_\varepsilon)$. нам достаточно доказать, что $\mathscr{F}'$ совпадает с $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$, потому что из этого факта уже будет следовать унитарность $U$.

Включение $\mathscr{F}'\subset\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$ очевидно. Обратное же включение доказать значительно труднее, и мы сформулируем его в качестве леммы.

Лемма 4.9′. Пространства $\mathscr{H}_{\mathrm{GNS}}$ и $\mathscr{F}'$ совпадают.

## § 4.5. Доказательство теорем 4.1—4.3

В данном параграфе мы докажем теорему 4.1.

Оператор возмущения $V$ имеет ранг 2. Оператор $h_0$ имеет абсолютно непрерывный спектр на $[\mu, \mu+4\nu]$ и собственное значение $\lambda$.

Потребуем от функции $\varphi$, чтобы она была гладкой на $\mathbf{T}^\nu$ и не равнялась тождественно нулю ни на какой линии уровня функции $h$, т. е. на множестве вида

$$\{k : h(k) = \text{const}\}.$$

Теорема 4.10. Пусть операторы $h_0$ и $h_\varepsilon$ имеют вид (4.2.2) и (4.2.3), соответственно. Тогда:

1) если $\lambda$ лежит вне или на границе абсолютно непрерывной части спектра $[\mu, \mu+4\nu]$, то при достаточно малых $\varepsilon$, абсолютно непрерывная часть спектра не меняется, сингулярной не появляется, а собственное значение $\lambda_\varepsilon$ лежит вне $(\mu, \mu+4\nu)$;

2) если $\lambda$ лежит внутри абсолютно непрерывной части спектра $(\mu, \mu+4\nu)$, то при достаточно малых $\varepsilon$, дискретный спектр исчезает, абсолютно непрерывная часть спектра не меняется.

Доказательство. В силу конечности ранга возмущенного оператора абсолютно непрерывная часть спектра $h_\varepsilon$ совпадает с абсолютно непрерывной частью спектра $h_0$ при любом $\varepsilon \in \mathbf{R}$.

Собственный вектор оператора $h_\varepsilon$, если он существует, может быть представлен в виде $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix}$. Рассмотрим сначала случай $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}$ с собственным значением $\lambda'$. Тогда из (4.2.2) и (4.2.3) следует, что

$$h(k)\psi(k) = \lambda'\psi(k). \qquad (4.5.1)$$

Следовательно $\psi(k) \equiv 0$, и этот случай невозможен.

В случае $h_\varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} 1 \\ \psi \end{pmatrix}$ имеем

$$\lambda + \varepsilon \int_{\mathbf{T}^\nu} \psi(k) \bar{\varphi}(k)\, dk = \lambda'$$

$$\varepsilon\varphi(k) + h(k)\psi(k) = \lambda'\psi(k).$$

Следовательно,

$$\psi(k) = -\varepsilon \frac{\varphi(k)}{h(k) - \lambda'}. \qquad (4.5.2)$$

Если $\lambda' \notin [\mu, \mu+4\nu]$, то тогда $\psi \in L_2(\mathbf{T}^\nu)$ и подстановкой (4.5.2) в (4.5.1) получаем уравнение на $\lambda'$

$$\lambda - \varepsilon^2 \int_{\mathbf{T}^\nu} \frac{|\varphi(k)|^2}{h(k) - \lambda'} = \lambda'. \qquad (4.5.3)$$



Если $\lambda' \notin (\mu, \mu+4\nu)$, то тогда для достаточно малых $\varepsilon$ уравнение (4.5.3) имеет единственное решение $\lambda'$, причем

$$\lambda' \notin [\mu, \mu+4\nu], \quad |\lambda - \lambda'| = O(|\varepsilon|^2). \qquad (4.5.4)$$

Пусть $\lambda \in (\mu, \mu+4\nu)$. Так как функция $\Phi$ является гладкой на $\mathbf{T}^\nu$ и не равняется тождественно нулю ни на какой линии уровня функции $h$, то тогда для $\lambda' \notin (\mu, \mu+4\nu)$ функция

$$\psi(k) = -\varepsilon \frac{\varphi(k)}{h(k) - \lambda'}$$

не принадлежит $L_2(\mathbf{T}^\nu)$. Поэтому для достаточно малых $\varepsilon$ уравнение (4.5.3) не имеет решения.

