*1994 г. март — апрель* *т. 49, вып. 2(296)*

*УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК*

УДК 519.2

# ВЛИЯНИЕ ГРАНИЦ В ЗАДАЧАХ О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ

И. А. Игнатюк, В. А. Малышев, В. В. Щербаков

## СОДЕРЖАНИЕ



## 1. Введение

Теория больших уклонений для марковских процессов в настоящее время является достаточно развитой областью с интересными примерами (см. [7], [8] и др.). Тем не менее, это главным образом касается случаев, где параметры переходных вероятностей (например, коэффициенты для диффузионных процессов) непрерывны по пространственным переменным или даже гладки при подходящем скейлинге. Здесь рассматриваются некоторые типичные примеры, когда имеются разрывы. Мы приводим определение (введенное в [1]) случайного блуждания с отражением $S(t), t = 0, 1, \dots$, в $Z_+^\nu$, или более общо в $Z_+^\nu \times Z^\mu$. В следующих разделах мы даем отдельные определения для рассматриваемых примеров, так что во введении это можно пропустить без ущерба для понимания. Обозначим точки $\dot{Z}_+^\nu$ через $x = (n_1, \dots, n_\nu)$. Пусть $\Lambda \subset \{1, \dots, \nu\}$. Обозначим через $\Lambda$ также грань $\{(n_1, \dots, n_\nu) : n_i > 0, i \in \Lambda; n_i = 0, i \notin \Lambda\}$. Определим однородную цепь Маркова с дискретным временем и пространством состояний $Z_+^\nu$, с переходными вероятностями $p_{x,y}$, удовлетворяющими следующему свойству максимальной однородности:

$$p_{x,y} = p(\Lambda; y - x), \qquad x \in \Lambda. \tag{1}$$

Таким образом, переходные вероятности зависят только от грани, которой принадлежит точка $x$ и от расстояния между точками.

Предположим также ограниченность скачков: $p_{x,y} \neq 0$ может быть только если для всех $i$ выполнено $-1 \leq y_i - x_i \leq d$ для некоторого $d \geq 1$. Заметим, что нетрудно обобщить полученные в статье результаты на случай, когда $d = \infty$, но существуют все экспоненциальные моменты.

Пространство параметров для введенных случайных блужданий есть прямое произведение:

$$\mathcal{P} = \times \mathcal{P}_\Lambda \tag{2}$$

(произведение по всем граням $\Lambda$) $P_\Lambda$, где $\mathcal{P}_\Lambda = \{p(\Lambda, \cdot)\}$ пространство параметров для грани $\Lambda$.

Мы рассматриваем проблему больших уклонений для определенных случайных блужданий. Приведем примеры задач, типичных для этой области.

(i) Выяснить асимптотику $\log P(S(N) = [xN])$, $N \to \infty$ для некоторого $x \in R_+^\nu$;

(ii) логарифмическая асимптотика стационарных вероятностей $\pi([xN])$ для эргодических случайных блужданий с отражением;

(iii) асимптотика вероятности $\log P\Big(\sup\limits_{i \leq N\tau} \big|S(i) - N\varphi\left(\frac{i}{N}\right)\big| < \delta N\Big)$ для некоторой функции $\varphi(t)\colon [0,\tau] \to R_+^\nu$.

Мы покажем, что задача (iii) наиболее общая и решения (i) и (ii) следуют из ответов задачи (iii). Более того, будет показано, что достаточно рассмотреть кусочно-линейные пути $\varphi(t)\colon [0,\tau] \to R_+^\nu$.

Имеются существенные результаты, касающиеся описанных проблем (см., например, [2], [3], [12], [14]). Однако, мы приводим здесь новый взгляд на эти вещи. Прежде всего, мы пытаемся (с помощью вероятностного подхода и новых приемов) получить результаты по возможности более явными, используя опыт, полученный при изучении случайных блужданий с отражением в $Z_+^\nu$ (см. [1], [4], [5])

Во-вторых, мы изучаем влияние границ на асимптотики. В качестве примера рассмотрим следующие проблемы:

A. Для каких $x$ предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \pi([Nx]) = l = l(x) \tag{3}$$

не зависит от скачков на границе? Более точно, когда $l(x)$ не зависит от параметров $\mathcal{P}_\Lambda$, $\Lambda \neq \{1, \dots, \nu\}$ ?

B. Мы рассматриваем "критические поверхности" $\mathcal{P} \times \{x\}$, где $l$ не дифференцируемо уже по параметрам, и $l$ гладкая вне этих поверхностей.

В работе проведено сравнение ранних аналитических результатов для четверти плоскости (см. [6]) с полученными здесь.

Аналогично проблемам устойчивости (см. [1]) сложность задачи о больших уклонениях существенно зависит от коразмерности границ, т.е. от $\nu$. Здесь рассмотрены коразмерности 1 и 2. Для больших коразмерностей наши методы также работают во многих ситуациях, однако полной картины у нас в настоящий момент нет. Для того, чтобы статья была удобна для чтения начинающим, в нее включен вводный раздел 2.1.

## 2. Аналитические методы

### 2.1. Метод перевала и преобразование Лежандра для сумм независимых случайных величин.

В этом параграфе приведено краткое введение в аналитические методы в теории больших уклонений.

Пусть $S(t)$, $t = 0, 1, \dots$, однородное случайное блуждание в $Z^\nu$ с ограниченными скачками, начинающееся в нуле 0.

Рассмотрим $S(N)$ как сумму независимых, одинаково распределенных случайных величин: $S(N) = \xi_1 + \dots + \xi_N$.

