ISSN 0202—7488

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Том 18

Научный редактор
профессор Р. В. Гамкрелидзе

Серия издается с 1966 г.

МОСКВА 1981

1—4489

ВЫПУСКИ И ТОМА СЕРИИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАНЕЕ:

УДК 519.248:53

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ ГИББСОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В. А. Малышев, Е. Н. Петрова

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Преобразования случайных полей являются основным средством построения новых полей из простейших или из уже построенных. Можно брать функции от поля или применять гиббсовский метод замены меры. Только второй способ ведет к интересным и сложным примерам. При этом некоторые гиббсовские перестройки оказываются связанными преобразованием двойственности, которое получается применением преобразования Фурье или формулы суммирования Пуассона или других интегральных преобразований к сомножителям гиббсовской плотности. Мы будем в этой статье рассматривать преобразование двойственности и некоторые другие связанные с ним преобразования. Эта статья предназначена как введение, обзор и содержит также изложение ряда оригинальных результатов, связанных с преобразованием двойственности и кластерными разложениями. Список библиографии доведен до начала 1980 года. Сама идея преобразования типа двойственности, как кажется, еще далеко себя не исчерпала. Однако уже сейчас существует много результатов, полученных с помощью этой идеи. Существует монография о двойственности [55], посвященная, однако, в основном системам, принимающим два значения, причем книга эта написана в основном по работам ее авторов. Существует также физический обзор [68], ориентированный на проблему конфайнмента. Из него можно извлечь ряд наглядных физических представлений, являющихся по существу основой ряда работ по двойственности.

Для чтения статьи полезно иметь некоторое знакомство с решетчатыми системами статистической физики. Из других областей мы используем элементы гармонического анализа на абелевых группах и технику дискретных дифференциальных форм.

Пусть T — произвольное конечное или счетное множество. Каждой его точке t соответствует полное сепарабельное метрическое пространство S с борелевской σ-алгеброй Σ. Функции

$\xi=\xi_t$ на T со значениями в S будем называть конфигурациями. Пусть Φ — функция на множестве конфигураций. Мы будем писать $\Phi=\Phi_A$, если Φ зависит лишь от значений ξ_t в точках $t\in A\subset T$, причем A конечно.

Формальным евклидовым действием (энергией) мы будем называть формальную сумму вида

$$U=\sum_{A\subset T}\Phi_A.$$

Энергией конфигурации ξ для конечного подмножества $\Lambda\subset T$ (соответственно в Λ с граничными условиями ξ_t, $t\bar{\in}\Lambda$) будем называть соответственно

$$U_\Lambda(\xi)=\sum_{A\subset\Lambda}\Phi_A(\xi),\quad U_{\Lambda,\xi}(\xi)=\sum_{A\cap\Lambda\neq\varnothing}\Phi_A(\xi),$$

если последняя сумма определена. Малый джентльменский набор необходимых примеров таков:

1. Модель с глобальной G-симметрией (G-модель). Здесь $T=Z^d$, $S=G$ есть группа и пусть ψ — функция на G. Тогда формальное действие имеет вид

$$U=\sum_{|t-t'|=1}\psi(g_t g_{t'}^{-1}),\quad g_t\in G,$$

где суммирование производится по всем (неупорядоченным) парам ближайших соседей.

2. Модель с локальной калибровочной G-симметрией (калибровочная G-модель).

Снова $T=Z^d$, а $S=G^d$, т. е. переменная в точке t есть вектор $(g_{t1},\ldots,g_{td})$, $g_{t\mu}\in G$. Можно считать, что $g_{t\mu}$ есть переменная, соответствующая 1-клетке $(t, t+\hat{\mu})$, $\hat{\mu}$ — единичный вектор в направлении μ-той оси. Тогда

$$U_{\text{gauge}}=\sum_{t,\mu,\nu}\psi(g_{t\mu}g_{t+\hat{\mu},\nu}g^{-1}_{t+\hat{\nu},\mu}g^{-1}_{t\nu}).$$

3. Модель Хиггса.

Здесь $S=G\times G^d$, т. е. переменная в точке t есть g_t и вектор $(g_{t\mu})\mu=1,\ldots,d$. При этом

$$U=\beta_1 U_{\text{gauge}}+\beta_2\sum_{t,\mu}\psi_1(g_t g_{t\mu}g^{-1}_{t+\hat{\mu}}).$$

В качестве более изысканной модели укажем модель общей теории относительности на решетке [29].

Напомним теперь определение гиббсовских состояний в нужном для нас виде. Мы дадим это определение в более общем виде, учитывая, что при преобразовании двойственности могут получаться комплексные меры [77]. Пусть S компактно. Пусть $\mathfrak{A}_\Lambda$ — алгебра комплексных непрерывных функций на множестве S^Λ всех конфигураций в Λ. Пусть $\mathfrak{A}_0=\bigcup_{\Lambda:|\Lambda|<\infty}\mathfrak{A}_\Lambda$ — алгебра локальных наблюдаемых. Квазисостоянием на $\mathfrak{A}_0$ будем называть линейный функционал $\langle\cdot\rangle$ на $\mathfrak{A}_0$ такой, что его ограничения на каждую $\mathfrak{A}_\Lambda$ являются непрерывными и $\langle 1_\Lambda\rangle=1$. Иначе говоря, это есть согласованное семейство счетно-аддитивных комплексных мер μ_Λ на S таких, что $\mu_\Lambda(S^\Lambda)=1$. Вообще говоря, квазисостояние не может быть получено из счетно-аддитивной меры на S^T (т. е. не имеет места теорема Колмогорова). Иначе говоря, квазисостояния не продолжаются до непрерывных линейных функционалов на C^*-алгебре $\mathfrak{A}=\bar{\mathfrak{A}}_0$ квазилокальных наблюдаемых. Нетрудно привести простые примеры квазисостояний: независимые, одномерные марковские, гауссовские [77].

Определим теперь гиббсовские перестройки квазисостояний. Пусть дано некоторое квазисостояние $\langle\cdot\rangle_0$. Гиббсовской перестройкой его в объеме Λ с данными граничными условиями ξ (считаем, что дано формальное действие U) будем называть меру μ_Λ с плотностью

$$\frac{d\mu_{\Lambda,\xi}}{d\mu_{0,\Lambda}}=Z^{-1}_{\Lambda,\xi}\exp(-U_{\Lambda,\xi}),\quad Z_{\Lambda,\xi}=\langle\exp(-U_{\Lambda,\xi})\rangle_0$$

относительно меры $\mu_{0,\Lambda}$ в Λ, соответствующей квазисостоянию $\langle\cdot\rangle_0$.

Предельным гиббсовским квазисостоянием будем называть слабую предельную точку таких квазисостояний, если $\Lambda\uparrow T$. Если $\langle\cdot\rangle_0$ вероятностная мера, U_Λ вещественно и $Z_{\Lambda,\xi}<\infty$, то предельная точка, если она существует как квазисостояние, обязательно определяет (по теореме Колмогорова) вероятностную меру, называемую предельной гиббсовской перестройкой. Некоторые результаты относительно квазисостояний см. в [77].

Модель статистической физики или квантовой теории поля определяется выбором «свободной» меры $\langle\cdot\rangle_0$ и взаимодействия U. Чаще всего в качестве свободной меры берется мера с независимыми значениями или гауссова мера или их условные ограничения на некоторое множество конфигураций.

Скажем несколько слов о содержании этой работы. Из многочисленных применений двойственности мы больше всего интересуемся двойственностью как методом получения новых кластерных разложений. С этой точки зрения простейший пример двойственности разобран ниже во введении. В § 2 мы рассматриваем так называемое преобразование sine-Gordon, которое окажется ниже в § 6 частным случаем преобразования типа двойственности. Это преобразование дает эквивалентность между нейтральным газом частиц и обобщенным марковским случайным полем с взаимодействием типа sine-Gordon. Кратко описываются важные результаты, полученные с помощью этой эквивалентности. В работах по двойственности часто «чистое» преобразование двойственности перемешано с так называемым «электродинамическим представлением». «Чистое» преобразование двойственности, являющееся (см. § 5) частным случаем формулы суммирования Пуассона, ни в коем виде не исчерпывает идеи двойственности. Важнейшую роль играет электродинамическое представление (см. § 6, 7), с помощью которого «чистая» двойственность получает другое содержание (§ 7). С помощью этого последнего преобразования удается получить много результатов для систем с дальнодействующим (несуммируемым) потенциалом (§ 6).

Сама идея двойственности дает хорошую интуицию для получения новых типов кластерных разложений, хотя в них само преобразование двойственности не участвует. Такие разложения в низкотемпературной области рассматриваются в § 8 — Z-модель, § 9 — калибровочные Z_2 и Z-модели, § 10 — Z_2-модель Хиггса. Мы ограничиваемся выводом основных уравнений, отсылая за стандартными частями теории кластерных разложений к работе [6].

Дальнейшие сдвиги в теории кластерных разложений, по-видимому, будут связаны с классификацией стационарных точек действия (§ 8). Связь между стационарными точками и двойственностью не вполне ясна. Однако терминология, относящаяся к стационарным точкам, часто эксплуатируется в большинстве физических работ о двойственности. Нелокальные функционалы Вильсона и Хоофта, возникшие в связи с проблемой конфайнмента, кратко рассматриваются в § 13 в связи с двойственностью.

Известно, что случайные поля с одной непрерывной координатой можно эквивалентным способом описывать на гамильтоновом языке (с помощью трансфер-матрицы). Оказывается, что и преобразование двойственности можно делать на языке гамильтониана (трансфер-матрицы). Это позволяет получить интересные выводы относительно связи спектра гамильтониана в высокотемпературной и низкотемпературной областях (§ 12). В § 14 дается краткий обзор других важнейших результатов.

Простейший пример преобразования двойственности восходит к работе Крамерса — Ванье [70] и относится к самой известной модели статистической физики — двумерной модели Изинга. Рассмотрение этой модели является поучительным. Мы увидим на ней связь между высокотемпературным и низкотемпературным разложениями.

Рассмотрим статистическую сумму Z_2-модели в кубе $\Lambda\subset R^2$ с целочисленными вершинами и с пустыми граничными условиями

$$Z_\Lambda(\beta)=\sum_\sigma \exp\Bigg(\beta\sum_{\substack{|t-t'|=1\\ t,\,t'\in\Lambda}}\sigma_t\sigma_{t'}\Bigg), \tag{1}$$

где $\sum_\sigma$ берется по всем конфигурациям $\sigma_t=\pm1$, $t\in\Lambda$. Тогда

$$Z_\Lambda(\beta)=\sum_\sigma\prod_{|t-t'|=1}(\operatorname{ch}\beta+\sigma_t\sigma_{t'}\operatorname{sh}\beta)=$$

$$=(\operatorname{ch}\beta)^v\sum_\sigma\prod_{|t-t'|=1}(1+\sigma_t\sigma_{t'}\operatorname{th}\beta), \tag{2}$$

где v — число 1-клеток (ребер) решетки (в замкнутом) кубе Λ.

Если воспользоваться тем, что $\sum_{\sigma_t=\pm1}\sigma_t=0$, $\sum_{\sigma_t=\pm1}1=2$, то простое комбинаторное рассуждение после раскрытия скобок в правой части (2) дает

$$Z_\Lambda(\beta)=(\operatorname{ch}\beta)^v 2^v\sum_\Gamma(\operatorname{th}\beta)^{|\Gamma|}, \tag{3}$$

где последняя сумма берется по всем подмножествам Γ множества $(\Lambda)_1$ всех 1-клеток (ребер) Λ таким, что в каждой точке $t\in\Lambda$ сходится 0,2 или 4 ребра Γ, $|\Gamma|$ — мощность Γ.

Рассмотрим теперь такую же систему, определенную на множестве Λ^* точек решетки $Z^2+\left(\frac12,\frac12\right)$, принадлежащих Λ, с $(+)$-граничными условиями

$$Z_{\Lambda^*}(\beta^*)=\sum_\sigma\exp\Bigg(\beta^*\sum_{|t-t'|=1}\sigma_t\sigma_{t'}\Bigg),$$

где сумма $\sum_{|t-t'|=1}$ берется по всем парам точек t, $t'\in Z^2+\left(\frac12,\frac12\right)$ таким, что хотя бы одна из них принадлежит Λ^*. При этом считается, что $\sigma_t\equiv+1$, если $t\bar\in\Lambda$. Каждой конфигурации σ на Λ^* сопоставим контур Γ, относя к нему ребро из $(\Lambda)_1$ тогда и только тогда, когда проходящее через его центр перпендикулярное к нему ребро соединяет точки t, $t'\in\Lambda^*$ такие, что $\sigma_t=-\sigma_{t'}$. Это соответствие $\sigma\leftrightarrow\Gamma$ взаимно однозначно и при этом

$$\sum_{|t-t'|=1}(\sigma_t\sigma_{t'}-1)=-2|\Gamma|.$$

Поэтому

$$Z_{\Lambda^*}(\beta^*)=\exp(\beta^* v)\sum_\Gamma\exp(-2\beta^*|\Gamma|). \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), получаем, что при

$$\exp(-2\beta^*) = \operatorname{th}\beta \qquad (5)$$

имеет место равенство

$$\frac{Z_\Lambda(\beta)}{(2\operatorname{ch}\beta)^v} = \frac{Z_{\Lambda^*}(\beta^*)}{\exp(\beta^* v)}. \qquad (6)$$

При малых β правую часть (3) можно рассматривать как (высокотемпературное) разложение по степеням $\operatorname{th}\beta$. В то же время при больших β^* правую часть (4) можно рассматривать как низкотемпературное разложение по числу неравных ближайших соседей, т. е. по числу отклонений от «основного состояния» (см. ниже). Формула (6) дает соответствие между этими разложениями.

§ 2. НЕЙТРАЛЬНЫЙ ГАЗ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ sine-GORDON

Рассмотрим систему N частиц, расположенных в точках $x_1, \ldots, x_N$ ограниченной области $\Lambda \subset R^d$. Каждая частица имеет внутреннюю степень свободы $q_1, \ldots, q_N \in Q$, где $Q = R \times R^2 \times \times \ldots \times R^k$ с заданной положительной конечной мерой $d\lambda(q)$

$$d\lambda(q) = d\lambda(-q), \qquad (1)$$

будем называть q (обобщенным) зарядом. Энергия взаимодействия $V(q, x; q', x')$ частиц q, x и q', x' предполагается удовлетворяющей условию нейтральности

$$V(q, x; q', x') = -V(-q, x; q', x') = -V(q, x; -q', x') \qquad (2)$$

и условию положительной определенности

$$\sum_{i,\, j=1}^{N} \bar{c}_i c_j V(q_i, x_i; q_j, x_j) \geqslant 0 \qquad (3)$$

для всех $c_i \in C$, $q_i \in Q$, $x_i \in R^d$. Энергия всей системы частиц равна

$$U((q)_N, (x)_N) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} V(q_i, x_i; q_j, x_j).$$

Мы обозначаем в дальнейшем

$$(q)_N = (q_1, \ldots, q_N), \quad (x)_N = (x_1, \ldots, x_N),$$

$$d\lambda(q)_N = \prod_{j=1}^{N} d\lambda(q_j), \quad d(x)_N = \prod_{j=1}^{N} dx_j.$$

Плотность вероятности системы $(q)_N$, $(x)_N$ относительно меры $d(\lambda)_N$, $d(x)_N$ и статистическая сумма равны соответственно

$$Z_\Lambda^{-1} \frac{z^N}{N!} \exp(-\beta U((q)_N, (x)_N)),$$

$$Z_\Lambda = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \int_{Q^N} \int_{\Lambda^N} \exp(-\beta U)\, d(\lambda)_N d(x)_N. \qquad (4)$$

Корреляционные функции определяются как

$$\rho_\Lambda((q)_N, (x)_N) = Z_\Lambda^{-1} z^N \left[\sum_{M=0}^{\infty} \frac{z^M}{M!} \int_{Q^M} d\lambda(q')_M \int_{\Lambda^M} d(x')_M \times \right.$$

$$\left. \times \exp(-\beta U((q)_N, (q')_M, (x)_N, (x')_M)) \right]. \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь гауссову систему случайных величин $\varphi(f)$, занумерованную функциями $f \in C_0^\infty(R^d \times Q)$ с нулевым средним и с ковариацией

$$\langle \varphi(f)\varphi(f') \rangle = \int f(q, x) V(q, x; q', x') f'(q', x')\, dx\, dq\, dx'\, dq'.$$

Если, например, V непрерывна по x и q, то существует $\varphi(q, x) = \varphi(\delta_{x,q})$ и полагая

$$:e^{i\varphi(f)}: \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{i\varphi(f)}}{\langle e^{i\varphi(f)} \rangle} = e^{i\varphi(f)} e^{\frac{1}{2}\langle \varphi^2(f) \rangle}$$

получаем для любых $\varepsilon_j = \pm 1$

$$\left\langle \prod_{j=1}^{n} :e^{i\beta^{1/2}\varepsilon_j \varphi(q_j, x_j)}: \right\rangle = \exp\left(-\beta \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} U(\varepsilon_i q_i, x_i; \varepsilon_j q_j, x_j)\right). \qquad (6)$$

Полагая

$$:\cos \beta^{1/2}\varphi(q, x): = e^{\beta/2 V(q,x;q,x)} \cos \beta^{1/2}\varphi(q, x),$$

$$C_\Lambda = \int_Q d\lambda \int_\Lambda dx :\cos \beta^{1/2}\varphi(q, x):$$

и используя симметрию, получаем основные соотношения

$$Z_\Lambda = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N!} \langle C_\Lambda^N \rangle = \langle \exp(zC_\Lambda) \rangle, \qquad (7)$$

$$\rho_\Lambda((q)_N, (x)_N) = Z_\Lambda^{-1} \left\langle \prod_{j=1}^{N} z :e^{i\beta^{1/2}\varphi(q_j, x_j)}: e^{zC_\Lambda} \right\rangle \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \left\langle \prod_{j=1}^{N} z :e^{i\beta^{1/2}\varphi(q_j, x_j)}: \right\rangle_\Lambda.$$

Таким образом, корреляционные функции нейтрального газа оказываются равными корреляционным функциям нового случайного поля. Отсюда сразу получается равномерная по Λ оценка

$$\rho_\Lambda((q)_N,\ (x)_N)\leqslant|z|^N\exp\left(\frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^{N}V(q_i,\ x_i;\ q_i,\ x_i)\right),\tag{8}$$

из которой следует существование хотя бы одной предельной гиббсовской меры при термодинамическом предельном переходе $\Lambda\uparrow R^d$ (см. [45]).