В действительности, функция

$$F(\lambda') = \int_{\mathbf{T}^\nu} \frac{|\varphi(k)|^2}{h(k) - \lambda'} \qquad (4.5.5)$$

является гладкой на множестве $S = \mathbf{R} \setminus [\mu, \mu+4\nu]$, и $F(\lambda') \to 0$ при $\lambda' \to \pm\infty$, причем имеет конечные пределы при $\lambda' \to \mu$ слева и при $\lambda' \to \mu+4\nu$ слева. Таким образом $F(\lambda')$ ограничена на $S$, и выбором $\varepsilon$ мы можем сделать $|\varepsilon^2 F(\lambda')|$ сколь угодно малым. Но

$$|\lambda - \lambda'| \geq \min\{|\lambda - \mu|, |\lambda - \mu - 4\nu|\} > 0.$$

Поэтому уравнение (4.5.3) не имеет решения.

Лемма 4.12. Пусть выполнены следующие условия

1) $\lambda \in \mathbf{R} \setminus [\mu, \mu+4\nu]$, $\varphi \in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$

2) $\lambda \in (\mu, \mu+4\nu)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$

и $\varphi$ не равно тождественно нулю ни на какой линии уровня функции $h(k) = \sum_{i=1}^{\nu} 2(1 - \cos(k_i)) + \mu$.

Тогда $h$ не имеет сингулярного спектра для достаточно малых $\varepsilon$.

Доказательство. Чтобы доказать лемму 4.11, мы воспользуемся следующим хорошо известным фактом.

Утверждение 4.13 ([53]). Пусть $d\mu$ — конечная положительная мера на $\mathbf{R}$ с носителем в $(a, b)$ и

$$v_y(x) \equiv v(x, y) = \int P_y(t - x)\, d\mu(t)$$

$$P_y(t - x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(t - x)^2 + y^2}.$$

а) Если $v_y(x)$ сходится к $\rho(x) \in L_1(a, b)$ при $y \to \pm 0$ в $L_1$-норме, то $\mu(t)$ абсолютно непрерывна и $d\mu(t) \equiv \rho(t)\, dt$.

б) Если $\mu(t)$ абсолютно непрерывна и $d\mu(t) \equiv \rho(t)\, dt$, $\rho(t) \in C(\mathbf{R})$, $\rho(t) \equiv 0$ для $t \notin (a, b)$, то $v_y(x)$ сходится к $\rho(x) \in L_1(a, b)$ при $y \to \pm 0$ равномерно по $[a, b]$.

Существенный спектр $h_0$ и $h_\varepsilon$ один и тот же. Поэтому сингулярный спектр оператора $h_\varepsilon$ должен быть сосредоточен в $[\mu, \mu+4\nu]$. Пусть $E_x$ есть спектральное семейство оператора $h_\varepsilon$. Докажем, что на плотном подмножестве векторов $F$, ограничение меры $(E_xF, F)$ на $[\mu, \mu+4\nu]$ абсолютно непрерывно по отношению к мере Лебега.

Положим для $z=x+iy$, $y>0$

$$R(z)=R_F(z)=((h-z)^{-1}F, F),$$

где $F$ будет определен позднее, и определим меру $\mu(t)$ следующим образом

$$v(x, y)\overset{\text{def}}{=}\pi^{-1}\operatorname{Im} R(z)=\pi^{-1}\int \operatorname{Im}(t-z)^{-1}d(E_xF, F)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\,d(E_xF, F). \tag{4.5.6}$$

Вычисление резольвенты дает

$$(h-z)^{-1}\begin{pmatrix} c \\ \psi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde c \\ \tilde\psi \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde c=\left[c-\varepsilon\int\frac{\psi\bar\varphi}{h-z}\,dk\right]\left[\lambda-z-\varepsilon^2\int_{T^\nu}\frac{|\varphi(k)|^2}{h(k)-z}\,dk\right]. \tag{4.5.7}$$

Пусть $S=\left\{F=\begin{pmatrix} c \\ \psi \end{pmatrix}:\psi\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)\right\}$. Очевидно, $S$ всюду плотно в $C\oplus L_2(\mathbf{T}^\nu)$. Положим для краткости

$$\varphi_z(\psi)=\int\frac{\psi\bar\varphi}{h-z}\,dk$$

для любого $\psi\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$, $\operatorname{Im} z>0$.

Зафиксируем произвольные $F=\begin{pmatrix} c \\ \psi \end{pmatrix}\in S$, $z=x+iy$, $y>0$.

