А. А. Лыков, В. А. Малышев, В. Н. Чубариков, Регулярные континуальные системы точечных частиц. I: Системы без взаимодействия, *Чебышевский сб.*, 2016, том 17, выпуск 3, 148–165

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 17 Выпуск 3

УДК 519.40

РЕГУЛЯРНЫЕ КОНТИНУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ЧАСТИЦ. I: СИСТЕМЫ БЕЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

А. А. Лыков, В. А. Малышев, В. Н. Чубариков (г. Москва)

Аннотация

Обычно в математике и физике рассматриваются системы точечных частиц либо конечные либо счетные. В статье вводится новый формальный математический обьект. Именно, мы определяем регулярные системы континуума точечных частиц (с континуальным числом частиц). В начальный момент каждая частица характеризуется парой: (начальная координата, начальная скорость) в R^{2d}. При этом все начальные координаты различны и заполняют некоторую область в R^d. Каждая из частиц начинает двигаться согласно обычной ньютоновской динамике под влиянием некоторой внешней силы, но без взаимодействия друг с другом. Если внешняя сила ограничена, то траектории любых двух частиц в фазовом пространстве не пересекаются. Точнее говоря, в любой заданный момент времени у любых двух частиц либо координаты либо скорости различны. Система частиц называется регулярной, если столкновений частиц нет и в координатном пространстве.

Условие регулярности необходимо для того, чтобы ключевое понятие скорости частицы в заданный момент и находящейся в заданной точке пространства было единственным образом определена. И тогда для нее классическое уравнение Эйлера для поля скоростей имеет четкий смысл. Хотя континуум частиц это фактически определение сплошной среды, но важнейшее понятие регулярности, кажется, не было исследовано в математической литературе.

Обнаружилось, что кажущаяся простота объекта (отсутствие взаимодействия) обманчива. И даже для простых внешних сил мы не смогли найти простых необходимых и достаточных условий регулярности. Однако, открылся богатый запас примеров, как в одномерном так и в многомерном случае, для которых мы и получаем условия регулярности на разных временных интервалах. В заключение мы формулируем множество задач для регулярных систем с взаимодействием.

Ключевые слова: динамика точечных частиц, сплошная среда, уравнение Эйлера, отсутствие столкновений.

Библиография: 12 названий.

REGULAR CONTINUUM SYSTEMS OF POINT PARTICLES. I: SYSTEMS WITHOUT INTERACTION

A. A. Lykov, V. A. Malyshev, V. N. Chubarikov (Moscow)

Abstract

Normally in mathematics and physics only point particle systems, which are either finite or countable, are studied. We introduce new formal mathematical object called regular continuum system of point particles (with continuum number of particles). Initially each particle is characterized by the pair: (initial coordinate, initial velocity) in R^{2d}. Moreover, all initial coordinates are different and fill up some domain in R^d. Each particle moves via normal newtonian dynamics under influence of sone external force, but there is no interaction between particles. If the external force is bounded then trajectories of any two particles in the phase space do not intersect. More exactly, at any time moment any two particles have either different coordinates or different velocities. The system is called regular if there are no particle collisions in the coordinate space.

The regularity condition is necessary for the velocity of the particle, situated at a given time at a given space point, were uniquely defined. Then the classical Euler equation for the field of velocities has rigorous meaning. Though the continuum of particles is in fact a continuum medium, the crucial notion of regularity was not studied in mathematical literature.

It appeared that the seeming simplicity of the object (absence of interaction) is delusive. Even for simple external forces we could not find simple necessary and sufficient regularity conditions. However, we found a rich list of examples, one dimensional and many dimensional, where we get regularity conditions on different time intervals. In conclusion we formulate many perspective problems for regular systems with interaction.

Keywords: point particle dynamics, continuum media, Euler equation, absence of collisions.

Bibliography: 12 titles.

1. Введение

Дадим сначала точное определение объекта, который мы будем здесь изучать.

Регулярная континуальная система $\mathbf{M}_T$ точечных частиц отождествляется с набором подмножеств $\Lambda_t \in R^d$ в моменты времени $t \in [0,T), 0 < T \leq \infty$. При этом Λ_0 предполагается замыканием открытой области в R^d с кусочно гладкой границей $\partial\Lambda_0$. Каждая точка этой области рассматривается как "материальная частица" бесконечно малой массы. Динамика определяется системой взаимно-однозначных отображений (диффеоморфизмов) $U_t = U_{0,t} : \Lambda_0 \to \Lambda_t, t \in [0, \mathrm{T})$, причем эти отображения предполагаются достаточно гладкими по x и кусочно-гладкими по t. При этом $U_0(x)$ является тождественным отображением. Таким образом, каждая точка (частица) $x \in \Lambda_0$ описывает свою траекторию в R^d: $y(t,x) = U_t(x)$, где $y(0,x) = x$ - начальное положение этой частицы. Из определения следует, что частицы никогда не сталкиваются, то есть $y(t,x) \neq y(t,x')$ для всех t и $x \neq x'$.

Мы назовем $\mathbf{M}_T$ системой без взаимодействия, если $y(t,x)$ определяются решениями уравнений

$$\frac{d^2y(t,x)}{dt^2} = F_x(y(t,x)), \quad y(0,x) = x, \; \frac{dy(0,x)}{dt} = v(x) \tag{1}$$

для некоторых двух данных функций: начальной скорости $v(x)$ и внешних сил $F_x(y)$, возможно разных для разных частиц. Далее мы считаем, что либо $F_x(y) = F(y)$ не зависит от x либо $F_x(y) = \frac{F(y)}{m(x)}$ для некоторой функции $F(y)$ и $m(x) > 0$, см. ниже раздел 4. Всегда предполагается, что $v(x)$ и $m(x)$ достаточно гладко зависят от $x \in \Lambda_0$, а $F(y)$ гладкая или кусочно гладкая по y. При этом, всегда предполагается, что каждое уравнение (1) имеет единственное решение на всем рассматриваемом интервале $[0,T)$. Если специально не оговорено, считается что $m(x) = 1$.

Конечно, понимание сплошной среды как состоящей из континуума частиц бесконечно малой массы хорошо известно математикам, см. например [7], стр. 56. Цель данной статьи — подчеркнуть важность понятия регулярности и дать примеры классов таких систем. Если свойства гладкости $y(t,x)$ следуют из общих теорем теории обыкновенных дифференциальных уравнений, то главная трудность — проверка отсутствия столкновений (подчеркнем, что мы рассматриваем траектории не в фазовом пространстве $R^d \times R^d$, а только их проекции на пространство R^d).

