ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 48 2012 Вып. 3

УДК 621.391.1 : 519.2

© 2012 г. **В.А. Малышев**

ТОНКАЯ СТРУКТУРА ОДНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Рассматривается конечная система N точек $x_1 < \ldots < x_N$ на отрезке. Идеальной (кристаллом) называется система, где расстояния между соседними точками одинаковы. Отклонение от идеальности характеризуется системой конечных разностей $\nabla_i^1 = x_{i+1} - x_i$, $\nabla_i^{k+1} = \nabla_{i+1}^k - \nabla_i^k$ для всевозможных i и k. Находятся асимптотические оценки при $N \to \infty$, $k \to \infty$ для системы точек, дающих минимум потенциальной энергии кулоновской системы во внешнем поле.

§ 1. Введение

Пусть задана система

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_N < 1$$

из N различных точек на отрезке $[0,1]$. Если эта система точек случайна, существует множество способов характеризовать ее структуру, например, как структуру случайного процесса приращений $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$. Если же никакой случайности нет, то нет и общепринятого способа характеризовать ее организацию. Один из возможных способов – рассмотреть систему разностей некоторых порядков $\ell = 1, 2, \ldots$

$$\nabla x_i = \Delta_i = x_{i+1} - x_i, \quad \nabla^2 x_i = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i, \quad \ldots, \quad \nabla^\ell x_i, \quad \ldots,$$

которые являются естественными локальными характеристиками этой системы точек (или набора чисел), даже если бы мы не знали метрики пространства, куда они вложены, или даже самого пространства. Это соответствует ситуации в анализе, где существование производных достаточного порядка говорит о "качестве" рассматриваемой функции. В дискретном случае нет проблемы существования (так, на окружности разности любого порядка определены), и заменой существования может быть скорость убывания разностей по ℓ (при достаточно больших N). Далее все зависит от того, как задается система точек. Самое популярное задание – дискретизация гладких функций. Уже давно дискретные разности интенсивно используются в вычислительной математике в связи с задачами приближения, интерполяции, решения дифференциальных уравнений и т.д. Однако там не рассматриваются разности слишком высоких порядков. Для произвольных же порядков существует наука – исчисление конечных разностей, см. [1–4]), идущая еще от И. Ньютона (ряд Ньютона, разделенные разности и т.д.). В § 2 мы приводим необходимые определения и результаты из этой науки.

Нас интересуют случаи, когда нет естественной гладкой функции, дискретизацией которой является данная система точек. Такие системы возникают, например, как неподвижные точки естественных динамических систем в физике.

Мы предлагаем здесь взгляд на систему конечных разностей как индикаторов шкалы отклонений от идеальной системы. *Идеальной системой* будем называть случай, когда все расстояния между соседями равны. В этом случае конечные разности любого порядка, большего единицы, равны нулю. В физике это соответствует идеальному кристаллу, и много работ было посвящено доказательству идеальности кристалла в пределе при $N \to \infty$ (см. [5–9]). Нас интересуют случаи, в некотором смысле близкие к идеальному. Поэтому термодинамический предельный переход здесь противопоказан – наша задача более тонкая.

Разности данного порядка ℓ зависят от N и от i. Нас интересуют асимптотики или хотя бы оценки сверху для заданного ℓ, равномерные по i. Будем говорить, что разности порядка ℓ определены на шкале $\varkappa(N,\ell)$ (не видны на шкалах выше $\varkappa(N,\ell)$), если число $\varkappa(N,\ell)$ является асимптотикой для разностей порядка ℓ, равномерной по i (оценкой сверху для данного ℓ равномерно по i). Под *тонкой структурой* системы точек мы будем понимать набор чисел $\varkappa(N,\ell)$.

Так, в физике шкала порядка 1 соответствует макрошкале, а шкала N^{-1} – микрошкале.

Формулировка задачи. Часто система точек задается не явно, а как конфигурация, дающая минимум некоторому потенциалу, или как неподвижная конфигурация. Мы изучаем здесь конкретную систему точек на $[0,1]$, которая определяется системой уравнений

$$f(x_i - x_{i-1}) - f(x_{i+1} - x_i) + F(x_i) = 0, \quad i = 2, \dots, N-1, \tag{1}$$

а для каждой из крайних точек x_1 и x_N есть альтернатива – либо $x_1 = 0$ ($x_N = 1$) и при этом, соответственно,

$$-f(x_2 - x_1) + F(x_1) \leqslant 0 \quad (f(x_N - x_{N-1}) + F(x_N) \geqslant 0),$$

либо, соответственно,

$$-f(x_2 - x_1) + F(x_1) = 0 \quad (f(x_N - x_{N-1}) + F(x_N) = 0).$$

Эта система интерпретируется как неподвижная конфигурация, когда на точки x_i действуют силы взаимодействия $f(x_i - x_{i-1})$ и $-f(x_{i+1} - x_i)$ с левым и правым соседом соответственно (мы рассматриваем кулоновское отталкивающее взаимодействие $f(r) = r^{-2}$). Кроме того, есть внешняя сила $F(x)$. Очевидно, что если $F(x) \equiv 0$, то $x_1 = 0$, $x_N = 1$, а все $x_{i+1} - x_i$ равны – идеальный случай.

В данной статье, являющейся естественным продолжением работ [10, 11], рассматриваются три примера внешней силы F – постоянная, линейная и степенная. Только в первом случае удается получить точную асимптотику, которая основывается на технике, развитой в комбинаторике для чисел Стирлинга второго рода. В двух других случаях мы получаем оценки сверху, которые тем не менее кажутся довольно точными, так как проводятся "на грани" точных оценок. Доказательство в линейном случае опирается опять же на комбинаторику и индуктивную процедуру по ℓ. В степенном случае действует несколько другая индуктивная процедура, но внутри каждого ее шага используется еще одна индуктивная процедура, аналогичная линейному случаю.