Тогда

$$R(z)=\left((h-z)^{-1}\begin{pmatrix} c \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ \psi \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\varphi_z(|\psi|^2)+\frac{[c-\varepsilon\varphi_z(\psi\bar\varphi)]\,[\bar c-\varepsilon\varphi_z(\psi\varphi)]}{\lambda-z-\varepsilon^2\varphi_z(|\varphi|^2)}. \tag{4,5.8}$$

Лемма 4.13. Для любого $\psi\in C^\infty(\mathbf{T}^\nu)$, $\nu\geqslant 3$, $z=x+iy$, $y>0$ и любого $x\in[\mu, \mu+4\nu]$ существуют следующие пределы

$$\lim_{y\to+0}\varphi_{x+iy}(\psi)=\varphi_{x+0i}(\psi). \tag{4.5.9}$$

Более того, (4.5.) сходится равномерно на $[\mu, \mu+4\nu]$ и $F_{x+0i}(\psi)\in C([\mu, \mu+4\nu])$.



Доказательство леммы 4. Имеем

$$\varphi_z(\psi)=\int\frac{\psi(k)}{h(k)-z}\,dk=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J(t)}{t-z}\,dt, \tag{4.5.10}$$

где $J(t)\equiv J_{\psi,h}(t)$ есть форма Гельфанда—Лере. Функция $J(t)$ имеет следующие свойства:

1. $J(t)\in C^\infty(\mu, \mu+4\nu)$.
2. $J(t)\equiv 0$, $t\in\mathbf{R}\setminus(\mu, \mu+4\nu)$.
3. $|J(t)|\sim A_n(t-\mu)^{(\nu/2-1)-n}$, $t\to\mu+0$.

$|J(t)|\sim B_n(\mu+4\nu-t)^{(\nu/2-1)-n}$, $t\to\mu+4\nu-0$,

где $n=0, 1, \ldots$ и $A_n$, $B_n$ — некоторые константы.

Имеем

$$\varphi_z(\psi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-x)J(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yJ(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt, \tag{4.5.11}$$

Для $\nu\geqslant 3$, $J(t)$ непрерывна и, как следует из леммы 4, второе слагаемое в (4.5.11) равномерно на $[\mu, \mu+4\nu]$ стремится к $i\pi J(x)$ при $y\to+0$.

Докажем, что и первое слагаемое в (4.5.11) равномерно на всем $\mathbf{R}$ стремится к преобразованию Гильберта функции $J(t)$, т. е. к

$$GJ(x)=\int_0^\infty\frac{J(x+t)-J(x-t)}{t}\,dt. \tag{4.5.12}$$

Легко видеть, что $J(t)$ удовлетворяет условию Гельдера

$$|J(t+\delta)-J(t)|\leqslant C|\delta|^{1/2}. \tag{4.5.13}$$

Следовательно, (4.5.12) корректно определен. Следовательно,

$$v_J(x, y)\overset{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t-x)J(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt=\int_0^\infty\frac{t[J(x+t)-J(x-t)]}{t^2+y^2}\,dt.$$

Из неравенства (4.5.13) следует, что

$$|v_J(x, y)-GJ(x)|=\left|\int_0^\infty\frac{y^2}{t^2+y^2}\,\frac{t[J(x+t)-J(x-t)]}{t}\,dt\right|=$$

$$=O\left(\int_0^\infty\frac{y^2t^{-1/2}}{t^2+y^2}\,dt\right)=o(1) \tag{4.5.14}$$

Таким образом, мы доказали, что $\Phi_{x+iy}(\psi)$ равномерно по $[\mu, \mu+4\nu]$ стремится к

$$\Phi_{x+i0}(\psi)=GJ_{\psi}(x)+i\pi J_{\psi}(x). \tag{4.5.15}$$

Следовательно, $J_{\psi}(x)$ удовлетворяет условию Гельдера (4.5.13), тогда $GJ_{\psi}(x)$ тоже удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1/2-\delta'$, где $\delta'>0$ можно выбрать сколь угодно малой ([8]). Таким образом, мы получили, что функция $\Phi_{x+i0}(\psi)$ непрерывна. Лемма 4.13 доказана.