Равенства (7) иногда называются преобразованием sine-Gordon. Впервые оно появилось, по-видимому, в работе [94]. В работе [45] и ее продолжении развит также квантовый вариант этого преобразования. Помимо компактности (8), в [45] получено также несколько корреляционных неравенств, позволяющих доказать существование термодинамического предела для поля sine-Gordon (см. также [84]).

Примером взаимодействия V может служить $Q=R$, q — заряд,

$$d\lambda(q)=\frac{1}{2}\{\delta(q-1)+\delta(q+1)\}\,dq,$$

$$V(q,\ x,\ q',\ x')=qq'(2\pi)^{-d/2}\int e^{ik(x-x')}\hat V(k)\,d^dk,\quad 0\leqslant\hat V(k)\in L^1(R^d).$$

Другим примером является регуляризованное дипольное взаимодействие

$$V(q,\ x;\ q',\ x')=\int d^3k e^{ik(x-x')}(qk)(q'k')\,k^{-2}|\hat k(k)|^2,$$

где $\hat k(k)$ — преобразование Фурье регуляризатора $k(x)\in C_0^\infty(R^3)$, равного 0 вне некоторой окрестности нуля,

$$Q=R^3,\quad d\lambda(q)=\delta(|q|-1)\,d^3q.$$

Эффективным потенциалом для газа называется двухчастичная корреляционная функция

$$\langle\varphi(q,\ x)\varphi(q',\ x')\rangle=\lim_\Lambda\langle\varphi(q,\ x)\varphi(q',\ x')\rangle_\Lambda.$$

Ее можно выразить непосредственно в терминах газа. В [85] с помощью корреляционных неравенств доказано следующее утверждение. Эффективный потенциал между двумя параллельными диполями не является абсолютно интегрируемым при $(4\pi/3)\,z\beta e^{\beta K}<1$, $K=\frac{1}{2}V(\sigma,\ 0;\ \sigma,\ 0)$, но при всех z и β является квадратично интегрируемым. Первый факт свидетельствует об отсутствии экранирования в системе диполей.

Существование экранирования (экспоненциального убывания корреляций) для нейтрального газа с регуляризованным в нуле кулоновским взаимодействием доказано в работе Бриджеса [20] с использованием преобразования sine-Gordon. Для этой цели Бриджес развил для случая счетного числа основных состояний низкотемпературное разложение Глимма — Джаффе — Спенсера.

Преобразование sine-Gordon используется также в обратном направлении для исследования ультрафиолетовой устойчивости двумерного евклидова поля типа sine-Gordon сведением к явно решаемой двумерной кулоновской плазме [43]. Заметим, что кулоновское взаимодействие в размерности $\nu\geqslant3$ приходится регуляризовать в нуле, так как оно, очевидно, является катастрофическим (статистическая сумма в конечном объеме расходится).

§ 3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Пусть G — локально компактная абелева группа, $\hat G$ — двойственная к ней группа. Далее в основном мы будем рассматривать группы R, Z, $S^1=R/Z$, $Z_m=Z/mZ$.

Для любой меры Хаара dg на G можно так нормировать меру Хаара $d\hat g$ на $\hat G$, что преобразование Фурье от G к $\hat G$ и обратно имеет вид

$$\begin{aligned}\hat f(\hat g)&=\int_G f(g)(\hat g,\ g)\,dg,\\ f(g)&=\int_{\hat G}\hat f(\hat g)\overline{(\hat g,\ g)}\,d\hat g.\end{aligned}\tag{1}$$

Для компактной группы мы будем считать $\int_G dg=1$, для дискретной группы будем считать, что каждая ее точка имеет меру 1. Для $G=R$ возьмем меру $dx/2\pi$ (см. [3]).

Пусть Γ — замкнутая подгруппа в G и пусть $\hat\Gamma_1$ — подгруппа $\hat G$, ассоциированная по двойственности с Γ, т. е. $\hat\Gamma_1$ есть группа характеров, тривиальных на Γ. Тогда имеют место точные последовательности

$$\begin{aligned}&1\to\Gamma\to G\to\Gamma_1\to1,\\ &1\leftarrow\hat\Gamma\leftarrow\hat G\leftarrow\hat\Gamma_1\leftarrow1.\end{aligned}\tag{2}$$

Пусть меры Хаара dg, $d\gamma$, $d\gamma_1$ на G, Γ, Γ_1 нормированы так, что $dg=d\gamma d\gamma_1$. Тогда для непрерывных интегрируемых функций $f(g)$ имеет место формула суммирования Пуассона

$$\int_\Gamma f(g)\,d\gamma=\int_{\hat\Gamma_1}\hat f(\hat g)\,d\hat\gamma_1,\tag{3}$$

где $d\hat\gamma_1$ — мера Хаара на $\hat\Gamma_1$, соответствующая мере $d\gamma_1$ на Γ_1. В частности, если Γ дискретна, а G/Γ компактна, то $\hat\Gamma_1$ дискретна, $\hat\Gamma$ компактна, и интегралы в (3) переходят в суммы.

Пусть $\mathscr{P}(G)$ — множество всех положительных положительно-определенных функций на G. Рассмотрим несколько важных примеров.

1. $G=Z_2=\{-1, 1\}$ с операцией умножения.

Утверждение. Положительная функция $a(\sigma)$, $\sigma=\pm 1$, на G принадлежит $\mathscr{P}(G)$ тогда и только тогда, когда

$$a(1)\geqslant a(-1). \tag{4}$$

Действительно, $a(\sigma)$ может быть разложена по характерам $a(\sigma)=c_1+c_{-1}\chi(\sigma)$, где $\chi(\sigma)\equiv\sigma$. Из неотрицательности c_i получаем утверждение. В частности, при $\beta>0$

$$a(\sigma)\equiv\exp(\beta\sigma)=\operatorname{ch}\beta+\sigma\operatorname{sh}\beta\in\mathscr{P}(G)$$

и (5)

$$\hat{a}(\hat{\sigma})=\frac{1}{2}(\exp\beta+\hat{\sigma}\exp(-\beta))=c\exp(\beta^*\hat{\sigma}),$$

где c и β^* находятся из уравнений

$$\frac{1}{2}\exp(-\beta)=c\operatorname{sh}\beta^*;\quad \frac{1}{2}\exp\beta=c\operatorname{ch}\beta^*,\quad e^{-2\beta}=\operatorname{th}\beta^*. \tag{6}$$

2. $G=R$. Обозначим

$$\hat{p}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}p(x)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Заметим, что если $q(x)=p(\beta x)$, то

$$\hat{q}(t)=\frac{1}{\beta}\hat{p}\left(\frac{t}{\beta}\right). \tag{7}$$

Примеры функций из $\mathscr{P}(G)$:

а) нормальная плотность

$$p(x)=\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}e^{-\beta x^2/2},\quad \hat{p}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2\beta}.$$

б) плотность Коши

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\beta}{\beta^2+x^2},\quad \hat{p}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\beta|t|}.$$

в) четные, вогнутые при $x\geqslant 0$ положительные функции.

3. $G=S$, $\hat{G}=Z$. На этой группе важные примеры функций из $\mathscr{P}(G)$ строятся с помощью следующего утверждения: пусть $f\in\mathscr{P}(R)$, причем ряд

$$F(x)=\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x-2\pi n) \tag{8}$$

сходится. Тогда $F(x)\in\mathscr{P}(S)$, $x\in[0, 2\pi)$, и

$$\hat{F}(m)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(x)e^{imx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{imx}dx=\hat{f}(m). \tag{9}$$

Взаимодействие (8) называется взаимодействием типа Виллэна для $f(x)$. Обычно под взаимодействием Виллэна понимается случай нормальной плотности $f(x)$.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

Рассмотрим в R^d ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_d$ векторов, отложенных из точки 0. На этих векторах можно построить единичный куб. Целочисленные сдвиги этого куба и всех его граней разбивают R^d на (открытые) клетки, образуя CW-комплекс $\mathfrak{A}$. Каждая клетка единственным образом определяется набором $\alpha=(x;\ e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$, $i_1<\ldots<i_k$, где x — первая в лексикографическом порядке вершина этой клетки, а $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ — векторы, на которые эта клетка натянута. Рассмотрим некоторый конечный подкомплекс $\mathfrak{A}_0$ комплекса $\mathfrak{A}$. Группа $C_k=C_k(G)=C_k(\mathfrak{A}_0;\ G)$ k-цепей со значениями в абелевой группе G определяется как множество функций $g(\alpha)$ на множестве k-клеток $\mathfrak{A}_0$ со значениями в G. Иногда удобно записывать цепи в виде формальных линейных комбинаций

$$\sum_\alpha g(\alpha)\alpha.$$

Определим оператор кограницы $\delta_k=\delta: C_k\to C_{k+1}$

$$\delta(\alpha)=\sum_{i=1}^{d}[(x;\ e_i, e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})-(x-e_i;\ e_i, e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})], \tag{1}$$

и далее по линейности. Нетрудно видеть, что $\delta^2=0$. Здесь по определению, $(x, e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})\equiv 0$, если среди $j_1, \ldots, j_m$ есть совпадающие и

$$(x;\ e_{\pi(j_1)}, \ldots, e_{\pi(j_m)})=(x;\ e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})(-1)^{|\pi|},$$

где $j_1<\ldots<j_m$ и $|\pi|$ — четность перестановки π. Мы отождествляем, где можно группы цепей и группы коцепей, обычно определяемые как $\operatorname{Hom}(C_k(Z), G)$.

Формула (1), если переписать ее в виде

$$\delta\alpha=\sum_\beta\varepsilon_{\beta\alpha}\beta,$$

где сумма по $(k+1)$-клеткам, определяет матрицу инцидентности $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Можно дать другое определение матрицы инцидентности $\varepsilon_{\alpha\beta}$, согласованное с (1): $\varepsilon_{\alpha\beta}=\pm 1$ или 0 в зависимости от того, принадлежит α границе $\beta=(x; e_{j_1},\ldots,e_{j_{k+1}})$ или нет. Знак $+$ выбирается, если ориентация α согласована с ориентацией границы β. При этом ориентация α определяется упорядочением $i_1<\ldots<i_k$ базиса на ней, а ориентация границы β определяется клеткой $(x+e_{j_1}; e_{j_2},\ldots,e_{j_k})$. Тогда можно определить оператор границы $\partial=\partial_k: C_k\to C_{k-1}$ формулой

$$\partial\alpha=\sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}\beta,$$

где суммирование по всем $(k-1)$-клеткам β. Возникают два комплекса

$$0\to C_d \xrightarrow{\partial_d} \ldots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$0\leftarrow C_d \xleftarrow{\delta_{d-1}} \ldots \leftarrow C_1 \xleftarrow{\delta_0} C_0 \xleftarrow{\delta_{-1}} 0.$$

Пусть Z_k, Z^k, W_k, W^k, H_k, H^k — группы циклов, коциклов, границ, кограниц, гомологий и когомологий этих комплексов, соответственно, с коэффициентами в G. (Группа коэффициентов будет опускаться, если это не вызывает недоразумений).

Формула (1) аналогична внешнему дифференцированию дифференциальных форм. Аналогия будет еще большей, если ввести определение

$$\alpha\wedge\beta=(x; e_{i_1},\ldots,e_{i_k}, e_{j_1},\ldots,e_{j_l}),$$

если

$$\alpha=(x; e_{i_1},\ldots,e_{i_k}),\quad \beta=(x; e_{j_1},\ldots,e_{j_l}),$$

и $\alpha\wedge\beta=0$ в остальных случаях. По линейности умножение $\wedge$ вводится на множестве C всех цепей. Ввиду этого, ясно, что многие определения из теории гармонических форм переносятся на дискретный случай. Мы напомним некоторые из них.

Определение. $*: C_k\to C_{d-k}$ определяется формулой $*\alpha=\pm\beta$, где β — $(d-k)$-клетка, а $\pm$ выбираются так, чтобы

$$\alpha\wedge(\pm\beta)=(x; e_1,\ldots,e_d).$$

Часто удобно для геометрической наглядности при применении операции $*$ дополнительно сдвигать комплекс $\mathfrak{A}$ на вектор $\left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)$ (так называемый переход к двойственной решетке). Этот сдвиг дает изоморфизм между объектами на $\mathfrak{A}$ и на сдвинутом комплексе.

Можно проверить следующие равенства:

$$\partial_k=(-1)^k *^{-1}\delta_{d-k}*,\quad **=(-1)^{k(d-k)}. \qquad (2)$$

Если $G=R$, то множество цепей C превращается в евклидово пространство со скалярным произведением

$$(\omega_1,\omega_2)=\sum_\alpha \omega_1(\alpha)\,\omega_2(\alpha),\quad \omega_1=\sum\omega_1(\alpha)\,\alpha,\quad \omega_2=\sum\omega_2(\alpha)\,\alpha.$$

При этом

$$(\omega_1,\omega_2)=\int(\omega_1\wedge *\omega_2),$$

где $\int\omega$ понимается как $\sum_\alpha\omega(\alpha)$.

Относительно этого скалярного произведения $*$ является унитарным оператором, ∂ сопряжен к δ, а оператор Лапласа $\Delta=\partial\delta+\delta\partial$ самосопряжен. Оператор Δ перестановочен с ∂, δ и $*$. Цепь ω называется гармонической, если $\Delta\omega=0$.

Утверждение 1. Цепь гармонична тогда и только тогда, когда одновременно $\partial\omega=0$ и $\delta\omega=0$.

Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Если $\Delta\omega=0$, то

$$0=(\Delta\omega,\omega)=(\partial\delta\omega+\delta\partial\omega,\omega)=(\delta\omega,\delta\omega)+(\partial\omega,\partial\omega).$$

Поэтому $\partial\omega=\delta\omega=0$. Обозначим через $\mathcal{H}_1$ ($\mathcal{H}_1^{(k)}$) — пространство гармонических цепей (k-цепей), $\mathcal{H}_\delta\equiv\mathcal{H}_2$ — пространство цепей вида $\delta\alpha$, $\mathcal{H}_\partial\equiv\mathcal{H}_3$ — пространство цепей вида $\partial\beta$.

Утверждение 2.

$$C=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\mathcal{H}_3.$$

Доказательство ортогональности этих пространств тривиально. Пусть $\omega\perp\mathcal{H}_i$, $i=1, 2, 3$. Использование этого условия для $i=2$, 3 дает $\delta\omega=\partial\omega=0$. Значит, ω гармонична и, следовательно, ортогональна самой себе, т. е. равна нулю. Поэтому Δ^{-1} существует на $\mathcal{H}_2\oplus\mathcal{H}_3$.

Утверждение 3. Если вещественные когомологии или гомологии в размерности k равны 0, то $\mathcal{H}_1^{(k)}=0$. Действительно, всякая гармоническая форма замкнута и козамкнута ($\delta\omega=\partial\omega=0$), но ни одна из них не является точной или коточной. Поэтому $\mathcal{H}_1^{(k)}\subset H_k$, $\mathcal{H}_1^{(k)}\subset H^k$.

Если $A\subset R^d$, то через $(A)_k$ будем обозначать множество всех (открытых) k-клеток комплекса $\mathfrak{A}$, принадлежащих A; $\mathfrak{A}(A)$ — множество всех клеток $\mathfrak{A}$, лежащих в A.

Через $\Lambda\subset R^d$ в дальнейшем мы обозначаем замкнутый куб с вершинами в целочисленных точках $(\pm N,\ldots,\pm N)$, Λ^0 — соответствующий открытый куб, $\partial\Lambda$ — граница Λ.

В дальнейшем нам понадобятся следующие известные факты:*

$$H_k(\mathfrak{A}(\Lambda))\equiv H^k(\mathfrak{A}(\Lambda))=0$$

для всех $k>0$;

* См. Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л. Гомотопическая топология. Изд. МГУ, 1969.

$$H_k(\mathfrak{A}(\Lambda)/\mathfrak{A}(\partial\Lambda))=0 \qquad (3)$$

для $0<k<d$, а также аналогичные утверждения об относительных когомологиях $H^k(\mathfrak{A}(\Lambda)/\mathfrak{A}(\partial\Lambda))$, что следует из точной последовательности пары $(\Lambda, \partial\Lambda)$.

§ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Общая идея преобразований двойственности может быть пояснена следующим образом. Пусть Λ — конечное множество. Для любого $x\in\Lambda$ пусть S_x означает метрическое пространство с борелевской σ-алгеброй, μ_x — мера на S_x. Для любого $A\subset\Lambda$ задана функция F_A на $S_A=\underset{x\in A}{\times} S_x$, F_A можно рассматривать как функцию на всем S_Λ, если считать ее не зависящей от остальных координат.

Пусть

$$\tilde{\Lambda}=\{A:F_A\not\equiv 1\}$$

и пусть для каждого $A\in\tilde{\Lambda}$ заданы метрическое пространство $\tilde{S}_A$ и мера $\tilde{\mu}_A$. Мы будем отождествлять x с подмножеством $\tilde{\Lambda}$

$$x=\{A\in\tilde{\Lambda}:x\in A\}.$$

Пусть существуют такие измеримые функции

$$R_{A,x}(s_x, \tilde{s}_A), \quad s_x\in S_x, \quad \tilde{s}_A\in\tilde{S}_A,$$

что для всех $A\in\tilde{\Lambda}$

$$F_A(s_x)=\int\prod_{x:x\in A} R_{A,x}(s_x, \tilde{s}_A)\,d\tilde{\mu}_A. \qquad (1)$$

Обозначим

$$\tilde{F}_x=\int\prod_{A:x\in A} R_{A,x}(s_x, \tilde{s}_A)\,d\mu_x. \qquad (2)$$

Тогда соотношение двойственности имеет вид

$$Z_\Lambda\overset{\text{def}}{=}\int\prod_A F_A\prod_x d\mu_x=\int\prod_{x,A} R_{A,x}(s_x, \tilde{s}_A)\,d\mu_x d\tilde{\mu}_A=$$

$$=\int\prod_x \tilde{F}_x\prod_A d\tilde{\mu}_A\overset{\text{def}}{=}Z_{\tilde{\Lambda}}. \qquad (3)$$

Особый интерес, однако, представляют случаи с дополнительной симметрией, и мы сейчас к ним перейдем. Обычно используемое преобразование двойственности является частным случаем формулы суммирования Пуассона. Этот факт

известен давно (см. [53] и ссылки там). Мы приведем ряд примеров.

G-модель для абелевой группы G. Рассмотрим G-модель в кубе Λ с пустыми граничными условиями. Пусть сначала G — конечная группа, что позволит избежать временно вопросов сходимости. Мы рассмотрим обобщенную статистическую сумму, в которой взаимодействие зависит от пары ближайших соседей

$$Z_\Lambda=\int\prod_{\substack{t,t'\in(\Lambda)_0\\|t-t'|=1}} F_{tt'}(g_t-g_{t'})\,dg, \qquad (1)$$

где dg — мера Хаара на группе 0-цепей $G^{|(\Lambda)_0|}$.

Если рассмотреть группу 1-кограниц $W^1(G)$ и меру Хаара dq на ней, то можно записать

$$Z_\Lambda=\text{const}\int_{W^1(G)}\prod_{\zeta\in(\Lambda)_1} F_\zeta(q_\zeta)\,dq, \qquad (2)$$

где const не зависит от F, но может зависеть от Λ. Для того, чтобы применить формулу суммирования Пуассона, мы должны в двойственной группе $C_1(\hat{G})$ к группе $C_1(G)$ найти подгруппу, ассоциированную по двойственности с $W^1(G)$.

Докажем, что такой подгруппой является $Z_1(\hat{G})$. Действительно, заметим, что если $\chi\in C(\hat{G})$, $g\in C(G)$, то

$$(\chi, \delta g)=(\partial\chi, g), \quad (\chi, \partial g)=(\delta\chi, g).$$

Поэтому, если χ является 1-цепью со значениями в $\hat{G}$, принадлежащей ассоциированной по двойственности с $W^1(G)$ подгруппе $C(\hat{G})=\hat{C}(G)$, то для любой 0-цепи g имеем

$$(\partial\chi, g)=(\chi, \delta g)=1,$$

$$Z_\Lambda=\text{const}\int_{Z_1(\hat{G})}\prod_{\zeta\in(\Lambda)_1}\hat{F}(\hat{q}_\zeta)\,d\hat{q}, \qquad (3)$$

где $d\hat{q}$ — мера Хаара на $Z_1(\hat{G})$.

Вводя 2-цепи m со значениями в $\hat{G}$ и пользуясь изоморфизмом $Z_1(\hat{G})\sim W_1(G)\sim C_2(\hat{G})/Z_2(\hat{G})$, мы можем записать

$$Z_\Lambda=\text{const}\int_{C_2/Z_2}\prod_{\zeta\in(\Lambda)_1}\hat{F}_\zeta((\partial m)_\zeta)\,dm, \qquad (4)$$

где dm — мера Хаара на 2-цепях $\hat{G}^{|(\Lambda)_2|}$.

Часто удобно применить преобразование * к последней формуле. Имеем

$$Z_\Lambda=\text{const}\int_{C^*_{d-2}/*(Z_2)}\prod_{\zeta\in(\Lambda)_1}\hat{F}_{\zeta^*}((\delta^* m)_{\zeta^*})\,d^*m, \qquad (5)$$

где C^*_{d-2} — множество всех $(d-2)$-цепей $*m$, двойственных к цепям m; $*(Z_2) \subset C^*_{d-2}$, $d*m$ — мера Хаара на C^*_{d-2}. Это множество можно описать более наглядным образом, если ввести двойственный комплекс $\mathfrak{A}^*$, сдвинутый на $\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$ относительно комплекса $\mathfrak{A}$. Остановимся на этом подробнее для случая $d=2$. В этом случае множество двойственных 0-клеток есть множество точек двойственной решетки, лежащих внутри Λ, а множество 1-клеток ζ^* есть множество ребер двойственной решетки, пересекающих ребра $(\Lambda)_1$, $Z_2=0$ и $*$ Z_2 можно интерпретировать как нулевое множество относительных коциклов. Действительно, рассмотрим квадрат Λ^*, который можно получить, если раздвинуть Λ на 1/2 во все стороны. Все 0-цепи $*$ m равны нулю на границе $\partial\Lambda^*$ квадрата Λ^*. Поэтому δ в (5) есть кограничный оператор для относительного комплекса пары $(\Lambda^*, \partial\Lambda^*)$. Иначе говоря,

$$Z_\Lambda = \mathrm{const} \int\limits_{\hat{G}^{|(\Lambda^*-\partial\Lambda^*)_0|}} \prod_{\substack{p, p' \in (\Lambda^*)_0 \\ |p-p'|=1}} \hat{F}_{pp'}(m_{p'} - m_p)\, dm, \tag{6}$$

где $m_p \equiv 0$ для $p \in \partial\Lambda^*$, и мы получили статистическую сумму $\hat{G}$-модели с нулевыми граничными условиями. Заметим, что соответствие между пустыми и нулевыми граничными условиями является типичным для преобразования двойственности. Произвольные граничные условия в смысле Добрушина можно свести к нулевым изменением функций $F_{tt'}$ на границе. В случае некомпактных групп G Z_Λ в (1) может стать равной ∞. В этом случае есть два пути: либо подбирают граничные условия так, чтобы Z_Λ была конечной, либо сразу определяют статистическую сумму интегрированием по более узкому множеству конфигураций, как, например, в (2). Это называется введением калибровки (см. также ниже). Заметим, что константы в формулах (1)—(6) нетрудно явно вычислить. Однако для вычисления тех корреляционных функций, которые могут быть записаны в виде отношения обобщенных статистических сумм типа (1)—(6), эта константа сокращается. Более того, можно так нормировать меры Хаара, что все константы будут равны 1. Если $F_{tt'} \equiv F$, то равенства (1)—(6) переходят в равенства обычных статистических сумм. Остановимся теперь на двойственности для корреляционных функций. Достаточно вычислить корреляционные функции вида

$$\langle (\chi, g) \rangle,$$

где $\chi = (\chi_t)$, $g = (g_t)$ 0-цепи со значениями, соответственно, в $\hat{G}$ и в G,

$$(\chi, g) = \prod_{t \in (\Lambda)_0} (\chi_t g_t).$$

Ограничимся случаем $d=2$ для простоты обозначений.

Пустые граничные условия. В случае, если для данной χ функция (χ, g) не инвариантна относительно преобразования $g_t \to g_t + g^{(0)}$, $g^{(0)} \in G$, то $\langle (\chi, g) \rangle = 0$. В случае, если (χ, g) инвариантна относительно таких преобразований, то ее можно представить в виде

$$(\chi, g) = \prod_{\substack{\zeta=(t,t') \\ |t-t'|=1}} (\tilde{\chi}_\zeta, g_{t'} - g_t)$$

для некоторой 1-цепи $\tilde{\chi} = (\tilde{\chi}_\zeta)$. Например, если $(\chi, g) = (\chi, g_t) \times \times (-\chi, g_{t'})$, то, выбирая путь $t = t_0, \ldots, t_n = t'$ между t и t', $|t_i - t_{i+1}| = 1$, получим

$$(\chi, g) = \prod_{i=1}^{n} (\chi, -g_{t_i} + g_{t_{i-1}}).$$

Полагая $F_{tt'} = F\tilde{\chi}_\zeta$, приходим к равенству корреляционных функций G-модели и $\hat{G}$-модели

$$\langle (\chi, g) \rangle \equiv \frac{\langle \prod\limits_\zeta F\tilde{\chi}_\zeta \rangle}{Z_\Lambda} = \frac{\langle \prod\limits_\zeta \tilde{F}_\zeta \rangle_{\Lambda^*}}{Z_\Lambda}, \tag{7}$$

где

$$\tilde{F}_\zeta (m_{t'} - m_t) = \hat{F}(m_{t'} - m_t + \tilde{\chi}_{\zeta^*}).$$

Нулевые граничные условия. В этом случае для любой χ можно найти $\tilde{\chi}$ такую, что

$$(\chi, g) = (\tilde{\chi}, \delta g).$$

Например,

$$(\chi_t, g_t) = \prod_{i=1}^{n} (\chi_t, g_{t_i} - g_{t_{i-1}}),$$

если взять точку $t' = t_n$ на границе, так что $g_{t_n} \equiv 0$. Общее соображение заключается в том, что мы можем рассматривать относительные граничные и кограничные операторы вместо абсолютных. Далее вычисления такие же, как и в предыдущем случае.

Заметим, что часть корреляционных функций можно вычислять, дифференцируя обобщенную статистическую сумму по параметрам, от которых зависят $F_{tt'}$ в точке, где $F_{tt'} \equiv F$.

Рассмотрим теперь пример с $d=2$, $G=S^1$ и взаимодействием типа Виллэна

$$F(x)=\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-2\pi n).$$

Например, если

$$f(x)=e^{-\beta|x|},$$

то для малых β в этой модели можно использовать технику высокотемпературных кластерных разложений. Действительно, в этом случае

$$\frac{F(x)}{\sqrt{2\pi}}=e^{-\beta|x|}+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta 2\pi n}(e^{\beta x}+e^{-\beta x})=e^{-\beta|x|}+\frac{e^{-\beta 2\pi}}{1-e^{-2\beta\pi}}(e^{\beta x}+e^{-\beta x}).$$

Отсюда уже нетрудно убедиться в применимости высокотемпературных разложений, если проверить, например, неравенство 1.4.1 из работы [6].

Высокотемпературная S^1-модель двойственна низкотемпературной Z-модели. Однако получить информацию о Z-модели в низкотемпературной области проще с помощью прямой модификации метода Пайерлса (см. § 8).

Отметим, что информация о низкотемпературной S^1-модели, так же, как о высокотемпературной Z-модели, довольно скудна (см. [44]).

Калибровочная G-модель для абелевой группы G. В данном случае в тех же условиях обобщенная статистическая сумма имеет вид

$$Z_\Lambda=\text{const}\int_{W^2(G)}\prod_{\zeta\in(\Lambda)_2} F_\zeta(q_\zeta)\,dq.$$

Ассоциированной по двойственности группой будет $Z_2(\hat{G})$ или C_3/Z_3. Переходя к двойственным переменным, имеем

$$Z_\Lambda=\text{const}\int_{C^*_{d-3}/*(Z_3)}\prod \hat{F}_\zeta((\delta * m)_{\zeta^*})\,d*m. \tag{8}$$

Заметим, что для $d=4$ двойственная модель является калибровочной $\hat{G}$-моделью. Можно составить такую таблицу:

d	Модель	Двойственная модель
2	G-модель	$\hat{G}$-модель
3	G-модель	Калибровочная $\hat{G}$-модель
4	Калибровочная G-модель	Калибровочная $\hat{G}$-модель.

Все предшествующие соображения относительно G-модели переносятся с необходимыми изменениями на случай калибровочной G-модели.

О двойственности для разных моделей см. также работы [10, 11, 25, 32, 37, 38, 63, 86, 100, 101]. Когда работа над статьей была закончена, вышла работа [2], где преобразование двойственности построено в несколько более общей ситуации. Опишем кратко основной результат [2]. Рассматривается абстрактный конечный клеточный комплекс K с множеством Λ_p p-клеток s_i^p и матрицей инцидентности $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\alpha=s_i^p$, $\beta=s_j^{p-1}$.

Рассмотрим статистическую сумму

$$Z=\int_{W^p(G)}\prod_{\alpha\in\Lambda_p} F_\alpha(q_\alpha)\,dq, \tag{9}$$

где суммирование здесь и далее всегда ведется по мере Хаара на соответствующей группе. Для $p=0$ это G-модель, для $p=1$ — калибровочная G-модель.

Абстрактный клеточный комплекс K^* называется двойственным к K, если существует такое взаимно однозначное отображение $*$: $\Lambda_p\to\Lambda_{d-p}$, что

$$\varepsilon_{\beta^*\alpha^*}=(-1)^p\varepsilon_{\alpha\beta}.$$

Так же, как и выше, имеем

$$Z=\int_{Z_p(G)}\prod_{\alpha\in\Lambda_p}\hat{F}_\alpha(\hat{q}_\alpha)\,d\hat{q}.$$

Но если группа гомологий нетривиальна, мы уже не можем сделать переход от (3) к (4). Вместо этого, вводя меры Хаара $d\hat{\beta}$, $d\hat{\gamma}$ на $W_p(\hat{G})$, $H_p(\hat{G})$, удовлетворяющие соотношению $d\hat{\beta}d\hat{\gamma}=d\hat{q}$ и обозначая

$$\hat{Z}=\int_{W_p(\hat{G})}\prod\hat{F}_\alpha(\hat{\beta}_\alpha)\,d\hat{\beta},$$

получим

$$Z=\hat{Z}\int_{H_p(\hat{G})} A(\hat{\gamma})\,d\hat{\gamma},\quad A(\hat{\gamma})=\hat{Z}^{-1}\int_{W_p(\hat{G})}\prod\hat{F}_\alpha((\hat{\gamma}\hat{\beta})_\alpha)\,d\hat{\beta},\ \hat{\gamma}\in H_p(\hat{G}). \tag{10}$$

Далее так же, как и выше. Провести вычисление интеграла в правой части (10) для случая, когда группа гомологий имеет много образующих, кажется довольно трудным делом. В [2] получено также преобразование двойственности с такой же степенью общности для модели Хиггса.

§ 6. РЕШЕТЧАТЫЙ КВАЗИГАЗ

Рассмотрим сначала S^1-модель с пустыми граничными условиями и взаимодействие Виллэна

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x-2\pi n).$$

Статистическую сумму можно преобразовать следующим образом

$$Z_\Lambda = \int \prod_{(t,t')} F(g_t - g_{t'})\, dg = \int \sum_{\{n_{tt'}\}} \prod_{(t,t')} f(g_t - g_{t'} - 2\pi n_{tt'})\, dg.$$

Каждую 1-цепь $n = \{n_{tt'}\}$ можно представить в виде $n = \delta m + n'$, где m — 0-цепь, n' — некоторые представители в классах смежности $C_1/Z_1 \sim W_2$, которые мы будем считать фиксированными. Тогда

$$Z_\Lambda = \int \sum_{n'} \sum_m \prod f(g_t + 2\pi m_t - (g_{t'} + 2\pi m_{t'}) - 2\pi n'_{tt'})\, dg =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n'} \prod f(x_t - x_{t'} - 2\pi n'_{tt'})\, \chi_{[0,2\pi]}(x_{t_0}) \prod dx_t.$$

Здесь мы учли, что ядро δ_0 состоит из постоянных цепей. Заметим, что если $n' \equiv 0$, то мы имеем в правой части гауссову статистическую сумму. Таким образом, можно сказать, что элементы W_2 являются топологическими препятствиями к гауссовости. Теперь мы получим точную формулу, факторизующую Z_Λ на гауссову статистическую сумму (спиновые волны) и кулоновскую часть (топологические возбуждения). При этом будем рассматривать более общий случай.

Решетчатым квазигазом мы будем называть решетчатую систему с целочисленным спином n_t и с взаимодействием

$$U_\Lambda = \frac{1}{2} \sum_{t,t' \in \Lambda} B(t, t')\, n_t n_{t'} + \sum_t b(n_t),$$

где Λ — произвольное конечное множество.