В [10, 11] доказано, что для монотонных внешних сил $F(x)$ неподвижная конфигурация существует, единственна и такова, что $x_1 = 0$, $x_N = L$, а для $i = 2, \dots, N-1$ выполнены уравнения (1). Кроме того, там доказано, что первые разности имеют асимптотику (равномерную по i)

$$\Delta_i \sim \frac{L}{N-1}.$$

Центральный факт – эта асимптотика не зависит от вида F. В [10] вычислен и следующий член асимптотического разложения

$$(x_{i+1}-x_i)-\frac{L}{N-1}\sim\frac{F}{2}N^{-3}(\frac{N}{2}-i),\quad i=2,\dots,N-1,$$

для постоянной внешней силы F. Формальная выкладка показывает, что главный член асимптотики второй разности должен быть порядка N^{-3} и не зависит от i, причем, используя результаты [10], можно показать, что остальные члены асимптотического разложения не влияют на этот вывод. Можно сказать, что только вторая разность показывает макросилу F. Здесь мы изучаем асимптотику всех высших разностей. Обозначим

$$\Delta_1=x_2-x_1=\Delta,\quad \Delta_i=x_{i+1}-x_i=\Delta(1+\delta_i),\quad i=1,\dots,N-1.$$

Таким образом, $\delta_1=0$ по определению, а в [10, 11] доказано, что $\Delta\sim\frac{1}{N}$. Все дальнейшие доказательства основаны на исследовании следующей системы уравнений для величин δ_i, $i=2,\dots,N-1$, которая получается суммированием уравнений (1) от 2 до i:

$$f(\Delta(1+\delta_i))-f(\Delta)=\sum_{i=2}^{i}F(x_i),\quad x_i=(i-1)\Delta+\Delta\sum_{i=2}^{i}\delta_i.$$

Отсюда имеем

$$\delta_i=(1+Q_i)^{-\frac{1}{2}}-1=\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{i,m},\quad \delta_{i,m}=a_mQ_i^m, \tag{2}$$

где

$$Q_i=\Delta^2\sum_{i=2}^{i}F(x_i),$$

$$(-1)^m a_m=\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2m-1)}{2^m m!}=\frac{(2m)!}{(2^m m!)^2}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi m}},\quad |a_m|\leqslant 1. \tag{3}$$

Мы видим, что за исключением случая постоянной функции F эта система сильно нелинейна, и уравнения в ней переплетаются.

§ 2. Конечные разности

Пусть функция $g_i=g(i)$, $i\in\mathbb{Z}$, задана на решетке $\mathbb{Z}$. Назовем

$$\nabla g(i)=\nabla^+g(i)=g(i+1)-g(i),\quad \nabla^-g(i)=g(i)-g(i-1) \tag{4}$$

ее правой и левой конечной разностью (дискретной производной). Если функция задана на части решетки, например, только для $i=1,\dots,N$, то мы рассматриваем только те разности, которые определены. Например, разность $\nabla^\ell g(i)$ определена, если $i+\ell\leqslant N$.

Заметим, что

$$\nabla^n=(S-1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^kS^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{n-k}S^k, \tag{5}$$

где S – оператор сдвига:

$$(Sf)(i)=f(i+1).$$

Отсюда, в частности,

$$\begin{aligned}&\nabla x_i = \Delta_i = x_{i+1} - x_i,\\ &\nabla^2 x_i = x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i = \nabla\Delta_i = \Delta\nabla\delta_i = \Delta(\delta_{i+1} - \delta_i).\end{aligned} \tag{6}$$

Поэтому производные коммутируют с S, и имеют место следующие формулы (Лейбница):

$$\begin{aligned}&\nabla(gf)(i) =\\ &\quad = f(i+1)(\nabla g)(i) + g(i)(\nabla f)(i) = (Sf)(\nabla g) + g(\nabla f) = (Sg)(\nabla f) + f(\nabla g),\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\nabla(f_1 \ldots f_n) =\\ &\quad = (\nabla f_1)S(f_2 \ldots f_n) + f_1 \nabla(f_2 \ldots f_n) = \ldots = \sum_{k=1}^{n} f_1 \ldots f_{k-1}(\nabla f_k)S(f_{k+1} \ldots f_n).\end{aligned} \tag{8}$$

В непрерывном случае имеет место формула для дифференцирования произведения с произвольными ℓ и n:

$$(f_1 \ldots f_n)^{(\ell)} = \sum_Q \frac{\ell!}{\prod\limits_{k=1}^{n} \ell_k!} f_1^{(\ell_1)} \ldots f_n^{(\ell_n)}, \tag{9}$$

где суммирование ведется по всем наборам $Q = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ неотрицательных целых чисел, удовлетворяющим условию $\ell_1 + \ldots + \ell_n = \ell$, а индексом (ℓ) обозначается производная порядка ℓ. В дискретном случае нам понадобится аналог формулы (9)

$$\begin{aligned}&\nabla^\ell(f_1 f_2) = \sum_{k=0}^{\ell} C_\ell^k (\nabla^k f_1)(\nabla^{\ell-k} S^k f_2),\\ &\nabla^\ell(f_1 \ldots f_n) =\\ &\quad = \sum_Q \frac{\ell!}{\prod\limits_{k=1}^{n} \ell_k!} (\nabla^{\ell_1} f_1)(\nabla^{\ell_2} S^{\ell_1} f_1)(\nabla^{\ell_3} S^{\ell_1+\ell_2} f_1) \ldots (\nabla^{\ell_n} S^{\ell_1+\ldots+\ell_{n-1}} f_n).\end{aligned} \tag{10}$$

Обе эти формулы легко доказываются по индукции, первая формула является формулой (48) в [12]. Однако операторы сдвига и их степени для нас не будут играть роли. Если обозначить

$$\gamma_k(q) = \max_{i=1,\ldots,\ell-q} |S^i \nabla^q f_k|,$$

то в §§ 4, 5 нам понадобится неравенство

$$\nabla^\ell(f_1 \ldots f_n) \leqslant \sum_Q \frac{\ell!}{\prod\limits_{k=1}^{n} \ell_k!} \gamma_1(\ell_1) \ldots \gamma_n(\ell_n). \tag{11}$$