Слово <<регулярная>> подчеркивает, что возможны более общие определения континуальных систем.

2. Основные результаты

2.1. Одномерные системы

Гладкая сила

Заметим сначала, что если $v(x)$ и $F(y)$ неубывающие функции¸то столкновений не будет, поскольку частица не сможет догнать частицы, находящиеся в момент $t = 0$ правее ее.

Здесь $\Lambda_0 = [0, 1]$, а $F(y), y \in [-\infty, \infty)$, предполагается гладкой. Определим потенциальную энергию в произвольной точке y и полную энергию частицы в момент t, вышедшей из точки x, соответственно уравнению (1),

$$U(y) = -\int_0^y F(z)dz, H_t(x) = \frac{u^2(t, y(t, x)))}{2} + U(y(t, x))$$

где через

$$u(t, x) = \frac{dy(t, x)}{dt}$$

обозначена скорость частицы, оказавшейся в момент t в точке y.

Мы докажем сначала более простое, но наглядное утверждение, а потом технически более сложное. Обозначим $T(x, y)$ момент времени, когда точка $x \in [0, 1]$ впервые попадёт в точку y.

Сделаем следующие предположения:

1) $v(x) > 0$,

2) для всех $x \in [0, 1]$ и всех $y \geq x$ функция $H_0(x) - U(y) > 0$. В частности¸ так будет если $F(y)$ положительна при всех $y \geqslant 0$ (при этом все частицы движутся в одну сторону).

Теорема 1. *В этих предположениях следующие условия эквивалентны:*

1) на всем интервале $[0, \infty)$ не будет столкновений частиц;

2) для всех $y > 0$ функция $T(x, y)$ строго убывает по x на отрезке $x \in [0, \min\{y, 1\}]$;

3) при $x \in [0, \min\{y, 1\}]$

$$\frac{1}{v(x)} + \frac{v(x)v'_x(x) - F(x)}{2\sqrt{2}} \int_x^y \frac{dz}{((H_0(x) - U(z))^{\frac{3}{2}}} \geq 0$$

причем равенство нулю возможно лишь на дискретном множестве точек.

Теорема 2. *Пусть теперь $v(x) \geq 0, m(x), F(y) > 0 \in C^1(\mathbb{R}^1)$. Тогда в система не будет столкновений в том и только в том случае, когда для всех $x \in [0, \min\{y, 1\}]$ и $y > x$ выполняется неравенство*

$$H'_0(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2(H_0(x) - U(y))}} \frac{1}{F(y)} + \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2(H_0(x) - U(z))}} \frac{F'(z)}{F^2(z)} dz \right) < \tag{2}$$

$$< \frac{v'(x)\sqrt{m(x)}}{F(x)} + \frac{v(x)m'(x)}{2F(x)\sqrt{m(x)}}$$

В частном случае, когда $v(x) = 0,\ m(x) = 1$ для всех $x \in [0, 1]$ неравенство (2) равносильно следующему:

$$\frac{1}{\sqrt{U(x) - U(y)}} + F(y) \int_x^y \frac{1}{\sqrt{U(x) - U(z)}} \frac{F'(z)}{F^2(z)} dz > 0$$

Отметим, что аналогичное утверждение верно, если функции $F(y), v(x), m(x)$ являются кусочно гладкими.

Кусочно-постоянная сила

Теорема 3. *1) (одна ступенька) Пусть для некоторых $F_1 > 0, F_2 \geq 0$ и $A > 1$*

$$F(x) = F_1, 0 \leq x < A, \;\; F(x) = F_2, x \geq A$$

Если $v(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, то столкновений не будет если и только если $F_2 \geq F_1$.

Если же $v(x) \geq 0$ для всех $x \in [0,1]$, то столкновений не будет, если и только если для всех $x \in [0,1]$ выполняются одновременно два неравенства:

$$-2(A-x)v'(x) < v(x) + \sqrt{D(x)}, \tag{3}$$

$$v'(x)((F_1 - F_2)v(x) + F_2\sqrt{D(x)}) \geqslant F_1(F_1 - F_2), \tag{4}$$

где

$$D(x) = v^2(x) + 2F_1(A-x)$$

2) (две ступеньки) пусть $v(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$, а для некоторых $0 < F_2 < F_1, F_2 < F_3$ и $1 < A < B$

$$F(x) = F_1, 0 \leq x < A, \;\; F(x) = F_2, x \in [A,B), \;\; F(x) = F_3, x \geq B$$

Тогда столкновений не будет тогда и только тогда, когда выполняется неравенство:

$$B - A \leqslant \alpha(A-1), \quad \alpha = \frac{F_1(F_3 - F_1)\left(F_3(F_1 - F_2) + F_1(F_3 - F_2)\right)}{(F_1 - F_2)^2 F_3^2}, \tag{5}$$

Отметим необходимое условие отсутствия столкновений: $F_3 > F_1$, вытекающее из сформулированного утверждения. Также заметим, что множество тех $B > A > 1$, для которых имеет место отсутствия столкновений, не пусто при условии $F_3 > F_1$.

Неожиданным следствием второго утверждения пункта 1) теоремы 3 для случая $F_2 = 0$ оказывается следующее простое достаточное (но не необходимое) условие отсутствия столкновений:

$$v'(x) \geqslant \frac{F_1}{\sqrt{F_1 x + v^2(0)}}.$$

2.2. Многомерные системы

Многомерный аналог монотонности силы

Напомним сначала, что в одномерном случае, если сила, действующая на частицу, не убывает и начальные скорости не убывают, то столкновений не будет. Сформулируем обобщение данного утверждения для многомерного случая.

Теорема 4. *Пусть сила $F(y)$ такова, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$ справедливо неравенство:*

$$(F(y) - F(x), y - x) \geqslant 0.$$

Дополнительно предположим, что для всех $x_1, x_2 \in \Lambda$ выполненно неравенство:

$$(v(x_2) - v(x_1), x_2 - x_1) \geqslant 0.$$

Тогда столкновений не будет.

Линейная сила

Предположим, что сила F является линейной, т.е.

$$F(y) = Ay + b,$$

для некоторой $(d \times d)$-матрицы A и $b \in \mathbb{R}^d$.

Далее мы будем для простоты предполагать, что все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ матрицы A вещественны и существует базис пространства $\mathbb{R}^d$ составленный из собственных векторов матрицы A, причём, $Au_i = \lambda_i u_i,\ i = 1, \ldots, d$.