Пусть P — другое конечное множество и y_p, $p \in P$, являются линейными комбинациями x_t с вещественными коэффициентами. Рассмотрим выражение

$$I = \sum_{\{n_p\}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\prod_{p \in P} \hat{a}_p(n_p)\, e^{i n_p y_p} \Big] e^{-\tilde{U}_\Lambda(x)} \prod_t dx_t. \qquad (1)$$

Здесь $x_t \in R$, $U_\Lambda(x)$ — квадратичная форма,

$$\tilde{U}_\Lambda(x) = \frac{1}{2} \sum_{t,t' \in \Lambda} C(t, t')\, x_t x_{t'},$$

причем матрица $C = B^{-1}$. Суммирование в (1) ведется по всем целочисленным конфигурациям $\{n_p\}$ на P. Функции $\hat{a}_p(n_p)$ мы конкретизируем в дальнейшем.

Обозначим

$$Z_{\mathrm{sw},\Lambda} = \int_{R^\Lambda} e^{-\tilde{U}_\Lambda(x)} \prod_{t \in \Lambda} dx_t$$

статистическую сумму гиббсова гауссова поля в Λ с взаимодействием $\tilde{U}_\Lambda(x)$, $\langle \cdot \rangle_{\mathrm{sw},\Lambda}$ — усреднение по мере, соответствующей этому полю, sw = spin waves.

Тогда, с одной стороны, мы имеем

$$I = Z_{\mathrm{sw},\Lambda} \langle \sum_{\{n_p\}} \prod_p \hat{a}_p(n_p)\, e^{i n_p y_p} \rangle_{\mathrm{sw},\Lambda} =$$

$$= Z_{\mathrm{sw},\Lambda} \sum_{\{n_p\}} \Big[\prod_p \hat{a}_p(n_p) \Big] \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum B(p, p')\, n_p n_{p'} \Big). \qquad (2)$$

С другой стороны, положим

$$\sum_{n_p=-\infty}^{\infty} \hat{a}_p(n_p)\, e^{i n_p y_p} \overset{\mathrm{def}}{=} A_p(y_p)$$

и поэтому

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\prod_p A_p(y_p) \Big] e^{-\tilde{U}_\Lambda(x)} \prod_t dx_t = Z_{\mathrm{sw},\Lambda} \langle \prod_p A_p(y_p) \rangle_{\mathrm{sw},\Lambda}. \qquad (3)$$

Приравнивая (3) и (2), получим основное соотношение

$$Z_{\mathrm{sw},\Lambda} \sum_{\{n_p\}} \Big[\prod_p \hat{a}_p(n_p) \Big] \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{p,p' \in P} B(p, p')\, n_p n_{p'} \Big) =$$

$$= \int_{R^\Lambda} \Big[\prod_{p \in P} A_p(y_p) \Big] \exp(-\tilde{U}_\Lambda(x)) \prod_{t \in \Lambda} dx_t. \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь частные случаи, которые показывают, как решетчатый квазигаз с дальнодействующим потенциалом $B(p, p')$ часто можно свести к системе с финитным взаимодействием, допускающей доскональное изучение.

1. Кулоновская спиновая система. Пусть $P = \Lambda \subset Z^d$, $y_t = x_t$, $\hat{a}_t(n_t) \equiv 1$. Тогда по формуле суммирования Пуассона

$$A_t(x_t) = 2\pi \sum_{m_t=-\infty}^{\infty} \delta(x_t - 2\pi m_t) \qquad (5)$$

и мы имеем равенство статистических сумм в (4)

$$Z_{\mathrm{sw},\Lambda} \sum_{\{n_t\}} \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum B(t, t')\, n_t n_{t'} \Big) = (2\pi) \sum_{\{m_t\}} \exp(-4\pi^2 \tilde{U}_\Lambda(m)). \quad (6)$$

В правой части (6) выберем $\tilde{U}_\Lambda(m)$ соответствующей Z-модели с нулевыми граничными условиями и с взаимодействием $\beta \sum_{|t-t'|=1} (m_t - m_{t'})^2$, B — обратная матрица к выбранной квадратичной форме $\tilde{U}_\Lambda$. Тогда в левой части (6) стоит статистическая сумма в объеме Λ модели, которую мы называем кулоновской спиновой системой. Действительно, $B(t, t')$ на больших расстояниях асимптотически совпадает с кулоновским взаимодействием, т. е. определяется обратным оператором Лапласа.

Мы знаем, что для больших β Z-модель допускает кластерное разложение (см. § 8). Поэтому можно рассчитывать, что кулоновская спиновая система может быть изучена в высокотемпературной области. И это действительно так. Рассмотрим корреляционные функции кулоновской спиновой системы

$$\left\langle \exp\left(i\sum_{t\in T} 2\pi\alpha_t n_t\right)\right\rangle_\Lambda,$$

где $T\subset\Lambda$, $\langle\cdot\rangle_\Lambda$ — усреднение в Λ по мере, соответствующей кулоновской спиновой системе. Полагая $a_t(n_t)=e^{2\pi i\alpha_t n_t}$, $t\in T$, $a_t(n_t)\equiv 1$ для $t\bar{\in}T$, имеем

$$A_t(x_t)=2\pi\sum_{m_t=-\infty}^{\infty}\delta(x_t-2\pi m_t),\quad t\bar{\in}T,$$

$$A_t(x_t)=2\pi\sum_{m_t=-\infty}^{\infty}(x_t-2\pi\alpha_t-2\pi m_t),\quad t\in T.$$

Из основной формулы имеем

$$\left\langle \exp\left(i\sum_{t\in T} 2\pi\alpha_t n_t\right)\right\rangle_\Lambda=\frac{Z_\Lambda(\gamma_t)}{Z_\Lambda}, \tag{7}$$

где $\gamma_t=\alpha_t$, $t\in T$, $\gamma_t\equiv 0$, $t\bar{\in}T$, и

$$Z_\Lambda(\gamma_t)=\sum_{\{m_t\}}\exp\left[-4\pi^2\beta\sum_{|t-t'|=1}(m_t+\gamma_t-m_{t'}-\gamma_{t'})^2\right].$$

Рассмотрим случай, когда T состоит из двух далеких точек t_1 и t_2. Тогда правую часть (7) можно переписать следующим образом

$$e^{-4\pi^2\beta(\gamma_{t_1}^2+\gamma_{t_2}^2)}\exp\left(8\pi^2\beta\left[\sum_{t:|t_1-t|=1}\gamma_{t_1}m_t+\sum_{t:|t_2-t|=1}\gamma_{t_2}m_t\right]\right)\rangle_\Lambda. \tag{8}$$

В § 8 для больших β мы докажем, что предел правой части (7) при $\Lambda\uparrow Z^d$ существует и определяет таким образом кулоновскую спиновую систему в бесконечном объеме.

Мы докажем также следующее утверждение для достаточно больших β.

Экранирование в кулоновской спиновой системе. Корреляционные функции (8) имеют экспоненциальное убывание, т. е. (8) допускает оценку

$$O(-\exp(-c\beta|t_2-t_1|)).$$

Аналогичная экспоненциальная оценка имеет место для семиинвариантов при $|T|>2$.

2. Более общий кулоновский решетчатый квазигаз мы получим, если положим

$$\hat{a}_t(n_t)\equiv\hat{a}(n_t)\equiv\exp\{-\beta b(n_t)\}.$$

Тогда если

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{a}(n)<\infty,$$

то функция $A(x_t)$ является периодической функцией.

Если $\hat{a}(n)$ является положительной положительно определенной функцией на Z, то таковой же является и A. Поэтому в правой части (4) стоит статистическая сумма решетчатой системы с вещественным спином и с взаимодействием, состоящим из гауссовой части $\beta\sum_{|t-t'|=1}(x_t-x_{t'})^2$ и периодического члена $-\sum_t \ln A(x_t)$. Для некоторых $A(x)$ методом Глимма — Джаффе — Спенсера — Бриджеса [20] можно получить кластерное разложение для такой спиновой системы и доказать существование экранирования. Необходимым условием является невырожденность $-\ln A(x_t)$ в точках минимума. В общем случае вопрос о существовании экранирования остается открытым.

Заметим, что обычный нейтральный газ на решетке является частным случаем решетчатого квазигаза. Действительно, статистическая сумма нейтрального квазигаза имеет вид

$$Z_\Lambda=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{z^N}{N!}\sum_{\{e_i=\pm1\}}\sum_{x_i\in\Lambda}\exp\left(-\beta\sum_{i,j}V(x_i-x_j)e_ie_j\right).$$

Обозначим через $0\leqslant N_x^\pm<\infty$ число частиц с положительным (отрицательным) зарядом в точке x. Тогда Z_Λ переписывается следующим образом

$$Z_\Lambda=\sum_{\{n_x=-\infty\}}^{\infty}\sum_{N_x^+-N_x^-=n_x}\frac{z^N}{N!}\frac{N!}{\prod_x N_x!}C_{N_x}^{\frac{N_x-n_x}{2}}\exp\left(-\beta\sum_{x,x'\in\Lambda}V(x-x')n_xn_{x'}\right),$$

где $N_x=N_x^++N_x^-$, $N=\sum_x N_x$.

Ввиду этого достаточно положить

$$\hat{a}(n_x)=\sum_{N_x^+-N_x^-=n_x}z^{N_x}\frac{1}{N_x!}C_{N_x}^{\frac{N_x-n_x}{2}}.$$

Поэтому преобразование sine-Gordon (см. § 2) также укладывается в схему этого параграфа.

3. Решетчатая система диполей. Пусть $P=(\Lambda-\partial\Lambda)_1$, $y_p=x_{t'}-x_t$, если $p=(t, t')$, $|t-t'|=1$. Все остальное как в случае кулоновской спиновой системы. Эта система называется *системой диполей*, так как взаимодействие $B(p, p')$ убывает как взаимодействие обычных диполей, если расстояние между p и p' увеличивается. Для этого случая равенство (4) имеет следующий вид

$$\sum_{\{n_p\}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{p,p'\in P} B(p, p')\, n_p n_{p'}\right)=$$
$$=(2\pi)^{|(\Lambda-\partial\Lambda)_1|}\sum_{\{m_t\}}\exp(-4\pi^2\tilde{U}_\Lambda(m)).$$

Иначе говоря, дело сводится к Z-модели. Так же, как и в кулоновской спиновой системе, доказывается *существование экранирования*.

4. Более общий решетчатый дипольный квазигаз. Этот случай возникает, если в условиях предыдущего примера рассматривать $\hat{a}(n_p)$ не равную тождественно единице. Однако, в этом случае периодическая функция $A(y_p)$ зависит от разности $x_t-x_{t'}$ и нельзя ожидать существования экранирования. В некоторых случаях отсутствие экранирования (нейтральный газ диполей) может быть доказано [85]. С помощью корреляционных неравенств, по-видимому, доказательство отсутствия экранирования может быть получено в более общих случаях. Однако кластерные разложения в этой ситуации отсутствуют, и их получение является очень важной задачей. Частичные результаты в этом направлении см. в [47] и в выходящей статье В. А. Малышева в ТМФ. *

5. Аналогично могут быть рассмотрены квадрупольные и т. д. системы. В этом случае известны кластерные разложения и система может быть довольно полно исследована, см. [6].

Обсуждение статистической физики кулоновских систем см. в работах [15, 106—108]. Одномерный случай является часто явно решаемым [26].

§ 7. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Интересно, что описанное в §§ 1, 5 преобразование двойственности допускает представление, напоминающее двойственность электричество — магнетизм в теории Максвелла. Рассмотрим калибровочную Z_2-модель. Перейдем в ней от мультипликативной

* ТМФ, 1980, 45, № 2, 235—243

записи к аддитивной, т. е. рассмотрим 1-цепь $\theta=(\theta_\zeta)$, $\theta_\zeta=0, \pi$ и положим

$$\sigma_\zeta=(-1)^{\theta_\zeta/\pi}=\pm 1.$$

Запишем взаимодействие в виде ($\alpha\in(\Lambda)_2$)

$$e^{\beta(\delta\sigma)_\alpha}=\mathrm{const}\sum_{l_\alpha=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{4g^2}((\delta\theta)_\alpha-2\pi l_\alpha)^2\right). \qquad (1)$$

Правая часть действительно является функцией от $(\delta\sigma)_\alpha$. Выбором g и const можно добиться выполнения равенства (1). Поэтому статистическая сумма в калибровочной Z_2-модели может быть записана в виде

$$Z_\Lambda=\mathrm{const}\sum_{C_1(Z_2)/Z^1(Z_2)}\sum_{\{l_\alpha\}}\exp\left\{-\frac{1}{4g^2}\sum_\alpha((\delta\theta)_\alpha-2\pi l_\alpha)^2\right\}, \qquad (2)$$

где первая сумма берется по всем элементам фактор-группы C_1/Z^1 цепей $\{\theta_\zeta\}$. Докажем, что (2) можно переписать в следующем виде

$$Z_\Lambda=\mathrm{const}\int\limits_{C_1(S^1)/Z^1(S^1)} d\theta\sum_{\{l_\alpha\}}\sum_{\partial e=0}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{4g^2}((\delta\theta)_\alpha-2\pi l_\alpha)+2i(e, \theta)\right\}, \qquad (3)$$

где мы перешли к 1-цепям $\theta=(\theta_\zeta)$ со значениями в S^1 и интегрируем по мере Хаара $d\theta$ по фактор-группе $C_1(S^1)/Z^1(S^1)$; $\sum\limits_{\partial e=0}$ берется по всем целочисленным 1-цепям $e=(e_\zeta)$ таким, что $\partial e=0$, $(e, \theta)=\sum\limits_\zeta e_\zeta\theta_\zeta$. Действительно, рассмотрим подгруппу Γ_1 целочисленных 1-цепей e таких, что $\partial e=0$ в группе $R^{(\Lambda)_1}$. Ассоциированная с Γ_1 по двойственности подгруппа $\hat{\Gamma}_1$ в $R^{(\Lambda)_1}$ порождена группой всех целочисленных 1-цепей в $R^{(\Lambda)_1}$ и группой всех 1-кограниц $(\delta a)_\zeta$ для всевозможных непостоянных 0-цепей a со значениями в $S^1=R/Z$. Воспользуемся теперь формулой суммирования Пуассона

$$\sum_{\Gamma_1}\exp\left(2i\sum_\zeta e_\zeta\theta_\zeta\right)=(2\pi)^{|(\Lambda)_1|}\int\limits_{\hat{\Gamma}_1}\prod_\zeta\delta(2\theta_\zeta-2\pi e_\zeta)\,de.$$

Подставляя это в (3), получим (2). Мы хотим вместо θ_ζ ввести 1-цепь A_ζ со значениями в R. Тогда

$$A_\zeta=\theta_\zeta+2\pi\chi_\zeta,$$

где χ_ζ — некоторая целочисленная 1-цепь. Мы заменим интегрирование по A_ζ по фактор группе $C_1(R)/Z^1(R)$ интегрированием по θ_ζ по фактор группе $C_1(S^1)/Z^1(S^1)$ и суммированием по χ_ζ по фактор группе $C_1(Z)/Z^1(Z)$. Полагая

$$l=\delta\chi+{*}M,$$

мы получаем, что суммирование по всем 2-цепям l следует тогда заменить суммированием по системе представителей $({*}M_\alpha)$ фактор группы $C_2(Z)/W^2(Z)$. Таким образом,

$$Z_\Lambda=\text{const}\int\limits_{C_1(R)/Z^1(R)} dA\sum_{\partial e=0}\sum_{M_\alpha}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{4g^2}\sum_\alpha[(\delta A)_\alpha-2\pi{*}M_\alpha]^2+2i(e,\ A)\right\}. \qquad (4)$$

Мы хотим вычислить теперь в (4) гауссов интеграл по dA. Для этого заметим, что квадратичная форма в экспоненте (4) равна

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2g^2}\delta A,\ \delta A\right)-\frac{\pi^2}{g^2}({*}M,\ {*}M)+\frac{\pi}{g^2}(\delta A,\ {*}M)+2i(A,\ e)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2g^2}\Delta A,\ A\right)-\frac{\pi^2}{g^2}({*}M,\ {*}M)+\left(A,\ \frac{\pi}{g^2}\,\partial M+2ie\right).$$

После интегрирования будем иметь квадратичную форму

$$-\frac{\pi^2}{g^2}({*}M,\ {*}M)+\frac{1}{2}\left(2g^2\Delta^{-1}\left(\frac{\pi}{g^2}\,\partial{*}M+2ie\right),\ \frac{\pi}{g^2}\,\partial{*}M+2ie\right)= \qquad (5)$$

$$=-\frac{\pi^2}{g^2}({*}M,\ {*}M)+\frac{\pi^2}{g^2}(\Delta^{-1}\partial{*}M,\ \partial{*}M)-4g^2(\Delta^{-1}e,\ e)+4\pi i(\Delta^{-1}\partial{*}M,\ e).$$

Представим ${*}M$ в виде

$${*}M=\partial p+\delta q,$$

где $p\in\mathscr{H}_\delta^{(3)}$, $q\in\mathscr{H}_\partial^{(1)}$. Заметим, что отображения $\delta:\mathscr{H}_\partial^{(2)}\to\mathscr{H}_\delta^{(3)}$ и $\partial:\mathscr{H}_\delta^{(3)}\to\mathscr{H}_\partial^{(2)}$ взаимно однозначны. Положим ${*}m=\delta{*}M\in\mathscr{H}_\delta^{(3)}$, тогда можно записать $\partial p=\delta^{-1}{*}m$. Тогда

$$(\delta^{-1}{*}m,\ \delta^{-1}{*}m)+(\delta q,\ \delta q)=(\Delta^{-1}{*}m,\ {*}m)+(\delta q,\ \delta q),$$

$$(\Delta^{-1}\partial{*}M,\ \partial{*}M)=(\Delta^{-1}\partial\delta q,\ \partial\delta q)=(\delta q,\ \delta q)$$

и правая часть (5) перепишется в виде

$$-\frac{\pi^2}{g^2}(\Delta^{-1}{*}m,\ {*}m)-4g^2(\Delta^{-1}e,\ e)+4\pi i(\Delta^{-1}\partial{*}M,\ e).$$

Но

$$(A^{-1}\partial{*}M,\ e)=(q,\ e),\quad q=\partial\Delta^{-1}{*}M.$$

Пусть теперь размерность $d=4$. Мы перейдем теперь к двойственным 1-цепям m и 2-цепям M. Тогда $m=\partial M$. Положим симметричным образом $e=\partial E$. Тогда

$$(\Delta^{-1}\partial{*}M,\ \partial E)=(\delta\partial\Delta^{-1}{*}M,\ E)=(\delta\partial\Delta^{-1}M,\ {*}E). \qquad (6)$$

Заметим, что $\delta\partial\Delta^{-1}$ есть самосопряженный проектор на $\mathscr{H}_\delta$.