Отметим еще, что если функция $f(i)$ не зависит от i, то ее дифференцирование дает ноль. Легко показать также, что

$$\nabla^\ell i^n = 0, \quad \ell > n. \tag{12}$$

Высшие разности для степенной функции. Числа

$$S(n, \ell, i) = \frac{1}{\ell!} \nabla^\ell i^n$$

иногда называются обобщенными числами Стирлинга второго рода [13]. Частным случаем являются обычные числа Стирлинга второго рода

$$\left\{ {n \atop \ell} \right\} = S(n,\ell) = S(n,\ell,0) = \frac{1}{\ell!}\nabla^\ell 0^n = \frac{1}{\ell!}\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell-k}C_\ell^k k^n,$$

где значение величины $\nabla^\ell i^n$ в точке $i = 0$ обозначено через $\nabla^\ell 0^n$. Хорошо известно, что

$$\left\{ {n \atop \ell} \right\} = 0, \quad n < \ell, \qquad \left\{ {n \atop \ell} \right\} = 1, \quad n = \ell. \tag{13}$$

Известны только некоторые асимптотики для $S(n,\ell,i)$:

1. Асимптотика Риордана для $n \to \infty$, $\ell = \mathrm{const}$

$$S(n,\ell) \sim \frac{\ell^n}{\ell!};$$

2. При $\ell \to \infty$, $n = \ell + k$, где k ограничено, для всех i имеет место соотношение (см. [13])

$$S(n,\ell,i) \sim C_{\ell+k}^k\Big(i + \frac{\ell}{2}\Big)^k, \tag{14}$$

частным случаем которого является результат [14] для $S(n,\ell)$;

3. При $n \to \infty$, $\ell \to \infty$ и $\varkappa = \dfrac{k}{\ell}$, отделенном от нуля и бесконечности, результат был получен в [15] для $i = 0$ и обобщен в [13] для медленно растущих i.

Дискретизация гладких функций. О случае дискретизации аналитической функции дает представление следующий пример. Если функция $g(x)$ задана на окружности S_1, то это эквивалентно функции с периодом 1, заданной на всей прямой $\mathbb{R}$. Примером может быть $g(x) = \sin 2\pi x$. Положим

$$g_i = \sin\frac{2\pi i}{N}, \quad i = 1,\ldots,N, \qquad g_{i,n} = \nabla^n g_i, \quad \Delta = \frac{1}{N}. \tag{15}$$

Тогда

$$g_{i,1} = \nabla g_i = g_{i+1} - g_i = \int\limits_{x_i}^{x_i+\Delta} g^{(1)}(y_1)\,dy_1,$$

$$g_{i,2} = \nabla g_{i,1} = g_{i+1,1} - g_{i,1} = \int\limits_{x_{i+1}}^{x_{i+1}+\Delta} g^{(1)}(y)\,dy - \int\limits_{x_i}^{x_i+\Delta} g^{(1)}(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{x_i}^{x_i+\Delta}(g^{(1)}(y_1+\Delta) - g^{(1)}(y_1))\,dy_1 = \int\limits_{x_i}^{x_i+\Delta} dy_1 \int\limits_{y_1}^{y_1+\Delta} g^{(2)}(y_2)\,dy_2$$

и т.д.,

$$g_{i,n+1} = \nabla^{n+1} g_i = g_{i+1,n} - g_{i,n} =$$

$$= \int\limits_{x_i}^{x_i+\Delta} dy_1 \left(\int\limits_{y_1}^{y_1+\Delta} dy_2 \ldots \left(\int\limits_{y_n}^{y_n+\Delta} dy_{n+1}\, g^{(n+1)}(y_{n+1})\right)\right),$$

и поэтому, если $|g^{(n)}(x)| \leqslant C^{n+1}(g)$ для некоторой константы $C(g) > 0$, то

$$|g_{i,n}| \leqslant C^{n+1}(g)\Delta^n.$$

§ 3. Постоянная внешняя сила

Теорема 1. *Пусть $F(x) = F$ постоянна, тогда при $N \to \infty$ и $1 \leqslant \ell = o(N)$ равномерно по $i < N - \ell$*

$$\nabla^{\ell+1} x_i \sim (-1)^\ell \sqrt{2} \left(\frac{F}{e} \ell \Delta^2 \right)^\ell \Delta.$$

Доказательство. Ввиду (6) достаточно доказать, что

$$\nabla^\ell \delta_i \sim \sqrt{2} \left(\frac{F}{e} \ell \Delta^2 \right)^\ell.$$

Из (2) имеем

$$\nabla^\ell \delta_{i+1} = \sum_{m=1}^{\infty} \nabla^\ell \delta_{i+1,m}, \quad \delta_{i+1,m} = a_m i^m \Delta^{2m} F^m. \tag{16}$$

Ввиду (12) или (13) в случае $\ell > m$

$$\nabla^\ell \delta_{i,m} = 0.$$

Лемма 1. *При $\ell = m$*

$$\nabla^\ell \delta_{i+1,m} = a_\ell \ell! \, (F\Delta^2)^\ell.$$

Доказательство. Заметим, что согласно (5)

$$\nabla^\ell i^{\ell+p} = \sum_{k=0}^{l} C_\ell^k (-1)^{\ell-k} (i+k)^{\ell+p}. \tag{17}$$

Тогда лемма следует из цепочки равенств

$$\nabla^m i^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^{m-k} (i+k)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^{m-k} k^m = m! \left\{ \begin{matrix} m \\ m \end{matrix} \right\} = m!,$$

где второе равенство можно объяснить двояко: либо с помощью (13), либо потому, что каждое дифференцирование понижает степень многочлена от i на единицу, и поэтому второе выражение не должно зависеть от i. ▲

Для доказательства теоремы покажем, что сумма членов ряда (16) для $m > \ell$ будет асимптотически меньше "главного" члена $\ell = m$.