Мы получили, что для любой $\psi\in C^{\infty}(\mathbf{T}^{\nu})$, $\nu\geqslant 3$

$$\lim_{y\to+0} R(x+iy)=\varphi_{x+i0}(|\psi|^2)+\frac{[c-\varepsilon\varphi_{x+i0}(\psi\bar{\varphi})][\bar{c}_{x+i0}-\varepsilon\varphi(\bar{\psi}\varphi)]}{\lambda-x-\varepsilon^2\varphi_{x+i0}(|\varphi|^2)}=$$

$$\overset{\text{def}}{=}R(x+i0) \tag{4.5.16}$$

существует. Докажем, что в (4.5.16) имеет место равномерная сходимость на любом интервале $(a, b)\subseteq(\mu, \mu+4\nu)$.

Действительно, если условие 2 леммы 4.11 удовлетворено, то тогда мнимая часть $-\varepsilon^2\pi J_{|\varphi|^2}(x)$ знаменателя в (4.2.16) не равна нулю. Если же удовлетворено условие 1 этой леммы, то тогда действительная часть $\lambda-x-\varepsilon^2 GJ_{|\varphi|^2}(x)$ знаменателя в (4.2.16) не равна нулю.

Таким образом из равномерной сходимости $\varphi_{x+i0}(\psi)$ при $y\to+0$ следует нужная нам равномерная сходимость. Утверждение 4.12 показывает, что $(E_xF, F)$ абсолютно непрерывна на любом $(a, b)\subseteq(\mu, \mu+4\nu)$, причем

$$\rho(x)=\pi^{-1}\operatorname{Im} R(x+i0) \tag{4.5.17}$$

Лемма 4.11 полностью доказана, так как $\mu$ и $\mu+4\nu$ не являются собственными значениями оператора $h_{\varepsilon}$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Айзенштадт В. В.* Унитарная эквивалентность гамильтонианов в фоковском пространстве // Успехи мат. наук.— 1988.— *39*, № 2.— С. 220—221.
2. *Ботвич Д. Д., Малышев В. А.* Доказательство асимптотической полноты равномерно по числу частиц // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1990.— *24*, № 1.— С. 132—145.
3. *Домненков А. Ш.* Асимптотическая полнота для системы частица—ферми-газ // Теор. и мат. физ.— 1987.— *71*, № 3.— С. 120—127.
4. — Марковский предел для частицы, взаимодействующей с газом // Теор. и мат. физ.— 1989.— *79*, № 2.— С. 263—271.
5. *Малышев В. А.* Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической механики // Успехи мат. наук.— 1980.— *35*, № 2.— С. 3—53.
6. —, *Минлос Р. А.* Кластерные операторы // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1983.— Вып. 9.— С. 63—80.
7. —, — Гиббсовские случайные поля.— М.: Наука, 1985.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. 3-е изд.— М.: Наука, 1968.