Окончательно имеем

$$Z_\Lambda=\text{const}\sum_{\partial m=0}\sum_{\partial e=0}\exp\left(-4g^2(\Delta^{-1}e,\ e)-\frac{\pi^2}{g^2}\left(\Delta^{-1}m,\ m\right)+\right.$$

$$\left.+4\pi i(\delta\partial\Delta^{-1}M,\ {*}E)\right). \qquad (7)$$

Заметим, что формула (7), согласно (6), симметрична относительно замены $e\leftrightarrow m$, $E\leftrightarrow M$, $4g^2\leftrightarrow\frac{\pi}{g^2}$. Это соответствует самодвойственности калибровочной Z_2-модели в размерности 4.

Аналогичные представления для ряда двумерных моделей см. в [65]. Однако там вычисления делаются неинвариантным образом.

Естественно интерпретировать e как электрический ток, m как ток магнитных монополей.

Интересно отметить, что функционалы Вильсона и Хоофта для Z_2-модели (см. § 13) переходят, соответственно, в замкнутые петли электрического и магнитного токов (см. [101] в менее инвариантном изложении).

§ 8. НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В Z-МОДЕЛИ

Рассмотрим Z-модель с нулевыми граничными условиями на Z^d и взаимодействием $\Phi(\sigma_t-\sigma_{t'})$ таким, что $\Phi(\sigma)$ имеет единственный минимум в точке $\sigma=0$ и сумма

$$F(\beta)=\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}\exp\{-\beta\Phi(\sigma)\}$$

конечна. Тогда $F(\beta)-1$ стремится к нулю при $\beta\to\infty$.

Для каждой конфигурации σ в кубе Λ построим контур (поверхность) θ_σ, состоящий из замкнутых $(d-1)$-клеток двойственного комплекса $\mathfrak{A}^*$: при этом клетку ζ^* отнесем к θ_σ тогда и только тогда, когда для двойственной к ней 1-клетки $\zeta=(t,t')$ $\sigma_t=\sigma_t'$. Далее считаем, что t лексикографически меньше t'.

Контур называется замкнутым, если каждая $(d-2)$-клетка $\mathfrak{A}^*$ принадлежит либо ни одной, либо по крайней мере двум $(d-1)$-клеткам, составляющим контур. Контур называется допустимым, если он соответствует некоторой конфигурации. Любой допустимый контур замкнут и однозначно разлагается на связные компоненты $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$, являющиеся замкнутыми контурами. В дальнейшем мы рассматриваем лишь допустимые контуры θ.

Определим внутренность V_Γ замкнутого связного контура $\Gamma\in\theta$ как совокупность таких d-клеток $\mathfrak{A}^*$, для которых не существует непрерывной кривой, соединяющей центр клетки с внешностью куба Λ и не пересекающей Γ. Внешностью W_Γ контура Γ назовем совокупность d-клеток из куба Λ, не принадлежащих внутренности Γ. Контур Γ назовем внешним по отношению к Γ' (Γ' внутренним по отношению к Γ), если $V_{\Gamma'} \subset V_\Gamma$. Контур $\Gamma \in \theta$ назовем внешним, если он не является внутренним ни для какого связного контура θ. Контур назовем размеченным, если известна разность $\sigma_t - \sigma_{t'}$ для всех 1-клеток $\zeta = (t, t')$, двойственных к клеткам ζ^* контура. По множеству допустимых размеченных связных контуров однозначно восстанавливается конфигурация σ в кубе Λ с нулевыми граничными условиями. Рассмотрим связный допустимый контур Γ и рассмотрим событие A_Γ, состоящее в том, что Γ присутствует в конфигурации в качестве внешнего контура. Докажем, что

$$P(A_\Gamma) \leqslant (C(F(\beta)-1))^{|\Gamma|} \tag{1}$$

для достаточно больших β, где $|\Gamma|$ — число $(d-1)$-клеток в Γ. Из (1) для достаточно больших β следует существование, по крайней мере, счетного числа крайних гиббсовских точек из-за симметрии, порождаемой группой сдвигов Z. Действительно, из (1) следует, что $P(\sigma_0 \neq 0)$ (0 — начало координат) стремится к 0 при $\beta \to \infty$ равномерно по Λ. Сдвигая граничные условия на элемент Z, получаем остальные чистые фазы. Константа C зависит от d.

Рассмотрим конфигурацию σ с внешним контуром Γ и пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ — все связные контуры θ_σ, являющиеся внутренними по отношению к Γ и не являющиеся внутренними по отношению к каким-либо контурам, внутренним к Γ. Построим преобразование φ конфигурации σ:

$$(\varphi(\sigma))_t = \begin{cases} \sigma_t, & t \in W_\Gamma, \\ 0, & t \in V_\Gamma \cap W_{\Gamma_1} \cap \ldots \cap W_{\Gamma_m}, \\ \sigma_t - \tilde{\sigma}, & t \in V_{\Gamma_i}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\tilde{\sigma}$ — значение спина в точках $V_\Gamma \cap W_{\Gamma_1} \cap \ldots \cap W_{\Gamma_m}$. Перенумеруем как-то $(d-1)$-клетки, составляющие контур Γ: $\zeta_1^*, \ldots, \zeta_{|\Gamma|}^*$. Обозначим $\sigma_{t_j} - \sigma_{t'_j} = n_j$, если 1-клетка $\zeta = (t_j, t'_j)$ двойственна j-той $(d-1)$-клетке ζ_j^*. Тогда

$$P(A_\Gamma) \leqslant \sum_\sigma \exp\left(-\beta \sum_{j=1}^{|\Gamma|} \Phi\left(\sigma_{t_j} - \sigma_{t'_j}\right)\right), \tag{3}$$

где сумма по всем конфигурациям на множестве $\{t_1, \ldots, t_{|\Gamma|}, t'_1, \ldots, t'_{|\Gamma|}\}$, допускающим контур Γ. Но правая часть (3) ограничена

$$\sum_{\substack{n_1=-\infty \\ n_1 \neq 0}}^{\infty} \cdots \sum_{\substack{n_{|\Gamma|}=-\infty \\ n_{|\Gamma|} \neq 0}}^{\infty} \exp\left\{-\beta \sum_{j=1}^{|\Gamma|} \Phi(n_j)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{|\Gamma|} \sum_{\substack{n_j=-\infty \\ n_j \neq 0}}^{\infty} \exp(-\beta \Phi(n_j)) \leqslant (F(\beta)-1)^{|\Gamma|} \tag{4}$$

для достаточно больших β.

Мы займемся теперь корреляционными уравнениями. Пусть θ — допустимый набор размеченных контуров. Обозначим $\rho(\theta)$ вероятность того, что данный набор присутствует в конфигурации.

Обозначим $\Gamma(\theta)$ один из внешних контуров из набора θ, например, содержащий наименьшую в лексикографическом порядке точку. Занумеруем, как и раньше, 1-клетки $\zeta_j = (t_j, t_j')$, $j = 1, \ldots, |\Gamma|$, двойственные к клеткам $\Gamma(\theta)$. Корреляционные уравнения Минлоса — Синая имеют следующий вид

$$\begin{cases} \rho(\theta) = \exp\left\{-\beta \sum_{j=1}^{|\Gamma(\theta)|} \Phi(n_j)\right\} \sum_{\bar{\theta}} (-1)^{|\bar{\theta}|} \rho\{(\theta \setminus \Gamma(\theta)) \cup \bar{\theta}\} \\ \rho(\varnothing) = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Суммирование в правой части (5) идет по всевозможным наборам $\bar{\theta} = (\bar{\Gamma}_1, \ldots, \bar{\Gamma}_k)$ размеченных контуров (включая пустой), таким, что:

а) каждый $\bar{\Gamma}_i \in \bar{\theta}$ имеет непустое пересечение с $\Gamma(\theta)$, но не пересекается с другими контурами из набора θ,

б) набор размеченных контуров $(\theta - \Gamma(\theta)) \cup \bar{\theta}$ является допустимым.

Для вывода этих уравнений обозначим $\rho(\theta, \Gamma(\theta))$ вероятность того, что все контуры θ присутствуют в конфигурации, кроме $\Gamma(\theta)$, и нет контуров, пересекающихся с $\Gamma(\theta)$. Тогда

$$\frac{\rho(\theta)}{\rho(\theta, \Gamma(\theta))} = \exp\left\{-\beta \sum_{j=1}^{|\Gamma(\theta)|} \Phi(n_j)\right\},$$

и остается применить для $\rho(\theta, \Gamma(\theta))$ формулу включения-исключения.

Применимость метода последовательных приближений к системе (5) доказывается обычным способом.

Аналогично работе [6] $\rho(\theta)$ можно представить в виде суммы ряда

$$\rho(\theta) = \sum_\gamma a_\gamma, \tag{6}$$

где суммирование ведется по всевозможным системам $\gamma=(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ допустимых наборов размеченных контуров таким, что: 1. $\theta_n=\varnothing$, $\theta_j\neq\varnothing$ для $j=1, \ldots, n-1$; 2. $\theta_{j+1}\supseteq\theta_j-\Gamma(\theta_j)$, $j=1, \ldots, n-1$; 3. каждый контур Γ из набора $\theta_{j+1}-(\theta_j-\Gamma(\theta_j))$ пересекается (либо касается) с $\Gamma(\theta_j)$; при этом

$$a_\gamma=(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1}|\theta_{j+1}-\theta_j|}\exp\left(-\beta\sum_{j=1}^{n-1}\mu(\Gamma(\theta_j))\right),$$

$$\mu(\Gamma)=\sum_{\substack{|t-t'|=1\\ (t,t')\cap\Gamma\neq\varnothing}}\Phi(\sigma_t-\sigma_{t'}).$$

Переходим теперь к исследованию убывания корреляций в этой модели. Для контурных функционалов можно было бы получить сильные кластерные оценки, используя метод работы [6]. Мы приведем простой метод доказательства экспоненциального убывания корреляций для функций от значений спиновых переменных. Это завершит доказательство существования экранирования в кулоновской спиновой системе (см. § 6).

Рассмотрим функцию $\chi_n(z)$, $z\in Z$, равную 1 при $z=n$ и 0 при остальных z. Займемся сначала корреляциями

$$\langle\chi_n(\sigma_0)\chi_m(\sigma_t)\rangle-\langle\chi_n(\sigma_0)\rangle\langle\chi_m(\sigma_t)\rangle=$$
$$=P(\sigma_0=n,\ \sigma_t=m)-P(\sigma_0=n)P(\sigma_t=m). \tag{7}$$

Мы можем записать

$$P(\sigma_0=n)=\sum_{\Gamma_1}P(\Gamma_1)P(\sigma_0=n/\Gamma_1), \tag{8}$$

где сумма берется по всем внешним размеченным контурам Γ_1, охватывающим точку 0. $P(\sigma_0=n/\Gamma_1)$ — условная вероятность события $\sigma_0=n$ при наличии внешнего контура Γ_1. $P(\Gamma_1)$ — вероятность наличия внешнего контура Γ_1. Аналогично

$$P(\sigma_t=m)=\sum_{\Gamma_2}P(\Gamma_2)P(\sigma_t=m/\Gamma_2), \tag{9}$$

где сумма по всем внешним Γ_2, содержащим точку t внутри себя.

Кроме того,

$$P(\sigma_0=n,\ \sigma_t=m)=\sum_{\Gamma_1,\Gamma_2}P(\Gamma_1\,\Gamma_2)P(\sigma_0=n/\Gamma_1)P(\sigma_t=m/\Gamma_2)+$$
$$+\sum_{\Gamma}P(\Gamma)P(\sigma_0=n,\ \sigma_t=m/\Gamma), \tag{10}$$

где первая сумма берется по всем парам непересекающихся внешних контуров Γ_1, Γ_2, содержащих внутри себя соответственно точки 0 и t. Вторая сумма берется по всем внешним контурам Γ, содержащим обе точки внутри себя. Теперь вычтем из правой части (10) произведение правых частей (8) и (9) и будем абсолютную величину разности оценивать сверху.

Нужно оценить три члена:

1) $\left|\sum\limits_{\Gamma}P(\Gamma)P(\sigma_0=n,\ \sigma_t=m/\Gamma)\right|$;

2) $\left|\sum\limits_{\Gamma_1}\sum\limits_{\Gamma_2}P(\Gamma_1)P(\Gamma_2)P(\sigma_0=n/\Gamma_1)P(\sigma_t=m/\Gamma_2)\right|$,

где Γ_1, Γ_2 пересекаются;

3) $\sum\limits_{\Gamma_1}\sum\limits_{\Gamma_2}|P(\Gamma_1,\ \Gamma_2)-P(\Gamma_1)P(\Gamma_2)|\,P(\sigma_0=n/\Gamma_1)P(\sigma_t=m/\Gamma_2)$,

где Γ_1, Γ_2 не пересекаются. Оценка первых двух сумм является стандартной задачей. Оценка имеет вид

$$(F(\beta)-1)^{|t|}.$$

В случае взаимодействия $\Phi(\sigma)=\sigma^2$ нетрудно доказать более точную оценку

$$\exp(-\beta(\max(|m|,\ |n|)))\quad(F(\beta)-1)^{|t|}. \tag{11}$$

Для оценки третьей суммы заметим сначала, что по формуле включения-исключения

$$P(\Gamma)=\sum_{\tilde\theta}(-1)^{|\tilde\theta|}\rho(\tilde\theta\cup\Gamma), \tag{12}$$

где сумма берется по всем допустимым наборам размеченных контуров $\tilde\theta$ (включая пустой) таким, что любой $\tilde\Gamma\in\tilde\theta$ является внешним по отношению к Γ и не пересекается с Γ. Подставляя теперь (6) в (12) и в аналогичную формулу для $P(\Gamma_1,\ \Gamma_2)$, мы увидим, что в разности

$$P(\Gamma_1,\ \Gamma_2)-P(\Gamma_1)P(\Gamma_2)$$

сократятся все члены, кроме тех, которые будут иметь оценку

$$(F(\beta)-1)^{|t|}.$$

Отсюда мы получим в случае взаимодействия $\Phi(\sigma)=\sigma^2$, что (11) является оценкой сверху для абсолютной величины (7). Отсюда очевидным образом следует оценка для двухчастичной корреляции в кулоновской спиновой системе (см. § 6). Аналогично можно получить оценки n-частичных семиинвариантов.

§ 9. НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В КАЛИБРОВОЧНЫХ Z_2- И Z-МОДЕЛЯХ

Рассмотрим калибровочную G-модель в кубе Λ. Изменяя очевидным образом обозначения § 1, запишем

$$U_\Lambda=\sum_{\alpha\in(\Lambda)_2}\Phi((\delta g)_\alpha), \tag{1}$$

где $g=(g_\iota)$ — 1-цепь со значениями в G.

Пусть дана 2-цепь $a=(a_\alpha)$ и пусть $\Lambda(a)$ — множество 1-цепей g таких, что для всех $\alpha\in(\Lambda)_2$

$$(\delta g)_\alpha=a_\alpha. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь случай $G=Z_2=\{\pm1\}$, $g\equiv\sigma$, а взаимодействие имеет вид $\Phi(\sigma)=-\beta\sigma$ (с точностью до константы это единственная функция на Z_2).

Утверждение 1. Для любой a множества $\Lambda(a)$ имеют одинаковую мощность.

Доказательство следует из того, что (2) образуют систему линейных уравнений над полем Z_2. Для $T\subset(\Lambda)_1$ положим

$$\sigma_T=\prod_{t\in T}\sigma_t.$$

Назовем множество ребер T правильным, если для любой точки $t\in(\Lambda)_0$ число ребер из T, инцидентных этой точке, четно.

Утверждение 2. Если T неправильно, то все корреляционные функции

$$\langle\sigma_T\rangle_\Lambda=Z_\Lambda^{-1}\langle\sigma_T e^{-U_\Lambda}\rangle_0$$

равны нулю для произвольных граничных условий на $\partial\Lambda$ при всех достаточно больших Λ ($\langle\cdot\rangle_0$ означает сумму по всем конфигурациям в Λ).

