ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Том 37 Выпуск 4

1992

 ИГНАТЮК И. А., МАЛЫШЕВ В. А., СИДОРАВИЧУС В.

# СХОДИМОСТЬ МЕТОДА СТОХАСТИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ. II

## II. Метод стохастического квантования для грассмановых гиббсовских полей

**1. Аналог исчисления Ито на грассмановых алгебрах.** Определим сначала основные понятия стохастического исчисления на грассмановых алгебрах. Аналогом вероятностных мер здесь являются квазисостояния на грассмановых алгебрах. Мы определим понятие случайного процесса, винеровского процесса, стохастические интегралы по грассманову винеровскому процессу так, чтобы выполнялись свойства, аналогичные свойствам стохастических интегралов в классическом случае.

Пусть $\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$. Рассмотрим грассманову алгебру $\mathfrak{A}_0^\Lambda$ с образующими $\mathbf{1}$, $\xi^{(\alpha,x)}$, $\overline{\xi}^{(\alpha,x)}$, $(\alpha, x) \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda$ для каждого $t \in \mathbf{R}_+$ грассманову алгебру $W_t^\Lambda$ с образующими $\mathbf{1}$, $w^{(\alpha,x)}(t)$, $\overline{w}^{(\alpha,x)}(t)$, $(\alpha, x) \in \{1, \ldots, N\} \times \times \Lambda$, грассманову алгебру $W_{t]}^\Lambda$ с образующими $\mathbf{1}$, $w^{(\alpha,x)}(t')$, $\overline{w}^{(\alpha,x)}(t')$, $(\alpha, x) \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda$, $t' \in [0, t]$ и грассманову алгебру $W_\infty^\Lambda$ с образующими $\mathbf{1}$, $w^{(\alpha,x)}(t)$, $\overline{w}^{(\alpha,x)}(t)$, $(\alpha, x) \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda$, $t' \in \mathbf{R}_+$, $t > 0$.

Обозначим

$$\mathfrak{A}_t^\Lambda = \mathfrak{A}_0^\Lambda \otimes W_t^\Lambda, \quad \mathfrak{A}_{t]}^\Lambda = \mathfrak{A}_0^\Lambda \otimes W_{t]}^\Lambda, \quad \mathfrak{A}_\infty^\Lambda = \mathfrak{A}_0^\Lambda \otimes W_\infty^\Lambda.$$

Здесь и далее все алгебры мы рассматриваем над полем $\mathbf{C}$.

Для удобства обозначений мы будем использовать мультииндексы $\mu = (\mu^1, \ldots, \mu^k)$, $\mu^j \in \{1, \ldots, N\} \times \mathbf{Z}^d$, $k \in \mathbf{Z}_+$, записывая

$$\xi^\mu = \xi^{\mu_1} \cdots \xi^{\mu_k}, \quad \overline{\xi}^\mu = \overline{\xi}^{\mu_1} \cdots \overline{\xi}^{\mu_k}, \quad \xi^\varnothing = 1,$$
$$w^\mu(t) = w^{\mu_1}(t) \cdots w^{\mu_k}(t), \quad \overline{w}^\mu(t) = \overline{w}^{\mu_1}(t) \cdots \overline{w}^{\mu_k}(t).$$

Удобно ввести на множестве $\{1, \ldots, N\} \times \mathbf{Z}^d$ порядок и считать, что $\mu^1 < \ldots < \mu^k$.

Обозначим множество мультииндексов $\mu = (\mu^1, \ldots, \mu^k)$, $k \in \mathbf{Z}_+$, $\mu^j \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda$, $j = 1, \ldots, k$, $\mu^1 < \ldots < \mu^k$, включая $\mu = \varnothing$, через $M_\Lambda$.

О п р е д е л е н и е 1. Винеровским квазисостоянием на $W_\infty^\Lambda$ называется гауссовское квазисостояние $\langle\cdot\rangle_w$ на $W_\infty^\Lambda$, удовлетворяющее условиям

$$\langle w^{(\alpha,x)}(t)\,w^{(\beta,y)}(s)\rangle_w = \langle \overline{w}^{(\alpha,x)}(t)\,\overline{w}^{(\beta,y)}(s)\rangle_w = 0,$$
$$\langle w^{(\alpha,x)}(t)\,\overline{w}^{(\beta,y)}(s)\rangle_w = \delta_{\alpha\beta}\delta_{xy}\min\{t,\ s\}$$

для всех $\alpha,\beta\in\{1,\ldots,N\}$, $x,y\in\Lambda$, $t,s\in\mathbf{R}_+$.

Нам понадобится следующее свойство винеровского квазисостояния, какое фактически есть отражение независимости белого шума.

**Утверждение 1.** *Для любого $w\in W_\infty^\Lambda$ найдется $w'\in W_\infty^\Lambda$, такое, что $\langle ww'\rangle\neq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что любой элемент $w\in W_\infty^\Lambda$ можно представить в виде конечной суммы мономов вида

$$\mathrm{const}\cdot w_{\Delta_1}^{\mu_1}\ \cdots\ w_{\Delta_k}^{\mu_k}\ \overline{w}_{\Delta_{k+1}}^{\mu_{k+1}}\ \cdots\ \overline{w}_{\Delta_{k+n}}^{\mu_{k+n}}, \tag{1}$$

где для $j=1,\ldots,k+n$

$$\mu_j\in\{1,,\ \ldots,\ N\}\times\Lambda,\quad \Delta_j(t_j,t_j']$$
$$\widetilde{w}_{\Delta_j}^{\mu_j}=\widetilde{w}^{\mu_j}(t_j')-\widetilde{w}^{\mu_j}(t_j),\quad \text{если } t_j'\neq 0,$$
$$\widetilde{w}_{\Delta_j}^{\mu_j}=\widetilde{w}_{t_j'}^{\mu_j},\quad \text{если } t_j=0,\quad (\widetilde{w} \text{ означает } w \text{ либо } \overline{w}),$$

и наборы интервалов $\{\Delta_j\}_{j=1}^{k+n}$ и $\{\Delta_j'\}_{j=1}^{k'+n'}$, соответствующие любым двум разным слагаемым, удовлетворяют условию: любые два интервала из множества $\{\Delta_j,\ \Delta_i,\ j=1,\ldots,k+n;\ i=1,\ldots,k'+n'\}$ либо не пересекаются, либо совпадают.

В случае, когда

$$w=\mathrm{const}\cdot w_{\Delta_1}^{\mu_1}\ \cdots\ w_{\Delta_k}^{\mu_k}\ \overline{w}_{\Delta_{k+1}}^{\mu_{k+1}}\ \cdots\ \overline{w}_{\Delta_{k+n}}^{\mu_{k+n}},$$

доказательство очевидно.

Далее, пусть $w=w_1+\ldots+w_m+w_{m+1}$, причем $w_{m+1}=\mathrm{const}\times$ $\times\overline{w}_{\Delta_1}^{\mu_1}\cdots\overline{w}_{\Delta_k}^{\mu_k}\overline{w}_{\Delta_{k+1}}^{\mu_{k+1}}\cdots\overline{w}_{\Delta_{k+n}}^{\mu_{k+n}}$ выбирается таким образом, что среди оставшихся слагаемых $w_1,\ldots,w_m$ найдется хотя бы одно, которое не содержит всех множителей из $w_{m+1}$, и набор полуинтервалов $\{\Delta_j'\}_{j=1}^{k'+n'}$, соответствующий любому слагаемому, удовлетворяет условию: любые два интервала из множества $\{\Delta_j,\ \Delta_i',\ j=1,\ldots,n+k;\ i=1,\ldots,k'+n'\}$ либо совпадают, либо не пересекаются. Тогда существует такой элемент $\widehat{w}\in W_\infty^\Lambda$, что

$$w\,\widehat{w}=w_1\widehat{w}\neq 0.$$

Таким образом, если $\langle ww'\rangle=0$ для любого $w'\in W_\infty^\Lambda$, то и

$$\langle w_1\,\widehat{w}\,w'\rangle=0$$

для любого $w'\in W_\infty^\Lambda$. Отсюда с помощью индукции по числу слагаемых в разложении $w$ на мономы вида (1), нетрудно получить утверждение 1.

Мы будем рассматривать на $\mathfrak{A}_\infty^\Lambda = \mathfrak{A}_0^\Lambda \otimes W_\infty^\Lambda$ квазисостояния вида $\omega(\cdot) = \langle\cdot\rangle_0 \otimes \langle\cdot\rangle_w$, где $\langle\cdot\rangle_0$ — какое-либо квазисостояние на $\mathfrak{A}_0^\Lambda$. Множество всех таких квазисостояний на $\mathfrak{A}_\infty^\Lambda$ обозначим через $\sigma^\Lambda$.

Рассмотрим на $\mathfrak{A}_\infty^\Lambda$ систему полунорм $\rho_{\zeta,\omega}(\cdot)$, $\zeta \in \mathfrak{A}_\infty^\Lambda$, $\omega \in \sigma^\Lambda$:

$$\rho_{\zeta,\omega}(\xi) = \left|\omega(\zeta\,\xi)\right|.$$

Из утверждения 1 следует, что данная система полунорм разделяет точки, т.е. из условия $\rho_{\zeta,\omega}(\xi) = 0$ для всех $\xi \in \mathfrak{A}_\infty^\Lambda$, $\omega \in \sigma^\Lambda$ следует, что $\xi = 0$. Таким образом, локально выпуклая топология на $\mathfrak{A}_\infty^\Lambda$, в которой непрерывны все $\rho_{\zeta,\omega}$, $\zeta \in \mathfrak{A}_\infty^\Lambda$, $\omega \in \sigma^\Lambda$, и в которой непрерывна операция сложения, является хаусдорфовой. Обозначим через $\overline{\mathfrak{A}_\infty^\Lambda}$ замыкание $\mathfrak{A}_\infty^\Lambda$ относительно этой топологии.

Перейдем теперь к определению случайных процессов и стохастических интегралов.

Рассмотрим грассманову алгебру $\mathcal{A}_\infty^\Lambda$ с образующими 1, $\xi^{(\alpha,x)}(t)$, $\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t)$, $(\alpha, x) \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda$, $t \in \mathbf{R}_+$, и обозначим через $\mathcal{A}_t^\Lambda$, $t \in \mathbf{R}_+$, грассманову алгебру с образующими 1, $\xi^{(\alpha,x)}(t)$, $\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t)$, $(\alpha, x) \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda$ и через $\mathcal{A}_{t]}^\Lambda$, $t \in \mathbf{R}_+$, грассманову алгебру с образующими 1, $\xi^{(\alpha,x)}(t')$, $\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t')$, $(\alpha, x) \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda$, $t' \in [0, t]$.