Тогда получим:

$$P(S(N) = [xN]) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^{[xN]+1}} E z^{S(N)}\, dz \tag{4}$$

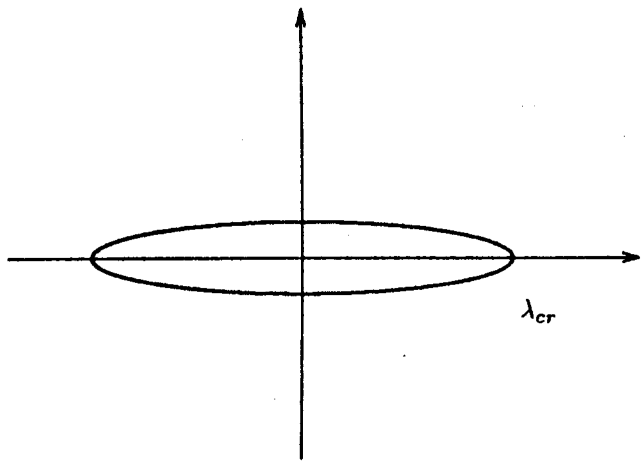
Положим $z = \exp \lambda$ и заметим, что $E^{S(N)} = (E \exp(\lambda\xi))^N = \exp(NH(\lambda))$, где

$$H(\lambda) = \log E \exp(\lambda\xi) \tag{5}$$

есть производящая функция семи инвариантов. Переписывая интеграл в (3) как

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \exp(N(H(\lambda) - x\lambda)) \exp(-\lambda + \varepsilon_N)\, dz, \tag{6}$$

где $\varepsilon_N = -[xN] + xN$, мы хотим использовать метод перевала для этого интеграла (5) и поэтому нам нужно знать критические точки функции $H(\lambda) - x\lambda$. Функция $H(\lambda)$ является выпуклой и аналитической в комплексной плоскости, поэтому для $x > 0$ критическая точка $\lambda_{cr} = \lambda(x)$ единственна или не существует и можно использовать контур (когда $\lambda_{cr}$ существует):



Нас интересует только экспонента в подинтегральном выражении в (5):

$$L(x) = -H(\lambda(x)) + x\lambda(x) = \sup(-H(\lambda) + x\lambda),$$

которое называется преобразованием Лежандра от $H(x)$. Поэтому метод перевала дает нам следующий результат.

Теорема 2.1.1.

$$\log P\big(S(N) = [xN]\big) \sim -L(x)N, \tag{7}$$

*когда* $N \to \infty$

Пусть теперь равномерно ограниченные $\xi_t$ зависимы, но удовлетворяют условию сильного перемешивания, например пусть они имеют совместное гиббсовское распределение с трансляционно-инвариантным двух- точечным взаимодействием:

$$U = \sum_{t,s} V(t-s)\xi_t\xi_s$$

с экспоненциальным убыванием. Тогда, как хорошо известно, "статсумма" $E\exp(\lambda S(N))$, которая есть отношение двух "статсумм"

$$E\exp(\lambda S(N)) = \frac{\sum_{\{\xi\}} \exp\Big(-U + \lambda \sum_{t=1}^{N} \xi_t\Big)}{\sum_{\{\xi\}} \exp(-U)}$$

имеет асимптотику:

$$\log E\exp(\lambda S(N)) \sim N(H(U,\lambda) - H(U,0)) + \text{const} + o(1),$$

где $H(U,\lambda)$ называется "свободной энергией" "статсуммы" в числителе, и которая является аналитической и выпуклой при вещественных $\lambda$. Существует несколько методов (см. [10], [11]) доказать эти утверждения и вычислить "свободную энергию" в одномерном случае: метод ренормгруппы и кластерные разложения, метод трансфер-матрицы и т. д. Они применимы при любых $\lambda$. Поэтому теорема 2.1.1 выполняется также и в этом случае. Для марковских цепей (или когда взаимодействие имеет конечный радиус, чтобы получить цепь Маркова, нужно взять радиус равным 1)

$$H(U,\lambda) = \rho_1(U,\lambda), \tag{8}$$

где $\rho_1(U,\lambda)$ максимальное собственное значение (положительной) трансферматрицы $(p_{ij}\exp(\lambda(j-i)))$, где $p_{ij}$ есть переходные вероятности для марковской цепи $\xi_t$. Заметим, что $\rho_1(U,0) = 1$.

**2.2. Аналитические методы в четверти плоскости.**

В этом параграфе мы формулируем основные результаты работы [6] об асимптотическом поведении стационарных вероятностей случайных блужданий в четверти плоскости в терминах некоторых полиномиальных уравнений в комплексной области.

Обозначим точки $Z_+^2$ через $(k, l)$ и рассмотрим однородную цепь Маркова с дискретным временем и этим пространством состояний. Пусть $P((k,l) \to (k',l'))$ есть ее переходные вероятности за один шаг. Предположим, что они отличны от нуля если только $-1 \le k' - k \le d$ и $-1 \le l' - l \le d$ для некоторого $d > 0$. Предположим также следующие условия однородности (полагая $i = k' - k, j = l' - l$)

$$P((k,l) \to (k',l')) = \begin{cases} p_{i,j}, & \text{если } k,l > 0, \\ p'_{i,j}, & \text{если } l = 0, k > 0, \\ p''_{i,j}, & \text{если } l > 0, k = 0, \\ p^0_{i,j}, & \text{если } l = 0, k = 0. \end{cases}$$

Мы напомним здесь результаты [6], где предполагалось также, что

(i) $d = 1$,

(ii) внутри четверти плоскости только вероятности $p_{0,1}, p_{1,0}, p_{-1,0}, p_{0,-1}$ отличны от нуля.

(iii) компоненты вектора сноса внутри четверти плоскости

$$M = (M_1, M_2) = \left(\sum_{i,j} ip_{ij}, \sum_{i,j} jp_{ij}\right)$$

отрицательны и

$$\sum_i p'_{i1} \neq 0, \qquad \sum_j p''_{1j} \neq 0.$$

Предположение (ii) не существенно для приложения аналитических методов, но значительно упрощает вычисления. Кроме случая (iii) есть также случай когда только одна компонента $M_1, M_2$ отрицательна. Этот случай может быть рассмотрен аналогично.

Введем полиномиальные производящие функции:

$$Q(x,y) = xy\left(1 - \sum_{i,j} p_{i,j} x^i y^j\right),$$

$$q(x,y) = x\left(\sum_{i,j} p'_{i,j} x^i y^j - 1\right),$$

$$q'(x,y) = y\left(\sum_{i,j} p''_{i,j} x^i y^j - 1\right).$$

Рассмотрим Риманову поверхность $S$ алгебраической функции $y(x)$ (или $x(y)$) определяемой уравнением

$$Q(x,y) = 0.$$

Пусть $x(s), y(s)$ мероморфные функции на $S$ определяющие накрывающие $x$-плоскости и $y$-плоскости соответственно. Мы формулируем здесь некоторые результаты из [6].