Доказательство. Рассмотрим точку t_0 такую, что число ребер из T, инцидентных с t_0, нечетно. Рассмотрим функцию $\alpha(t)=-1$, $t=t_0$, $\alpha(t)\equiv1$ для остальных t. Сделаем локальное калибровочное преобразование $\sigma_\xi\to\alpha(t)\sigma_\xi\alpha^-(t')$, где t, t' — две вершины ребра ζ. Мера Хаара и экспонента инвариантны относительно этого взаимнооднозначного преобразования, а σ_T умножается на (-1). Отсюда следует утверждение.

Функции, инвариантные относительно всех локальных калибровочных преобразований, являются линейными комбинациями σ_T с правильными T.

Рассмотрим теперь случай пустых граничных условий в Λ. Назовем калибровкой любое изменение меры Хаара на $Z_2(\Lambda)_1$ такое, что для любого набора $a=(a_\alpha)$, $\alpha\in(\Lambda)_2$ меры множеств $\Lambda(a)$ равны между собой.

Очевидно, что при любой калибровке средние от калибровочно инвариантных функций не меняются. Напротив, средние от остальных функций могут стать отличными от нуля. Примером калибровки может служить радиационная калибровка, при котором все σ_ζ полагаются тождественно равными 1, если ζ направлена вдоль одной из осей (оси времени), а остальные конфигурации считаются равновероятными. Другие примеры калибровки см. в [10, 21, 43].

Высокотемпературная область. Для этого случая действует стандартное кластерное разложение (см., например, § 1.4 в [6]). Отсюда следует существование предельного гиббсовского поля, его единственность, аналитичность по β и т. д.

Низкотемпературный случай. Опишем кластерное разложение для этого случая. При этом рассмотрим несколько более общую модель. Именно, рассмотрим взаимодействие

$$U_\Lambda=-\sum_{\alpha\in(\Lambda)_2}\beta_\alpha(\delta\sigma)_\alpha,\quad \beta_\alpha>0.$$

Положим

$$\tilde Z_\Lambda=\sum_a\exp\Big(\sum_\alpha\beta_\alpha(a_\alpha-1)\Big),$$

где сумма берется по всем конфигурациям $a=(a_\alpha)$, $\alpha\in(\Lambda_2)$, подчиненным ограничению $(\delta a)_c\equiv1$, т. е. для всех $c\in(\Lambda_3)$, $\prod_{\alpha\in\partial c}a_\alpha=1$. Заметим, что σ_T для правильных T является произведением некоторых a_α. Рассмотрим, например, среднее

$$\langle a_\alpha\rangle_\Lambda=\tilde Z_\Lambda^{-1}\sum_a\Big(a_\alpha\exp\sum\beta_\alpha(a_\alpha-1)\Big).$$

Назовем подмножество $B\subset(\Lambda)_2$ допустимым, если для каждого $c\in(\Lambda)_3$ пересечение B с границей c состоит из четного числа клеток $(\Lambda)_2$.

Положим для $A\subset(\Lambda)_2$

$$Z_A=\sum_a\exp\sum_\alpha\beta_\alpha(a_\alpha-1),$$

где сумма берется по всем конфигурациям $a=(a_\alpha)$ на A таким, что подмножество $B=B(a)=\{\alpha{:}a_\alpha=-1\}\subset A$ допустимо.

Для каждого $A\subset(\Lambda)_2$ фиксируем $\alpha=\alpha(A)\in A$ и рассмотрим следующую систему уравнений

$$Z_A=Z_{A\ominus\{\alpha(A)\}}+\sum_{A_1}\exp\Big(-2\sum_{\alpha\in A_1}\beta_\alpha\Big)Z_{A\ominus A_1}, \tag{3}$$

где сумма $\sum_{A_1}$ берется по всем 1-связным допустимым A_1 таким, что $\alpha(A)\in A_1\subset A$. $A\ominus B$ означает множество 2-клеток A, находящихся на расстоянии >1 от B.

Понятие 1-связности см. в [6]. Далее из системы (3) стандартным образом получается кластерное разложение, теоремы о единственности, аналитичности по β, экспоненциальном убывании корреляций и т. д. (см. [6]) в случае, если $\beta_\alpha\equiv\beta$ достаточно велико. См. также [4], где в § 4 имеется такое же разложение в несколько другом низкотемпературном случае).

Рассмотрим теперь калибровочную Z-модель. В этом случае без введения калибровки статистическая сумма в кубе Λ может

3*

не существовать. Мы введем «максимальную» калибровку, положив

$$Z_\Lambda = \sum_g \exp\left(-\beta \sum_\alpha f((\delta g)_\alpha)\right), \tag{4}$$

требуя, чтобы f имела единственный минимум $f(0)=0$ в точке 0 и чтобы

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\beta f(n)) < \infty. \tag{5}$$

При этом суммирование $\sum\limits_g$ в (4) ведется по множеству конфигураций $g \in G^{(\Lambda)_1}$, имеющему точно один элемент в каждом классе смежности $G^{(\Lambda)_2}/\mathrm{Ker}\,\delta$. Иначе говоря, можно положить

$$Z_\Lambda = \sum_a \exp\left(-\beta \sum_\alpha f(a_\alpha)\right),$$

где сумма по всем 2-цепям a таким, что $\delta a \equiv 0$, т. е. $\sum\limits_{\alpha \in \partial c} a_\alpha = 0$ для всех 3-клеток c. Положим для $A \subset (\Lambda)_2$

$$Z_A = \sum_a \exp\left(-\beta \sum_\alpha f(a_\alpha)\right),$$

где сумма по всем конфигурациям $a=(a_\alpha)$ на A таким, что

$$\sum_{\alpha \in c \cap A} a_\alpha = 0$$

для всех $c \in (\Lambda)_3$.

Так же, как и выше, получим систему уравнений

$$Z_A = Z_{A-\{\alpha(A)\}} + \sum_{A_1, (a_\alpha)} \exp\left(-\beta \sum_{\alpha \in A_1} f(a_\alpha)\right) Z_{A \ominus A_1},$$

где сумма берется по всем 1-связным A_1 таким, что $\alpha(A) \in A_1 \subset A$, и по всем конфигурациям a_α на A_1 таким, что $a_\alpha \neq 0$ для всех $\alpha \in A_1$ и что

$$\sum_{\alpha \in c \cap A_1} a_\alpha = 0$$

для всех $c \in (\Lambda)_3$.

Далее техника стандартна, и мы снова ее не приводим. Результаты вполне аналогичны предыдущей модели. Например, имеет место экспоненциальное убывание корреляций, единственность гиббсовского распределения. Для этих двух моделей в низкотемпературной области, по-видимому, кластерное разложение является экспоненциально регулярным в смысле [6] и поэтому может быть получено полное кластерное разложение.

Очень интересно выписать одночастичные подпространства для трансфер-матрицы этих моделей.

Возможность кластерного разложения для больших β тесно связана с преобразованием двойственности. Так, например, для $d=4$ калибровочная Z_2-модель двойственна самой себе и кластерное разложение для больших β связано с высокотемпературным кластерным разложением.

§ 10. РАЗЛОЖЕНИЯ В АБЕЛЕВЫХ МОДЕЛЯХ ХИГГСА

Рассмотрим сначала Z_2-модель Хиггса с взаимодействием

$$U_\Lambda = -\beta_l \sum_{(t,t') \in (\Lambda)_1} g_t \sigma_{tt'} g_{t'} - \beta_p \sum_{\alpha \in (\Lambda)_2} (\delta\sigma)_\alpha, \quad \beta_l, \beta_p \geqslant 0.$$

Так же, как в предыдущем параграфе, мы можем рассматривать только функции, инвариантные относительно всех локальных калибровочных преобразований

$$g_t \to k_t g_t, \quad \sigma_{tt'} \to k_t \sigma_{tt'} k_{t'},$$
$$g_t, k_t, \quad \sigma_{tt'} \in Z_2 = \{\pm 1\}.$$

С помощью замены переменных

$$g_t \sigma_{tt'} g_{t'} \to \sigma_{tt'}$$

мы приходим к эквивалентной модели — калибровочной модели с внешним полем. Взаимодействие для этой модели имеет вид

$$\tilde{U}_\Lambda = -\beta_l \sum_{(t,t')} \sigma_{tt'} - \beta_p \sum_\alpha (\delta\sigma)_\alpha.$$

Мы будем изучать именно эту модель.

Если β_l, β_p оба малы, то годится стандартное высокотемпературное разложение. Если для данного β_p параметр β_l достаточно велик, то годится низкотемпературное разложение, аналогичное разложению для модели Изинга с большим внешним полем. Рассмотрим теперь случай, когда β_p велико, а β_l мало. Мы укажем кластерное разложение.

Пусть A — некоторое множество 2-клеток куба Λ (мы рассматриваем пустые граничные условия), ∂A — множество 1-клеток, принадлежащих границе хотя бы одной клетки из Λ. Положим

$$Z_A = \sum_{\sigma_{\partial A}} \exp\left(\beta_l \sum_{\partial A} \sigma_{tt'} + \beta_p \sum_{\alpha \in A} [(\delta\sigma)_\alpha - 1]\right),$$

где $\sigma_{\partial A}$ означает конфигурацию на ∂A.

Разложим экспоненту

$$\exp\left(\beta_l \sum_{\partial A} \sigma_{tt'}\right) = \sum_{B \subset \partial A} k_B, \quad k_B = \prod_{(t,t') \in B} (e^{\beta_l \sigma_{tt'}} - 1).$$

Рассмотрим разложение единицы

$$1=\sum_{\sigma_{\partial A}}\chi_{\sigma_{\partial A}}=\sum_{C}\chi_{C},$$

где χ_σ — характеристическая функция конфигурации σ, χ_C — характеристическая функция множества тех конфигураций σ на ∂A, для которых $C=\{\alpha\in A:(\delta\sigma)_\alpha=-1\}$.

Выделим для каждого A точку $\alpha(A)$ и рассмотрим уравнения типа Кирквуда — Зальцбурга

$$Z_A=Z_{A\ominus\alpha(A)}+\sum_{A_1}\langle R_{A_1}\rangle_0 Z_{A\ominus A_1},$$

где сумма берется по всем 1-связным A_1 таким, что $\alpha(A)\in A_1\subset A$. Здесь

$$R_{A_1}=\sum k_B\chi_C\exp\left(\beta_p\sum_{\alpha\in C}[(\delta\sigma)_\alpha-1]\right),$$

где сумма берется по всем парам (B,C) множеств $B\subset\partial A$, $C\subset A_1$ таким, что A_1 есть минимальное множество, удовлетворяющее условиям $C\subset A_1$, $B\subset\partial A$. Оценка ядер $\langle R_{A1}\rangle_0$ тривиальна для малых β_l и больших β_p. Вывод кластерного разложения из этих уравнений также стандартен [6]. Другие кластерные разложения для этого случая см. [9, 79]. Заметим, что здесь мы не использовали положительность β_l. Поэтому получаем аналитичность по β_l в некоторой окрестности точки $\beta_l=0$ при данном достаточно большом β_p. Кластерное разложение для S^1-модели Хиггса с использованием электродинамического представления см. [59, 60].

§ 11. ОСНОВНЫЕ СОСТОЯНИЯ И СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ

Основным состоянием в Λ для взаимодействия U_Λ (с заданными граничными условиями) называется конфигурация s_Λ в Λ, для которой $U_\Lambda(s_\Lambda)$ минимальна. $U_\Lambda(s_\Lambda)$ можно рассматривать как оператор умножения в каком-либо пространстве функций на Λ и часто можно сказать, что основное состояние есть обобщенный собственный вектор с наименьшим собственным значением для U_Λ. Основное состояние можно рассматривать так же, как вероятностную единичную меру, сосредоточенную в точке s_Λ. Тогда основное состояние есть состояние на (коммутативной) C^*-алгебре $\mathfrak{A}_\Lambda$ непрерывных функций на множестве конфигураций на Λ.

Основным состоянием на квазилокальной алгебре $\mathfrak{A}$ (т. е. в бесконечном объеме) называется предельная точка таких состояний при произвольной последовательности $\Lambda\uparrow Z^d$ с произвольными граничными условиями. Отсюда следует очевидным образом, что любое основное состояние есть мера, сосредоточенная в некоторой точке S^{Z^d}. Эту точку (конфигурацию) мы также будем называть основным состоянием. Таким образом, основное состояние является чистым. Можно рассматривать также основные состояния общего вида. Теория периодических основных состояний, удовлетворяющих условию Пайерлса, изложена в работах Герцика, Пирогова, Синая, Славного. В этой теории отчетливо проявляется смысл основных состояний: чистое гиббсовское состояние при больших β сосредоточено вблизи некоторого основного состояния. Привлекательным и естественным является предположение, что в общем случае, кроме основных состояний, на характер гиббсовской меры влияют также стационарные точки U_Λ.

Если S — гладкое многообразие и U_Λ — гладкая функция, то стационарными точками (конфигурациями) называются такие конфигурации s, для которых

$$\delta U=U(s')-U(s)=o(s'-s), \tag{1}$$

где s' совпадает с s везде, кроме конечного числа точек, и отличается от s на бесконечно малое приращение в остальных точках.

Точками относительного минимума называются стационарные точки, для которых $\delta U\geqslant 0$ для достаточно малых $s'-s$. Заметим, что если, например, U — финитное взаимодействие, то разность (1) корректно определена.

В случае дискретного спина в точке s относительного минимума надо потребовать, чтобы

$$U(s')-U(s)\geqslant 0$$

для всех пар s', s, совпадающих вне некоторого конечного множества.

П р и м е р. В калибровочной $SU(n)$-модели условие (1), как нетрудно убедиться, эквивалентно следующей системе уравнений

$$\sum_{\nu:\nu\neq\mu}\operatorname{Tr}(T^a(g_{m\mu}g_{m+\hat\mu,\nu}g^*_{m+\hat\nu,\mu}g^*_{m\nu}-$$
$$-g_{m\nu}g_{m+\hat\nu,\mu}g^*_{m+\hat\mu,\nu}g^*_{m\mu}))=0,\quad m\in Z^d,\quad \mu=1,\dots,d, \tag{2}$$

где T^a — базис в алгебре Ли группы $SU(n)$.

Важным примером решений системы (2) является решение вида

$$g_{m\mu}=v_m z_{m\mu}v^*_{m+\hat\mu},$$

где v_m — произвольные элементы $SU(n)$, $z_{m\mu}$ принадлежат центру Z группы $SU(n)$ (см. [103—105]). Общий вид решений уравнений (2) неизвестен. В [88, 89] исследуются соответствующие уравнения для простой и калибровочной $GL(n)$-моделей, с точки зрения их полной интегрируемости.

Огромная литература посвящена, однако, не решетчатым моделям, а нахождению стационарных точек для непрерывных систем. Особенное внимание уделялось уравнениям Янга — Миллса на R^4. Здесь найдены все решения с конечным действием. Такие непрерывные решения называются инстантонами (см. [8]). Все инстантоны найдены и в более простых двумерных σ-моделях (см. [19]). Исследовались решения с сингулярностями и бесконечным действием: мероны (с точечными сингулярностями) и вихри (с сингулярностями коразмерности 2). Общий вид таких решений неизвестен. Имеются многочисленные аргументы в пользу того, что эти решения важны для исследования гиббсовского поля (см. [18, 22, 23, 50, 82, 87]). Связь между стационарными точками решетчатых моделей и непрерывных аналогов исследована мало (см. [27]).

§ 12. ГАМИЛЬТОНОВА ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Рассмотрим сначала описанную в [5] двумерную модель Изинга с непрерывным временем. Она может быть описана как гиббсовским, так и гамильтоновым способом [5]. Напомним, что при гамильтоновом описании каждой точке $n\in Z$ сопоставляется двумерное комплексное пространство $\mathscr{H}_n$ с базисом $e^{\pm}(n)$.

Пусть $N=\{-N, -N+1, \ldots, N\}$, $\mathscr{H}_N=\bigotimes_{n\in N}\mathscr{H}_n$,

$$\sigma_3(n)=1\otimes\ldots 1\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\otimes 1\ldots\otimes 1,$$

$$\sigma_1(n)=1\otimes\ldots 1\otimes\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\otimes 1\ldots\otimes 1$$

матрицы Паули, действующие в $\mathscr{H}_N$ в этом базисе.

Рассмотрим оператор в $\mathscr{H}_N$

$$H_N(\lambda)=\lambda\sum_{n=-N}^{N-1}\sigma_3(n)\sigma_3(n+1)+\sum_{n=-N}^{N-1}\sigma_1(n). \qquad (1)$$

Основные идеи преобразования двойственности имеются в [42]. Мы приведем такой результат.

Теорема 1. Существует такой унитарный оператор U в $\mathscr{H}_N$, что

$$UH_N(\lambda)U^{-1}=\lambda H_N(\lambda^{-1}).$$

Мы построим явные преобразования, доказывающие это утверждение.

Введем другой базис в $\mathscr{H}_n$

$$g^{\pm}(n)=\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+}(n)\pm e^{-}(n)).$$

Положим для любого $I\subset N$ (включая пустое)

$$e_I=[\bigotimes_{n\in I}e^{+}(n)]\otimes[\bigotimes_{n\in\bar I}e^{-}(n)].$$

Аналогично определим g_I.