Определение 2. Винеровским грассмановым случайным процессом назовем гомоморфизм $w$: $\mathcal{A}_\infty^\Lambda \to \mathfrak{A}_\infty^\Lambda$, где

$$\begin{aligned} &w\colon \xi^{(\alpha,x)}(t) \longrightarrow w^{(\alpha,x)}(t),\\ &w\colon \overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t) \longrightarrow \overline{w}^{(\alpha,x)}(t), \quad (\alpha,x) \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda, \ t \in \mathbf{R}_+. \end{aligned}$$

Данное определение является частным случаем определения 4. Все остальные грассмановы случайные процессы, которое мы будем рассматривать, мы построим из винеровского.

Определим стохастические интегралы

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^{\mu\nu}(T_1, T_2) &= \int_{T_1}^{T_2} w^\mu(t)\overline{w}^\nu(t)\,dt,\\ \mathfrak{J}^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(T_1, T_2) &= \int_{T_1}^{T_2} w^\mu(t)\overline{w}^\nu(t)\,dw^{(\alpha,x)}(t),\\ \overline{\mathfrak{J}}^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(T_1, T_2) &= \int_{T_1}^{T_2} w^\mu(t)\overline{w}^\nu(t)\,d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t) \end{aligned}$$

для всех $\mu, \nu \in M_\Lambda$, $(\alpha, x) \in \{1, \ldots, \Lambda\} \times \Lambda$, $T_1, T_2 \in \mathbf{R}_+$, $T_1 < T_2$, как предел соответствующих частичных сумм

$$S^{\mu\nu}(t_0,\ \ldots,\ t_n)=\sum_{j=0}^{n-1} w^{\mu}(t_j)\overline{w}^{\nu}(t_j)(t_{j+1}-t_j),$$

$$S^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(t_0,\ \ldots,\ t_n)=\sum_{j=0}^{n-1} w^{\mu}(t_j)\overline{w}^{\nu}(t_j)\big(w^{(\alpha,x)}(t_{j+1})-w^{(\alpha,x)}(t_j)\big),$$

$$S^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(t_0,\ \ldots,\ t_n)=\sum_{j=0}^{n-1} w^{\mu}(t_j)\overline{w}^{\nu}(t_j)\big(\overline{w}^{(\alpha,x)}(t_{j+1})-\overline{w}^{(\alpha,x)}(t_j)\big),$$

когда диаметр разбиения $T_1=t_0<t_1<\ldots<t_n=T_n$ стремится к нулю.

Нетрудно показать, что во введенной топологии предел каждой из этих частичных сумм существует, и, более того, существует предел всевозможных произведений

$$\begin{gathered}
S^{\mu_1\nu_1}(t_0^1,\ \ldots,\ t_n^1)\ \cdots\ S^{\mu_k\nu_k}(t_0^1,\ \ldots,\ t_n^1)\ S^{\mu_{11}\nu_{11}}_{(\alpha_1,x_1)}(t_0^{11},\ \ldots,\ t_n^{11})\times\cdots\\
\cdots\times S^{\mu_{1l}\nu_{1l}}_{(\alpha_l,x_l)}(t_0^{1l},\ \ldots,\ t_n^{1l})\,\overline{S}^{\mu_{21}\nu_{21}}_{(\beta_1,y_1)}(t_0^{21},\ \ldots,\ t_n^{21})\times\ \cdots\\
\cdots\ \times\overline{S}^{\mu_{2m}\nu_{2m}}_{(\beta_m,y_m)}(t_0^{2m},\ldots,t_n^{2m})\ \longrightarrow\ J^{\mu_1\nu_1}(T_1,T_1')\times\ \cdots\\
\cdots\ \times J^{\mu_k\nu_k}(T_k,T_k')\ J^{\mu_{11}\nu_{11}}_{(\alpha_1,x_1)}(T_{11},T_{11}')\times\ \cdots\\
\cdots\ \times J^{\mu_{1l}\nu_{1l}}_{(\alpha_l,x_l)}(T_{1l},T_{1l}')\ \overline{J}^{\mu_{21}\nu_{21}}_{(\beta_1,y_1)}(T_{21},T_{21}')\ \cdots\ \overline{J}^{\mu_{2m}\nu_{2m}}_{(\beta_m,y_m)}(T_{2m},T_{2m}'),
\end{gathered}$$

если диаметр разбиений $T_i=t_0^i<\ldots<t_n^i=T_i'$, $i=1,\ldots,k$, $T_{1j}=t_0^{1j}<\ldots<t_n^{1j}=T_{1j}'$, $j=1,\ldots,l$, $T_{2j}=t_0^{2j}<\ldots<t_0^{2j}=T_{2j}'$, $j=1,\ldots,m$, стремится к нулю.

Далее, определим стохастические интегралы

$$\int\limits_{T_1}^{T_2} w(t)\,dt,\quad \int\limits_{T_1}^{T_2} w(t)\,dw^{(\alpha,x)}(t),\quad \int\limits_{T_1}^{T_2} w(t)\,d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t),\quad (\alpha,x)\in\{1,\ldots,N\}\times\Lambda,$$

для элементов $w(t)\in\mathfrak{A}_t^{\Lambda}$ вида

$$w(t)=\sum_{\mu,\nu\in M_\Lambda} c_{\mu\nu}w^{\mu}(t)\overline{w}^{\nu}(t),\ c_{\mu\nu}\in\mathbf{C},$$

по линейности и положим

$$\int\limits_{T_1}^{T_2}\xi w(t)\,dt=\xi\int\limits_{T_1}^{T_2} w(t)\,dt,\quad \int\limits_{T_1}^{T_2}\xi w(t)\,dw^{(\alpha,x)}(t)=\xi\int\limits_{T_1}^{T_2} w(t)\,dw^{(\alpha,x)}(t),$$

$$\int\limits_{T_1}^{T_2}\xi w(t)\,d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t)=\xi\int\limits_{T_1}^{T_2} w(t)\,d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t),\quad (\alpha,x)\in\{1,\ \ldots,\ N\}\times\Lambda,$$

для всех $\xi \in \mathfrak{A}_0^\Lambda$.

Рассмотрим супералгебру $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,1}$, порожденную элементами

$$1,\ \xi^{(\alpha,x)},\ \overline{\xi}^{(\alpha,x)},\ \mathfrak{I}^{\mu\nu}(0,\ t),\ \mathfrak{I}^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(0,\ t),\ \overline{\mathfrak{I}}^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(0,\ t),$$
$$\mu, \nu \in M_\Lambda,\ \ (\alpha,\ x) \in \{1,\ \ldots,\ N\} \times \Lambda,\ \ t \in \mathbf{R}_+,$$

где понятие четности и нечетности получается из допредельных выражений. Супералгебру, порожденную элементами

$$1,\ \xi^{(\alpha,x)},\ \overline{\xi}^{(\alpha,x)},\ \mathfrak{I}^{\mu\nu}(0,\ t),\ \mathfrak{I}^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(0,\ t),\ \overline{\mathfrak{I}}^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(0,\ t),$$
$$(\alpha,\ x) \in \{1,\ \ldots,\ N\} \times \Lambda,\ \ \mu, \nu \in M_\Lambda,$$

обозначим через $\mathfrak{A}_t^{\Lambda,1}$, супералгебру, порожденную

$$1,\ \xi^{(\alpha,x)},\ \overline{\xi}^{(\alpha,x)},\ \mathfrak{I}^{\mu\nu}(0,\ t'),\ \mathfrak{I}^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(0,\ t'),\ \overline{\mathfrak{I}}^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(0,\ t'),$$
$$(\alpha,\ x) \in \{1,\ \ldots,\ N\} \times \Lambda,\ \ \mu, \nu \in M_\Lambda,\ \ t' \in [0,\ t],$$

— через $\mathfrak{A}_{t]}^{\Lambda,1}$. Для введенных супералгебр справедливы включения

$$\mathfrak{A}_\infty^\Lambda \subset \mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,1},\quad \mathfrak{A}_t^\Lambda \subset \mathfrak{A}_t^{\Lambda,1},\quad \mathfrak{A}_{t]}^\Lambda \subset \mathfrak{A}_{t]}^{\Lambda,1},\quad t \in \mathbf{R}_+,$$

так как

$$w^{(\alpha,x)}(t) = \int_0^t 1\, dw^{(\alpha,x)}(s) = \mathfrak{I}^{\varnothing\varnothing}_{(\alpha,x)}(0,\ t),$$
$$\overline{w}^{(\alpha,x)}(t) = \int_0^t 1\, d\overline{w}^{(\alpha,x)}(s) = \overline{\mathfrak{I}}^{\varnothing\varnothing}_{(\alpha,x)}(0,\ t),$$
$$(\alpha, x) \in \{1,\ \ldots,\ N\} \times \Lambda,\ t \in \mathbf{R}_+.$$

Продолжим по непрерывности каждое квазисостояние из класса $\sigma^\Lambda$ на $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,1}$ и отождествим в $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,1}$ все те элементы $\zeta$, $\xi$, для которых $\omega(\eta\zeta) = \omega(\eta\xi)$ при всех $\eta \in \mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,1}$ и всех $\omega \in \sigma^\Lambda$. Очевидно, что после отождествления мы получим фактор-алгебру (ее будем обозначать той же буквой $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,1}$).

Тогда $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,1} \subset \overline{\mathfrak{A}}_\infty^\Lambda$.

Определим понятие случайного процесса на $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,1}$.

Рассмотрим на $\mathfrak{A}_t^{\Lambda,1}$, $t \in \mathbf{R}_+$ семейство гомоморфизмов $S_\tau^1\colon \mathfrak{A}_t^{\Lambda,1} \to \mathfrak{A}_{t+\tau}^{\Lambda,1}$, $\tau \in \mathbf{R}_+$, где $S_\tau^1\xi = \xi$ для всех $\xi \in \mathfrak{A}_0^\Lambda$, $\tau \in \mathbf{R}_+$ :

$$S_\tau^1\mathfrak{I}^{\mu\nu}(0,\ t) = \mathfrak{I}^{\mu\nu}(0,\ t+\tau),\quad S_\tau^1\mathfrak{I}^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(0,\ t) = \mathfrak{I}^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(0,\ t+\tau),$$
$$S_\tau^1\overline{\mathfrak{I}}^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(0,\ t) = \overline{\mathfrak{I}}^{\mu\nu}_{(\alpha,x)}(0,\ t+\tau),\quad \mu, \nu \in M_\Lambda,\ \ (\alpha, x) \in \{1,\ \ldots,\ N\} \times \Lambda,$$

для всех $t \in \mathbf{R}_+$, $t > 0$.