Теорема 5. *Предположим, что все собственные числа матрицы A неотрицательны и, что для всех $x_1, x_2 \in \Lambda$ выполняется неравенство:*

$$(v(x_2) - v(x_1), x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

тогда столкновений не будет.

Кусочно-постоянная сила.

Lemma 1. *Пусть $F(y) = F$ для всех $y \in \mathbb{R}^d$ для некоторого постоянного вектора $F \in \mathbb{R}^d$. Частицы x_1, x_2 сталкиваются тогда и только тогда, когда векторы $R(x_1, x_2) = x_2 - x_1$ и $V(x_1, x_2) = v(x_2) - v(x_1)$ параллельны и выполнено неравенство:*

$$(R(x_1, x_2), V(x_1, x_2)) < 0,$$

где $(,)$ обозначает стандартное евклидово произведение в $\mathbb{R}^d$.

Далее, предположим, что сила F определяется следующим условием:

$$F(y) = \begin{cases} F_1, & y \in \Pi_1 = \{y = (y^1, \ldots, y^d) \in \mathbb{R}^d : \ y^d < A\} \\ F_2, & y \in \Pi_2 = \{y = (y^1, \ldots, y^d) \in \mathbb{R}^d : \ y^d \geqslant A\} \end{cases},$$

где $F_k = (F_k^1, F_k^2, \ldots, F_k^d) \in \mathbb{R}^d,\ k = 1, 2$ постоянные вектора и параметр $A > 0$. Для определённости, будем считать, что $F_1^d > 0$. Будем считать, что $\Lambda \subset \Pi_1$.

Естественным и в какой-то мере неожиданным обобщением теоремы (3) является следующее утверждение.

Теорема 6. *Предположим, что $v(x) = 0$ для всех $x \in \Lambda$ и $F_2^d \geqslant 0$. Тогда столкновений не будет в том и только в том случае, если $F_1^d \leqslant F_2^d$.*

Заметим, что условие $F_2^d \geqslant 0$ необходимо для того, чтобы частица после попадания в множество Π_2 не возвращалась в множество Π_1. Если это условие не будет выполнятся, то возможны осцилляции частицы между множествами Π_1, Π_2 и анализ осложнится.

Центральное поле на плоскости

Рассмотрим случай, когда $d = 2$, и кроме евклидовых координат $x = (x^1, x^2)$ будем также использовать полярные координаты (r, ϕ) на плоскости:

$$x^1 = r\cos\phi, \quad x^2 = r\sin\phi.$$

Пусть Λ_0 ограничена и не содержит начала координат, а значит она содержится в некотором кольце

$$O(R_1, R_2) = \{x : 0 < R_1 < r < R_2 < \infty\}$$

Силу будем предполагать центральной, то есть направленной по радиусу и равной

$$F(\mathrm{r}) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r},\ y \in \mathbb{R}^2,$$

где U — гладкая скалярная функция на $(0, \infty)$, потенциальная энергия поля.

$|\cdot|$ обозначает евклидову норму на плоскости

Будем обозначать $r(t, x),\ \phi(t, x)$ норму и угол точки $y(t, x)$ в момент времени t. Заметим, что траектория

$$y(t, x) = (r(t, x), \phi(t, x)).$$

однозначно определяется полем начальных скоростей $v(0, x),\ x \in \Lambda$, или функциями

$$\frac{dr(0, x)}{dt},\ \frac{d\phi(0, x)}{dt},\ x \in \Lambda$$

Сделаем следующие предположения:

1. Для всех точек $x \in \Lambda$

$$\frac{dr(0, x)}{dt} = g(|x|) > 0.\ \frac{d\phi(0, x)}{dt} = h(|x|)$$

зависят лишь от r и первая из них положительна.

2. Для всех $r_2 \geqslant r_1 > R_1$ справедливо неравенство:

$$-\frac{dU(r_2)}{dr_2} + \frac{M^2(r_1)}{r_2^3} \geqslant 0,$$

где $M(r) = r^2 h(r)$ — кинетический момент.

Как будет видно далее, эти условия гарантируют, что точка x монотонно уходит в бесконечность, т.е. $r(t, x)$ монотонно увеличивается с ростом t.

Теорема 7. *При сделанных предположениях, для того, чтобы отсутствовали столкновения достаточно, чтобы для всех $R_1 < r_1 < R_2$ и $r_2 > r_1$ выполнялось неравенство:*

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{dr_1} \frac{1}{\sqrt{2(E_0(r_1) - V(z, r_1))}} dz < \frac{1}{g(r_1)},$$

где

$$E_0(r) = \frac{1}{2} g^2(r) + U(r) + \frac{1}{2} r^2 h^2(r), \quad V(z, r) = U(z) + \frac{r^4 h^2(r)}{2z^2}.$$

Заметим, что динамика области Λ_0 будет выглядеть следующим образом. Все точки пересечения Λ_0 с окружностью γ_r радиуса $r > 0$ в момент времени t будут лежать на окружности некоторого радиуса $R(t, r)$, повернутые вокруг начала координат на одинаковый угол $\phi(t, r)$. При этом $R(t, r)$ и $\phi(t, r)$ зависят только от r и t.

Условие 2) можно ослабить, а именно, предположив, что $g(|x|) \geqslant 0$. Тогда доказательство нужно изменить по тому же плану, что и в теореме 2.

3. Доказательства

3.1. Одномерные системы

Гладкая сила — теорема 1

Эквивалентность 1) и 2) очевидна — это означает что никакая частица не догонит никакую частицу, расположенную в момент $t=0$ правее. Для доказательства 3) заматим, что из закона сохранения полной энергии $H_t(x)=H_0(x)$ следует явная формула

$$T(x,y)=\int_x^y \frac{dz}{\sqrt{2(H_0(x)-U(z))}} \tag{6}$$

Заметим, что в наших предположениях функция U невозрастающая функция x и поэтому подкоренные выражения в равенстве (6) всегда неотрицательны.Остается вычислить производную

$$\begin{aligned}\frac{dT(x,y)}{dx}&=-\frac{1}{\sqrt{2(H_0(x)-U(x))}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_x^y \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{((H_0(x)-U(z))^{\frac12}}\Big)dz=\\&=-v^{-1}(x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_x^y \frac{(vv'_x-F(x))dz}{((H_0(x)-U(z))^{\frac32}}\le 0\end{aligned} \tag{7}$$