Определим унитарный оператор U_1 соотношением

$$U_1e_I=g_I,\quad U_1g_I=e_I.$$

Достаточно убедиться в корректности этого определения в каждом $\mathscr{H}_n$. Легко видеть, что для всех n

$$U_1^{-1}\sigma_3(n)U_1=\sigma_1(n),\quad U_1^{-1}\sigma_1(n)U_1=\sigma_3(n). \qquad (3)$$

Поэтому гамильтонианы $H_N(\lambda)$ и

$$\widehat{H}_N(\lambda)=\lambda\sum_{n=-N}^{N-1}\sigma_1(n)\sigma_1(n+1)+\sum_{n=-N}^{N-1}\sigma_3(n) \qquad (4)$$

унитарно эквивалентны.

Введем теперь третий базис f_I:

$$f_I=\bigotimes_{n\in N}e^{\varepsilon(n)}(n),$$

где последовательность $\varepsilon(n)$ определяется из условия: $\varepsilon(n)$ и $\varepsilon(n+1)$ различны при $n\in I$ и одинаковы при $n\in\bar I$. Этим $\varepsilon(n)$ единственным образом определяется, если условиться, что $\varepsilon(-N-1)=+1$.

Очевидно, оператор

$$\mu_3(n)=\prod_{n<m<N}\sigma_1(m)$$

переводит f_I в $f_{I\setminus\{n\}}$, если $n\in I$, и в $f_{I\cup\{n\}}$, если $n\in\bar I$ (т. е. «переворачивает» состояние в точке n). В то же время оператор $\mu_1(m)=\sigma_3(m)\sigma_3(m+1)$ умножает f_I на (-1), если $m\in I$, и оставляет f_I неизменным в противном случае. Определив унитарный оператор U_2 так, что

$$U_2e_I=f_I,$$

мы имеем

$$U_2^{-1}\mu_3(n)U_2=\sigma_1(n),\quad U_2^{-1}\mu_1(n)U_2=\sigma_3(n). \qquad (5)$$

Но

$$\lambda\sum_{n=-N}^{N-1}\sigma_1(n)+\sum_{n=-N}^{N-1}\sigma_3(n)\sigma_3(n+1)=$$

$$=\lambda\sum_{n=-N}^{N-1}\mu_3(n)\mu_3(n+1)+\sum_{n=-N}^{N-1}\mu_1(n). \qquad (6)$$

Из (3), (5), (6) следует, что $H_N(\lambda)$ унитарно эквивалентен правой части (6). Теорема доказана.

Мы не будем здесь подробно обсуждать возможность термодинамического предельного перехода $N\to\infty$ и получение информации о спектре с помощью преобразования двойственности. Ограничимся следующим утверждением.

В высокотемпературной области (малые λ) рассмотрим алгебру квазилокальных наблюдаемых $\mathfrak{A}$ на Z и ее представление ГНС относительно ограничения на нулевой срез гиббсовской меры (см. [5]). В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ этого представления ГНС рассмотрим слабый предел операторов

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n<m<N}\sigma_1(m)=\mu_3(n).$$

Утверждение о существовании этого предела эквивалентно утверждению об абсолютной непрерывности солитонной меры μ_s относительно вакуумной меры μ (см. [5]).

Существование такого предела позволяет строить преобразование двойственности в бесконечном объеме. При этом, по-видимому, вакуумный сектор в высокотемпературной области переходит в прямую сумму вакуумного и солитонного секторов в низкотемпературной области. При этом в низкотемпературной области вакуумный сектор отвечает «четным» состояниям, а солитонный — «нечетным», в частности, одночастичное подпространство имеется только в солитонном секторе. О связи двойственности с отсутствием одночастичных состояний в низкотемпературном спектре см. также в [17]. Другие физические работы о гамильтоновой двойственности [42, 48, 90, 99].

§ 13. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПОРЯДКА И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Обычно фазовый переход определяется как наличие скачка у некоторой корреляционной функции или у ее производных при изменении данного параметра системы. Иначе говоря, существование фазового перехода обнаруживается по поведению локального функционала. Возможность существования фазовых переходов для нелокальных функционалов была обнаружена впервые Вегнером [102]. Для случайных полей $\sigma_t=\pm 1$ на Z^d такие функционалы могут иметь вид параметров в асимптотическом поведении корреляционных функций $\langle\sigma_T\rangle$ при некотором регулярном стремлении $|T|\to\infty$. В последнее время такие функционалы возникли в теории элементарных частиц.

Функционал Вильсона для калибровочной Z_2-модели определяется следующим образом. Пусть C — замкнутый контур на Z^d, $\sigma_C=\prod_{t\in C}\sigma_t$. Положим

$$W(C)=\langle\sigma_C\rangle.$$

Рассмотрим случай, когда C лежит в некоторой фиксированной плоскости (натянутой, например, на ось времени и одну из пространственных осей). Пусть L_C — длина контура, S_C — площадь, охватываемая этим контуром.

Теорема 1. При расширении C в высокотемпературной области

$$\ln|W(C)|\leqslant -c_1(\beta)S_C,\quad c_1(\beta)>0, \tag{1}$$

а в низкотемпературной области

$$\ln|W(C)|\geqslant -c_2(\beta)L_C,\quad c_2(\beta)>0. \tag{2}$$

В высокотемпературной области доказательство этого просто. Заметим, что $\sigma_C=\prod_\alpha(\delta\sigma)_\alpha$, где произведение берется по всем $\alpha\in(\Lambda)_2$, лежащим внутри контура C.

Тогда разложим $W(C)$ по семиинвариантам

$$\left\langle\prod_\alpha(\delta\sigma)_\alpha\right\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{n!}\left\langle\prod_\alpha(\delta\sigma)_\alpha,\ (\delta\sigma)_{\alpha_1},\ \ldots,\ (\delta\sigma)_{\alpha_n}\right\rangle_0.$$

Первый отличный от нуля член будет при $n=S_C$ и если $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — все 2-клетки внутри контура C. Отсюда, пользуясь стандартными оценками, получим:

$$\left|\left\langle\prod_\alpha(\delta\sigma_\alpha)\right\rangle\right|\leqslant(\mathrm{const}\,\beta)^{S_C}.$$

В низкотемпературном случае доказательство см. [9] и ссылки там.

В случае некоммутативной группы G рассмотрим G-модель, в которой конфигурацией является функция $g(b)$ на 1-клетках, причем $g(b)=g^{-1}(-b)$. Для ориентированного замкнутого контура C, т. е. последовательности ориентированных клеток, и неприводимого представления σ группы G получим

$$\sigma_C(y)=\sigma(g(b_n))\ldots\sigma(g(b_1)).$$

Действие в рассматриваемой нами G-модели имеет вид

$$-\beta\sum_{\alpha\in(\Lambda)_2}\mathrm{Tr}\,\tau_{\partial\alpha}$$

для некоторого представления τ группы G.

Представление σ будем называть представлением типа кварков, если

$$\ln|\langle\sigma_C\rangle|\leqslant -c_1(\beta)S_C,$$

и представлением типа частиц, если

$$\ln|\langle\sigma_C\rangle|\geqslant -c_2(\beta)L_C.$$

В работе [46] приводятся результаты поведения функционала Вильсона $\langle\sigma_C\rangle$ для различных σ и τ.

Заметим, что случай $d=2$ является «явно решаемым» для калибровочных G-моделей. Полное исследование этого случая см. в [31].

Оказывается, что при $d\geqslant 3$ представление σ является представлением типа частиц или типа кварков в зависимости от того, принадлежит ли центр Z группы G ядру представления σ или нет, соответственно. Приведем два точных результата.

Теорема 2 [46]. Если $G=SU(n)$, $\sigma(Z)\neq 1$, то в высокотемпературной области σ есть представление типа кварков для любого τ.

Теорема 3 [46]. Пусть $G=SU(2)$ или $SU(3)$ и $\sigma(Z)=1$. Тогда в высокотемпературной области σ есть представление типа частиц для любого τ. См. подробности в [46].

Кроме функционала Вильсона, в последнее время возник двойственный функционал — функционал Хоофта [58, 75, 101, 103]. Рассмотрим его для случая калибровочной Z_2-модели в размерностях $d=3,4$. Ее статистическая сумма равна

$$Z_\Lambda=\sum_{\{\sigma_\alpha\}}\exp\Big(\beta\sum_{p\in(\Lambda)_2}(\delta\sigma)_p\Big),\quad \alpha\in(\Lambda)_1.$$

Для размерности $d=3$ двойственной моделью является Z_2-модель на двойственной решетке. Пусть $\zeta_{n^*}=\pm 1$ — переменные двойственной модели в вершинах n^* двойственной решетки. Статистическая сумма равна

$$Z_\Lambda=\sum_{\{\zeta_{n^*}\}}\exp\Big(\beta^*\sum_{\alpha^*\in(\Lambda^*)_1}(\delta\zeta)_{\alpha^*}\Big).$$

Среднее $\langle\zeta_{n^*}\zeta_{m^*}\rangle^*$ в двойственной модели называется функционалом Хоофта в первоначальной модели. Нетрудно проверить, что в терминах первоначальной модели среднее можно определить следующим образом. Пусть S^* — путь из ребер двойственной решетки, соединяющий точки n^* и m^*. В физической литературе говорят обычно, что в точках n^* и m^* сидят дираковский монополь и антимонополь соответственно, а S^* является струной Дирака. Тогда

$$\langle\zeta_{n^*}\zeta_{m^*}\rangle^*=\frac{\sum_{\{\sigma_\alpha\}}\exp\Big\{\beta\sum_p\tilde G_p\Big\}}{Z_\Lambda},\tag{3}$$

где $\tilde G_p=-(\delta\sigma)_p$, если $p^*\in S^*$ и $\tilde G_p=(\delta\sigma)_p$ в остальных случаях.

В размерности 4 калибровочная Z_2-модель самодвойственна. Функционалом Хоофта в первоначальной модели называется функционал Вильсона в двойственной модели

$$\langle\zeta_{C^*}\rangle^*,\quad \zeta_{C^*}=\prod_{\alpha^*\in C^*}\zeta_{\alpha^*},$$

C^* — замкнутый путь на двойственной решетке (монопольная петля Дирака). Пусть S^* — некоторая поверхность из 2-клеток

на двойственной решетке, ограничиваемая этой петлей (лист Дирака). Тогда

$$\langle\zeta_{C^*}\rangle^*=\frac{\sum_{\{\sigma_\alpha\}}\exp\Big\{p\sum_p\tilde G_p\Big\}}{Z_\Lambda},\tag{4}$$

где $\tilde G_p=-(\delta\sigma)_p$, если $p^*\in S^*$ и $(\delta\sigma)_p$ в остальных случаях.

В гамильтоновом представлении произведения Вильсона и Хоофта представляются в виде некоммутирующих операторов с примечательными соотношениями коммутации (см. [58, 101, 103]. В переводе на евклидов язык эти соотношения имеют простой смысл. Рассмотрим сначала случай размерности 3. Пусть XYt — система координат на решетке, C — контур в плоскости $t=0$, охватывающий точку 0. Пусть $n^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ — точка двойственной решетки, $\vec{t}$ — единичный вектор по оси t в положительном направлении.

Определим теперь

$$\langle\zeta_{n^*}\sigma_C\rangle=\frac{\sum\sigma_C\exp\Big(\beta\sum_p\tilde G_p\Big)}{Z},$$

где $\tilde G_p=-G_p$, если p^* лежит на оси t выше точки n^* и $\tilde G_p=G_p$, в остальных случаях. Аналогично положим

$$\langle\sigma_C\zeta_{n^*}\rangle=\frac{\sum\sigma_C\exp\Big(\beta\sum_p\hat G_p\Big)}{Z},$$

где $\hat G_p=-G_p$, если p^* лежит на оси t ниже точки n^*, и $\hat G_p=G_p$ в остальных случаях.

Тогда евклидовы соотношения Хоофта имеют вид

$$\langle\zeta_{n^*}\sigma_C\rangle=-\langle\sigma_C\zeta_{n^*}\rangle.\tag{5}$$

Действительно, сделаем замену переменных $G_p\to -G_p$, если p^* лежит на оси t, и $G_p\to G_p$ в остальных случаях. Эта замена допустима, причем мы рассматриваем калибровочную Z_2-модель с пустыми граничными условиями в кубе, а двойственную ей Z_2-модель — с нулевыми граничными условиями. Тогда соотношение (5) очевидно. Можно записать также, пользуясь симметрией

$$\langle\zeta_{n^*}\sigma_C\rangle=-\langle\zeta_{n^*+\vec{t}}\,\sigma_C\rangle$$

относительно плоскости XY.

Аналогичное соотношение существует для случая $d=4$.

По поводу проблемы конфайнмента см. [11, 9, 12, 30, 41, 44, 64, 69]. Последние строгие результаты о калибровочных полях см. в [21, 9, 44, 74—76, 103]. Физический обзор по решетчатым калибровочным моделям см. [33].

§ 14. ДРУГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Здесь мы очень кратко упомянем о некоторых других результатах, связанных с двойственностью.

По поводу двойственности (аналог § 5) для G-моделей с неабелевой группой G известно очень мало. Некоторая деятельность [16, 34, 83] показала, что случай разрешимой группы G по существу сводится к абелеву случаю. В общем случае дело упирается в отсутствие хороших обобщений формулы суммирования Пуассона на неабелев случай (см. однако формулы следа Сельберга).

Полезная техника вычислений с неабелевыми группами имеется в [1, 28].

Много работ посвящено преобразованию двойственности для конкретных моделей. Так, в [24] рассматривается двумерная модель с произвольным взаимодействием $\sum\limits_{(t,t')}(-\ln F(\sigma_t-\sigma_{t'}))$. Замечается, что такая модель определяется точкой проективного пространства $\{x_r\}=\left\{F\left(\frac{2\pi r}{N}\right)\right\}$, $r=0, 1, \ldots, N-1$. Преобразование двойственности задает линейное преобразование $F\to\hat{F}$ этого пространства в себя. С помощью этого получена характеризация самодвойственных моделей. Обсуждаются также фазовые диаграммы двумерных Z_N-моделей. Z_N-модели рассматриваются также в [69].

Обсуждение фазовых диаграмм G-моделей с абелевой G имеется в большом числе физических работ (см., например, [13, 32, 38, 39, 41, 61, 63, 66, 68]).

Случайные спиновые системы в связи с двойственностью изучаются в [92] (см. также [62]).

Связь двойственности с задачей просачивания см. в [40]. Решетчатые спиновые системы, где спин принимает два значения, с произвольным финитным взаимодействием рассматриваются в серии работ [49, 52, 57, 80, 81], где построена общая теория таких преобразований. Эти результаты часто использовались для получения строгих результатов для таких моделей. Ряд результатов этих работ можно перенести на случай более общих спиновых пространств.

Любопытна двойственность для непрерывной системы частиц с твердой сердцевиной, см. [95]. Двойственность в скейлинговом пределе и связь с квантовой теорией поля см. [91, 78, 67]. Двойственность для непрерывных полей см. в физических работах [93, 98]. Вообще, для некоторых моделей должна сохраняться двойственность при устремлении шага решетки к нулю. Этот вопрос совсем не изучен.

CP^{n-1}-модель на решетке рассматривается в [96]. Ряд важных результатов для калибровочных $SU(N)$-моделей получен в [74—76, 104, 105]. При этом используется частичное преобразование двойственности. Если использовать факторизацию $u=\tilde{u}z$, где $z\in Z_N$ — центру $SU(N)$, $\tilde{u}\in SU(N)/Z_N$, то $SU(N)$-модель можно рассматривать как Z_N-модель со случайными коэффициентами, распределение которых неизвестно. Несмотря на то, что распределение этих коэффициентов неизвестно, можно в некоторых предположениях получить оценки для функционалов Хоофта с помощью низкотемпературного кластерного разложения для калибровочной Z_N-модели со случайными коэффициентами, аналогично полученному в § 9.