О п р е д е л е н и е 3. Грассмановым случайным процессом на $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,1}$ назовем гомоморфизм $\Psi\colon \mathfrak{A}_\infty^\Lambda \to \mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,1}$, такой, что

$$\Psi|_{\mathcal{A}_t^\Lambda} = \Psi_t\colon \mathcal{A}_t^\Lambda \longrightarrow \mathfrak{A}_t^{\Lambda,1},\ t \in \mathbf{R}_+,$$

и $S_\tau \Psi_t = \Psi_{t+\tau}$ для всех $t,\ \tau \in \mathbf{R}_+$, $t > 0$. Множество случайных процессов на $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,1}$ обозначим через $\mathbf{A}_1^\Lambda$.

Построим по индукции для каждого $n \in \mathbf{Z}_+$ супералгебры $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,n}$, $\mathfrak{A}_t^{\Lambda,n}$, $\mathfrak{A}_{t]}^{\Lambda,n}$, $t \in \mathbf{R}_+$:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,0} = \mathfrak{A}_\infty^\Lambda \subset \mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,1} \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,n} \subset \overline{\mathfrak{A}_\infty^\Lambda},\\
&\mathfrak{A}_t^{\Lambda,0} = \mathfrak{A}_t^\Lambda \subset \mathfrak{A}_t^{\Lambda,1} \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_t^{\Lambda,n},\\
&\mathfrak{A}_{t]}^{\Lambda,0} = \mathfrak{A}_{t]}^\Lambda \subset \mathfrak{A}_{t]}^{\Lambda,1} \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_{t]}^{\Lambda,n},\ t \in \mathbf{R}_+,
\end{aligned}$$

и классы случайных процессов $\mathbf{A}_n^\Lambda$ на $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,n}$, $n \in \mathbf{Z}_+$; определим последовательно для каждого $n \in \mathbf{Z}_+$ стохастические интегралы

$$\int_{T_1}^{T_2} \Psi\left[\xi^\mu(t)\bar{\xi}^\nu(t)\right] dt, \quad \int_{T_1}^{T_2} \Psi\left[\xi^\mu(t)\bar{\xi}^\nu(t)\right] dw^{(\alpha,x)}(t),$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \Psi\left[\xi^\mu(t)\bar{\xi}^\nu(t)\right] d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t), \quad \Psi \in \mathbf{A}_{n-1}^\Lambda, \quad \mu,\nu \in M_\Lambda,$$

$$(\alpha,\ x) \in \{1,\ldots,N\} \times \Lambda,\ \ T_1, T_2 \in \mathbf{R}_+,$$

а также всевозможные произведения от этих интегралов, аналогично тому, как это делалось в случае $n = 1$, и продолжая по непрерывности на $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,n}$ все состояния из класса $\sigma^\Lambda$.

О п р е д е л е н и е 4. Грассмановым случайным процессом на $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,n}$ будем называть гомоморфизм $\Psi\colon \mathcal{A}_\infty^\Lambda \to \mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,n}$, такой, что

$$\Psi|_{\mathcal{A}_t^\Lambda} = \Psi_t\colon \mathcal{A}_t^\Lambda \longrightarrow \mathfrak{A}_t^{\Lambda,n},\ t \in \mathbf{R}_+,$$

и $S_\tau^n \Psi_t = \Psi_{t+\tau}$ для всех $t,\ \tau \in \mathbf{R}_+$, $t > 0$, где $S_\tau^n$, $\tau \in \mathbf{R}_+$, — такое семейство гомоморфизмов на $\mathfrak{A}_t^{\Lambda,n}$, $t \in \mathbf{R}_+$, что $S_\tau^n|_{\mathfrak{A}_t^{\Lambda,n-1}} = S_\tau^{n-1}$ для всех $\tau,\ t \in \mathbf{R}_+$, и

$$S_\tau^n\left(\int_0^t \Psi\left[\xi^\mu(s)\bar{\xi}^\nu(s)\right] ds\right) = \int_0^{t+\tau} \Psi\left[\xi^\mu(s)\bar{\xi}^\nu(s)\right] ds,$$

$$S_\tau^n\left(\int_0^t \Psi\left[\xi^\mu(s)\bar{\xi}^\nu(s)\right] d\widetilde{w}^{(\alpha,x)}(s)\right) = \int_0^{t+\tau} \Psi\left[\xi^\mu(s)\bar{\xi}^\nu(s)\right] d\widetilde{w}^{(\alpha,x)}(s),$$

$$(\alpha,\ x) \in \{1,\ldots,N\} \times \Lambda$$

для всех $\Psi \in \mathbf{A}^{\Lambda}_{n-1}$, $\mu, \nu \in M_{\Lambda}$, $t, \tau \in \mathbf{R}_{+}$, $t > 0$, где $\widetilde{w}$ есть один из двух элементов $w$ или $\overline{w}$ (один и тот же для левой и правой частей равенства).

Очевидно, что

$$\mathbf{A}^{\Lambda}_{0} \subset \mathbf{A}^{\Lambda}_{1} \subset \cdots \subset \mathbf{A}^{\Lambda}_{n}, \quad n \in \mathbf{Z}_{+}.$$

Рассмотрим индуктивные пределы:

$$\mathfrak{A}^{\Lambda,\infty}_{\infty} = \bigcup_{n} \mathfrak{A}^{\Lambda,n}_{\infty} \subset \overline{\mathfrak{A}^{\Lambda}_{\infty}}, \quad \mathfrak{A}^{\Lambda,\infty}_{t} = \bigcup_{n} \mathfrak{A}^{\Lambda,n}_{t},$$
$$\mathfrak{A}^{\Lambda,\infty}_{t]} = \bigcup_{n} \mathfrak{A}^{\Lambda,n}_{t]}, \; \mathbf{A}^{\Lambda}_{\infty} = \bigcup_{n} \mathbf{A}^{\Lambda}_{n},$$

где $\mathbf{A}^{\Lambda}_{n}$ — множество случайных процессов на $\mathfrak{A}^{\Lambda,\infty}_{\infty}$. Определим понятие обобщенного случайного процесса на $\mathfrak{A}^{\Lambda,\infty}_{\infty}$. Для этого рассмотрим на $\mathbf{A}^{\Lambda}_{\infty}$ следующую топологию. Пусть $\Psi \in \mathbf{A}^{\Lambda}_{\infty}$, $n \in \mathbf{Z}_{+}$; будем говорить, что $\Psi_n$ сходится к $\Psi \in \mathbf{A}^{\Lambda}_{\infty}$ при $n \to \infty$, в том и только в том случае, если для любых $T \in \mathbf{R}_{+}$, $k \in \mathbf{Z}_{+}$ и для любого $\zeta \in \mathfrak{A}^{\Lambda}_{\infty}$

$$\sup_{t_0,\ldots,t_k \in [0,T]} \Big| \langle \zeta \Psi^{n} \xi^{\mu_0}(t_0) \, \ldots \, \xi^{\mu_k}(t_k) \overline{\xi}^{\nu_0}(t_0) \, \ldots \, \overline{\xi}^{\nu_k}(t_k) \rangle -$$
$$- \langle \zeta \Psi \xi^{\mu_0}(t_0) \, \ldots \, \xi^{\mu_k}(t_k) \overline{\xi}^{\nu_0}(t_0) \, \cdots \, \overline{\xi}^{\nu_k}(t_k) \rangle \Big| \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$ для всех $\mu_0, \nu_0, \ldots, \mu_k, \nu_k \in M_{\Lambda}$. Замыкание $\mathbf{A}^{\Lambda}_{\infty}$ в данной топологии обозначим через $\overline{\mathbf{A}^{\Lambda}_{\infty}}$.

Определение 5. Элементы множества $\overline{\mathbf{A}^{\Lambda}_{\infty}}$ мы будем называть обобщенными случайными процессами на $\mathfrak{A}^{\Lambda,\infty}_{\infty}$, или случайными процессами на $\overline{\mathfrak{A}^{\Lambda,\infty}_{\infty}}$.

Стохастические интегралы

$$\int_{T_1}^{T_2} \Psi \xi^{\mu}(t) \overline{\xi}^{\nu}(t) \, dt, \quad \int_{T_1}^{T_2} \Psi \xi^{\mu}(t) \overline{\xi}^{\nu}(t) \, dw^{(\alpha,x)}(t),$$
$$\int_{T_1}^{T_2} \Psi \xi^{\mu}(t) \overline{\xi}^{\nu}(t) \, d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t), \quad (\alpha, x) \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda,$$

для $\Psi \in \overline{\mathbf{A}^{\Lambda}_{\infty}}$ определяются по непрерывности.

Отметим простейшие свойства стохастических интегралов.

1) Аддитивность по отрезку интегрирования: $\int_{T_1}^{T_3} = \int_{T_1}^{T_2} + \int_{T_2}^{T_3}$ для всех $T_1 \leqslant T_2 \leqslant T_3$, $T_1, T_2, T_3 \in \mathbf{R}_{+}$.

2) Линейность:

$$\int \bigl(a\xi(t)+b\zeta(t)\bigr)\,dt = a\int \xi(t)\,dt + b\int \zeta(t)\,dt,$$

$$\int \bigl(a\xi(t)+b\zeta(t)\bigr)\,dw^{(\alpha,x)}(t) = a\int \xi(t)\,dw^{(\alpha,x)}(t) + b\int \zeta(t)\,dw^{(\alpha,x)}(t),$$

$$\int \bigl(a\xi(t)+b\zeta(t)\bigr)\,d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t) = a\int \xi(t)\,dw^{(\alpha,x)}(t) + b\int \zeta(t)\,d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t).$$

3) $\int\limits_{T_1}^{T_2} dw^{(\alpha,x)}(t) = w^{(\alpha,x)}(T_2) - w^{(\alpha,x)}(T_1),$

$$\int\limits_{T_1}^{T_2} d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t) = \overline{w}^{(\alpha,x)}(T_2) - \overline{w}^{(\alpha,x)}(T_1), \quad (\alpha,\ x)\in\{1,\ \ldots,\ N\}\times\Lambda.$$

4) $\langle\zeta\int\limits_{T_1}^{T_2}\xi(t)\,dt\rangle = \int\limits_{T_1}^{T_2}\langle\zeta\xi(t)\rangle\,dt$ для любого $\zeta\in\mathfrak{A}_{\infty}^{\Lambda,\infty}$.