Далее $m = \ell + p$, $p > 0$. Рассмотрим два случая. Пусть сначала $p > \ell$, тогда из (17) следует

$$|(\nabla^+)^\ell \delta_{i+1,\ell+p}| \leqslant |a_{\ell+p}| (F\Delta^2)^{\ell+p} 2^\ell N^{\ell+p} = |a_{\ell+p}| 2^\ell F^{2\ell} \Delta^{2\ell} (F\Delta)^{p-\ell}.$$

Возьмем минимальное ℓ_0, такое что для всех $\ell \geqslant \ell_0$

$$\ell! > 2^\ell F^\ell.$$

Тогда для $\ell \geqslant \ell_0$

$$|a_{\ell+p}|2^\ell F^{2\ell}\Delta^{2\ell}(F\Delta)^{p-\ell} \leqslant |a_\ell|(F\Delta^2)^\ell(F\Delta)^{p-\ell}\ell! \leqslant (F\Delta)^{p-\ell}|\nabla^\ell\delta_{i+1,\ell}|,$$

и значит, сумма по $p > \ell$ членов с $\ell \geqslant \ell_0$ (асимптотически) мажорируется "главным" членом. Если же $\ell < \ell_0$, то соответствующий член не превосходит

$$C(\ell_0, F)\Delta^{p-\ell}|\nabla^\ell\delta_{i+1,\ell}|$$

для некоторой константы $C(\ell_0, F) > 0$.

Случай $1 \leqslant p \leqslant \ell$ сложнее. Нетрудно доказать (см., например, [13]) известное равенство

$$\nabla^\ell i^{\ell+p} = \sum_{q=0}^{p} C_{\ell+p}^{q} i^q(\nabla^\ell 0^{\ell+p-q}).$$

Для случая $\ell \to \infty$ нам понадобится тот факт, что конечные разности $\nabla^\ell i^n$ (и числа Стирлинга) имеют простой комбинаторный смысл [13]. Напомним, что $\nabla^\ell 0^n$ равно числу способов разместить n различных объектов по ℓ различным ячейкам так, чтобы ни одна из ячеек не оказалась пустой. Аналогично, пусть имеется $\ell + i$ различных ячеек, из которых ℓ выделены. Тогда $\nabla^\ell i^n$ – число способов разместить n различных объектов по этим ячейкам так, чтобы ни одна из выделенных ℓ ячеек не была пустой. Отсюда следует, что $\nabla^\ell i^n$ неотрицательны (при $i \geqslant 0$) и возрастают по n.

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$\nabla^\ell i^{n+1} \leqslant (\ell + i + n\ell)\nabla^\ell i^n.$$

Доказательство. Имеем

$$\nabla^\ell i^n \leqslant \nabla^\ell i^{n+1} = (\ell + i)\nabla^\ell i^n + \ell\nabla^{\ell-1} i^n.$$

Действительно, неравенство очевидно, а равенство проще всего объяснить следующим образом. Выделим один элемент (например, последний в некоторой фиксированной нумерации). Расположение остальных может быть двух видов: 1) так, чтобы все выделенные ℓ ячеек были непустыми, тогда выделенный элемент может быть размещен $\ell + i$ способами; 2) ровно одна из ℓ выделенных ячеек свободна, тогда выделенный элемент должен быть положен в свободную ячейку.

Кроме того, очевидно, что

$$\nabla^{\ell-1} i^n \leqslant n\nabla^\ell i^n. \quad \blacktriangle$$

Так как $\ell + i \leqslant N$ и $n\ell \leqslant 2\ell^2 = o(\Delta^2)$, из леммы получаем

$$\left|\frac{\nabla^\ell\delta_{i+1,n+1}}{\nabla^\ell\delta_{i+1,n}}\right| \leqslant \left|\frac{a_{\ell+1}}{a_\ell}\right|(\ell + i + n\ell)F\Delta^2 = o(\Delta),$$

и значит, сумма членов с $1 \leqslant p < \ell$ асимптотически меньше $\nabla^\ell\delta_{i+1,n}$, что завершает доказательство теоремы. $\blacktriangle$

Замечание 1. Асимптотика для случая, когда ℓ имеет порядок N, связана с нерешенной проблемой комбинаторики о нахождении максимума унимодальной последовательности чисел Стирлинга (см. [16, предложение 3.30]). Но, например, оценки при $\ell \sim \varepsilon N$

$$(1 - C\varepsilon) < \frac{|\nabla^\ell \delta_i|}{\sqrt{2}\Big(\dfrac{F}{e}\ell\Delta^2\Big)^\ell} < (1 + C\varepsilon)$$

для некоторой константы $C > 0$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ следуют из вышеприведенного доказательства.

§ 4. Линейная внешняя сила

Теорема 2. *Пусть $F(x) = \alpha x$, $\alpha \geqslant 1$. Тогда равномерно по ℓ, $2 \leqslant \ell \leqslant N - i$, справедливо*

$$|\nabla^\ell x_i| \leqslant \Delta (C\Delta)^\ell \ell!.$$

Доказательство. Ввиду (6) достаточно доказать, что

$$|\nabla^{\ell-1}\delta_i| \leqslant (C\Delta)^\ell \ell!.$$

Аналогично предыдущему

$$\nabla^{\ell-1}\delta_i = \sum_{m=1}^{\infty} \nabla^{\ell-1}\delta_{i,m}, \quad \delta_{i,m} = a_m \Delta^{2m}\alpha^m \left(\sum_{k=2}^{i} x_k\right)^m. \tag{18}$$

Метод оценки каждого слагаемого будет зависеть от пары m, ℓ.