1. Существует в точности четыре точки ветвления $x_i$ алгебраической функции $y(x)$ (или $x^{-1}$ : $0 < x_1 < x_2 < 1 < x_3 < x_4$). Аналогично для $x(y)$.

2. Обозначим $S_r = \{s : x(s)$ и $y(s)$ вещественны$\}$ множество вещественных точек $S$. $S_r$ состоит из двух несвязных замкнутых аналитических кривых, гомологичных одному из элементов базиса нормальной гомологии на $S$ (более точно, одному из отличных от $x^{-1}(\{x : |x| = 1\})$. Одна из них, обозначим ее $F_0$, имеет следующее свойство, на ней: $x_2 \le x(s) \le x_3$, $y_2 \le y(s) \le y_3$. Обозначим другую через $F_1$. $F_0$ имеет упорядоченное множество из восьми характеристических точек $s_0, \ldots, s_7$.

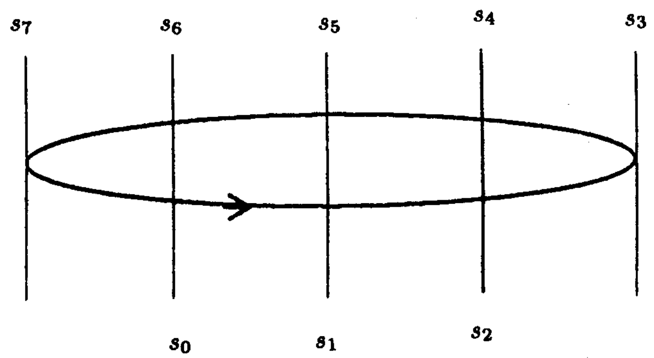
Мы видим окружности на $x$-плоскости и на $y$-плоскости : точка $s_0 = (1,1)$ выделена и стрелки показывают соотi етствие между значениями $x(s_i)$ $y(s_i)$.

$$x(s_7) = x_2, \qquad x(s_6) = x(s_0) = 1, \qquad x(s_5) = x(s_1) = \sqrt{\frac{p_{0,-1}}{p_{0,1}}},$$

$$x(s_4) = x(s_2) = \frac{p_{0,-1}}{p_{0,1}}, \qquad x(s_3) = x_3$$

$$y(s_7) = y_2, \qquad y(s_6) = y(s_0) = 1, \qquad y(s_5) = y(s_1) = \sqrt{\frac{p_{-1,0}}{p_{1,0}}},$$

$$y(s_4) = y(s_2) = \frac{p_{-1,0}}{p_{1,0}}, \qquad y(s_3) = y_3.$$




3. Функция $\phi_\gamma(s) = |xy^\gamma|$, $0 \le \gamma < 1$, имеет (в области $\phi_\gamma^{-1}((0,\infty))$) четыре невырожденных критических точки $s_i(\gamma)$, $i = 1, \ldots, 4$. Каждая $s_i(\gamma)$ непрерывно зависит от $\gamma$, что единственным образом определяет эти точки, если мы условимся, что $x(s_i(0)) = x_i$. Более того, $s_2(\gamma), s_3(\gamma) \in F_0$ и $x_i(\gamma) = x(s_i(\gamma))$, $y_i(\gamma) = y(s_i(\gamma))$ вещественны. Для $\gamma = 1$ можно положить $s_1(1) = 0$, $s_4(1) = \infty$, и для критических точек $s_2(1)$, $s_3(1)$ сделанные выше предположения выполнены. Уравнения, определяющие эти точки таковы:

$$Q(x,y) = 0, \tag{9}$$

и

(10)
$$\frac{y}{\gamma x} = \frac{\frac{d}{dx}Q(x,y)}{\frac{d}{dy}Q(x,y)}.$$

Имеем также:

$$1 < x_3(1) < x_3(\gamma) < x_3(0) = x_3,$$
$$y_3(0) = \sqrt{\frac{p_{0,-1}}{p_{0,1}}} < y_3(\gamma) < y_3(\gamma).$$

Это означает, что асимптотика стационарных вероятностей определяется или критическими точками $s_3(\gamma)$, или полюсами в точках $s_0(\gamma)$ и $s_0'(\gamma)$, где соответственно $q(\zeta s_0) = 0$ или $q'(\eta s_0') = 0$. Автоморфизмы Галуа $\zeta$ и $\eta$ на $S$ определяются следующим образом:

$$\zeta(x,y) = \left(x, \frac{p_{0,-1}}{p_{0,1}y}\right), \qquad \eta(x,y) = \left(\frac{p_{-1,0}}{p_{1,0}x}, y\right)$$

В пространстве параметров $\mathcal{P} \times \{\gamma : 0 < \gamma \le 1\}$ определим подмножества:

$$\mathcal{P}_{--} = \left\{(p,\gamma) : q\left(x_3(\gamma), \frac{p_{0,-1}}{p_{0,1}y_3(\gamma)}\right) \le 0,\ q'\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{1,0}x_3(\gamma)}, y_3(\gamma)\right) \le 0\right\},$$
$$\mathcal{P}_{+-} = \left\{(p,\gamma) : q\left(x_3(\gamma), \frac{p_{0,-1}}{p_{0,1}y_3(\gamma)}\right) > 0,\ q'\left(\frac{p_{-1,0}}{p_{1,0}x_3(\gamma)}, y_3(\gamma)\right) \le 0\right\}$$

и $\mathcal{P}_{-+}, \mathcal{P}_{++}$ соответственно.