5) $\langle\zeta\int\limits_{T_1}^{T_2}\xi(t)\,dw^{(\alpha,x)}(t)\rangle = \langle\zeta\int\limits_{T_1}^{T_2}\xi(t)\,d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t)\rangle = 0$ для всех $\zeta\in\mathfrak{A}_{T_1]}^{\Lambda,\infty}$, $(\alpha,\ x)\in\{1,\ldots,\ N\}\times\Lambda$.

Удобно также ввести интегралы

$$\int dw^{(\alpha,x)}(t)\xi(t) \quad \text{и} \quad \int d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t)\xi(t),$$

положив

$$\int d\widetilde{w}^{(\alpha,x)}(t)\xi(t) = \sigma_\xi\int \xi(t)\,d\widetilde{w}^{(\alpha,x)}(t),$$

где $\widetilde{w}$ означает $w$ или $\overline{w}$, $\sigma_\xi = 1$ для четных $\xi(t)$, $\sigma_\xi = -1$ для нечетных $\xi(t)$.

Так же, как и в классической теории стохастических интегралов, мы будем писать

$$\begin{aligned} d\zeta(t) = {} & \xi_1(t)\,dt + \xi_2(t)\,dw^{(\alpha,x)}(t) + \xi_3(t)\,d\overline{w}^{(\beta,y)}(t) + \\ & + dw^{(\alpha',x')}(t)\xi_4(t) + dw^{(\beta',y')}(t)\xi_5(t), \end{aligned}$$

если для всех $t\in\mathbf{R}_+$

$$\begin{aligned} \zeta(t) = {} & \zeta(0) + \int\limits_0^t \xi_1(s)\,ds + \int\limits_0^t \xi_2(s)\,dw^{(\alpha,x)}(s) + \\ & + \int\limits_0^t \xi_3(s)\,d\overline{w}^{(\beta,y)}(s) + \int\limits_0^t dw^{(\alpha',x')}(s)\xi_4(s) + \int\limits_0^t d\overline{w}^{(\beta',y')}(s)\xi_5(s). \end{aligned}$$

Следующее свойство стохастических интегралов от грассмановых процессов является аналогом формулы Ито в классическом случае.

6) Пусть

$$d\zeta(t) = \eta_1(t)\,dt + \eta_2(t)\,dw^{(\alpha,x)}(t) + \eta_3(t)\,d\overline{w}^{(\beta,y)}(t),$$
$$d\zeta'(t) = \eta_1'(t)\,dt + dw^{(\alpha',x')}(t)\eta_2'(t) + d\overline{w}^{(\beta',y')}(t)\eta_3'(t).$$

Тогда

$$d\zeta(t)\zeta'(t) = \bigl(d\zeta(t)\bigr)\zeta'(t) + \zeta(t)\,d\zeta'(t) + d\zeta(t)\,d\zeta'(t),$$

где $d\zeta(t)d\zeta'(t) = \delta_{\alpha\beta}\delta_{xy'}\eta_2(t)\eta_3'(t) - \delta_{\beta\alpha'}\delta_{yx'}\eta_3(t)\eta_2'(t)$.

Доказательство этих свойств нетрудоно получить из определения стохастических интегралов.

Мы будем рассматривать системы стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
d\xi^{(\alpha,x)}(t) &= P_{\alpha,x}\bigl(\xi^{(\beta,y)}(t),\ \overline{\xi}^{(\beta,y)}(t),\ (\beta,\ y) \in \{1,\ \ldots,\ N\}\times\Lambda\bigr) + \\
&\quad + dw^{(\alpha,x)}(t),\\
d\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t) &= \overline{P}_{\alpha,x}\bigl(\xi^{(\beta,y)}(t),\ \overline{\xi}^{(\beta,y)}(t),\ (\beta,\ y) \in \{1,\ \ldots,\ N\}\times\Lambda\bigr) + \\
&\quad + d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t),\\
\xi^{(\alpha,x)}(0) &= \xi^{(\alpha,x)},\quad \overline{\xi}^{(\alpha,x)}(0) = \overline{\xi}^{(\alpha,x)},\quad (\alpha,\ x) \in \{1,\ \ldots,\ N\}\times\Lambda,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $P_{\alpha,x}(\cdot)$, $\overline{P_{\alpha,x}}(\cdot)$ — произвольные полиномы от $\xi^{(\beta,y)}(t)$, $\overline{\xi^{(\beta,y)}}(t)$, $(\beta,\ y) \in \{1, \ldots, N\}\times\Lambda$, все степени которых нечетны.

О п р е д е л е н и е 6. Решением системы (1) назовем случайный процесс $\Psi \in \overline{\mathbf{A}^{\Lambda}_{\infty}}$, такой, что

$$\Psi\xi^{(\alpha,x)}(t) = \xi^{(\alpha,x)} + \int_0^t \Psi P_{(\alpha,x)}\bigl(\xi^{(\beta,y)}(s),\ \overline{\xi}^{(\beta,y)}(s)\bigr)\,ds + w^{(\alpha,x)}(t),$$

$$\Psi\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t) = \xi^{(\alpha,x)} + \int_0^t \Psi\overline{P}_{(\alpha,x)}\bigl(\xi^{(\beta,y)}(s),\ \overline{\xi}^{(\beta,y)}(s)\bigr)\,ds + \overline{w}^{(\alpha,x)}(t),$$

$$(\alpha,\ x) \in \{1,\ \ldots,\ N\}\times\Lambda,$$

для всех $t \in \mathbf{R}_+$.

**Утверждение 2.** *Для конечных* $\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$ ($|\Lambda| < \infty$) *система* (2) *всегда разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся методом последовательных приближений. Пусть для $(\alpha,\ x) \in \{1, \ldots, N\}\times\Lambda$,

$$\Psi^0\xi^{(\alpha,x)}(t) = \xi_0^{(\alpha,x)}(t) = \xi^{(\alpha,x)} + w^{(\alpha,x)}(t),$$
$$\Psi^0\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t) = \overline{\xi}_0^{(\alpha,x)}(t) = \overline{\xi}^{(\alpha,x)} + \overline{w}^{(\alpha,x)}(t),$$

и, далее,

$$\Psi^{n+1}\xi^{(\alpha,x)}(t)=\xi^{(\alpha,x)}_{n+1}(t)=\xi^{(\alpha,x)}+\\
+\int\limits_0^t P_{(\alpha,x)}\big(\xi_n^{(\beta,y)}(s),\ \overline{\xi}_n^{(\beta,y)}(s)\big)\,ds+w^{(\alpha,x)}(t),$$

$$\Psi^{n+1}\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t)=\overline{\xi}^{(\alpha,x)}_{n+1}(t)=\overline{\xi}^{(\alpha,x)}+\\
+\int\limits_0^t \overline{P}_{(\alpha,x)}\big(\xi_n^{(\beta,y)}(s),\ \overline{\xi}_n^{(\beta,y)}(s)\big)\,ds+\overline{w}^{(\alpha,x)}(t),$$

$$(\alpha,\ x)\in\{1,\ \ldots,\ N\}\times\Lambda.$$

Покажем, что последовательность $\Psi^n$ сходится в $\overline{\mathbf{A}^{\Lambda}_{\infty}}$.

Достаточно показать, что

$$\big|\langle\zeta w^{\mu_0}(t_0)\ \cdots\ w^{\mu_k}(t_k)\overline{w}^{\nu_0}(t_0)\ \cdots\ \overline{w}^{\nu_k}(t_k)\xi_n^{\mu_0'}(t_0)\ \cdots\ \xi_n^{\mu_k'}(t_k)\times\\
\times\overline{\xi}_n^{\nu_0'}(t_0)\ \cdots\ \overline{\xi}^{\nu_k'}(t_k)\rangle-\langle\zeta w^{\mu_0}(t_0)\ \cdots\ w^{\mu_k}(t_k)\times\\
\times\overline{w}^{\nu_0}(t_0)\ \cdots\ \overline{w}^{\nu_k}(t_k)\xi_m^{\mu_0'}(t_0)\ \cdots\ \xi_m^{\mu_k'}(t_k)\overline{\xi}_m^{\nu_0'}(t_k)\ \cdots\ \overline{\xi}^{\nu_k'}(t_k)\rangle\big|\to 0 \qquad (3)$$

при $n,\ m\to\infty$ равномерно по всем $t_0,\ldots,t_k\in[0,T]$ для любых $\zeta\in\mathfrak{A}_0^{\Lambda}$, $\nu_0,\mu_0,\ldots,\nu_k,\mu_k,\nu_0',\mu_0',\ldots,\nu_k',\mu_k'\in M_{\Lambda}$ и для любого $T\in\mathbf{R}_+$.

Рассмотрим для простоты случай $k=0$. Пусть

$$P_{\alpha,x}\big(\xi^{(\beta,y)},\ \overline{\xi}^{(\beta,y)},\ (\beta,y)\in\{1,\ldots,N\}\times\Lambda\big)=\sum_{\mu,\nu\in M^{\Lambda}} b_{\mu\nu}^{(\alpha,x)}\xi^{\mu}\overline{\xi}^{\nu},$$

$$\overline{P}_{\alpha,x}\big(\xi^{(\beta,y)},\ \overline{\xi}^{(\beta,y)},\ (\beta,y)\in\{1,\ldots,N\}\times\Lambda\big)=\sum_{\mu,\nu\in M^{\Lambda}} \widetilde{b}_{\mu\nu}^{(\alpha,x)}\xi^{\mu}\overline{\xi}^{\nu},$$

$$b_{\mu\nu}^{(\alpha,x)},\ \widetilde{b}_{\mu\nu}^{(\alpha,x)}\in\mathbf{R},\ \mu,\ \nu\in M^{\Lambda}.$$

Рассмотрим

$$\langle\zeta w^{\mu_1}(t)\ \cdots\ w^{\mu_l}(t)\,\overline{w}^{\nu_1}(t)\ \cdots\ \overline{w}^{\nu_s}(t)\times\\
\times\xi_n^{\mu_{l+1}}(t)\ \cdots\ \xi_n^{\mu_{l+l'}}(t)\,\overline{\xi}_n^{\nu_{s+1}}(t)\ \cdots\ \overline{\xi}_n^{\nu_{s+s'}}(t)\rangle,$$

$$\zeta\in\mathfrak{A}_0^{\Lambda},\ l,l',s,s',n\in\mathbf{Z}_+,\ \mu_1,\ \ldots,\mu_{l+l'},\ \nu_1,\ \ldots,\nu_{s+s'}\in\{1,\ \ldots,\ N\}\times\Lambda.$$