Малые m, ℓ. Пусть $\ell = 2$, $m = 1$. Тогда

$$\nabla\delta_{i,1} = a_1\Delta^2\alpha\nabla\sum_{k=2}^{i} x_k = a_1\Delta^2\alpha x_{i+1}. \tag{19}$$

Пусть $\ell = 3$, $m = 1$. Тогда

$$\nabla^2\delta_{i,1} = a_2\Delta^2\alpha\nabla^2\sum_{k=2}^{i} x_k = a_2\Delta^2\alpha\nabla x_{i+1} \sim a_2\alpha\Delta^3. \tag{20}$$

Пусть $\ell = 3$, $m = 2$. Тогда

$$\nabla^2\delta_{i,2} = a_2\Delta^4\alpha^2\nabla^2(\sum_{k=2}^{i} x_k)^2 = O(\Delta^4). \tag{21}$$

Случай $2 \leqslant \ell \leqslant m$. Мы “честно” продифференцируем один раз, а для оставшихся $\ell - 2$ дифференцирований используем очевидную оценку (верную для любой функции $f(i)$)

$$|\nabla^{\ell-2} f(i)| \leqslant 2^{\ell-2}\max|f(i)|. \tag{22}$$

А именно, обозначая $\psi_i = \sum\limits_{k=2}^{i} x_k$, имеем

$$|(\nabla^+)^{\ell-1}\delta_{i,m}| \leqslant \Delta^{2m}\alpha^m\big|(\nabla^+)^{\ell-2}\big[x_{i+1}(\psi_{i+1}^{m-1} + \psi_{i+1}^{m-2}\psi_i + \ldots + \psi_i^{m-1})\big]\big| \leqslant$$
$$\leqslant \Delta^{2m}\alpha^m 2^{\ell-2} m(i+1)^{m-1} \leqslant \alpha^m\Delta^{m+1}2^{\ell-2}m$$

и

$$\sum_{m\geqslant\ell\geqslant 2}|(\nabla^+)^{\ell-1}\delta_{i,m}|\leqslant 2^{\ell-2}\sum_{m\geqslant\ell\geqslant 2}m\alpha^m\Delta^{m+1}\leqslant\ell(2\alpha)^\ell\Delta^{\ell+1}.$$

Мы доказали больше, а именно, что формулы (19) и (20) дают асимптотику для $\ell=2$ и $\ell=3$ соответственно.

Случай $m<\ell\leqslant N$. Здесь оценки существенно сложнее. Обозначая

$$\gamma_k=\max_{i:\,i+k\leqslant N}|\nabla^k x_i|,$$

используем (для $\ell\geqslant 3$) индуктивное предположение

$$\gamma_k\leqslant\Delta(C\Delta)^k k!,\quad k=2,\ldots,\ell-1. \tag{23}$$

Рассмотрим сначала первое слагаемое (т.е. при $m=1$) в (18), которое равно

$$a_1\alpha\Delta^2\nabla^{\ell-2}x_{i+1},$$

тогда результат непосредственно следует из индуктивного предположения.

При $m\geqslant 2$ с помощью формулы (10) модуль выражения

$$\nabla^{\ell-1}\left(\sum_{k=2}^{i}x_k\right)^m$$

после $\ell-1$ дифференцирований можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}\left|\nabla^{\ell-1}\left(\sum_{k=2}^{i}x_k\right)^m\right|&\leqslant\sum_Q C(m,\ell-1\,|\,q_0,\ldots,q_{\ell-1})\left(\max_i\sum_{k=2}^{i}x_k\right)^{q_0}\times\\&\times\left(\max_i x_{i+1}\right)^{q_1}\left(\max_i|\nabla x_{i+1}|\right)^{q_2}\prod_{k\geqslant 3}\gamma_{k-1}^{q_k},\end{aligned} \tag{24}$$

где через $\sum\limits_Q$ обозначена сумма по конечным упорядоченным наборам неотрицательных целых чисел $Q=q_0,q_1,\ldots,q_\ell$, таких что

$$q_0+\sum_{k\geqslant 1}q_k=m,\quad \sum_{k\geqslant 1}kq_k=\ell-1.$$

Такие наборы будем называть допустимыми. Их смысл в том, что ровно q_0 множителей $\sum\limits_{k=2}^{i}x_k$ не дифференцируются вообще, q_1 множителей дифференцируются ровно один раз, после чего имеют вид x_{i+1}, и т.д., $q_{\ell-1}$ множителей дифференцируются ровно $\ell-1$ раз. Перенумеруем m множителей в $\left(\sum\limits_{k=2}^{i}x_k\right)^m$ от 1 до m. Каждое из последовательных дифференцирований применяется к одному из этих множителей, давая разные слагаемые в формуле (12). При этом, так как мы берем максимум по i, операторы сдвига в формуле (10) можно не учитывать.

Для заданного набора Q рассмотрим конечные занумерованные наборы $\alpha=\{A_k,\ k=0,\ldots,\ell-1\}$ подмножеств множества $\{1,\ldots,m\}$, такие что $|A_k|=q_k$ и

$$\{1,\ldots,m\}=\bigcup A_k.$$

В множество A_k мы включаем те и только те элементы, которые дифференцируются ровно k раз.

Кроме того, последовательность $\ell-1$ дифференцирований разбивается на группы $B_{k,p}$, $p=1,\dots,q_k$, так что

$$\{1,\dots,\ell-1\}=\bigcup_{k,p}B_{k,p},\quad |B_{k,p}|=k.$$

Смысл множества $B_{k,p}$ состоит в том, что каждое дифференцирование из $B_{k,p}$ применяется к p-му по порядку элементу множества A_k.