Теорема 2.2.1 (см. [6]). *Пусть $m, n \to \infty$ так, что $n/m = \gamma$. Тогда для параметров из $\mathcal{P}_{--}$ имеем:*

$$\pi(m,n) \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{m}}(x_3(\gamma)y_3(\gamma))^{-m}.$$

*В противном случае*

$$\pi(m,n) \sim \begin{cases} \text{const}(x_0(\gamma)y_0^\gamma(\gamma))^{-m} & \text{в } \mathcal{P}_{-+}, \\ \text{const}(x_5(\gamma)y_5^\gamma(\gamma))^{-m} & \text{в } \mathcal{P}_{+-}, \\ \text{const}(x_0(\gamma)y_0^\gamma(\gamma))^{-m} + \text{const}(x_5(\gamma)y_5^\gamma(\gamma))^{-m} & \text{в } \mathcal{P}_{++}, \end{cases}$$

*где $1 < x_0(\gamma) < x_3(\gamma)$, $1 < y_0(\gamma) < \frac{p_{0,-1}}{p_{0,1}y_3(\gamma)}$ и $1 < x_5(\gamma) < \frac{p_{-1,0}}{p_{1,0}x_3(\gamma)}$, : $1 < y_5(\gamma) < y_3(\gamma)$ определяются из систем:*

(11) $$Q(x,y) = 0, \qquad q(x, \zeta y) = 0,$$
(12) $$Q(x,y) = 0, \qquad q'(\eta x, y) = 0,$$

*соответственно.*

## 3. Вероятностный метод

### 3.1. Общие определения.

Главной целью этой статьи является доказательство принципа больших уклонений и нахождение функционала действия для класса случайных блужданий, определенных ниже. Принцип больших уклонений будет использован для получения асимптотики стационарных вероятностей в четверти плоскости.

**Случайные блуждания.** Мы рассматриваем случайное блуждание $S_t(x)$ в $Z_+^\nu \times Z^\mu$ начинающееся в точке $x$. Пусть $\Lambda \subset \{1, \dots, \nu\}$. Мы обозначаем через $\Lambda$ также грань $\{(x_1, \dots, x_\nu) : x_i > 0, i \in \Lambda; x_i = 0, i \notin \Lambda\} \times R^\mu \subset R_+^\nu \times R^\mu$. Определим однородную цепь Маркова с дискретным временем и пространством состояний $Z_+^\nu \times Z^\mu$ и переходными вероятностями $p_{x,y}$, удовлетворяющими следующим условиям максимальной однородности:

$$p_{x,y} = p(\Lambda; y - x), x \in \Lambda \tag{13}$$

Таким образом, переходные вероятности зависят только от грани, которой принадлежит точка $x$ и от расстояния между точками.

Мы предполагаем также ограниченность скачков: $p_{x,y} \neq 0$ может быть, если только для всех $i = 1, \dots, \nu$ мы имеем для всех $R_+^\nu$-компонент: $-1 \leq y_i - x_i \leq d$ и для $R^\mu$-компонент $-d \leq y_i - x_i \leq d$ для некоторого $d \geq 1$.

**Принцип больших уклонений.** Для любого $\tau \in R_+$ рассмотрим множество $C([0,\tau], R_+^\nu \times R^\mu)$ всех непрерывных функций $\varphi\colon [0,\tau] \to R_+^\nu \times R^\mu$. Пусть заданы функционалы $\mathcal{L}_\tau$, отображающие пространство $C([0,\tau], R_+^\nu \times R^\mu)$ в $[0, +\infty]$. Рассмотрим для любого $s \geq 0$ и для любого $x \in R_+^\nu \times R^\mu$ множество

$$\Phi_{x,\tau}(s) = \left\{\varphi \in C([0,\tau], R_+^\nu \times R^\mu) : \varphi(0) = x \text{ и } \mathcal{L}_\tau(\varphi) \leq s\right\}.$$

Определение. Будем говорить что случайное блуждание $S_t$ удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $\mathcal{L}_\tau$, если для любого $\tau \geq 0$ и для любого $x \in R_+^\nu \times R^\mu$ следующие три условия выполнены.

(i) (компактность) Для любого $s \geq 0$ множество $\Phi_{x,\tau}(s)$ компактно.

(ii) (оценка снизу) Для любых $\delta > 0$, $s_0 > 0$, $\delta' > 0$ существует $N_0$ такое, что для любых $N > N_0$, $\varphi \in \Phi_{x,\tau}(s_0)$, выполняется следующая оценка:

$$P\left\{\sup_{t=0,\dots,[N\tau]} \left|\frac{1}{N} S_t([Nx]) - \varphi\left(\frac{t}{N}\right)\right| < \delta\right\} \geq \exp\{-\delta' N - N\mathcal{L}_\tau(\varphi)\}. \tag{14}$$

(iii) (оценка сверху) Для любых $\delta > 0, \delta' > 0, s_0 > 0$, существует $N_0$ такое, что для любых $N > N_0$, $0 < s < s_0$ выполняется следующая оценка:

$$P\left\{\sup_{t=0,\dots,[N\tau]} \left|\frac{1}{N} S_t([Nx]) - \varphi\left(\frac{t}{N}\right)\right| \geq \delta \text{ для любого } \varphi \in \Phi_{x,\tau}(s)\right\} \leq \exp\{\delta' N - Ns\} \tag{15}$$

Заметим, что благодаря ограниченности скачков случайного блуждания $S_t$, для любой функции $\varphi \in C([0,\tau], R_+^\nu \times R^\mu)$ (даже для разрывной $\varphi$), для которой существуют $0 < t < t' < \tau$ такие, что

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| > d(t' - t),$$

мы имеем:

$$P\left\{\sup_{t=0,\ldots,[N\tau]} \left|\frac{1}{N} S_t([Nx]) - \varphi\left(\frac{t}{N}\right)\right| < \delta\right\} = 0$$

для достаточно малых $\delta > 0$ и достаточно больших $N$, и, как следствие, если случайное блуждание удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $\mathcal{L}_\tau$, то для подобных $\varphi$

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = +\infty.$$

**Лагранжианы.** В следующих параграфах мы докажем принцип больших уклонений для линейных путей (в сильном варианте, см. условия (ii) и (iii) теоремы 3.1.1). Мы найдем также точное выражение для значений функционала действия на линейных траекториях. Мы увидим, что это будет иметь следующую форму.