Вычисляя при помощи формулы Ито (см. свойство 6 грассмановых стохастических интегралов) дифференциалы

$$dw^{\mu_1}(t)\ \cdots\ w^{\mu_2}(t)\,\overline{w}^{\nu_1}(t)\ \cdots\ \overline{w}^{\nu_s}(t)\times\\
\times\xi_{n_1}^{\mu_{l+1}}(t)\ \cdots\ \xi_{n_{l'}}^{\mu_{l+l'}}(t)\,\overline{\xi}_{m_1}^{\nu_{s+1}}(t)\ \cdots\ \overline{\xi}_{m_{s'}}^{\nu_{s+s'}}(t)$$

для всевозможных $l,l',s,s',n_1,\ldots,n_{l'},m_1,\ldots,m_{s'}\in\mathbf{Z}_+$, $\mu_1,\ldots,\mu_{l+l'}$, $\nu_1,\ldots,\nu_{s+s'}\in\{1,\ldots,N\}\times\Lambda$ и переходя в полученных равенствах к состояниям, индукцией по $n_1, \ldots, n_{l'}, m_1, \ldots, m_{s'} \in \mathbf{Z}_+$ нетрудно получить

$$\langle \zeta w^{\mu_1}(t) \cdots w^{\mu_l}(t)\, \overline{w}^{\nu_1}(t) \cdots \overline{w}^{\nu_s}(t) \times \\ \times \xi_n^{\mu_{l+1}}(t) \cdots \xi_n^{\mu_{l+l'}}(t)\, \overline{\xi}_n^{\nu_{s+1}}(t) \cdots \overline{\xi}_n^{\nu_{s+s'}}(t)\rangle = \sum_{\mu,\nu\in M^\Lambda} c_{\mu\nu}^{(n)} \langle \xi^\mu \overline{\xi}^\nu\rangle,$$

где коэффициенты $c_{\mu\nu}^{(n)}(t) = c_{\mu\nu}^{(n)}(t, \zeta, l, l', s, s', \mu_1, \ldots, \mu_{l+l'}, \nu_1, \ldots, \nu_{s+s'})$ индуктивно вычисляются.

Покажем, что при $n \to \infty$ существуют пределы

$$c_{\mu\nu}^{(n)}(t) \to c_{\mu\nu}(t), \quad \mu, \nu \in M^\Lambda.$$

Для этого рассмотрим следующий алгоритм вычисления коэффициентов $c_{\mu\nu}^{(n)}(t)$, $\mu, \nu \in M^\Lambda$. Пусть $\mathcal{A}$ — грассманова алгебра с образующими $w^{(\alpha,x)}$, $\overline{w}^{(\alpha,x)}$, $\xi_m^{(\alpha,x)}$, $\overline{\xi}_m^{(\alpha,x)}$, $m \in \mathbf{Z}_+$, $(\alpha, x) \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda$, и пусть

$$D_0 = w^{\mu_1} \cdots w^{\mu_l}\, \overline{w}^{\nu_1} \cdots \overline{w}^{\nu_s}\, \xi_n^{\mu_{l+1}} \cdots \xi_n^{\mu_{l+l'}}\, \overline{\xi}_n^{\nu_{s+1}} \cdots \overline{\xi}_n^{\nu_{s+s'}}.$$

Назовем последовательность мономов $D_1, \ldots, D_p \in \mathcal{A}$ допустимой, если для любого $m \in \mathbf{Z}_+$, $1 \leqslant m \leqslant p$, найдутся такие $x \in \Lambda$ и $\alpha \in \{1, \ldots, N\}$, что либо

$$D_k = \frac{\partial}{\partial_L \eta^{(\alpha,x)}} \frac{\partial}{\partial_L \overline{\eta}^{(\alpha,x)}} D_{k-1},$$

где $\eta^{(\alpha,x)} \in \{w^{(\alpha,x)}, \xi_k^{(\alpha,x)}, k = 1, \ldots, n\}$, $\overline{\eta}^{(\alpha,x)} \in \{\overline{w}^{(\alpha,x)}, \overline{\xi}_k^{(\alpha,x)}, k = 1, \ldots, n\}$ (в этом случае мы будем говорить, что моном $D_k$ образуется из монома $D_{k-1}$ спариванием множителей $\eta^{(\alpha,x)}$ и $\overline{\eta}^{(\alpha,x)}$), либо

$$D_k = b_{\mu\nu}^{(\alpha,x)} \xi_{q-1}^\mu \overline{\xi}_{q-1}^\nu \frac{\partial}{\partial_L \xi_q^{(\alpha,x)}} D_{k-1},$$

или

$$D_k = \widetilde{b}_{\mu\nu}^{(\alpha,x)} \xi_{q-1}^\mu \overline{\xi}_{q-1}^\nu \frac{\partial}{\partial_L \xi^{(\alpha,x)}} D_{k-1},$$

для некоторых $q \in \mathbf{Z}_+$, $q \neq 0$, $\mu, \nu \in M^\Lambda$, и при этом $D_m \neq 0$ для любого $m = 1, \ldots, p$. Определим гомоморфизм $\varphi$: $\mathcal{A} \to \mathfrak{A}_0^\Lambda$, положив

$$\varphi(\xi_k^{(\alpha,x)}) = \xi^{(\alpha,x)}, \ \varphi(\overline{\xi}_k^{(\alpha,x)}) = \overline{\xi}^{(\alpha,x)}, \ k \in \mathbf{Z}_+, \ \varphi(w^{(\alpha,x)}) = \varphi(\overline{w}^{(\alpha,x)}) = 0.$$

Коэффициенты $c_{\mu\nu}^{(n)}(t)$, $\mu, \nu \in M^\Lambda$, можно записать в следующем виде

$$c_{\mu\nu}^{(n)}(t) = \int \zeta\varphi(D_0)\, d\xi^\mu \overline{\xi}^\nu + \sum_{p=1}^{n|\Lambda|} \frac{t^p}{p!} \sum_{D_1, \ldots, D_p}{}' \int \zeta\varphi(D_p)\, d\xi^\mu \overline{\xi}^\nu,$$

где $\int d\xi^\mu \overline{\xi}^\nu$ — интеграл Березина, и суммирование в $\Sigma'$ идет по всем допустимым последовательностям мономов $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{A}$, таким, что $\int \zeta\varphi(D_p) d\xi^\mu \overline{\xi}^\nu \in \mathbf{R}$. Отсюда следует, что для любого $n \in \mathbf{Z}_+$

$$c_{\mu\nu}^{(n)}(t) - c_{\mu\nu}^{(n-1)}(t) = \sum_{p=n}^{n|\Lambda|} \frac{t^p}{p!} \sum_{D_1, \dots, D_p}{}'' \int \zeta\varphi(D_p)\, d\xi^\mu \overline{\xi}^\nu,$$

где суммирование в $\Sigma''_{(n)}$ осуществляется по всем допустимым последовательностям мономов $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{A}$, таким, что $\int \zeta\varphi(D_p) d\xi^\mu \overline{\xi}^\nu \in \mathbf{R}$ и хотя бы для одного $m \in \mathbf{Z}_+$, $1 \leqslant m \leqslant p$, моном $D_m$ содержит множителем хотя бы один из элементов $\xi_0^{(\alpha, x)}$, $\overline{\xi}_0^{(\alpha, x)}$, $(\alpha, x) \in \{1, \dots, N\} \times \times \Lambda$. Таким образом, для любой допустимой последовательности мономов $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{A}$, по которым в $\Sigma''_{(n)}$ идет суммирование, можно выделить номера $0 < m_1 < \dots < m_n \leqslant p$, где для каждого $j = 1, \dots, n$ моном $D_{m_j}$ получается из $D_{m_j - 1}$ заменой одного из элементов $\xi_{j-1}^{(\alpha, x)}$, $\overline{\xi}_{j-1}^{(\alpha, x)}$, $(\alpha, x) \in \in \{1, \dots, N\} \times \Lambda$ на некоторый моном. Кроме того, выделим для каждой допустимой последовательности $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{A}$ все те номера $0 < n_1 < \dots < n_q \leqslant p$, где для каждого $j = 1, \dots, q$ моном $D_{n_j}$ получается из $D_{n_j - 1}$ спариванием некоторых множителей монома $D_{n_j - 1}$. Легко видеть, что число способов выбрать такие последовательности $0 < m_1 < \dots < m_n \leqslant p$ и $0 < n_1 < \dots < n_q \leqslant p$ не превосходит $4^p$. Пусть последовательности $0 < m_1 < \dots < m_n \leqslant q$ и $0 < n_1 < \dots < n_q \leqslant p$ фиксированы. Сопоставим каждому $k \in \{1, \dots, p\} \backslash \{n_1, \dots, n_q\}$ элемент $\eta_k \in \{\xi_{k'}^{(\alpha, x)}, \overline{\xi}_{k'}^{(\alpha, x)}, k' = 1, \dots, n\}$, при замене которого на соответствующий моном из $D_{k-1}$ получается $D_k$. Число способов, которыми можно выбрать элементы $\eta_{m_1}, \dots, \eta_{m_n}$, не превосходит $(2|\Lambda|N)^n$, число способов, которыми можно выбрать элементы $\eta_k$, $k \in \{1, \dots, p\} \backslash \{n_1, \dots, n_q, m_1, \dots, m_n\}$, не превосходит $(2p|\Lambda|N)^{p-n-q}$. Заметим, что

$$\left| \sum_{D_1, \dots, D_p}{}'''_{(n)} \int \zeta\varphi(D_p)\, d\xi^\mu \overline{\xi}^\nu \right| \leqslant C_1^p,$$

где суммирование в $\Sigma'''_{(n)}$ осуществляется по всем допустимым последовательностям $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{A}$, таким же, как и в $\Sigma''_{(n)}$, но с фиксированной последовательностью $0 < n_1 < \dots < n_1 \leqslant p$ и набором $\{\eta_k, k \in \in \{1, \dots, p\} \backslash \{n_1, \dots, n_q\}\}$, и $C_1 = C_1(N, \Lambda, p^{(\alpha, x)}(\cdot), \overline{p}^{(\alpha, x)}(\cdot), (\alpha, x) \in \in \{1, \dots, N\} \times \Lambda)$. Действительно, для каждого $n_j$, $j = 1, \dots, q$ существует не более $4|\Lambda|N$ возможностей выбора индексов $(\alpha, x) \in \{1, \dots \dots, N\} \times \Lambda$, $\eta \in \{w, \xi\}$, $\overline{\eta} \in \{\overline{w}, \overline{\xi}\}$ элементов спаривания $\eta_.^{(\alpha, x)}$ и $\overline{\eta}_.^{(\alpha, x)}$; при этом, если для некоторого $n_j$, $1 \leqslant j \leqslant q$, выбираются индексы $\eta$, $\overline{\eta}$, $(\alpha, x)$ и существует по крайней мере две пары элементов с этими индексами, каждую из которых можно спарить, то сумма по всем возможностям спаривания элементов с данными индексами дает ноль.