Гладкая сила — Теорема 2

Проинтегрируем по частям в формуле, для $T(x,y)$:

$$\sqrt{2}T(x,y)=-\int_x^y \frac{2}{U'(z)}\ d\sqrt{H_0(x)-U(z)}=$$

$$=2\left(-\frac{\sqrt{H_0(x)-U(y)}}{U'(y)}+\frac{\sqrt{H_0(x)-U(x)}}{U'(x)}\right)+2\int_x^y \sqrt{H_0(x)-U(z)}\left(\frac{1}{U'(z)}\right)'dz=$$

$$=2h(x,y)+2g(x,y),$$

где

$$h(x,y)=-\frac{\sqrt{H_0(x)-U(y)}}{U'(y)}+\frac{\sqrt{H_0(x)-U(x)}}{U'(x)}=\frac{\sqrt{H_0(x)-U(y)}}{F(y)}-\frac{v(x)\sqrt{m(x)}}{\sqrt{2}F(x)}$$

$$g(x,y)=\int_x^y \sqrt{H_0(x)-U(z)}\left(\frac{1}{U'(z)}\right)'dz=\int_x^y \sqrt{H_0(x)-U(z)}\frac{F'(z)}{F^2(z)}dz$$

Производная первого слагаемого равна:

$$\frac{d}{dx}h(x,y)=H'_0(x)\frac{1}{2\sqrt{H_0(x)-U(y)}}\frac{1}{F(y)}-\frac{v'(x)\sqrt{m(x)}}{\sqrt{2}F(x)}+\frac{v(x)F'(x)\sqrt{m(x)}}{\sqrt{2}F^2(x)}-\frac{v(x)m'(x)}{2\sqrt{2}F(x)\sqrt{m(x)}}$$

Воспользовавшись известной формулой:

$$\frac{d}{dx}\int_x^y f(x,z)dz=-f(x,x)+\int_x^y \frac{\partial}{\partial x}f(x,z)dz.$$

получим

$$\frac{d}{dx}g(x,y)=-\sqrt{H_0(x)-U(x)}\frac{F'(x)}{F^2(x)}+\frac{1}{2}H'_0(x)\int_x^y \frac{1}{\sqrt{H_0(x)-U(z)}}\frac{F'(z)}{F^2(z)}dz.$$

Что и дает доказательство

$$\frac{d}{dx}T(x,y) = \sqrt{2}\frac{d}{dx}h(x,y) + \sqrt{2}\frac{d}{dx}g(x,y) =$$

$$= H_0'(x)\frac{1}{\sqrt{2(H_0(x)-U(y))}}\frac{1}{F(y)} - \frac{v'(x)\sqrt{m(x)}}{F(x)} - \frac{v(x)m'(x)}{2F(x)\sqrt{m(x)}} +$$
$$+H_0'(x)\int_x^y \frac{1}{\sqrt{2(H_0(x)-U(z))}}\frac{F'(z)}{F^2(z)}dz$$

Кусочно-постоянная сила — теорема 3

Данное утверждние можно доказать, опираясь на теорему 2 (вернее на её аналог для кусочно гладкого случая силы $F(x)$). Но полезнее более простое доказательство.

Докажем первое утверждение теоремы.

Очевидно, что на отрезке $[0,\infty)$ не будет столкновений в том и только в том случае, если $u(T(0,A),x)$ является неубывающей функцией по $x\in[0,1]$. Имеем очевидные равенства:

$$u(T(0,A),x) = u(T(x,A),x) + F_2(T(0,A)-T(x,A)), \quad u(T(x,A),x) = F_1T(x,A).$$
$$\frac{du(T(0,A),x)}{dx} = F_1\frac{dT(x,A)}{dx} - F_2\frac{dT(x,A)}{dx} = (F_1-F_2)\frac{dT(x,A)}{dx}.$$

Ясно, что $\frac{dT(x,A)}{dx} < 0$ для всех $x\in[0,1]$, откуда и следует утверждение.

Докажем второе утверждение теоремы.

Очевидно, что на отрезке $[0,\infty)$ не будет столкновений в том и только в том случае, если $u(T(0,A),x)$ является неубывающей функцией по $x\in[0,1]$ и $T(x,A)$ является убывающей функцией по x. Имеем очевидные равенства:

$$u(T(0,A),x) = u(T(x,A),x) + F_2(T(0,A)-T(x,A)), \quad u(T(x,A),x) = v(x) + F_1T(x,A).$$
$$\frac{du(T(0,A),x)}{dx} = v'(x) + F_1\frac{dT(x,A)}{dx} - F_2\frac{dT(x,A)}{dx} = v'(x) + (F_1-F_2)\frac{dT(x,A)}{dx}. \tag{8}$$

Выясним, при каком условии функция $T(x,A)$ убывает по x. Из уравнения

$$x + v(x)t + \frac{F_1}{2}t^2 = A$$

получаем

$$T(x,A) = \frac{-v(x)+\sqrt{D(x)}}{F_1},\ D(x) = v^2(x) + 2F_1(A-x). \tag{9}$$

Отсюда

$$\frac{dT(x,A)}{dx} = \frac{-v'(x) + \frac{v(x)v'(x)-F_1}{\sqrt{D(x)}}}{F_1} = v'(x)\frac{v(x)-\sqrt{D(x)}}{F_1\sqrt{D(x)}} - \frac{1}{\sqrt{D(x)}}.$$

Поэтому, условие $\frac{dT(x,A)}{dx} < 0$ равносильно неравенству:

$$(v(x)-\sqrt{D(x)})v'(x) < F_1.$$

Домножая последнее неравенство на $v(x)+\sqrt{D(x)}$, из (9) получаем эквивалентное неравенство:

$$-2(A-x)v'(x) < v(x) + \sqrt{D(x)}.$$

Далее, подставим полученную формулу для $\frac{dT(x,A)}{dx}$ в формулу (8):

$$\frac{du(T(0,A),x)}{dx} = v'(x)\left(1 + (F_1 - F_2)\frac{v(x) - \sqrt{D(x)}}{F_1\sqrt{D(x)}}\right) - \frac{F_1 - F_2}{\sqrt{D(x)}}.$$

Поэтому условие $\frac{dv(T(0,A),x)}{dx} \geqslant 0$ равносильно неравенству:

$$v'(x)((F_1 - F_2)v(x) + F_2\sqrt{D(x)}) \geqslant F_1(F_1 - F_2).$$

Тем самым утверждение полностью доказано.

Докажем третье утверждение теоремы.