Пусть для любой грани $\Lambda$ из $R^\nu$ определена функция

$$L(\Lambda; \cdot) \colon R^k \times R^\mu \to R_+ \cup \{+\infty\},$$

где $k$ есть размерность грани $\Lambda$. Определим лагранжиан, т.е. функцию $L\colon (R_+^\nu \times R^\mu) \times R^{\nu+\mu} \to R_+ \cup \{+\infty\}$, такую что для любой $\Lambda$ и для всех $x \in \Lambda$

$$L(x, v) = L(\Lambda; v_\Lambda),$$

где $v_\Lambda$ есть проекция $v$ на $\Lambda$.

Для линейного пути $\varphi\colon [0,\tau] \to R_+^\nu \times R^\mu$ определим его вектор скорости

$$v(\varphi) = \frac{\varphi(\tau) - \varphi(0)}{\tau}$$

и грань $\Lambda = \Lambda(\varphi)$, которой этот путь принадлежит. Затем мы докажем, что $\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \tau L(\Lambda(\varphi), v(\varphi))$. Другими словами, для нахождения значений функционала действия на линейных путях нужно найти константы $L(\Lambda, v)$.

Чтобы удовлетворить условиям (i) и (iv) теоремы 3.1.1, для любого $\tau > 0$ мы определим функционал

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \int_0^\tau L(\varphi(t), \dot\varphi(t))\, dt,$$

если $\varphi$ абсолютно непрерывна, и

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = +\infty$$

в противном случае. В каждом рассматриваемом ниже случае из свойств функций $L(\Lambda, v)$ нетрудно вывести условия (i) и (iv) теоремы 3.1.1 стандартным образом (см., например, [15]).

**От линейных к произвольным путям.** Обозначим через $\Phi_{x,\tau}$ множество всех непрерывных путей $\varphi\colon [0,\tau] \to R_+^\nu \times R^\mu$, $\varphi(0) = x$, для которых $\mathcal{L}_\tau(\varphi) < \infty$. Пути из $\Phi_{x,\tau}$ назовем допустимыми.

Теорема 3.1.1. *Пусть для случайных блужданий $S_t$ функционалы $\mathcal{L}_\tau$ заданы так, что для любого $\tau > 0$ следующие условия выполнены:*

(i) *функционал $\mathcal{L}_\tau$ полунепрерывны снизу,*

(ii) *для любых $\delta > 0$, $\delta' > 0$ можно найти $\sigma > 0$ такое, что для любых $x, y \in R_+^\nu \times R^\mu$ таких, что $|x - y| < \sigma$ и для любого линейного пути $\varphi \in \Phi_{x,\tau}$ следующая оценка выполнена для достаточно больших $N$:*

$$(16) \qquad P\left\{\sup_{t=0,\dots,[N\tau]}\left|\frac{1}{N}S_t([Ny]) - \varphi\left(\frac{t}{N}\right)\right| < \delta\right\} \geq \exp\{-\delta' N - N\mathcal{L}_\tau(\varphi)\}.$$

(iii) *для любого $\delta' > 0$ можно найти $\delta > 0$, $\sigma > 0$ такие, что для любых $x, y \in R_+^\nu \times R^\mu$ таких, что $|x - y| < \sigma$ и для любого линейного пути $\varphi \in \Phi_{x,\tau}$ следующая оценка выполнена для достаточно больших $N$:*

$$(17) \qquad P\left\{\sup_{t=0,\dots,[N\tau]}\left|\frac{1}{N}S_t([Ny]) - \varphi\left(\frac{t}{N}\right)\right| < \delta\right\} \leq \exp\{+\delta' N - N\mathcal{L}_\tau(\varphi)\}.$$

(iv) *для любого $x \in R_+^\nu \times R^\mu$, $\varphi \in \Phi_{x,\tau}$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует кусочно-линейный путь $\tilde{\varphi} \in \Phi_{x,\tau}$ такой, что*

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| < \varepsilon \qquad и \qquad |\mathcal{L}_\tau(\varphi) - \mathcal{L}_\tau(\tilde{\varphi})| < \varepsilon.$$

*Тогда случайное блуждание удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $\mathcal{L}_\tau$.*

Доказательство. Так как для любого $\varphi \in \Phi_{x,\tau}$

$$\sup_{0 \leq t < t' \leq \tau} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t')|}{t' - t} \leq d,$$

то множество $\Phi_{x,\tau}$ компактно. Поэтому, если для любого $\tau > 0$ функционал $\mathcal{L}_\tau$ полунепрерывен снизу тогда множества $\Phi_{x,\tau}(s)$ компактны.

Для любого кусочно-линейного пути $\varphi\colon [0, \tau] \to R_+^\nu \times R^\mu$ рассмотрим его линейные куски $\varphi_1, \dots, \varphi_k$:

пусть $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{k-1} < \tau_k = \tau$, и пусть $\varphi$ линеен на каждом интервале $(\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = 0, \dots, k-1$, тогда

$$\varphi_j(t) = \varphi(t + \tau_j), \qquad 0 \leq t \leq \tau_{j+1} - \tau_j.$$

Лемма 3.1.1. *Пусть для любых $\tau \geq 0$, $x \in R_+^\nu \times R^\mu$, и для любого линейного пути $\varphi \in \Phi_{x,\tau}$ следующие два условия выполняются:*

(i) *для любых $\delta > 0$, $\delta' > 0$ можно найти $\sigma > 0$ такое, что для любого $y \in R_+^\nu \times R^\mu$ такого, что $|x - y| < \sigma$ следующая оценка выполнена для достаточно больших $N$:*

$$P\left\{\sup_{t=0,\dots,[N\tau]}\left|\frac{1}{N}S_t([Ny]) - \varphi\left(\frac{t}{N}\right)\right| < \delta\right\} \geq \exp\{-\delta' N - N\mathcal{L}_\tau(\varphi)\}.$$