Окончательно получаем

$$\left| \sum_{D_1, \ldots, D_p} {}''_{(n)} \int \zeta\varphi(D_p)\, d\xi^\mu \overline{\xi}^\nu \right| \leqslant C_2^p p! p^{-n}, \ C_2 = \mathrm{const} > 0,$$

откуда следует существование пределов $\lim\limits_{n\to\infty} c_{\mu\nu}^{(n)}(t)$, $\mu$, $\nu \in M^\Lambda$, и, следовательно, существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \langle \zeta w^{\mu_1}(t) \cdots w^{\mu_l}(t) \overline{w}^{\nu_1}(t) \cdots \overline{w}^{\nu_s}(t) \times \\ \times \xi_n^{\mu_{l+1}}(t) \cdots \xi_n^{\mu_{l+l'}}(t)\, \overline{\xi}_n^{\nu_{s+1}}(t) \cdots \overline{\xi}_n^{\nu_{s+s'}}(t) \rangle.$$

Аналогично доказывается существование пределов (3) для произвольного $k \in \mathbf{Z}_+$.

**2. Гиббсовские квазисостояния и соответствующие им системы уравнений Ланжевена.** Пусть $\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$, $|\Lambda| < \infty$.

Определение 7. Квазисостояние $\langle \cdot \rangle_1$ на $\mathfrak{A}_0^\Lambda$ называют гиббсовским, если существует $U_\Lambda \in \mathfrak{A}_0^\Lambda$, такое, что для любого $\xi \in \mathfrak{A}_0^\Lambda$

$$\langle \xi \rangle_1 = \frac{\langle \xi \exp\{-\mathbf{U}_\Lambda\} \rangle_Б}{\langle \exp\{-\mathbf{U}_\Lambda\} \rangle_Б},$$

где $\langle f \rangle_Б = \int f d\xi^{\mu_\Lambda} \overline{\xi}^{\mu_\Lambda}$ — интеграл Березина [2], а мультииндекс $\mu_\Lambda$ содержит все элементы множества $\{1, \ldots, N\} \times \Lambda$.

Мы всегда будем считать потенциал $\mathbf{U}_\Lambda$ четным. Гиббсовское квазисостояние с потенциалом $\mathbf{U}_\Lambda$ обозначим через $\langle \cdot \rangle_{\mathbf{U}_\Lambda}$.

Определение 8. Системой уравнений Ланжевена, соответствующей гиббсовскому квазисостоянию с потенциалом $\mathbf{U}_\Lambda$, мы будем называть систему стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\xi^{(\alpha,x)}(t) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda(t)}{\partial_L \overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t)}\, dt + dw^{(\alpha,x)}(t), \\ d\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda(t)}{\partial_R \overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t)}\, dt + d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t), \end{aligned} \tag{4}$$

где дифференцирование понимается в смысле Березина, символами $\frac{\partial}{\partial_L}$ и $\frac{\partial}{\partial_R}$ обозначаются левая и правая производные соответственно, а $\mathbf{U}_\Lambda(t)$ получается из $\mathbf{U}_\Lambda$ заменой образующих $\xi^{(\alpha,x)}$, $\overline{\xi}^{(\alpha,x)}$ на

$$\xi^{(\alpha,x)}(t),\ \overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t),\ (\alpha, x) \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda.$$

Пусть $\Psi \in \overline{\mathbf{A}_\infty^\Lambda}$ есть решение системы (4). И пусть фиксировано квазисостояние $\langle \cdot \rangle \in \sigma^\Lambda$ на $\mathfrak{A}_\infty^{\Lambda,\infty}$. Тогда $\Psi$ определяет квазисостояние на грассмановой алгебре $\mathbf{A}_\infty^\Lambda$ с образующими $\xi^{(\alpha,x)}(t)$, $\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$, $(\alpha, x) \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda$: $\langle \xi^\mu(t) \overline{\xi}^\nu(t) \rangle = \langle \Psi \xi^\mu(t) \overline{\xi}^\nu(t) \rangle$, $\mu$, $\nu \in M_\Lambda$.

Определим эволюцию квазисостояния на $\mathfrak{A}_0^\Lambda$, положив для любого $\xi \in \mathfrak{A}_0^\Lambda$

$$\langle \xi \rangle_t = \langle \xi(t) \rangle, \ t \in \mathbf{R}_+.$$

**Утверждение 3.** *Гиббсовское квазисостояние на* $\mathfrak{A}_0^\Lambda$ *является инвариантным относительно эволюции, которую определяет решение соответствующей системы уравнений Ланжевена: если* $\langle \cdot \rangle_0 = \langle \cdot \rangle_{\mathbf{U}_\Lambda}$, *то* $\langle \cdot \rangle_t = \langle \cdot \rangle_{\mathbf{U}_\Lambda}$ *для любого* $t \in \mathbf{R}_+$.

Доказательство. Пусть $h(t)$ есть вектор с компонентами

$$\langle \xi^\mu \bar{\xi}^\nu \rangle_t, \quad \mu, \nu \in M_\Lambda,$$

$h_{\mathbf{U}_\Lambda}$ — вектор с компонентами

$$\langle \xi^\mu \bar{\xi}^\nu \rangle_{\mathbf{U}_\Lambda}, \quad \mu, \nu \in M_\Lambda.$$

Используя формулу Ито, получим

$$\frac{d}{dt} h(t) = A_\Lambda h(t) + h, \tag{5}$$

где $A$ — матрица с постоянными коэффициентами, $h$ — вектор с компонентами $h^{\mu\nu}$ ($h^{\mu\mu} = 1$ для всех $\mu \in M_\Lambda$, $|\mu| = 1$ ($\mu \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda$) и $h^{\mu\nu} = 0$ во всех остальных случаях).

Пусть $\mu \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda$. Покажем, что

$$(A_\Lambda h_{\mathbf{U}_\Lambda})^{\mu\mu} = -1.$$

Действительно, из формулы Ито следует, что

$$(A_\Lambda h(t))^{\mu\mu} = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda(t)}{\partial \bar{\xi}^\mu(t)} \bar{\xi}^\mu(t) \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \xi^\mu(t) \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda(t)}{\partial_R \xi^\mu(t)} \right\rangle,$$

и, следовательно,

$$(A h_{\mathbf{U}_\Lambda})^{\mu\mu} = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda}{\partial_L \bar{\xi}^\mu} \bar{\xi}^\mu \right\rangle_{\mathbf{U}_\Lambda} - \frac{1}{2} \left\langle \xi^\mu \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda}{\partial_R \xi^\mu} \right\rangle_{\mathbf{U}_\Lambda}.$$

Рассмотрим

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda}{\partial_L \bar{\xi}^\mu} \bar{\xi}^\mu \right\rangle_{\mathbf{U}_\Lambda} = \frac{\langle \partial \mathbf{U}_\Lambda / \partial_L \bar{\xi}^\mu \bar{\xi}^\mu \exp\{-\mathbf{U}_\Lambda\} \rangle_Б}{\langle \exp\{-\mathbf{U}_\Lambda\} \rangle_Б}; \quad \mu \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda.$$

Заметим, что

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda}{\partial_L \bar{\xi}^\mu} \bar{\xi}^\mu \exp\{-\mathbf{U}_\Lambda\} \right\rangle_Б = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left\langle \bar{\xi}^\mu \frac{\partial \mathbf{U}'_\Lambda}{\partial_L \bar{\xi}^\mu} \left( \mathbf{U}_\Lambda - \bar{\xi}^\mu \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda}{\partial_L \bar{\xi}^\mu} \right)^n \right\rangle_Б$$

и

$$\langle \exp\{-\mathbf{U}_\Lambda\} \rangle_Б = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} n \left\langle \bar{\xi}^\mu \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda}{\partial_L \bar{\xi}^\mu} \left( \mathbf{U}_\Lambda - \bar{\xi}^\mu \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda}{\partial_L \bar{\xi}^\mu} \right)^{n-1} \right\rangle_Б.$$

Следовательно,

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda}{\partial_L \overline{\xi}^\mu} \overline{\xi}^\mu \right\rangle_{\mathbf{U}_\Lambda} = 1, \quad \mu \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda.$$

Аналогично,

$$\left\langle \xi^\mu \frac{\partial \mathbf{U}_\Lambda}{\partial_R \xi^\mu} \right\rangle_{\mathbf{U}_\Lambda} = 1, \quad \mu \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda.$$

Нетрудно также показать, что $(A_\Lambda h_{\mathbf{U}_\Lambda})^{\mu\nu} = 0$ во всех остальных случаях.

Утверждение 3 доказано.

Вопрос о сходимости при $t \to \infty$ к инвариантному квазисостоянию $\langle \cdot \rangle_t \to \langle \cdot \rangle_{\mathbf{U}_\Lambda}$ для каждого конкретного $\mathbf{U}_\Lambda$ в случае, когда $|\Lambda| < \infty$, разрешим, поскольку матрица $A_\Lambda$ в (5) конечна.

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{U}_\Lambda$ есть малое возмущение квадратичного потенциала

$$\mathbf{U}_\Lambda = \mathbf{U}_\Lambda^\varepsilon = \mathbf{U}_\Lambda^0 + \varepsilon \mathbf{V}_\Lambda,$$

где

$$\mathbf{U}_\Lambda^0 = \sum_{\alpha,\beta} \sum_{x,y \in \Lambda} a_\Lambda^{\alpha\beta}(x-y) \overline{\xi}^{(\alpha,x)} \xi^{(\beta,y)},$$

$$\mathbf{V}_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} \mathbf{P}\big(\overline{\xi}^{(\alpha,x)},\ \xi^{(\alpha,x)},\ \alpha \in \{1, \ldots, N\}\big),$$

$\mathbf{P}\big(\overline{\xi}^{(\alpha,x)}, \xi^{(\alpha,x)}, \alpha \in \{1, \ldots, N\}\big)$ — полином от переменных $\overline{\xi}^{(\alpha,x)}$, $\xi^{(\alpha,x)}$, $\alpha \in \{1, \ldots, N\}$, все степени которого четны.