9. *Сухов Ю. М.* Сходимость к равновесному состоянию для одномерной квантовой системы твердых стержней // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1982. — *46*.— С. 1274—1315.
10. — Сходимость к равновесному состоянию для свободного ферми-газа // Теор. и мат. физ.— 1983.— *55*, № 2.— С. 282—290.
11. —, *Шухов А. Г.* Сходимость к стационарному состоянию для одномерных решетчатых квантовых моделей твердых стержней // Теор. и мат. физ.— 1987.— *73*, № 1.— С. 125—140.
12. —, — Гидродинамические приближения для групп преобразований Боголюбова в квантовой статистической механике // Тр. Моск. матем. об-ва.— 1987.— *50*.— С. 156—208.
13. *Терлецкий Ю. А.* Метрический изоморфизм классического идеального газа его локальному возмущению // Теор. и мат. физ.— 1989.— *81*, № 3.— С. 323—335.
14. *Фаддеев Л. Д.* Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1963.— Вып. 69.— С. 1—122.
15. — О разделении эффектов самодействия и рассеяния по теории возмущений // Докл. АН СССР.— *152*, № 3.— С. 573—576.
16. — О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1964.— Вып. 73.
17. *Чистяков А. Л.* Об операторе рассеяния в пространстве вторичного квантования // Докл. АН СССР.— 1964.— *158*.— С. 66—70.
18. *Aizenstadt V. V., Malyshev V. A.* Spin interaction with an ideal fermi gas // J. Stat. Phys.— 1987.— *48*, № 1/2.— С. 51—68.
19. *Araki H.* On the dynamics and ergodic properties of the XY-model // J. Stat. Phys.— 1983.— *31*, № 2.— С. 327—346.
20. — On the *XY*-model on two-sided infinite chain // Publ. RIMS Kyoto Univ. — 1984.— *20*.— С. 255—296.
21. —, *Wyss W.* Representations of the canonical anticommutation relations // Helv. Phys. Acta.— 1964.— *37*, № 2.— С. 136—159.
22. —, *Barouch E.* On the dynamics and ergodic properties of the XY-model // J. Stat. Phys.— 1983.— *31*, № 2.— С. 327—346.
23. *Boldrighini C., Dobrushin R. L., Suhov Yu. M.* One-dimensional caricature of hydrodynamics // J. Stat. Phys.— 1983.— *31*, № 3.— P. 577—615.
24. —, *Pellegrinotti A., Triolo L.* Convergence to stationary states for infinite harmonic systems // J. Stat. Phys.— 1983.— *30*, № 1/2.— С. 123—155.
25. *Botvich D. D.* Spectral properties of GNS-Hamiltonoan in quasi-free state // Lect. Notes Math.— 1983.— *1021*.— С. 65—71.
26. —, *Malyshev V. A.* Unitary equivalence of temperature dynamics of ideal and locally pertubed fermi-gas // Commun. Math. Phys.— 1983.— *91*, № 4. — С. 301—312.
27. *Bratteli O., Robinson D. W.* Operator algebras and quantum statistical mechanics, I.— Berlin, Springer—Verlag, 1979. (Пер. на рус. яз.: *Браттели О., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. 1.— М.: Мир, 1982.)
28. —, — Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, II.— Berlin, Springer—Verlag, 1981.
29. *Buchholz D., Fredenhagen K.* Clustering, charge-screening and mass-spectrum in local quantum field theory. In: Mathematical problems in theoretical physics, K. Ososterwalder, ed.— Berlin: Springer—Verlag, 1980.
30. *Cook J. M.* The mathematics of second quantization // Trans. Amer. Math. Soc.— 1953.— *74*.— С. 222—245.
31. *Davies E. B.* Diffusion for weakly coupled quantum Oscillators // Commun. Math. Phys.— 1972.— *27*, № 4.— С. 309—325.
32. — The harmonic oscillator in a heat bath // Commun. Math. Phys.— 1973. — *33*, № 2.— С. 171—182.
33. — Markovian master equation // Commun. Math. Phys.— 1974.— *39*, № 2. — С. 91—110.