Константы $C(m,\ell-1\,|\,q_0,\dots,q_{\ell-1})$ для допустимых наборов Q равны числу таких разбиений, т.е.

$$\big(C_m^{q_0}C_{m-q_0}^{q_1}C_{m-q_0-q_1}^{q_2}\dots\big)\big(C_{\ell-1}^{q_1}(q_1!)\big)\left(C_{\ell-1-q_1}^{2q_2}\frac{(2q_2)!}{2^{q_2}}\right)\dots$$
$$\dots\left(C_{\ell-1-q_1-2q_2-\dots}^{kq_k}\frac{(kq_k)!}{(k!)^{q_k}}\right)\dots=\frac{m!}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-1}q_k!}\,\frac{(\ell-1)!}{\prod\limits_{k=1}^{\ell-1}(k!)^{q_k}}.$$

Оценим сверху модули слагаемых в (18), пользуясь равенством (24). При этом используем индуктивное предположение (23) для оценки γ_k, а также очевидные оценки для $\left|\sum x_i\right|$, $|x_i|$ и $|\nabla x_{i+1}|$. В результате получим

$$|\nabla^{\ell-1}\delta_{i,m}|\leqslant\alpha^m\Delta^{2m}N^{q_0}\Delta^{\sum\limits_{k\geqslant3}q_k}\prod_{k\geqslant2}\Big((C\Delta)^{k-1}(k-1)!\Big)^{q_k}\frac{m!}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-1}q_k!}\,\frac{(\ell-1)!}{\prod\limits_{k=1}^{\ell-1}(k!)^{q_k}}.$$

В итоге Δ будет в степени

$$2m-q_0+m-q_0-q_1-q_2+\sum_{k\geqslant2}(k-1)q_k=2m-q_0+m-q_0-q_1-q_2+$$
$$+\ell-1-q_1-m+q_0+q_1=2m+\ell-1-q_0-q_1-q_2\geqslant m+\ell-1,$$

а константа C – в степени

$$\ell-1-q_1-m+q_0+q_1=\ell-1-m+q_0.$$

Окончательной оценкой будет

$$\alpha^m\Delta^{m+\ell-1}C^{\ell-1-m+q_0}\frac{m!}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-1}q_k!}(\ell-1)!\prod_{k\geqslant2}\frac{\big((k-1)!\big)^{q_k}}{(k!)^{q_k}}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha^m(C\Delta)^{\ell-1}(\ell-1)!\,\Delta^2m^22^{-\frac{m}{2}}C^{-m+q_0}\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-1}q_k!}\prod_{k\geqslant2}\frac{1}{k^{q_k}}.$$

Действительно, поскольку для всех $k\geqslant2$

$$k!\leqslant k^k2^{-\frac{k}{2}},$$

то

$$\Delta^m m!\leqslant\Delta^m m^m2^{-\frac{m}{2}}\leqslant\Delta^2m^22^{-\frac{m}{2}}.$$

Теперь остается выполнить суммирование по всем Q:

$$\sum_Q C^{q_0} \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-1} q_k!} \prod_{k\geqslant 2} \frac{1}{k^{q_k}} \leqslant \left(\sum_{q_0} \frac{C^{q_0}}{q_0!} \right) \prod_{k=1}^{\ell-1} \sum_{q_k=0}^{m} \frac{k^{-q_k}}{q_k!} \leqslant e^C e^{\sum\limits_i^{\ell-1} k^{-1}} \leqslant$$
$$\leqslant e^{C+\ln(\ell-1)} = e^C(\ell-1),$$

после чего имеем оценку слагаемого (18) при данном m

$$(C\Delta)^\ell \ell!\, \Delta^2 m^2 C^{-m} e^C 2^{-\frac{m}{2}} \alpha^m.$$

Суммирование по m дает

$$(C\Delta)^\ell \ell!\, \Delta^2 \sum_{m=1}^{\ell-1} m^2 C^{-m} e^C 2^{-\frac{m}{2}} \alpha^m.$$

Заметим, что при $C > \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$ величина

$$\sum_{m=1}^{\ell-1} m^2 C^{-m} 2^{-\frac{m}{2}} e^C \alpha^m$$

равномерно ограничена по ℓ (и N). Учитывая также (18), видим, что теорема доказана с константой

$$C = 2\alpha. \quad \blacktriangle$$

Замечание 2. Случай $\alpha < 1$ рассматривается аналогично, меняется только константа C. Мы видели также, что при $\ell = 2$ асимптотика зависит от i, а в случае $\ell = 3$ – не зависит.

§ 5. Степенная внешняя сила

Теорема 3. *Пусть* $F(x) = \alpha x^n$, $\alpha \geqslant 1$. *Тогда для всех* i *и всех* ℓ, $2 \leqslant \ell \leqslant N-i$, *справедливо*

$$|\nabla^\ell x_i| \leqslant \Delta(\Delta C)^\ell \ell!, \quad C = 2\alpha n!\, e^6.$$

Доказательство. Аналогично предыдущему надо оценить

$$\nabla^{\ell-1}\delta_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Delta^{2m} \alpha^m \nabla^{\ell-1} \left(\sum_{k=2}^{i} x_k^n \right)^m. \tag{25}$$

Случай $\ell = 2$, $m = 1$. В этом случае

$$\nabla\delta_{i,1} = a_1 \Delta^2 \alpha \nabla \sum_{k=2}^{i} x_k^n = a_1 \Delta^2 \alpha x_{i+1}^n. \tag{26}$$

Случай $2 \leqslant \ell \leqslant m$. Мы “честно” продифференцируем один раз (по формуле (8)), а для оставшихся $\ell - 2$ дифференцирований используем оценку (22). А именно, обозначая $\psi_i = \sum\limits_{k=2}^{i} x_k^n$, имеем

$$|\nabla^{\ell-1}\delta_{i,m}| \leqslant \Delta^{2m}\alpha^m \bigl|\nabla^{\ell-2}\bigl[x_{i+1}^n(\psi_{i+1}^{m-1} + \psi_{i+1}^{m-2}\psi_i + \ldots + \psi_i^{m-1})\bigr]\bigr| \leqslant$$
$$\leqslant \Delta^{2m}\alpha^m 2^{\ell-2} m(i+1)^{m-1} \leqslant \alpha^m \Delta^{m+1} 2^{\ell-2} m$$

и

$$2^{\ell-2} \sum_{m \geqslant \ell \geqslant 2} m\alpha^m \Delta^{m+1} \leqslant \ell(2\alpha)^\ell \Delta^{\ell+1}.$$

Отсюда и из (26) следует результат теоремы для $\ell = 2$.