Мы здесь совсем не коснулись также связи преобразований типа двойственности с $\frac{1}{N}$ -разложениями в статистической физике и квантовой теории поля [71, 72]). Другие результаты о разложении см. в [14, 35, 51].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Арефьева И. Я.*, Неабелева формула Стокса. ТМФ, 1980, *43*, № 1, 111—116
2. *Зиновьев Ю. М.*, Дуальность в абелевых калибровочных теориях на решетке. ТМФ, 1980, *43*, № 3, 309—322
3. *Кириллов А. А.*, Элементы теории представлений. М., Наука, 1972, 336 с. (РЖМат, 1973, 7Б684К)
4. *Малышев В. А.*, Возмущения гиббсовских случайных полей. В сб. «Многокомпонент. случайные системы». М., Наука, 1978, 258—276 (РЖМат, 1979, 6В226)
5. —, Солитонные секторы в решетчатых моделях с непрерывным временем. Функц. анализ и прим., 1979, *13*, № 1, 31—41 (РЖМат, 1979, 10Б626)
6. —, Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля. Успехи мат. наук, 1980, *35*, № 2, 3—53 (РЖМат, 1980, 7В257)
7. *Чжэнь-Шэн-шэнь*, Комплексные многообразия. М., ИЛ, 1961, 240 с. (РЖМат, 1961, 12Б113К)
8. *Actor A.*, Classical solutions of SU(2) Yang-Mills teories. Rev. Mod. Phys., 1979, *51*, № 3, 461—525
9. *Angelis G. F. de Falco D., Guerra F., Marra R.*, Confinement as a problem in statistical mechanics. Acta Univ. wratisl., 1979, № 519, 117—144 (РЖМат, 1979, 11В238)
10. *Baaquie B. E.*, (2—1)-dimensional Abelian lattice gauge theory. Phys. Rev. D, 1977, *16*, № 10, 3040—3046 (РЖМат, 1978, 10В177)
11. *Balian R., Drouffe J. M., Itzykson C.*, Gauge fields on a lattice. II. Gauge-invariant Ising model. Phys. Rev. D, 1975, *11*, № 8, 2098—2119
12. *Banks T., Rabinovici E.*, Finite-temperature behavior of the lattice Abelian Higgs model. Nucl. Phys., 1979, *B160*, 349—379
13. *Bardakci K., Rabinovici. E.*, Dual transformations: an equivalence between the continuum and lattice versions of the two-dimensional Abelian Higgs model. Phys. Rev. D, 1979, *20*, № 6, 1360—1368
14. *Bars I., Green F.*, Complete integration of $U(N)$ lattice gauge theory in a large-N limit. Phys. Rev. D, 1979, *20*, № 12, 3311—3330
15. *Baus M., Hansen J.-P.*, Statistical mechanics of simple Coulomb systems. Phys. Reports, 1980, *59*, № 1, 1—94

16. *Bellissard J.*, A remark about the duality for non-Abelian lattice fields. J. Math. Phys., 1979, *20*, № 7, 1490—1493
17. *Benettin G., Jona-Lasinio G., Stella A.*, Duality and asymptotic behaviour of correlation functions in the two-dimensional Ising model. Lett. Nuovo Cimento, 1972, *4*, № 10, 443—447
18. *Berg B., Lüscher M.*, Computation of quantum fluctuations around multi-instanton fields from exact Green's functions: the CP^{n-1} case. Commun. Math. Phys., 1979, *69*, 57—80
19. *Borchers H. J., Garber W. D.*, Local theory of solutions for the $O(2k-1)$-model. Commun. Math. Phys., 1980, *72*, 77—102
20. *Brydges D. C.*, A rigorous approach to Debye screening in dilute classical Coulomb system. Commun. Math. Phys., 1978, *58*, № 3, 313—350 (РЖМат, 1978, 10В128)
21. —, *Fröhlich J., Seiler E.*, Construction of quantised gauge fields. II. Convergence of the lattice approximation. Commun. Math. Phys., 1980, *71*, 159—205
22. *Callan C. G., Dashen R. F., Gross D. J.*, A theory of hadronic structure. Phys. Rev. D, 1979, *19*, № 6, 1826—1855
23. —, —, —, Instantons as a bridge between weak and strong coupling in quantum chromodynamics. Phys. Rev. D, 1979, *20*, № 12, 3279—3291
24. *Cardy J. L.*, General discrete planar models in two dimensions: duality properties and phase diagrams. J. Phys., 1980, *A13*, 1507—1515
25. *Casher A.*, Self-dual $Z(N)$ gauge theories. Nucl. Phys., 1979, *B151*, 353—356 (РЖМат, 1979, 10В162)
26. *Chin S. A.*, Classical quark matter in one dimension' Abelian approximation. Phys. Rev. D, 1978, *17*, № 2, 565—573 (РЖМат, 1978, 10В222)
27. *Cotta-Ramusino P., Dell'Antonio G.*, Selfduality and topological-like properties of lattice gauge field theories. A proposal. Commun. Math. Phys., 1979, *70*, 75—95 (РЖМат, 1980, 6В194)
28. *Creutz M.*, Feynman rules for lattice guage theory. Rev. Mod. Phys., 1978, *50*, № 3, 561—571
29. *Das A., Kaku M., Townsend P. K.*, Lattice formulaton of general relativity. Phys. Lett., 1979, *B81*, № 1, 11—14 (РЖМат, 1979, 8В173)
30. *De Martino S., De Siena S., Marra R.*, A note on some confinement criteria. Nuovo Cimento, 1978, *A48*, № 3, 279—289 (РЖМат, 1979, 7В235)
31. *Dosch H. G., Müller V. F.*, Lattice gauge theory in two spacetime dimensions. Fortschr. der Physik, 1979, *27*, 547—559 (РЖМат, 1980, 6В191)
32. *Drouffe J. M.*, Transitions and duality in gauge lattice systems. Phys. Rev. D, 1978, *18*, № 4, 1174—1182 (РЖМат, 1979, 4В191)
33. —, *Itzykson C.*, Lattice gauge fields. Phys. Reports C., 1978, *38*, № 3, 133—175 (РЖМат, 1978, 11В336)
34. —, —, *Zuber J. B.*, Lattice models with a solvable symmetry group. Nucl. Phys., 1979, *B147*, 132—134 (РЖМат, 1979, 8В162)
35. —, *Parisi G., Sourlas N.*, Strong coupling phase in lattice gauge theories at large dimension. Nucl. Phys., 1979, *B161*, 397—416
36. *Dubois-Violette M., Georgelin Y.*, Gauge theory in terms of projector valued fields. Phys. Lett., 1979, *B82*, № 2, 251—254
37. *Einhorn M. B., Savit R.*, Topological excitations in the Abelian Higgs model. Phys. Rev. D, 1978, *17*, № 10, 2583—2594 (РЖМат, 1979, 4В196)
38. —, —, Phase transitions and confinement in the Abelian Higgs model. Phys. Rev. D, 1979, *19*, № 4, 1198—1213 (РЖМат, 1979, 10В199)
39. *Elitzur S., Pearson R. B., Shigemitsu J.*, Phase structure of discrete Abelian spin and gauge systems. Phys. Rev. D, 1979, *19*, № 12, 3698—3714
40. *Essam J. W.*, Potts models, percolation and duality. J. Math. Phys., 1979, *20*, № 8, 1769—1773
41. *Fradkin E., Shenker S. H.*, Phase diagrams of lattice gauge theories with Higgs fields. Phys. Rev. D, 1979, *D19*, № 12, 3682—3697 (РЖМат, 1980, 1В459)

42. —, *Susskind L.*, Order and disorder in gauge systems and magnets. Phys. Rev. D, 1978, *17*, № 10, 2637—2658 (РЖМат, 1979, 4В192)
43. *Fröhlich J.*, Classical and quantum statistical mechanics in one and two dimensions: two-component Yukawa- and Coulomb systems. Commun. Math. Phys., 1976, *47*, 233—268
44. —, Statistical mechanics of N-vector models and gauge theories. Acta Univ. wratisl., 1979, № 519, 83—113 (РЖМат, 1979, 11В239)
45. —, *Park Y. M.*, Correlation inequalities and the thermodynamic limit for classical and quantum continuous systems. Commun. Math. Phys., 1978, *59*, 235—266 (РЖМат, 1979, 1В260)
46. *Glimm J., Jaffe A.*, Charges, vortices and confinement. Harvard Univ. Preprint, 1979
47. —, —, Instantons in a $U(1)$ lattice gauge theory: a Coulomb dipole gas. Commun. Math. Phys., 1977, *56*, 195—212 (РЖМат, 1978, 10В130)
48. *Green M. B.*, Discrete and Abelian lattice gauge theories. Nucl. Phys., 1978, *B144*, 473—512
49. *Greenberg W.*, The interaction function and lattice duals. J. Math. Phys., 1977, *18*, № 10, 1985—1986 (РЖМат, 1978, 5В260)
50. *Gross D. J.*, A mechanism for quark confinement. «Deeper Pathways High-Energy Phys. Proc. Orbits Sci., Coral Gables, Fla, 1977». New York — London, 1977, 595—620 (РЖМат, 1978, 11В338)
51. —, *Witten E.*, Possible third-order phase transition in the large-N lattice gauge theory. Phys. Rev. D, 1980, *21*, № 2, 446—453
52. *Gruber Ch.*, General lattice systems: group structure, symmetry breakdown and phase transitions. Second International Colloquim on Group Theoretical Methods in Physics, Nijmegen (June 1973)
53. —, *Hintermann A.*, Implication of Poisson formula for classical lattice systems of arbitrary spin. Helvetiua Phys. Acta, 1974, *47*, 67—70
54. —, —, *Merlini D.*, Analyticity and uniqueness of the invariant equilibrium states for general spin 1/2 classical lattice systems. Commun. Math. Phys., 1975, *40*, 83—95
55. —, —, —, Group analysis of classical lattice systems. Lect. Notes Phys., 1977, *60*, IX (РЖМат, 1977, 10В150)
56. —, *Merlini D.*, Spin-1/2 lattice system. Partial-trace method and symmetry breakdown. Physica, 1973, *67*, 308—322
57. —, —, *Greenberg W.*, Spin 1/2 lattice system: duality transformation and correlation function. Preprint. Laboratoire de physique théorique Ecole Polytechnique Fédérale — Lausanne, 1973
58. *Hooft G.*, On the phase transition towards permanent quark confinement. Nucl. Phys., 1978, *B138*, 1—25 (РЖМат, 1979, 4В197)
59. *Israel R. B., Nappi C. R.*, Exponential clustering for long-range integer-spin systems. Commun. Math. Phys., 1979, *68*, 29—37 (РЖМат, 1979, 11В245)
60. —, —, Quark confinement in the two dimensional lattice Higgs-Villain model. Commun. Math. Phys., 1979, *64*, 177—189 (РЖМат, 1979, 8В163)
61. *Jones D. R. T., Kogut J., Sinclair D. K.*, Electrodynamics of the planar model: its phase diagram, continuum limit, and mass spectrum. Phys. Rev. D, 1979, *19*, № 6, 1882—1905 (РЖМат, 1979, 10В200)
62. *José J. V.*, Spin-spin correlation functions in the frustrated two-dimensional planar model. Phys. Rev. B, 1979, *20*, № 5, 2167—2182 (РЖМат, 1980, 3В283)
63. —, *Kadanoff L. P., Kirkpatrick S., Nelson D. R.*, Renormalisation, vortices, and symmetry-breaking perturbations in the two-dimensional planar model. Phys. Rev. B, 1977, *16*, № 3, 1217—1241 (РЖМат, 1978, 6В324)
64. *Kadanoff L. P.*, A model for interacting quarks and strings. Ann. Isr. Phys. Soc., 1978, *2*, № 1, 129—140 (РЖМат, 1979, 8В216)
65. —, Lattice Coulomb-gas representation of two-dimensional problems. Ann. Isr. Phys. Soc., 1978, *2*, № 1, 326—359 (РЖМат, 1979, 9В213)

66. —, *Brown A. C.*, Correlation functions on the critical lines of the Baxter and Ashkin-Teller models. Ann. Phys., 1979, *121*, 318—342
67. —, *Ceva H.*, Determination of operator aglebra for the two-dimensional Ising model. Phys. Rev., 1971, *B3*, 3918—3939 (РЖФиз, 1972, 2E416)
68. *Kogut J. B.*, An introduction to lattice gauge theory and spin systems. Rev. Mod. Phys., 1979, *51*, № 4, 659—713
69. *Korthals Altes C. P.*, Duality for $Z(N)$ gauge theories. Nucl. Phys., 1978, *B142*, 315—326
70. *Kramers H. A.*, *Wannier G. H.*, Statistics of the two-dimensional ferromagnet. Part 1. Phys. Rev., 1941, *60*, 252—276
71. *Kupiainen A. J.*, On the 1/N expansion. Preprint, Harvard University, 1979
72. —, $1/N$ expansion for a quantum field model. Preprint, Harvard University, 1979
73. *Luther A.*, Tomonaga fermions and the Dirac equation in three dimensions. Phys. Rev. B, 1979, *19*, № 1, 320—330 (РЖМат, 1979, 9B215)
74. *Mack G.*, Confinement of static quarks in two dimensional lattice gauge theories. Commun. Math. Phys., 1979, *65*, 91—96 (РЖМат, 1979, 8B161)
75. —, *Petkova V. B.*, Comparison of lattice theories with gauge groups L_2 and $SU(2)$. Ann. Phys. (USA), 1979, *123*, № 2, 442—467
76. —, —, Sufficient condition for confinement of static quarks by a vortex condensation mechanism. Ann. Phys. (USA), 1980, *125*, № 1, 117—134
77. *Malyshev V. A.*, *Minlos R. A.*, Some results and problems in the study of infinite particle hamiltonians. Proc. of Int. Symp. in Statist. Mech. and Quant. Field Theory, Hungary, 1979
78. *Mandelstam S.*, Charge-monopole duality and the phases of non-Abelian gauge theories. Phys. Rev. D, 1979, *19*, № 8, 2391—2408
79. *Marra R.*, *Miracle-Sole S.*, On the statistical mechanics of the gauge invariant Ising model. Commun. Math. Phys., 1979, *67*, 233—240
80. *Merlini D.*, *Gruber C.*, Spin-1/2 lattice system: group structure and duality relation. J. Math. Phys., 1972, *13*, № 11, 1814—1823
81. —, *Hintermann A.*, *Gruber Ch.*, Phase transition for an Ising model with 3-body interactions. Lett. Nuovo Cimento, 1973, *7*, № 16, 815—818
82. *Mermin N. D.*, The homotopy groups of condensed matter physics. J. Math. Phys., 1978, *19*, № 6, 1457—1462 (РЖМат, 1979, 1B281)
83. *Monastyrsky M. I.*, *Zamolodchikov A. B.*, Kramers—Wanier transform for lattice spin systems. Preprint. Inst. of Theor. Exp. Physics, 1979
84. *Park Y. M.*, Massless quantum sine-Gordon equation in two space-time dimensions: correlation inequalities and infinite volume limit. J. Math. Phys., 1977, *18*, № 12, 2423—2426 (РЖМат, 1978, 5B259)
85. —, Lack of screening in the continuous dipole systems. Commun. Math. Phys., 1979, *70*, 161—167 (РЖМат, 1980, 5B219)
86. *Peskin M. E.*, Mandelstam-t'Hooft duality in Abelian lattice models. Ann. Phys., 1978, *113*, 122—152 (РЖМат, 1979, 4B193)
87. *Polyakov A. M.*, Qark confinement and topology of gauge theories. Nucl. Phys., 1977, *B120*, 429—458
88. —, String representations and hidden symmetries for gauge fields. Phys. Lett., 1979, *B82*, № 2, 247—250
89. —, Gauge filds as rngs of glue. Nucl. Phys., 1979, *B164*, 171—188
90. *Quinn H. R.*, *Weistein M.*, Multiple vacuums in a lattice formulation of the two-dimensional Abelian Higgs model. Phys. Rev. D, 1978, *17*, № 4, 1063—1072
91. *Schroer B.*, *Truong T. T.*, Z_2 duality algebra in $d=2$ quantum field theory. Nucl. Phys., 1979, *B154*, 125—139
92. *Schwartz M.*, Dual relations for quenched random systems. Phys. Lett., 1979, *A75*, № 1—2, 102—104
93. *Seo K.*, *Okawa M.*, *Sugamoto A.*, Dual transformation in non-Abelian gauge theories. Phys. Rev. D, 1979, *19*, № 12, 3744—3753 (РЖМат, 1980, 3B298)

94. *Siegert A. J. F.*, Partition functions as averages of functionals of Gaussian random functions. Physica, 1960, *26*, 30—35, Suppl. (РЖМат, 1962, 1B89)
95. *Stillinger F. H.*, Duality relations for the Gaussian core model. Phys. Rev. B, 1979, *20*, № 1, 299—302 (РЖМат, 1980, 2B274)
96. *Stone M.*, Lattice formulation of the CP^{n-1} non-linear models. Nucl. Phys., 1979, *B152*, 97—108
97. *Stump D. R.*, Analogs of merons and meron pairs in the XY model. Phys. Rev. D, 1979, *20*, № 10, 2592—2605 (РЖМат, 1980, 6B212)
98. *Sugamoto A.*, Dual transformation in Abelian gauge theories. Phys. Rev. D, 1979, *19*, № 6, 1820—1825 (РЖМат, 1979, 10B203)
99. *Susskind L.*, Lattice models of quark confinement at high temperature. Phys. Rev. D, 1979, *20*, № 10, 2610—2618 (РЖМат, 1980, 6B213)
100. *Thomas P. R.*, *Stone M.*, Nature of the phase transition in a non-linear $O(2)_3$ model. Nucl. Phys., 1978, *B144*, 513—524
101. *Ukawa A.*, *Windey P.*, *Guth A.*, Dual variables for lattice gauge theories and phase structure of $Z(N)$ systems. Phys. Rev. D, 1980, *21*, № 4, 1013—1036
102. *Wegner F. J.*, Duality in generalized Ising models and phase transitions without local order parameters. J. Math. Phys., 1971, *12*, № 10, 2259—2272
103. *Yaffe L.*, Confinement in $SU(N)$ lattice gauge theories. Phys. Rev. D, 1980, *21*, № 6, 1574—1590
104. *Yoneya T.*, $Z(N)$ topological excitations in Yang-Mills theories: duality and confinement. Nucl. Phys., 1978, *B144*, 195—218
105. —, Monopole condensation and quark confinement in a weak coupling $SU(N)$ lattice gauge model. Nucl. Phys., 1979, *B153*, 431—444
106. *Zittartz J.*, Harmonic rotator, Coulomb plasma, and related models. I. General results and renormalization group treatment. Z. Phys., 1978, *B31*, 63—77 (РЖМат, 1979, 4B218)
107. —, Harmonic rotator, Coulomb plasma, and related models. II. The case of dimensions $D>2$ and $D<2$. Z. Phys., 1978, *B31*, 79—88 (РЖМат, 1979, 4B219)
108. —, Harmonic rotator, Coulomb plasma, and related models. III. The two-dimensional case $D=2$. Z. Phys., 1978, *B31*, 89—97 (РЖМат, 1979, 4B220)