34. — Dynamics of a multilevel Wigner—Weisskopf atoms // J. Math. Phys.— 1974.— *15*, № 11.— C. 2036—2039.
35. — Particle-boson interactions and the weak coupled limit // J. Math. Phys. — 1979.— *20*, № 3.— C. 345—351.
36. — Markovian master equation III // Ann. Inst. Henri Poincaré B.— 1976. — *11*.— C. 265—273.
37. — Markovian master equation II // Math. Ann.— 1976.— *219*.— C. 147—158.
38. — Resonances, spectral consentration and exponential decay // Let. Phys. — 1975.— *1*, № 1.— C. 31—35.
39. —. Quantum Theory of Open Systems // London, Academic Press, 1976.
40. — One-Parameter Semigroups // London, Academic Press, 1982.
41. *Dobrushin R. L., Fritz J.* Nonequilibrium dynamics of two-dimensional infinite particles systems with a singular interaction // Commun. Math. Phys.— 1977.— *57*, № 1.— C. 67—75.
42. *Dümcke R.* Convergence of multi-time correlation functions in the weak and singular coupling limit // J. Math. Phys.— 1983, *24*.— C. 311—315.
43. — The low density limit for an *N*-level system interacting with free Bose or Fermi gas // Commun. Math. Phys.— 1985.— *97*, № 4.— C. 331—344.
44. *Evans D. E.* Scattering in CAR-algebra // Commun. Math. Phys.— 1976.— *48*, № 1.— C. 23—30.
45. — Positive linear maps on operator algebra // Commun. Math. Phys.— 1976.— *48*, № 1.— C. 15—22.
46. — Complete positive quasi-free maps on the CAR algebra // Commun. Math. Phys.— 1979.— *70*, № 1.— C. 53—68.
47. *Friedrichs K. O.* Perturbations of spectra in hilbert space.— Rhode Island: Amer. Math. Soc. Providence, 1965. (Пер. на рус. яз. *Фридрихс К.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1969. — 231 с.)
48. *Frigerio A., Gorini V.* N-level systems in contact with singular reservoir // J. Math. Phys.— 1976.— *17*, № 12.— C. 2123—2127.
49. —, — On stationary Markov dilations of quantum dynamical semigroups // Lect. Notes Math.— 1984.— *1055*.— P. 119—125.
50. *Glimm J., Jaffe A.:* Quantum Physics. A Functional integral Point of View. Second Edition.— N. Y., Springer—Verlag, 1988.— 535 c.
51. *Gorini V., Kossakowski A.* N-level system in contact with a singular reservoir // J. Math. Phys.— 1976.— *17*, № 7.— C. 1298—1305.
52. —, — *Sudarshan E. C. G.* Completely positive dynamical semigroups on N-level systems // J. Math. Phys.— 1976.— *17*, № 5.— C. 821—825.
53. *Gustafson K., Jonson G.* On the absolutely continuous subspace of a self-adjoint operator // Helv. Phys. Acta.— 1974.— *47*.— C. 163—166.
54. *Hepp K.* Theorie de la renormalisation.— Berlin, Springer—Verlag, 1969. (Пер. на рус. яз.: *Хепп К.* Теория перенормировок.— М., Наука, 1974.— 255 с.).
55. —, *Lieb E.* Phase transition in reservoir-driven open systems with applications to laser and superconductors // Helv. Phys. Acta.— 1973.— *46*.— C. 573—603.
56. *Hoegh-Krohn J. R.* Partly gentle perturbations with application to perturbations by annihilation-creation operators // Commun. Pure Appl. Math.— 1968.— *21*.— C. 313—342.
57. — Gentle perturbations by annihilation-creation operators // Commun. Pure Appl. Math. 1968.— *21*.— C. 343—357.
58. — Boson fields under a general class of cut-off interactions // Commun. Maeh. Phys.— 1969.— *12*, № 3.— C. 216—223.
59. — Boson fields with bounded interaction densities // Commun. Math. Phys. — 1970.— *17*, № 3.— C. 179—187.
60. — On the scattering operator for quantum fields // Commun. Math. Phys. — 1970.— *18*, № 2.— C. 109—126.
61. — A general class of quantum fields without cut-offs in two spase-time dimensions // Commun. Math. Phys.— 1971.— *21*, № 3.— C. 244—255.



62. *Iorio R., O'Carroll M.* Asymptotic completeness for multi-particle Schrödinger Hamiltonians with weak potentials // Commun. Math. Phys.— 1972.— *27*, № 2.— C. 137—145.
63. *Lanford O. E., Robinson D. W.* Statistical mechanics of quantum spin systems III // Commun. Math. Phys.— 1968.— *9*, № 4.— C. 327—338.
64. —, — Approach to equilibrium of free quantum systems // Commun. Math. Phys.— 1972.— *24*, № 3.— C. 193—210.
65. *Lindblad G.* On the generators of quantum dynamical semigroups // Commun. Math. Phys.— 1976.— *48*, № 2.— C. 119—130.
66. *Maassen H.* On the invertibility of Möller morphisms // J. Math. Phys.— 1982.— *23*, № 10.— C. 1848—1851.
67. *Malyshev V. A.* Uniform cluster expansion for the lattice models // Commun. Math. Phys.— 1979.— *64*, № 2.— C. 131—157.
68. — Convergence in the linked cluster theorem for many body fermion systems // Commun. Math. Phys.— 1988.— *119*, № 4.— C. 501—508.
69. —, *Minlos R. A.* Invariant subspaces of clustering operators. I // J. Stat. Phys.— 1979.— *21*, № 3.— C. 231—242.
70. —, *Minlos R. A.* Invariant subspaces of clustering operators. II // Commun. Math. Phys.— 1981.— *82*, № 3.— C. 211—226.
71. —, *Nicolaev I., Terlecky Yu. A.* Temperature dynamics of the locally perturbed classical ideal gas // J. Stat. Phys.— 1985.— *40*, № 1/2.— C. 133—146.
72. *Palmer P. F.* The singular coupling and weal coupling limits // J. Math. Phys.— 1977.— *18*.— C. 527—529.
73. *Powers R., Störmer E.* Free states of the canonocal anti-commutation relations // Commun. Math. Phys.— 1970.— *16*, № 1.— C. 1—33.
74. *Presutti E., Sinai Ya. G., Soloveichik M. R.* Hyperbolisity and Möller—Morphism for a model of classical statistical mechanics // Progr. Phys.— 1985.— *10*.— C. 253—284.
75. *Pule G. V.* The Bloch equations // Commun. Math. Phys.— 1974.— *38*, № 3.— C. 241—256.
76. *Read M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. II.— N. Y.: Academic Press, 1975. (Пер. на рус. яз.: *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2.— М., Мир, 1978)
77. —, — Methods of modern mathematical physics. III.— N. Y.: Academic Press, 1979. (Пер. на рус. яз.: *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3.— М.: Мир, 1982)
78. —, — Methods of modern mathematical physics. IV.— N. Y.: Academic Press, 1978. (Пер. на рус. яз.: *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4.— М.: Мир, 1982)
79. *Rejto P. A.* On gentle perturbations. I // Pure Appl. Math.— 1963.— *16*.— C. 279—303.
80. — On gentle perturbations. II // Pure Appl. Math.— 1964.— *17*.— C. 253—292.
81. *Robinson D. W.* Statistical mechanics of quantum spin systems // Commun. Math. Phys.— 1967.— *6*, № 2.— C. 151—160.
82. — Statistical mechanics of quantum spin systems II // Commun. Math. Phys.— 1968.— *7*, № 4.— C. 337—348.
83. — Return to equilibrium // Commun. Math. Phys.— 1973.— *31*, № 2.— C. 171—189.
84. *Rocca F., Sirague M., Testard D.* On a class of equilibrium states under Kubo—Martin—Schwinger boundary condition. I. Fermions // Commun. Math. Phys.— 1969.— *13*, № 4.— C. 317—334.
85. —, —, — On a class of eqilibrium states under Kubo—Martin—Schwinger boundary condition. II. Bosons // Commun. Math. Phys.— 1970.— *19*, № 2.— C. 119—141.
86. *Ruelle D.* Statistical mechanics, rigorous results.— N. Y., Benjamin, 1969. (Пер. на рус. яз.: *Рюэль Д.* Статистическая механика. Строгие результаты.— М.: Мир, 1971.)