Прежде чем доказывать теорему, мы бы хотели неформально объяснить почему возможна ситуация, когда две бесконечно близкие частицы $x_1 = x, x_2 = x + dx$ не столкнутся после того, как траектория левой точки x_1 достигнет A. В предположении, что $F_2 < F_1$, расстояние между точками будет сокращаться линейно с течением времени после момента $T_1 = T(x_1, A)$ со скоростью $w = u(T_1, x_1) - u(T_1, x_2)$. Так как точки бесконечно близки, то $w = a\ dx$ для некоторой константы $a = a(x_1, x_2) > 0$. С другой стороны, $D = y(T_1, x_1) - y(T_1, x_2) = b\ dx$ — расстояние между точками в момент T_1, для некоторой константы $b = b(x_1, x_2) > 0$. Поэтому, время необходимое левой частице для того, чтобы догнать правую равно $t = t(x_1, x_2) = D/w = \frac{b}{a}$. Таким образом, это время уже не является бесконечно малой величиной. Оказывается, что это время отделено от нуля некоторой константой t^* для всех $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$, поэтому нам достаточно выбрать длину интервала $B - A$, где действует сила F_2, таким образом, чтобы любая точка из $[0, 1]$ проходила отрезок $[A, B]$ за время меньшее t^*. Далее остаётся выбрать силу F_3 достаточно большой.

Пусть $T = T(0, B)$. Очевидно, что на отрезке $[0, +\infty]$ не будет столкновений в том и только в том случае, если $u(T, x)$ является неубывающей функцией по $x \in [0, 1]$. Имеем очевидные равенства:

$$u(T, x) = u(T(x, B), x) + F_3(T - T(x, B)),$$

$$u(T(x, B), x) = u(T(x, A), x) + F_2(T(x, B) - T(x, A)), \quad u(T(x, A), x) = F_1T(x, A).$$

Откуда получаем:

$$u(T, x) = F_1T(x, A) + F_2(T(x, B) - T(x, A)) + F_3(T - T(x, B)).$$

$$\frac{du(T, x)}{dx} = F_1\frac{dT(x, A)}{dx} + F_2(\frac{dT(x, B)}{dx} - \frac{dT(x, A)}{dx}) - F_3\frac{dT(x, B)}{dx} =$$
$$= (F_1 - F_2)\frac{dT(x, A)}{dx} - (F_3 - F_2)\frac{dT(x, B)}{dx}.$$

Вычислим время $T(x, B)$. Ясно, что

$$y(T(x, A) + s, x) = A + T(x, A)F_1s + \frac{s^2}{2}F_2,$$

при $0 \leqslant s \leqslant T(x, B) - T(x, A)$. Поэтому из условия $y(x, T(x, A) + s) = B$ находим, что

$$s = s(x) = \frac{-T(x, A)F_1 + \sqrt{D(x)}}{F_2},\ D(x) = T^2(x, A)F_1^2 + 2(B - A)F_2.$$

Значит,

$$T(x, B) = T(x, A) + s(x) = \frac{-T(x, A)(F_1 - F_2) + \sqrt{D(x)}}{F_2}.$$

Вычислим производную:

$$\frac{dT(x,B)}{dx}=\frac{-\frac{dT(x,A)}{dx}(F_1-F_2)+\frac{T(x,A)\frac{dT(x,A)}{dx}F_1^2}{\sqrt{D(x)}}}{F_2}=-\frac{dT(x,A)}{dx}\frac{(F_1-F_2)-\frac{T(x,A)F_1^2}{\sqrt{D(x)}}}{F_2}.$$

Откуда получаем:

$$\frac{du(T,x)}{dx}=\frac{dT(x,A)}{dx}\left((F_1-F_2)+(F_3-F_2)\frac{(F_1-F_2)-\frac{T(x,A)F_1^2}{\sqrt{D(x)}}}{F_2}\right)=$$

$$=\frac{dT(x,A)}{dx}\left(\frac{(F_1-F_2)F_3}{F_2}-(F_3-F_2)\frac{T(x,A)F_1^2}{F_2\sqrt{D(x)}}\right)$$

Так как, $\frac{dT(x,A)}{dx}<0$, то условие $\frac{du(T,x)}{dx}\geqslant 0$ равносильно выполнению неравенству:

$$\frac{dT(x,A)}{dx}\geqslant\beta\sqrt{D(x)},\ \ \beta=\frac{(F_1-F_2)F_3}{(F_3-F_2)F_1^2}.$$

Возводя в квадрат последнее неравенство и преобразуя слагаемые получаем эквивалентное неравенство:

$$T(x,A)\geqslant\frac{2(B-A)F_2\beta^2}{1-\beta^2F_1^2}. \tag{10}$$

Последнее условие должно выполнятся для всех $x\in[0,1]$. Но $T(x,A)\geqslant T(1,A)$ для всех $x\in[0,1]$. Следовательно, (10) равносильно неравенству:

$$T(1,A)\geqslant\frac{2(B-A)F_2\beta^2}{1-\beta^2F_1^2}.$$

Подставляя выражение для $T(1,A)$ в последнее неравенство, получаем:

$$(A-1)\frac{(1-\beta^2F_1^2)}{F_1F_2\beta^2}\geqslant B-A.$$

Преобразуем множитель с силами в последнем неравенстве:

$$\alpha=\frac{(1-\beta^2F_1^2)}{F_1F_2\beta^2}=\frac{1}{F_1F_2}\left(\frac{1}{\beta}-F_1\right)\left(\frac{1}{\beta}+F_1\right)=$$

$$=\frac{F_1^2}{F_1F_2(F_1-F_2)^2F_3^2}\left((F_3-F_2)F_1-(F_1-F_2)F_3\right)\left((F_3-F_2)F_1+(F_1-F_2)F_3\right)=$$

$$=\frac{F_1}{(F_1-F_2)^2F_3^2}\left(F_3-F_1\right)\left((F_3-F_2)F_1+(F_1-F_2)F_3\right)$$

Что и завершает доказательство.

3.2. Многомерные системы

Доказатальство теоремы 4

Для двух различных точек $x_1, x_2 \in \Lambda$ рассмотрим функцию:

$$r(t) = ||y(t,x_2) - y(t,x_1)||^2 = (y(t,x_2) - y(t,x_1), y(t,x_2) - y(t,x_1)).$$

Дифференцируя, имеем

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = 2(F(y(t,x_2)) - F(y(t,x_1)), y(t,x_2) - y(t,x_1)) + 2||v(t,x_2) - v(t,x_1)||^2.$$

В силу сделанных предположений на силу F заключаем, что

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} \geqslant 0.$$

С другой стороны, для начальных условий имеем:

$$r(0) = ||x_2 - x_1||^2 > 0, \frac{dr}{dt}(0) = 2(v(x_2) - v(x_1), x_2 - x_1) \geqslant 0.$$

Из этих трех неравенств и следует утверждение.