Первая индуктивная процедура. Надо оценить

$$\sum_{m=1}^{\ell-1} \nabla^{\ell-1}\delta_{i,m} = \sum_{m=1}^{\ell-1} a_m \alpha^m \Delta^{2m} \nabla^{\ell-1}\left(\sum_{k=2}^{i} x_k^n\right)^m. \tag{27}$$

Для этого мы проводим индуктивную конструкцию, очень похожую на проведенную для линейной внешней силы. При этом (для $\ell \geqslant 3$) мы используем индуктивное предположение

$$\gamma_k = \max_{i:\, i+k \leqslant N} |\nabla^k x_i| \leqslant \Delta(C\Delta)^k k!, \quad k = 2, \ldots, \ell-1, \tag{28}$$

для получения оценки величины $|\nabla^{\ell-1} x_i^n|$. Аналогично § 4 имеем

$$|\nabla^{\ell-1} x_{i+1}^n| \leqslant \sum_Q C(n, \ell-1 \,|\, q_0, \ldots, q_\ell)\Bigl(\max_i x_{i+1}\Bigr)^{q_0}\Bigl(\max_i |\nabla x_{i+1}|\Bigr)^{q_1} \prod_{k \geqslant 2}^{\ell-1} \gamma_k^{q_k}, \tag{29}$$

где

$$\sum_{k \geqslant 0} q_k = n, \quad \sum_{k \geqslant 1} k q_k = \ell - 1.$$

Константы $C(n, \ell-1 \,|\, q_0, \ldots, q_\ell)$ для допустимых наборов Q такие же, как и в § 4:

$$\frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-1} q_k!} \frac{(\ell-1)!}{\prod\limits_{k=1}^{\ell-1} (k!)^{q_k}}.$$

Пользуясь индуктивным предположением, оценим сверху выражение (29):

$$\Delta^{\sum\limits_{k\geqslant 1} q_k} \prod_{k \geqslant 2}^{\ell-1} \bigl((C\Delta)^k k!\bigr)^{q_k} \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-1} q_k!} \frac{(\ell-1)!}{\prod\limits_{k=1}^{\ell-1} (k!)^{q_k}} = \Delta^{\ell-1+\sum\limits_{k\geqslant 2} q_k} C^{\ell-1-q_1} \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{\ell} q_k!} (\ell-1)! \leqslant$$
$$\leqslant (C\Delta)^{\ell-1}(\ell-1)!\, n!\, \Delta^{\sum\limits_{k\geqslant 2} q_k} C^{-q_1} \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{\ell} q_k!}.$$

Теперь остается выполнить суммирование по всем Q:

$$\sum_Q \Delta^{\sum\limits_{k\geqslant 2} q_k} C^{-q_1} \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-1} q_k!} \leqslant \sum_{q_0} \frac{1}{q_0!} \sum_{q_1} \frac{C^{-q_1}}{q_1!} \prod_{k=2}^{\ell-1} \sum_{q_k=0}^{\ell-1} \frac{\Delta^{q_k}}{q_k!} \leqslant e^{1+c^{-1}+(\ell-3)\Delta}.$$

В результате имеем оценку

$$|\nabla^{\ell-1}x_{i+1}^n| \leqslant (C\Delta)^{\ell-1}(\ell-1)!\,n!\,e^{2+C^{-1}}. \tag{30}$$

Случай $1=m<\ell\leqslant N$. Аналогично оценим слагаемое с $m=1$, используя

$$|\nabla^{\ell-1}\delta_{i,1}| \leqslant a_1\alpha\Delta^2\left|\nabla^{\ell-1}\left(\sum_{k=2}^{i}x_k^n\right)\right| = a_1\alpha\Delta^2|\nabla^{\ell-2}x_{i+1}^n| \leqslant$$

$$\leqslant a_1\alpha\Delta^2\sum_{Q}C(n,\ell-2\,|\,q_0,\ldots,q_{\ell-2})\Big(\max_i x_{i+1}\Big)^{q_0}\Big(\max_i|\nabla x_{i+1}|\Big)^{q_1}\prod_{k\geqslant 2}^{\ell-2}(\gamma_k)^{q_k}, \tag{31}$$

где

$$\sum_{k\geqslant 0}q_k=n,\qquad \sum_{k\geqslant 1}kq_k=\ell-2.$$

Константы $C(n,\ell-2\,|\,q_0,\ldots,q_{\ell-2})$ для допустимых наборов Q такие же, как и выше:

$$\frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-2}q_k!}\,\frac{(\ell-2)!}{\prod\limits_{k=1}^{\ell-2}(k!)^{q_k}}.$$

Пользуясь индуктивным предположением (30), оценим сверху модуль слагаемого в сумме (31):

$$\alpha\Delta^2\Delta^{\sum\limits_{k\geqslant1}q_k}\prod_{k\geqslant2}^{\ell-2}\big((C\Delta)^k k!\big)^{q_k}\frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-2}q_k!}\,\frac{(\ell-2)!}{\prod\limits_{k=1}^{\ell-2}(k!)^{q_k}}=$$

$$=\alpha\Delta^{2+\ell-2+\sum\limits_{k\geqslant2}q_k}C^{\ell-2-q_1}\frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-2}q_k!}(\ell-2)!\leqslant$$

$$\leqslant\alpha(C\Delta)^{\ell}\ell!\,n!\,\frac{1}{\ell(\ell-1)}\Delta^{\sum\limits_{k\geqslant2}q_k}C^{-2-q_1}\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-2}q_k!}.$$

Теперь остается выполнить суммирование по всем Q:

$$\sum_{Q}\Delta^{\sum\limits_{k\geqslant2}q_k}C^{-q_1}\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-2}q_k!}\leqslant\sum_{q_0}\frac{1}{q_0!}\sum_{q_1}\frac{\Delta^{q_1}C^{-q_1}}{q_1!}\prod_{k=2}^{\ell-2}\sum_{q_k=0}^{\ell-2}\frac{\Delta^{q_k}}{q_k!}\leqslant e^{1+C^{-1}+(\ell-4)\Delta}.$$