Относительно коэффициентов $a_\Lambda^{\alpha\beta}(y)$, $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, N\}$, $y \in \mathbf{Z}^d$, мы будем предполагать следующее. Пусть $\Lambda = [-N_\Lambda, N_\Lambda)^d \cap \mathbf{Z}^d$. Тогда:

а) Для всех $y \in \mathbf{Z}^d$ и всех $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, N\}$ $a_\Lambda^{\alpha\beta}(y) = a^{\alpha\beta}(y)$ не зависит от $\Lambda$ для достаточно больших $\Lambda$ ($2N_\Lambda \geqslant |y|$) и $a_\Lambda^{\alpha\beta}(y) = a_\Lambda^{\alpha\beta}(y+ +2N_\Lambda)$ для всех $y \in \Lambda$;

б) $a^{\alpha\beta}(y) \neq 0$ для $y \in Q + 2N_\Lambda k$, $k \in \mathbf{Z}^d$, $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, N\}$ (множество тех $y \in \mathbf{Z}^d$, для которых либо $a_y \neq 0$, либо $a_{-y} \neq 0$, обозначим через $Q$; всюду дальше мы будем предполагать, что $Q \subset \Lambda$);

в) Все собственные значения матрицы $\widetilde{A}(\lambda)$ с элементами

$$a^{\alpha\beta}(\lambda) = \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} a^{\alpha\beta}(y) e^{-i(\lambda, y)}, \quad \alpha, \beta \in \{1, \ldots, N\},$$

лежат в полуплоскости $\{z \in \mathbf{C} |\, \mathrm{Re}\, \overline{z} > 0\}$ для всех $\Lambda \in [-\pi, \pi)^d$.

Известно, что в данном случае при достаточно малых $\varepsilon$ для любого $F \in \mathfrak{A}_0^{\mathbf{Z}^d}$ существует предел

$$\langle F \rangle_{\mathbf{U}_\Lambda^\varepsilon} \to \langle F \rangle_\varepsilon,$$

когда $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d$.

Для доказательства достаточно разложить величины $\langle F\rangle_{\mathbf{U}^\varepsilon_\Lambda}$ в ряд по семиинвариантам относительно квазисостояния $\langle\cdot\rangle_{\mathbf{U}^0_\Lambda}$. Необходимые оценки для семиинвариантов см., например, в [1].

Для каждого конечного куба $\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$ система уравнений Ланжевена, соответствующая гиббсовскому квазисостоянию с потенциалом $\mathbf{U}_\Lambda$, определяет эволюцию квазисостояния на $\mathfrak{A}_0^\Lambda$ $\langle\cdot\rangle_{t,\varepsilon,\Lambda}$. Определим эволюцию квазисостояния на $\mathfrak{A}_0^{\mathbf{Z}^d}$, положив для каждого $F \in \mathfrak{A}_0^{\mathbf{Z}^d}$

$$\langle F\rangle_{t,\varepsilon} = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbf{Z}^d}\langle F\rangle_{t,\varepsilon,\Lambda}, \tag{6}$$

если этот предел существует.

Легко видеть, что квазисостояние $\langle\cdot\rangle_\varepsilon$ на $\mathfrak{A}_0^{\mathbf{Z}^d}$ инвариантно относительно этой эволюции.

**Теорема.** *Пусть в начальный момент времени $t = 0$, при каждом $\Lambda = [-N_\Lambda, N_\Lambda)^d \cap \mathbf{Z}^d$ квазисостояние $\langle\cdot\rangle_{0,\varepsilon,\Lambda}$ является гиббсовским с потенциалом*

$$\sum_{\alpha,\beta}\sum_{x,y} b_\Lambda^{\alpha,\beta}(x-y)\overline{\xi}^{(\alpha,x)}\xi^{(\beta,y)} + \varepsilon\sum_{x\in\Lambda}\mathbf{P}_0\big(\overline{\xi}^{(\alpha,x)}, \xi^{(\alpha,x)}, \quad \alpha\in\{1, \ldots, N\}\big),$$

*где $\mathbf{P}_0(\overline{\xi}^{(\alpha,x)}, \xi^{(\alpha,x)}, \alpha\in\{1,\ldots,N\})$ — четный полином от переменных $\overline{\xi}^{(\alpha,x)}$, $\xi^{(\alpha,x)}$, $\alpha\in\{1,\ldots,N\}$, а коэффициенты $b^{\alpha\beta}(y)$ удовлетворяют тем же условиям* а), б), в), *что и коэффициенты $a_\Lambda^{\alpha\beta}(y)$, $\alpha, \beta \in \{1,\ldots,N\}$, $y\in\mathbf{Z}^d$.*

*Тогда при достаточно малом $\varepsilon$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ для любого $F\in\mathfrak{A}_0^{\mathbf{Z}^d}$ предел* (6) *существует и при $t\to\infty$*

$$\langle F\rangle_{t,\varepsilon} \to \langle F\rangle_\varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\varepsilon = 0$. Здесь система уравнений Ланжевена имеет вид

$$\begin{aligned} d\xi^{(\alpha,x)}(t) &= -\frac{1}{2}\sum_{y,\beta} a_\Lambda^{\alpha\beta}(y)\xi^{(\beta,x-y)}(t)\,dt + dw^{(\alpha,x)}(t) \\ d\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t) &= -\frac{1}{2}\sum_{y,\beta}\overline{\xi}^{(\beta,x+y)}(t)a_\Lambda^{\alpha\beta}(t)\,dt + d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t), \quad x\in\Lambda. \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть $\Psi \in \overline{\mathbf{A}_\infty^\Lambda}$ есть решение этой системы.

Поскольку квазисостояние $\langle\cdot\rangle_{0,0,\Lambda}$ — гауссовское и система (7) линейна, квазисостояние $\langle\cdot\rangle$ на $\mathcal{A}_\infty^\Lambda$, которое определяет процесс $\Psi$, также будет гауссовским, и для доказательства теоремы при $\varepsilon = 0$ достаточно рассмотреть двучастичные функции:

$$c_\Lambda^{\alpha\beta}(x,y;t,s) = \langle\xi^{(\alpha,x)}(t)\overline{\xi}^{(\beta,y)}(s)\rangle, \quad \alpha,\beta\in\{1,\ldots,N\},\ x,y\in\Lambda,\ t,s\in\mathbf{R}_+.$$

Обозначим матрицу с элементами $c_\Lambda^{\alpha\beta}(x, y; t, s)$, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, N\}$, через $c_\Lambda(x, y; t, s)$. Как функцию от переменных $x, y \in \Lambda \subset \mathbf{Z}^d$, продолжим $c_\Lambda(x, y; t, s)$ периодически на $\mathbf{Z}^{2d}$. Тогда из системы (7) получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}c_\Lambda(x,y;\, t,s) = -\frac{1}{2}\sum_z A_\Lambda(-z)c_\Lambda(x+z,y;\, t,s), \quad t > s \geqslant 0,\\
&\frac{d}{dt}c_\Lambda(x,y;\, s,t) = -\frac{1}{2}\sum_z c_\Lambda(x,y+z;\, t,s)A_\Lambda(z), \quad t > s \geqslant 0,\\
&\frac{d}{dt}c_\Lambda(x,y;\, t,t) = -\frac{1}{2}\sum_z A_\Lambda(-z)c_\Lambda(x+z,y;\, t,t)-\\
&\qquad -\frac{1}{2}\sum_z c_\Lambda(x,y+z;\, t,t)A_\Lambda(z) + \delta_{x,y}\mathbf{1}, \quad t \in \mathbf{R}_+,
\end{aligned} \tag{8}$$

для всех $x, y \in \mathbf{Z}^d$, где $A_\Lambda(z)$ — матрица с элементами $a_\Lambda^{\alpha\beta}(z)$, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, N\}$, $z \in \mathbf{Z}^d$. Легко видеть, что

$$c_\Lambda(x;\; y;\; t,\; s) = c_\Lambda(x-y;\; t,\; s)$$

для всех $x, y \in \mathbf{Z}^d$.

Переходя в системе (8) к преобразованию Фурье

$$\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\, t,s) = \sum_{y\in\Lambda} e^{-i(\lambda,y)}c_\Lambda(y,t,s), \quad \lambda \in \left\{\frac{\pi}{N_\Lambda}z,\; z \in [-N_\Lambda, N_\Lambda)^d \cap \mathbf{Z}^d\right\},$$

получим

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\; t,\; t) = -\frac{1}{2}\widetilde{A}(\lambda)\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\; t,\; t) - \frac{1}{2}\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\; t,\; t)\widetilde{A}(\lambda) + 1,\\
&\frac{d}{dt}\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\; t,\; s) = -\frac{1}{2}\widetilde{A}(\lambda)\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\; t,\; s),\\
&\frac{d}{dt}\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\; s,\; t) = -\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\; s,\; t)\widetilde{A}(\lambda).
\end{aligned}$$

Решая полученную систему, находим

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\, t,s) = {}&\exp\left\{-1/2\widetilde{A}(\lambda)t\right\}\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\; 0,\; 0)\exp\left\{-1/2\widetilde{A}(\lambda)s\right\}-\\
&-\left(\widetilde{A}(\lambda)\right)^{-1}\exp\left\{-\widetilde{A}(\lambda)(t+s)\right\}+\\
&+\left(\widetilde{A}(\lambda)\right)^{-1}\exp\left\{-1/2\widetilde{A}(\lambda)|t-s|\right\},
\end{aligned} \tag{9}$$

где по условию $\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\, 0,\, 0) = \left(\widetilde{B}(\lambda)\right)^{-1}$.

Заметим, что $\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\, t,\, s)$ от $\Lambda$ не зависит, $\widetilde{c}_\Lambda(\lambda;\, t,\, s) = \widetilde{c}(\lambda;\, t,\, s)$, следовательно,

$$c_\Lambda(y;\; t,\; s) = \sum_{z\in\mathbf{Z}^d} c(y + 2N_\Lambda z;\; t,\; s), \quad y \in \Lambda,$$

где

$$c(y;\ t,\ s) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi)^d} \widetilde{c}(\lambda;\ t,\ s) e^{i(\lambda,y)}\, d\lambda.$$

Из (9) в силу условия в) на коэффициенты $a^{\alpha\beta}(y)$ и $b^{\alpha\beta}(y)$, $\alpha,\ \beta \in \in \{1,\ \ldots,\ N\}$, $y \in Q$, следует, что

$$\begin{aligned} &|c^{\alpha\beta}(y;\ t,\ s)| \leqslant \mathrm{const} \cdot \exp\{-\gamma|y| - \gamma|t-s|\}, \\ &|c^{\alpha\beta}(y;\ t,\ t) - c^{\alpha\beta}(y)| \leqslant \mathrm{const} \cdot \exp\{-\gamma|y| - \gamma|t|\} \end{aligned} \tag{10}$$

для всех $y \in \mathbf{Z}^d$ и всех $t,\ s \in \mathbf{R}_+$, где $c^{\alpha\beta}(y)$ — элементы матрицы

$$C = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi)^d} \left(\widetilde{A}(\lambda)\right)^{-1} d\lambda, \quad \text{и} \quad \gamma = \mathrm{const} > 0.$$

Справедливость утверждения теоремы в случае $\varepsilon = 0$ легко следует из (9) и (10).