(ii) *для любого* $\delta' > 0$ *можно найти* $\delta > 0$, $\sigma > 0$ *такие, что любого* $y \in R^{\nu}_{+} \times R^{\mu}$ *такого, что* $|x - y| < \sigma$ *следующая оценка выполнена для достаточно больших* $N$:

$$P\left\{\sup_{t=0,\dots,[N\tau]}\left|\frac{1}{N}S_t([Ny]) - \varphi\left(\frac{t}{N}\right)\right| < \delta\right\} \le \exp\{+\delta' N - N\mathcal{L}_\tau(\varphi)\}.$$

*Тогда для любого* $\tau > 0$ *и для любого кусочно-линейного пути* $\varphi \in \Phi_{x,\tau}$ *следующие верхняя и нижняя оценки больших уклонений имеют место:*

(iii) *для любых* $\delta > 0$, $\delta' > 0$ *можно найти* $\sigma > 0$ *такое, что для любого* $y \in R^{\nu}_{+} \times R^{\mu}$ *такого, что* $|x - y| < \sigma$ *при достаточно больших* $N$ *выполнено неравенство:*

$$P\left\{\sup_{t=0,\dots,[N\tau]}\left|\frac{1}{N}S_t([Ny]) - \varphi\left(\frac{t}{N}\right)\right| < \delta\right\} \ge \exp\{-\delta' N - N\mathcal{L}_\tau(\varphi)\} \tag{18}$$

*и*

(iv) *для любого* $\delta' > 0$ *можно найти* $\delta > 0$, $\sigma > 0$ *такие, что для любого* $y \in R^{\nu}_{+} \times R^{\mu}$ *такого, что* $|x - y| < \sigma$ *при достаточно больших* $N$ *выполнено неравенство:*

$$P\left\{\sup_{t=0,\dots,[N\tau]}\left|\frac{1}{N}S_t([Ny]) - \varphi\left(\frac{t}{N}\right)\right| < \delta\right\} \le \exp\{+\delta' N - N\mathcal{L}_\tau(\varphi)\} \tag{19}$$

*с функционалом действия:*

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \sum_{j=1}^{k}\mathcal{L}_{\tau_{j+1}-\tau_j}(\varphi_j),$$

*где* $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ *линейные куски пути* $\varphi$.

Эту лемму нетрудно доказать индукцией по числу линейных кусков.

Лемма 3.1.2. *Пусть для любых* $\tau \ge 0$, $x \in R^{\nu}_{+} \times R^{\mu}$, *для любого* $\varphi \in \Phi_{x,\tau}$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует кусочно-линейный путь* $\tilde{\varphi} \in \Phi_{x,\tau}$ *такой, что*

$$\sup_{0 \le t \le \tau}|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\mathcal{L}_\tau(\varphi) - \mathcal{L}_\tau(\tilde{\varphi})| < \varepsilon,$$

*и пусть для любого* $\tau > 0$ *и для любого кусочно-линейного пути* $\varphi \in \Phi_{x,\tau}$ *выполнены нижняя* (18) *и верхняя* (19) *оценки больших уклонений.*

*Тогда имеют место оценки* (14) *и* (15) *принципа больших уклонений.*

Доказательство. Пусть $x \in R_+^\nu \times R^\mu$, $\varphi \in \Phi_{x,T}$, $\delta > 0$, $\delta' > 0$ фиксированы. Выберем кусочно-линейный путь $\tilde{\varphi} \in \Phi_{x,T}$ такой, что

$$\sup_{0 \le t \le T} |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad |\mathcal{L}_T(\varphi) - \mathcal{L}_T(\tilde{\varphi})| < \frac{\delta'}{2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{N} \log P \left\{ \sup_{t=0,\dots,[NT]} \left| \frac{S_t([xN])}{N} - \varphi\left(\frac{t}{N}\right) \right| < \delta \right\} \\ \ge \frac{1}{N} \log P \left\{ \sup_{t=0,\dots,[NT]} \left| \frac{S_t([xN])}{N} - \tilde{\varphi}\left(\frac{t}{N}\right) \right| < \frac{\delta}{2} \right\}.$$

и чтобы доказать (ii), требуется доказать (ii)$'$.

Рассмотрим верхнюю оценку. Из компактности множества $\Phi_{x,T}$ следует, что для любых $s > 0$, $\delta > 0$, $\delta > \sigma > 0$ можно найти конечное число путей

$$\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Phi_{x,T} \setminus \Phi_{x,T}(s)$$

таких, что

$$\left\{ \sup_{t=0,\dots,[NT]} \left| \frac{S_t([xN])}{N} - \varphi\left(\frac{t}{N}\right) \right| > \delta \text{ для любого } \varphi \in \Phi_T(s) \right\} \\ \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \left\{ \sup_{t=0,\dots,[NT]} \left| \frac{S_t([xN])}{N} - \varphi_j\left(\frac{t}{N}\right) \right| < \sigma \right\}.$$

Более того, так как для любого пути $\varphi \in \Phi_{x,T}$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти кусочно-линейный путь $\tilde{\varphi} \in \Phi_{x,T}$ такой, что

$$\sup_{0 \le t \le T} |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad |\mathcal{L}_T(\varphi) - \mathcal{L}_T(\tilde{\varphi})| < \frac{\delta'}{2},$$

то пути $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Phi_{x,T} \setminus \Phi_{x,T}(s)$ могут быть выбраны кусочно-линейными.

Другими словами, для любых $s > 0$, $\delta > 0$, $\delta' > 0$ можно найти кусочно-линейные пути $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Phi_{x,T} \setminus \Phi_{x,T}(s)$ такие, что

$$P \left\{ \sup_{t=0,\dots,[NT]} \left| \frac{S_t([\varphi(0)N])}{N} - \varphi\left(\frac{t}{N}\right) \right| > \delta \text{ для любого } \varphi \in \Phi_T(s) \right\} \\ \le \sum_{j=1}^{k} P \left\{ \sup_{t=0,\dots,[NT]} \left| \frac{S_t([xN])}{N} - \varphi_j\left(\frac{t}{N}\right) \right| < \sigma \right\}.$$

Поэтому (iii) следует из (iii)$'$. Лемма 3.1.2 таким образом доказана.

Теорема 3.1.1 доказана.