В результате получаем

$$\alpha(C\Delta)^{\ell}\ell!\,n!\,\frac{1}{\ell(\ell-1)}\,\frac{e^{2+C^{-1}}}{C^2}.$$

Вторая индуктивная процедура. Теперь, пользуясь оценкой (30), рассмотрим случай $2 \leqslant m < \ell \leqslant N$, т.е. оценим при $m \geqslant 2$ выражение

$$a_m \alpha^m \Delta^{2m} \nabla^{\ell-1} \left(\sum_{k=2}^{i} x_k^n \right)^m . \tag{32}$$

Обозначая

$$\beta_k = \max_i |\nabla^k x_{i+1}^n|,$$

выражение (32) после $\ell - 1$ дифференцирований можно представить в виде

$$a_m \alpha^m \Delta^{2m} \sum_Q C(m, \ell-1 \,|\, q_0, \ldots, q_{\ell-1}) \left(\max_i \sum_{k=2}^{i} x_k^n \right)^{q_0} \left(\max_i x_{i+1}^n \right)^{q_1} \prod_{k \geqslant 2}^{\ell-1} \beta_{k-1}^{q_k}. \tag{33}$$

Окончательно имеем

$$|\nabla^{\ell-1} \delta_{i,m}| = \left| a_m \Delta^{2m} \alpha^m \nabla^{\ell-1} \left(\sum_{k=2}^{i} x_k^n \right)^m \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \alpha^m \Delta^{2m} N^{q_0} \Delta^{\sum\limits_{k \geqslant 3} q_k} \prod_{k \geqslant 2} \left((C\Delta)^{(k-1)} (k-1)!\, n!\, e^{2+C^{-1}} \right)^{q_k} \frac{m!}{\prod\limits_{k=0}^{\ell-1} q_k!} \frac{(\ell-1)!}{\prod\limits_{k=1}^{\ell-1} (k!)^{q_k}} \right| .$$

Теперь удобнее рассмотреть множители отдельно.

Степень Δ равна

$$2m - q_0 + \sum_{k \geqslant 3} q_k + \ell - q_1 - m + q_0 + q_1 = m + \ell + \sum_{k \geqslant 3} q_k,$$

степень C равна

$$\ell - q_1 - m + q_0 + q_1 = \ell - m + q_0,$$

остальные константы –

$$(n!\, e^{2+C^{-1}})^{m-q_0-q_1}.$$

После выделения множителя $(C\Delta)^\ell \ell!$ остается множитель

$$m!\, \ell^{-1} \Delta^m \leqslant \ell^{-1}.$$

Суммирование дает

$$\sum_Q \left[\sum_{q_0=0}^{\ell-1} \frac{1}{q_0!} \right] \left[\sum_{q_1=0}^{\ell-1} \frac{1}{q_1!} \right] \prod_{k=2}^{\ell-1} \left[\sum_{q_k=0}^{\ell-1} \frac{1}{q_k!} \frac{1}{k^{q_k}} \Delta^{q_k} \right] \leqslant e^3.$$

Окончательно получаем константы

$$C^{-m+q_0} (\alpha n!\, e^{2+C^{-1}})^{m-q_0-q_1} e^3,$$

что доказывает теорему при

$$C = 2\alpha n!\, e^6. \quad \blacktriangle$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jordan C.* Calculus of Finite Differences. New York: Chelsea Publ. Co., 1950.
2. *Milne-Thomson L.M.* The Calculus of Finite Differences. London: Macmillan and Co. Ltd., 1933.
3. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. Москва: ГИФМЛ, 1959.
4. *Flajolet P., Sedgewick R.* Mellin Transforms and Asymptotics: Finite Differences and Rice's Integrals // Theoret. Comput. Sci. 1995. V. 144. № 1–2. P. 101–124.
5. *Ventevogel W.* On the Configuration of a One-Dimensional System of Interacting Particles with Minimum Potential Energy per Particle // Physica A. 1978. V. 92. № 3–40. P. 343–361.
6. *Duneau M., Katz A.* Structural Stability of Classical Lattices in One Dimension // Ann. Inst. H. Poincaré (A) Phys. Théor. 1984. V. 41. № 3. P. 269–290.
7. *Radin C.* Existence of Ground State Configurations // Math. Phys. Electron. J. 2004. V. 10. Paper 6 (electronic).
8. *Radin C.* Crystals and Quasicrystals: A Lattice Gas Model // Phys. Lett. A. 1986. V. 114. № 7. P. 381–383.
9. *Radin C., Schulman L.S.* Periodicity of Classical Ground States // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. № 8. P. 621–622.
10. *Malyshev V.A.* Fixed Points for One-Dimensional Particle System with Strong Interaction // Mosc. Math. J. 2012. V. 12. № 1. P. 139–147.
11. *Малышев В.А.* Критические состояния многочастичных систем с сильным взаимодействием на окружности // Пробл. передачи информ. 2011. Т. 47. № 2. С. 117–127.
12. *Spiegel M.R.* Calculus of Finite Differences and Difference Equations. New York: McGraw-Hill, 1971.
13. *Медведев Ю., Ивченко Г.* Асимптотическое представление конечных разностей от степенной функции в произвольной точке // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 10. № 1. С. 151–156.
14. *Hsu L.C.* Note on the Asymptotic Expansion of the nth Difference of Zero // Ann. Math. Statistics. 1948. V. 19. P. 273–277.
15. *Good I.* An Asymptotic Formula for the Differences of the Power at Zero // Ann. Math. Stat. 1961. V. 32. № 1. P. 249–256.
16. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.

Малышев Вадим Александрович
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
лаборатория больших случайных систем
malyshev@yahoo.com

Поступила в редакцию
30.11.2011
После переработки
28.05.2012