В случае $\varepsilon \neq 0$ система уравнений Ланжевена, соответствующая потенциалу $\mathbf{U}^{\varepsilon}_{\Lambda}$, имеет вид

$$\begin{aligned} d\xi^{(\alpha,x)}(t) &= -\frac{1}{2} \sum_{y,\beta} a^{\alpha\beta}_{\Lambda}(y) \xi^{(\beta,x-y)}(t)\, dt - \varepsilon \mathbf{P}_{(\alpha,x)}(t)\, dt + dw^{(\alpha,x)}(t), \\ d\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t) &= -\frac{1}{2} \sum_{y,\beta} \overline{\xi}^{(\beta,x+y)}(t) a^{\beta\alpha}_{\Lambda}(y)\, dt - \varepsilon \overline{\mathbf{P}}_{(\alpha,x)}(t)\, dt + d\overline{w}^{(\alpha,x)}(t), \\ \mathbf{P}_{(\alpha,x)}(t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{P}\left(\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t),\ \xi^{(\alpha,x)}(t),\ \alpha \in \{1,\ \ldots,\ N\}\right)}{\partial_L \overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t)}, \\ \overline{\mathbf{P}}_{(\alpha,x)}(t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{P}\left(\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(t),\ \xi^{(\alpha,x)}(t),\ \alpha \in \{1,\ \ldots,\ N\}\right)}{\partial_R \xi^{(\alpha,x)}(t)}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$(\alpha,\ x) \in \{1,\ \ldots,\ N\} \times \Lambda.$$

Для доказательства теоремы в случае $\varepsilon \neq 0$ мы воспользуемся аналогом формулы Гирсанова.

Пусть $\Psi^{\Lambda,\varepsilon} \in \overline{\mathbf{A}^{\Lambda}_{\infty}}$ есть решение системы (11), $\Psi^{\Lambda,0}$ — решение линейной системы (7) ($\varepsilon = 0$).

**Утверждение 4.** *Пусть $\varepsilon$ достаточно мало, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Тогда для любого $F \in \mathcal{A}^{\Lambda}_{\infty}$, $\operatorname{supp} \mathbf{F} \subset \{1,\ \ldots,\ N\} \times \Lambda \times [0,\ t]$, имеет место равенство*

$$\langle \Psi^{\lambda,\varepsilon} \mathbf{F} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle (\Psi^{\Lambda,0} \mathbf{F}),\ (\mathbf{U}^{\varepsilon}_{\Lambda,[0,t]})^n \rangle, \tag{12}$$

*где*

$$\mathbf{U}^{\varepsilon}_{\Lambda,[0,t]} = \sum_{(\alpha,x)} \left\{ \varepsilon \int_0^t \Psi^{\Lambda,0}\mathbf{P}_{(\alpha,x)}(s)\, d\overline{w}^{(\alpha,x)}(s) - \right.$$

$$\left. - \varepsilon \int_0^t \Psi^{\Lambda,0}\overline{\mathbf{P}}_{(\alpha,x)}(s)\, dw^{(\alpha,x)}(s) + \varepsilon \int_0^t \Psi^{\Lambda,0}\mathbf{P}_{(\alpha,x)}(s)\overline{\mathbf{P}}_{(\alpha,x)}(s)\, ds \right\} -$$

$$- \varepsilon \sum_{x\in\Lambda} \mathbf{P}_0\big(\xi^{(\alpha,x)},\ \overline{\xi}^{(\alpha,x)},\ \alpha \in \{1,\ \ldots,\ N\}\big).$$

З а м е ч а н и е. Равенство (12) фактически означает, что

$$\langle \Psi^{\Lambda,\varepsilon}\mathbf{F}\rangle = \frac{1}{\mathbf{Z}_\Lambda}\langle(\Psi^{\Lambda,0}\mathbf{F})\exp\{\mathbf{U}^{\varepsilon}_{\Lambda,[0,t]}\}\rangle,$$

где

$$\mathbf{Z}_\Lambda = \Big\langle \exp\Big\{ - \varepsilon \sum_{x\in\Lambda} \mathbf{P}_0\big(\xi^{(\alpha,x)},\ \overline{\xi}^{(\alpha,x)},\ \alpha \in \{1,\ \ldots,\ N\}\big)\Big\}\Big\rangle.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее мы покажем, что при достаточно малых $\varepsilon$ для любого $\mathbf{F} \in \mathcal{A}^{\Lambda}_{\infty}$, $\operatorname{supp}\mathbf{F} \subset \{1, \ldots, N\} \times \Lambda \times [0, t]$, ряд в правой части (12) абсолютно сходится. Докажем равенство правой и левой частей в (12).

Рассмотрим вектор $h_1(t)$ с компонентами

$$h_1^{\mu\nu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle(\Psi^{\Lambda,0}\xi^{\mu}(t)\overline{\xi}^{\nu}(t)),\ (\mathbf{U}^{\varepsilon}_{\Lambda,[0,t]})^{\prime n}\rangle,$$
$$\mu,\ \nu \in M_\Lambda,\ |\mu| + |\nu| \neq 0,$$

и вектор $h_2(t)$ с компонентами

$$h_2^{\mu,\nu}(t) = \langle \Psi^{\Lambda,\varepsilon}\xi^{\mu}(t)\overline{\xi}^{\nu}(t)\rangle,\ \mu,\ \nu \in M_\Lambda,\ |\mu| + |\nu| \neq 0.$$

Для $h_2(t)$ имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}h_2(t) = A^0_\Lambda h_2(t) + \varepsilon A^1_\Lambda h_2(t) + b.$$

Здесь $A^0_\Lambda$, $A^1_\Lambda$ — матрицы с постоянными коэффициентами, $b$ — вектор с компонентами $b^{\mu\nu}$, $\mu$, $\nu \in M_\Lambda$, где $b^{\mu\mu} = 1$ для всех $\mu \in M_\Lambda$, $|\mu| = 1$ ($\mu \in \{1, \ldots, N\} \times \Lambda$) и $b^{\mu\nu} = 0$ во всех остальных случаях. Покажем, что $h_1(t)$ удовлетворяет этой же системе. Пусть $n \in \mathbf{Z}_+$; обозначим через $h_{1n}(t)$ вектор с компонентами

$$h_{1n}^{\mu\nu}(t) = \frac{1}{n!}\langle \Psi^{\Lambda,0}\xi^{\mu}(t)\overline{\xi}^{\nu}(t),\ (\mathbf{U}^{\varepsilon}_{\Lambda,[0,t]})^{\prime n}\rangle,$$
$$\mu,\ \nu \in M_\Lambda,\ |\mu| + |\nu| \neq 0.$$

Тогда

$$h_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{1n}(t).$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt} h_{10}(t) = A_\Lambda^0 h_{10}(t) + b.$$

Для $n > 0$, $n \in \mathbf{Z}_+$ нетрудно показать, что

$$\frac{d}{dt} h_{1n}^{\mu\nu}(t) = \left(A_\Lambda^0 h_{1n}(t)\right)^{\mu\nu} + \varepsilon \left(A_\Lambda^1 h_{1,n-1}(t)\right)^{\mu\nu} +$$
$$+ \varepsilon^2 \sum_{\alpha,x} \frac{1}{(n-1)!} \langle \Psi^{\Lambda,0} \xi^\mu(t) \overline{\xi}^\nu(t),\ \Psi^{\Lambda,0} \mathbf{P}_{(\alpha,x)}(t) \overline{\mathbf{P}}_{(\alpha,x)}(t), (\mathbf{U}_{\Lambda,[0,t]}^\varepsilon)^{n-1} \rangle -$$
$$- \varepsilon^2 \sum_{\alpha,x} \frac{1}{(n-2)!} \langle \Psi^{\Lambda,0} \xi^\mu(t) \overline{\xi}^\nu(t),\ \Psi^{\Lambda,0} \mathbf{P}_{(\alpha,x)}(t) \overline{\mathbf{P}}_{(\alpha,x)}(t), (\mathbf{U}_{\Lambda,[0,t]}^\varepsilon)^{n-2} \rangle.$$

Суммируя теперь по $n \in \mathbf{Z}_+$ правые и левые части полученных равенств, находим

$$\frac{d}{dt} h_1(t) = A_\Lambda^0 h_1(t) + \varepsilon A_\Lambda^1 h_1(t) + b.$$

Заметим теперь, что $h_1(0) = h_2(0)$. Отсюда очевидным образом следует, что $h_1(t) = h_2(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$.

Для доказательства абсолютной сходимости ряда (12), а также для доказательства существования пределов $\langle F \rangle_{t,\varepsilon,\Lambda}$ при $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^d$ и $t \to \infty$, $F \in \mathfrak{A}_0^{\mathbf{Z}^d}$, $|\mathrm{supp}\, F| < \infty$ в случае, когда $\varepsilon$ достаточно мало, мы воспользуемся техникой кластерных разложений.

Пусть $t \in \mathbf{R}_+$ и $\Lambda \subset \mathbf{Z}^d$ фиксированы. Далее удобно считать $t$ целым, что никак не ограничивает общности. Рассмотрим целочисленную решетку $\mathbf{Z}^d \times \{0, -1, -2, \ldots\}$ и сопоставим каждой точке $(x, \tau) \in \Lambda \times \{0, -1, -2, \ldots\}$ величину

$$\mathbf{U}_{\Lambda,[0,t]}^\varepsilon(x,\tau) = \sum_\alpha \Bigg\{ \varepsilon \int_{t+\tau-1}^{t+\tau} \mathbf{P}_{(\alpha,x)}(s)\, d\overline{w}^{(\alpha,x)}(s) -$$
$$- \varepsilon \int_{t+\tau-1}^{t+\tau} \overline{\mathbf{P}}_{(\alpha,x)}(s)\, dw^{(\alpha,x)}(s) + \varepsilon^2 \int_{t+\tau-1}^{t+\tau} \mathbf{P}_{(\alpha,x)}(s) \overline{\mathbf{P}}_{(\alpha,x)}(s)\, ds \Bigg\} +$$
$$+ \varepsilon \delta_{\tau+t,0} \mathbf{P}_0 \big(\overline{\xi}^{(\alpha,x)}(0),\ \xi^{(\alpha,x)}(0),\quad \alpha \in \{1, \ldots, N\}\big),$$

где $\delta_{\tau+t}$ — символ Кронекера.