Линейная сила — доказательство теоремы 5

Докажем, что для всех x квадратичная форма

$$Q(x) = (Ax, x) \geq 0 \tag{11}$$

Так как любой $x \in \mathbb{R}^d$ можно единственным образом представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i u_i,\ x_i \in \mathbb{R}.$$

то можно определить симметрическую матрицу $S = (s_{i,j})$ как

$$s_{i,j} = \frac{1}{2}(\lambda_i (u_i, u_j) + \lambda_j (u_j, u_i)) = \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j)(u_i, u_j).$$

Так как

$$Q(x) = \sum_{i,j} \lambda_i (u_i, u_j) x_i x_j = (Sx, x),$$

то можно записать

$$S = \Lambda U + U \Lambda,$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ — диагональная матрица, $U = ((u_i, u_j))$. Следовательно матрица S неотрицательно определена, откуда получаем (11). Далее, воспользуемся теоремой 4 и получим окончательное утверждение.

Кусочно-постоянная сила. Доказательство леммы 1

Имеем очевидно равенство для постоянной силы

$$y(t,x) = x + v(x)t + \frac{Ft^2}{2}.$$

и значит

$$y(t,x_2) - y(t,x_1) = V(x_1,x_2)t + R(x_1,x_2).$$

Откуда и следует утверждение.

Доказательство теоремы 6

Из теоремы 1 для одномерного случая следует, что необходимым условием существования столкновений является условие $F_1^d > F_2^d$. Для точки $x = (x^1, \ldots, x^d) \in \Lambda$ обозначим через

$$T(x) = \sqrt{\frac{2(A - x^d)}{F_1^d}},$$

момент времени, когда $(y(t,x), e_d) = A$.

Рассмотрим две точки $x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^d) \in \Lambda$, $x_2 = (x_2^1, \ldots, x_2^d) \in \Lambda$. Предположим, что $x_2^d > x_1^d$. В силу сделанных предположений имеем $T(x_1) > T(x_2)$. Кроме того, ясно, что до момента времени $T(x_1)$ сталкиваться точки x_1, x_2 не могут. Начиная с момента $T(x_1)$ мы находимся в ситуации леммы 1. Действительно, вычислим разности скоростей и координат в момент времени $T(x_1)$:

$$y(T(x_1), x_1) = x_1 + (A - x_1^d)e_d, \quad v(T(x_1), x_1) = F_1 T(x_1).$$

$$y(T(x_1), x_2) = y(T(x_2), x_2) + sv(T(x_2), x_2) + \frac{F_2 s^2}{2}, \quad v(T(x_1), x_2) = v(T(x_2), x_2) + F_2 s,$$

где

$$s = T(x_1) - T(x_2),\ v(T(x_2), x_2) = F_1 T(x_2),\ y(T(x_2), x_2) = x_2 + (A - x_2^d)e_d.$$

Откуда получаем:

$$V(x_1, x_2) = v(T(x_1), x_2) - v(T(x_1), x_1) = F_1(T(x_2) - T(x_1)) + F_2 s = s(F_2 - F_1).$$

$$R(x_1, x_2) = y(T(x_1), x_2) - y(T(x_1), x_1) = x_2 - x_1 - (x_2^d - x_1^d)e_d + sF_1 T(x_2) + \frac{F_2 s^2}{2}.$$

Используя равенство $T(x_2) = T(x_1) - s$ и обозначая $r = x_2 - x_1 - (x_2^d - x_1^d)e_d$, получаем:

$$R(x_1, x_2) = r + (sF_1 T(x_1) - \frac{F_1 s^2}{2}) - \frac{F_1 s^2}{2} + \frac{F_2 s^2}{2} = r - \frac{F_1}{2}((s - T(x_1))^2 - T^2(x_1)) + \frac{s}{2}V(x_1, x_2) =$$

$$= r - \frac{F_1}{2}(T^2(x_2) - T^2(x_1)) + \frac{s}{2}V(x_1, x_2) = r - \frac{F_1}{F_1^d}(x_1^d - x_2^d) + \frac{s}{2}V(x_1, x_2) =$$

$$= (x_2 - x_1) + \frac{(x_2^d - x_1^d)}{F_1^d}\hat{F}_1 + \frac{s}{2}V(x_1, x_2),$$

где мы ввели обозначение:

$$\hat{F}_1 = (F_1^1, F_1^2, \ldots, F_1^{d-1}, 0).$$

Рассмотрим два случая.

1. $\hat{F}_1 = 0$. Этот случай соответствует тому, что вектор F_1 направлен вдоль вектора e_d. Получаем равенство:

   $$R(x_1, x_2) = x_2 - x_1 + \frac{s}{2}V(x_1, x_2).$$

   Следовательно векторы R, V параллельны в том и только в том случае, если $x_2 - x_1$ параллелен вектору $F_2 - F_1$. Предположим, что x_1 внутренняя точка области Λ. Положим

$x_2 = x_1 + h(F_2 - F_1)$, где $h < 0$, так как $x_2^d > x_1^d$, $F_2^d < F_1^d$. Ясно, что для всех достаточно малых $|h|$ точка x_2 будет лежать в области Λ. Имеем равенство:

$$(R,V) = s\left(h||F_2 - F_1||^2 + \frac{s^2}{2}||F_2 - F_1||^2\right) = s||F_2 - F_1||^2\left(h + \frac{s^2}{2}\right) = s||F_2 - F_1||^2\left(h + \bar{\bar{o}}(h)\right)$$

при $h \to 0-$. Откуда заключаем, что существует $h < 0$ такой, что $(R,V) < 0$. Следовательно, точки x_1, x_2 столкнутся.