### 3.2. Одномерное случайное блуждание.

Рассмотрим случайное блуждание в $Z^1_+$ с переходными вероятностями $p_{ij}$, $i, j \in Z^1_+$, такими что

(20) $$p_{ij} = p_{j-i}: \text{ для любых } : i > 0, j \in Z^1_+,$$

(21) $p_{ij} = 0$ если или $-1 > j - i$, или $j - i > d$ для некоторого конечного $d \geq 1$

Заметим, что в этом случае существует только две константы $L_\emptyset = L(v, \emptyset)$ и $L(v) = L(v; \{1\})$, которые должны быть определены. Вторая константа $L(v)$ совпадает с соответствующей константой для однородного случайного блуждания в $Z$ с переходными вероятностями $p_{j-i}$ и определена ниже. Первая, $L_\emptyset$, равна нулю для возвратного случайного блуждания т.е. когда средний снос внутри неположителен: $M = \sum_i ip_i \leq 0$.

Гораздо более интересен случай, когда рассматриваемое случайное блуждание транзиентно, т.е. когда средний снос внутри положителен: $M = \sum_i ip_i > 0$.В этом случае $L_\emptyset$ претерпевает фазовый переход при изменении параметров. Этот случай будет разобран в этом параграфе.

Предположим, что определенное выше случайное блуждание задано на вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, P)$. В дальнейшем мы будем использовать семейство случайных блужданий $S^\alpha_t$, $t \in Z_+$, $\alpha \in R$, со следующими переходными вероятностями:

$$p^\alpha_{ij} = \frac{p_{ij} e^{\alpha(j-i)}}{\sum_j p_{ij} e^{\alpha(j-i)}}, \qquad p^0_{ij} = p_{ij}$$

Мы можем определить эти случайные блуждания на пространстве $(\Omega, \Sigma)$ и будем обозначать соответствующую меру и математическое ожидание так: $P_\alpha, E_\alpha$, само случайное блуждание обозначим $S^\alpha_t$. Пусть

$$H_i(\alpha) = \log \sum_j p_{ij} e^{\alpha(j-i)}.$$

Тогда $H_i(\alpha) = H_1(\alpha)$ для всех $i > 0$. Заметим, что

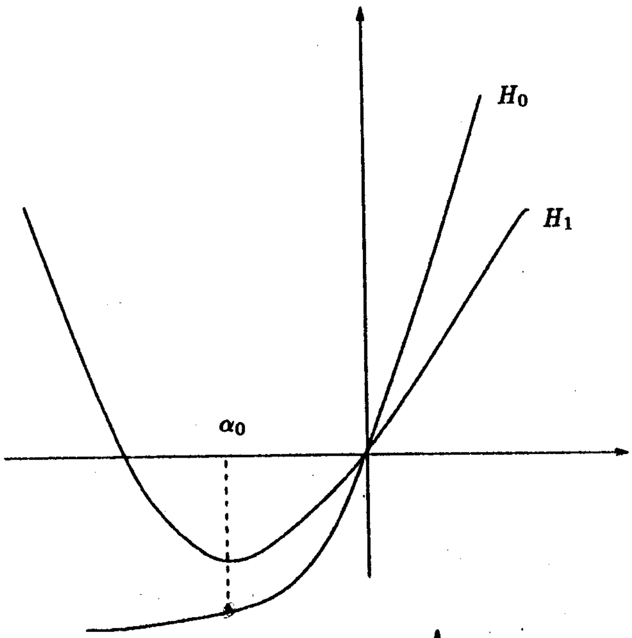
$$M_i(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} H_i(\alpha)$$

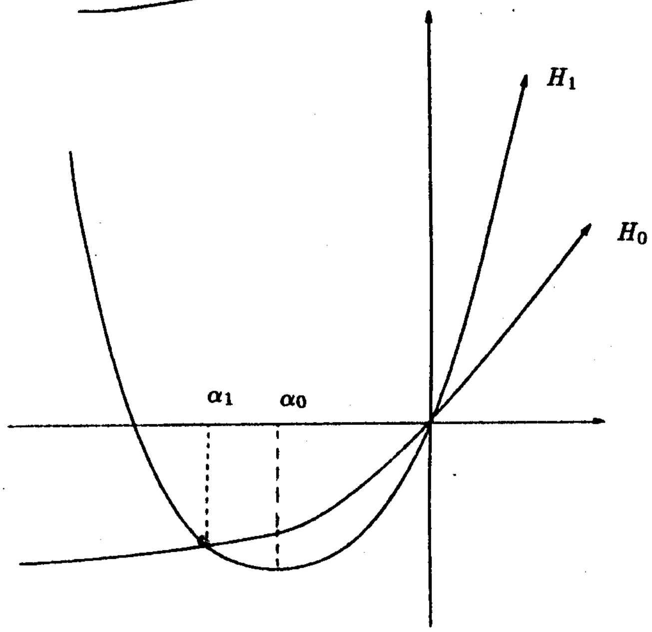
есть средний снос для $S^\alpha_t$ из точки $i$, и

$$D_i(\alpha) = \frac{d^2}{d\alpha^2} H_i(\alpha)$$

есть дисперсия.

Теперь можно определить функцию $L(\cdot)$. Эта функция есть преобразование Лежандра от функции $H_1$.




Графики функций $H_1(\alpha)$ и $H_0(\alpha)$ могут или пересекаться на отрицательной полуоси $\alpha$ (случай 2), или нет (случай 1).

Пусть $\alpha_0$ таково, что $H_1(\alpha_0) = \min_\alpha H_1(\alpha)$. В случае 2, т.е. когда

$$H_0(\alpha_0) > H_1(\alpha_0),$$

существует $\alpha_1 \in R$ такое, что

$$H_0(\alpha_1) = H_1(\alpha_1) \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\alpha} H_1(\alpha_1) < 0.$$

ТЕОРЕМА 3.2.1. *Для введенного случайного блуждания принцип больших уклонений выполняется с функционалом действия, определяемым константами*

$$L_\emptyset = \begin{cases} H_1(\alpha_0), & \textit{если } H_0(\alpha_0) \le H_1(\alpha_0), \\ H_1(\alpha_1), & \textit{если } H_0(\alpha_0) > H_1(\alpha_0). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\delta > 0$ достаточно малым и пусть $|x| < \frac{\delta}{2}$. Рассмотрим случайное блуждание $S_t$, начинающееся в точке $[xN]$. Обозначим $A_{N\delta} = \left\{ \sup\limits_{t=0,\dots,[N\tau]} S_t \le N\delta \right\}$. Тогда

$$P_0(A_{N\delta}) = E_\alpha I_{A_{N\delta}} \exp\left\{ -\alpha S_{[N\tau]} + \sum_{t=0}^{[N\tau]-1} H_{S_t}(\alpha) \right\},$$

где $I_{A_{N\delta}}$ – индикатор $A_{N\delta}$.