87. *Shale D., Stinespring W. F.* States on the Clifford algebra // Ann. Math.— 1964.— *80*.— С. 365—381.
88. *Spohn H.* Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits // Rev. Mod. Phys.— 1980.— *52*.— С. 569—615.
89. *Störmer E.* Positive linear maps of operator algebra // Acta Math.— 1963. — *110*.— С. 233—278.
90. — Spectra of states, and asymptotically abellian $C^*$-algebras // Commun. Math. Phys.— 1972.— *28*, № 3.— С. 279—294.
91. *Takesaki M.* Tomita's theory of modular Hilbert-algebras and its applications // Lect. Notes Math.— 1970.— *128*.

УДК 519.248

# УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*И. А. Игнатюк, В. А. Малышев, Т. С. Турова*

## *Глава 1*

## ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

### § 0. Введение

Пусть дана эргодическая цепь Маркова $L$ со значениями в множестве $U$. Это значит, в частности, что для любого начального состояния при $t\to\infty$ имеет место сходимость к единственному стационарному распределению на фазовом пространстве этой цепи. Если мы возьмем теперь счетное число независимых экземпляров $L_x$ цепи $L$, занумерованных точками $x$ решетки $Z^\nu$, т. е. для каждой точки $x$ задана начальная случайная величина $\xi_0(x)$ со значениями в $U$, то развитие процесса происходит в каждой точке $x$ независимо. Это определяет довольно простой марковский процесс со значениями в $U^{Z^\nu}$, который также обладает свойством сходимости к единственному стационарному распределению для любого начального состояния. Далее мы рассматриваем слабые возмущения процесса, сохраняющие равноправность точек (трансляционная инвариантность), но вводящие зависимость между процессами в разных точках. Мы доказываем теорему устойчивости: сходимость к единственному стационарному распределению для начальных условий, моменты которых не слишком растут при $\|x\|\to\infty$. В действительности мы в некоторых предположениях относительно цепи $L$ получаем существенно больше: экспоненциальную сходимость и явный ряд для стационарного распределения.

Эта задача имеет определенную историю. Для конечного $U$ первые результаты о сходимости были одновременно получены в работах [2], [4], используя метод Добрушина [10]. Новый метод был предложен в [5]. В рамках современной идеологии теории кластерных разложений это было сделано в [27], [25]. Если $U$ бесконечно, то возникают существенные технические