2. $\hat{F}_1 \neq 0$. Если векторы R, V параллельны, то $x_2 - x_1$ лежит в линейной оболочке векторов $\hat{F}_1$ и $F_2 - F_1$. Предположим, что

$$x_2 - x_1 = u\hat{F}_1 + w(F_2 - F_1),$$

для некоторых $u \in \mathbb{R}$ и $w < 0$. Умножая последнее равенство скалярно на e_d получаем:

$$x_2^d - x_1^d = w(F_2^d - F_1^d).$$

Следовательно,

$$R(x_1, x_2) = (u + w\frac{(F_2^d - F_1^d)}{F_1^d})\hat{F}_1 + (w + \frac{s^2}{2})(F_2 - F_2).$$

Значит, векторы R, V параллельны в том и только в том случае, если

$$u + w\frac{(F_2^d - F_1^d)}{F_1^d} = 0.$$

Откуда заключаем, что векторы R, V параллельны в том и только в том случае, если $x_2 - x_1$ параллелен вектору

$$L = \frac{(F_1^d - F_2^d)}{F_1^d}\hat{F}_1 + F_2 - F_1.$$

В случае параллельности R, V имеем:

$$(R,V) = s||F_2 - F_1||^2(w + \frac{s^2}{2}) = s||F_2 - F_1||^2(w + \bar{\bar{o}}(w))$$

при $w \to 0-$. Откуда заключаем, что существует $w < 0$ такой, что $(R,V) < 0$. Следовательно точки x_1, x_2 столкнутся. Тем самым утверждение полностью доказано.

Центральное поле на плоскости

Доказательство теоремы 7

Напомним некоторые известные факты о движении точки в центральном поле. Величина

$$M(t,x) = M(x) = M(|x|) = r^2(t,x)\frac{d\phi(t,x)}{dt},$$

называемая кинетическим моментом, не зависит от времени и равна, в соответствии с нашими обозначениями:

$$M(x) = |x|^2 h(|x|). \tag{12}$$

Динамика радиуса вектора точки x описывается уравнением:

$$\frac{d^2r(t,x)}{dt^2} = -\frac{\partial E}{\partial r},\ r(0,x) = |x|,\ \frac{dr(0,x)}{dt} = g(|x|), \tag{13}$$

где

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dr(t,x)}{dt}\right)^2 + V(r(t,x)),$$

и эффективная потенциальная энергия определяется равенством:

$$V(r(t,x)) = V(r(t,x),x) = U(r(t,x)) + \frac{M^2(x)}{2r^2(t,x)} = V(r(t,x),|x|).$$

Возьмем две точки $x_1, x_2 \in \Lambda$. Рассмотрим два случая:

1. $|x_1| = |x_2| = r$. Заметим, что в силу сделанных предположений в любой момент времени $t \geqslant 0$ имеет место равенство $r(t,x_1) = r(t,x_2)$. Действительно, в силу равенства (12) функции $r(t,x_1)$ и $r(t,x_2)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению (13) по t с одинаковыми начальными условиями. С другой стороны, в силу сохранения кинетического момента имеем равенства:

$$\phi(t,x_i) = M(r)\int_0^t \frac{1}{r^2(s,x_i)}ds + \phi(0,x_i),\ i = 1,2.$$

Следовательно, углы между точками x_1, x_2 сохраняются с течением времени и столкновений быть не может.

2. $|x_1| < |x_2|$. В данном случае рассуждения аналогичны рассмотренному одномерному случаю отрезка. В силу условия 3) и 4) норма точки x монотонно увеличивается. Обозначим $T_{r_1}(r_2)$ момент времени когда частица при движении в поле эффективной потенциальной энергии $V(r,|r_1|)$ с начальными условиями $r(0) = r_1,\ \frac{dr(0)}{dt} = g(r_1)$ достигнет точки r_2. Как и раньше имеем формулу:

$$T_{r_1}(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dz}{\sqrt{2\left(E_0(r_1) - V(z,M(r_1))\right)}},\quad E_0(r) = \frac{1}{2}g^2(r) + V(r,r).$$

Ясно, что если $T_{r_1}(r_2)$ убывает по r_1 для всех $r_1 \leqslant r_2$ и $R_1 < r_1 < R_2$, тогда пересечений не будет. Для производной имеем:

$$\frac{T_{r_1}(r_2)}{dr_1} = -\frac{1}{g(r_1)} + \int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{dr_1}\frac{1}{\sqrt{2\left(E_0(r_1) - V(z,M(r_1))\right)}}\ dz.$$

Откуда следует утверждение.

4. Заключение

Здесь мы сделаем несколько замечаний о дальнейших перспективах работы: о плотности, взаимодействии и уравнении Эйлера.

Плотность

Рассмотрим случай когда $F_x(y) = F(y)$ не зависит от x. Плотность в момент $t = 0$ определяется как произвольная положительная гладкая функция $\rho(0, x)$ на Λ_0, а плотность в момент t на Λ_t как

$$\rho(t, y) = \rho(0, U_t^{-1} y)$$

Хорошо известно, что она удовлетворяет известному закону сохранения (уравнение Лиувилля)

$$\rho_t + (u\rho)_x = \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 \tag{14}$$

Заметим, что во всех наших примерах плотность убывает до нуля. Приведем примеры когда наоборот, она возрастает до бесконечности.

Пусть $z(t), t \in [0, \infty)$, — произвольная гладкая кривая такая, что выполнены условия: $z(0) = 1$, $z(t) > 0$ для всех $t \in [0, \infty)$, $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и $z'(t) < 0$, то есть кривая $z(t)$ строго убывает.

Тогда построим систему с $\Lambda_0 = (0, 1]$, положив

$$v(x) = z'(t), F(y) = z''(t)$$

где t единственным образом определяется из условия $z(t) = x$. Иначе говоря, положительная сила действует на частицы и уменьшает их скорости до нуля. Более того, частицы никогда не достигают точки $x = 0$.

О более общих регулярных системах

Функцию $m(x)$ на Λ_0 можно представлять как плотность массы или заряда, что привязывает наше определение к реальным физическим силам. гравитационным и электростатическим. Случай произвольной же силы $F_x(y)$ пока не очень интересен ввиду следующего утверщдения.

Предположим, что выполнено следующее условие невозвращаемости: для любой пары точек x, z траектория $y(t, x)$ проходит через точку z не более одного раза.

Proposition 1. *Тогда регулярная континуальная система может быть представлена как система без взаимодействия с некоторой внешней силой $F_x(y)$.*

Действительно, возьмем произвольную траекторию $y(t, x) = U_t x$ с начальными условиями (1). Тогда, достаточно силу в точке $y = y(t, x)$ траектории определить как

$$F_x(y) = \frac{d^2 y(t, x)}{dt^2}$$

чтобы система с диффеоморфизмами U_t стала системой без взаимодействия.

Скажем теперь кратко что такое системы с взаимодействием. Взаимодействие в континуальных системах частиц может быть локальным, когда сила, действующая на частицу в точке y в момент t, имеет вид

$$F(y) = f(\rho(y), \nabla\rho(y)) \tag{15}$$

и нелокальным с силой

$$F(y) = \int g(|z|, \rho(y), \rho(y + z)) dz \tag{16}$$

для некоторых функций f и g.

Конечно, введенные здесь системы являются приближениями соответствующих систем конечного но очень большого числа N точечных частиц. Интуитивно ясно, что в случае (15) речь идет о приближении системами N частиц с убывающим в бесконечности парным взаимодействием (где играет роль взаимодействие лишь с ограниченным числом частиц, не зависящим от N). В то же время в случае (16) речь идет о взаимодействии типа mean field, где каждая частица одинаково взаимодействует с числом частиц порядка N. Некоторые примеры мы рассмотрим в последующих работах.

О связи с уравнением Эйлера

В случае регулярности системы для заданных $t, y \in \Lambda_t$, найдется ровно одна точка $x \in \Lambda_0$, что

$$u(t,y) = u(t,y(x)) = \frac{dy(t,x)}{dt}$$

Легко показать тогда, что определенное таким образом поле скоростей, для регулярной системы без взаимодействия, удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial u(t,y)}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial u(t,y)}{\partial y_\alpha} u_\alpha(t,y) = F(y) \tag{17}$$

Действительно, ускорение частицы с траекторией $y(t,x)$ равно

$$\frac{du_i(t,y(t,x))}{dt} = \frac{\partial u_i(t,y(t,x))}{\partial t} + \sum \frac{\partial u_i(t,y(t,x))}{\partial y_j} u_j(t,y(t,x)) \tag{18}$$

и приравнивается к силе $F(y(t,x)$. Подчеркнем еще раз, что именно отсутствие столкновений является необходимым для подобного вывода уравнения Эйлера.

Задаче Коши для простейшего уравнения Эйлера, где $t \in [0,\infty), y = (y_1,...,y_d) \in R^d$, с начальными условиями

$$u(0,x) = v(x)$$

посвящено много работ, часть которых вошла во многие учебники и монографии, см. [1–12].

Пусть теперь Λ_0 есть вся вещественная ось $\mathbb{R}$, причем движение точки x описывается тем же уравнением (1) в тех же предположениях на функции $F(y), v(x)$ для всех $y, x \in \mathbb{R}$.

Хорошо известно, что характеристики $y(t,x)$ этого уравнения параметризуются точками $x \in R^d$ и удовлетворяют уравнению Ньютона, описывая таким образом движение частиц под действием силы $F(y)$. Более того, структура множества характеристик (точнее, проекции этого множества на x-пространство) определяет существование и единственность решения задачи Коши. Однако, условия отсутствия столкновений в общем случае совсем нетривиальны и пока можно говорить только о примерах такой структуры.

Рассмотрим следующий пример (см. [5]): $F(y) = 0$ для всех $y \in \mathbb{R}$ и $v(x) = -\operatorname{arctg}(x)$. Доказывается, что в данном случае решение $u(t,y)$ уравнения (17) существует при всех $t \leqslant 1,\ y \in \mathbb{R}$, но его нельзя непрерывно продолжить на область $t > 1$. С другой стороны, можно доказать, что столкновения в системе (1) впервые возникнут в момент $t = 1$.

Этот вид $v(x)$ фактически есть частный случай нашего замечания в начале раздела 2.1, касающегося монотонности $v(x)$. А следующий более общий результат следует из нашей теоремы 2.

Теорема 8. *Пусть $v(x) \geq 0, F(y) \in C^2(\mathbb{R})$ и $F(y) > 0$ для всех $y \in \mathbb{R}$. Уравнение (17) имеет гладкое решение $u(t,y)$ при $t \geqslant 0,\ y \in \mathbb{R}$ с начальным условием $u(0,x) = v(x)$ в том и только в том случае, если для всех $x < y$ выполняется неравенство:*

$$H_0'(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2(H_0(x)-U(y))}}\frac{1}{F(y)} + \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2(H_0(x)-U(z))}}\frac{F'(z)}{F^2(z)}dz\right) < \frac{v'(x)}{F(x)}$$

Можно рассматривать также задачу Коши в конечной области с фиксированной границей с некоторыми граничными условиями на ней, а также (как в наших примерах) со свободной границей без всяких граничных условий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Лекции об уравнениях с частными производными. 1995. Москва.
2. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 1978. Москва.
3. Кружков С. Н. Избранные труды. 2000. Физматлит. Москва.
4. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. Уравнения с частными производными первого порядка (учебное пособие). 1999.
5. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. 2007. Москва.
6. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. 1945, Изд-во АН УССР, Киев.
7. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. 1967. Москва.
8. Chorin A., Marsden J.. A mathematical introduction to fluid mechanics. Springer. 1992.
9. Marchioro C., Pulvirenti M. Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids. Springer. 1993.
10. Temam R., Miranville A. Mathematical modeling in continuum mechanics. Cambridge Univ. Pfress, 2005.
11. Talman R. Geometric mechanics. WILEY, Second ed. 2007.
12. Слезкин Н. А. Лекции по молекулярной гидродинамике. Изд. МГУ. 1981.

REFERENCES

1. Arnold V. I., 1995, *Lectures on partial differential equations*, Moscow.
2. Arnold V. I., 1978, *Additional chapters of the theory of ordinary differential equations*, Moscow
3. Kruzhkov S. N., 2000, *Selected works*, FIZMATLIT, Moscow.
4. Goritsky A. Y., Kruzhkov S. N. Chechkin G. A., 1999, *Partial differential equations of the first order*.
5. Filippov A. F., 2007, *Introduction to the theory of differential equations*, Moscow
6. Bogolyubov N. N., 1945, *On some statistical methods in mathematical physics*, Publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev.
7. Rashevskii P. K., 1967, *Riemann geometry and tensor analysis*, Moscow.
8. Chorin A., Marsden J., 1992, *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Springer.
9. Marchioro C., Pulvirenti M., 1993, *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*, Springer.

10. Temam R., Miranville A., 2005, *Mathematical modeling in continuum mechanics*, Cambridge Univ. Pfress.

11. Talman R., 2007, *Geometric mechanics*, WILEY, Second ed.

12. Slezkin N. A., 1981, *Lectures on Molecular Hydrodynamics*, Ed. Moscow State University.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.
Получено 22.05.2016 г.
Принято в печать 12.09.2016 г.