Случай 2. Полагая $\alpha = \alpha_1$, мы получим нижнюю оценку:

$$\begin{aligned} P_0(A_{N\delta}) &= E_{\alpha_1} I_{A_{N\delta}} \exp\{-\alpha_1 S_{[N\tau]} + [N\tau] H_1(\alpha_1)\} \\ &\ge \exp\{-|\alpha_1|\delta N + [N\tau] H_1(\alpha_1)\} E_{\alpha_1} I_{A_{N\delta}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Заметим, что

$$E_{\alpha_1}[S_{t+1} - S_t \mid S_t = i] = M_i(\alpha_1) < 0, \tag{23}$$

и, таким образом, случайное блуждание $S_t^{\alpha_1}$ эргодично, и

$$E_{\alpha_1} I_{A_{N\delta}} \to 1, \text{ когда } N \to \infty. \tag{24}$$

Из (22) и (24) следует оценка снизу.

В случае 2 оценка сверху получается следующим образом:

$$\begin{aligned} P_0(A_{N\delta}) &= E_{\alpha_1} I_{A_{N\delta}} \exp\{-\alpha S_{[N\tau]} + [N\tau] H_1(\alpha_1)\} \\ &\le \exp\{[N\tau] H_1(\alpha_1) + |\alpha_1|\delta N\} \end{aligned} \tag{25}$$

Случай 1.

Оценка сверху снова тривиальна:

$$\begin{aligned} P_0(A_{N\delta}) &= E_{\alpha_1} I_{A_{N\delta}} \exp\left\{ -\alpha_0 S_{[N\tau]} + \sum_{t=0}^{[N\tau]-1} H_{S(t)}(\alpha_0) \right\} \\ &\le \exp\{[N\tau] H_1(\alpha_0) + |\alpha_0|\delta N\} \end{aligned} \tag{26}$$

Чтобы получить нижнюю границу, рассмотрим событие

$$B_{N\delta} = A_{N\delta} \cap \{S_t \neq 0 \text{ для } t = 0, \dots, [N\tau]\}.$$

Тогда

$$P_0(A'_{N\delta}) \geq P_0(B_{N\delta}) = E_{\alpha_0} I_{B_{N\delta}} \exp\left\{-\alpha_0 S_{[N\tau]} + \sum_{t=0}^{[N\tau]-1} H_{S_t}(\alpha_0)\right\}$$
$$\geq \text{const} \exp\{-|\alpha_0|\delta N + N\tau H_1(\alpha_0)\} E_{\alpha_0} I_{B_{N\delta}}.$$

Так как

$$E_{\alpha_0}\{S_{t+1} - S_t | S_t = i\} = M_i(\alpha_0) = 0, \qquad i > 0,$$

то легко видеть, что для некоторой константы $\gamma > 0$

$$E_{\alpha_0} I_{B_{N\delta}} \geq \gamma \exp\{-\delta' N\}.$$

Замечание 1. Поверхность $\mathcal{R} = \{H_1(\alpha_0) = H_0(\alpha_0)\}$ называется поверхностью Рейнольдса, разделяющей две фазы. Область параметров, где $L_\phi$ не зависит от параметров $p_{0j}$, определяет фазу 1. Фаза 2 – это когда $L_\phi$ зависит от параметров $p_{0j}$. $L_\phi$ зависит непрерывно от параметров, но, вообще говоря, не дифференцируема в точках $\mathcal{R}$.

**3.3. Случайное блуждание в $Z_+^1 \times Z^\mu$.**

Рассмотрим случайное блуждание $S_t(i, x)$ в $Z_+^1 \times Z^\mu$, начинающееся в точке $(i, x)$, и имеющее следующие переходные вероятности: $p((i,x) \to (j,y)) = p_{i,j}(x,y)$, $i, j \in Z_+^1$, $x, y \in Z^\mu$. Предположим, что:

$A_1$:

(i) (ограниченность скачков)

$$p_{i,j}(x,y) = 0, \text{ если или } j - i < -1, \text{ или } \max\{|i-j|, |x-y|\} > d,$$

для некоторого фиксированного $d > 0$.

(ii) (однородность)

$$p_{i,j}(x,y) = p_{1,j-i+1}(y-x) \text{ для любых } i > 0,\ j \in Z_+^1,\ x, y \in Z^\mu,$$
$$p_{0,j}(x,y) = p_{0,j}(y-x) \text{ для любых } j \in Z_+^1,\ x, y \in Z^\mu,$$

(iii) индуцированная цепь Маркова с множеством состояний $Z_+^1$ и переходными вероятностями

$$p_{i,j} = \sum_{y \in Z^\mu} p_{i,j}(y), \quad i, j \in Z_+^1$$

– неприводима и апериодична.

Рассмотрим

$$H_i(\alpha, \beta) = \log\left\{\sum_{y,j} p_{i,j}(y) \exp\{\alpha(j-i) + \beta y\}\right\},$$

$i \in Z^1_+, \alpha \in R, \beta \in R^\mu$.

Из условия однородности следует, что

$$H_i(\alpha,\beta) = H_1(\alpha,\beta)$$

для всех $i > 0$. Обозначим через $\partial_\alpha$, $\partial_\beta$ частные производные по $\alpha$ и $\beta$ соответственно. Здесь $\partial_\beta = (\partial_{\beta^1}, \dots, \partial_{\beta^\mu})$. Предположим, что якобианы $H_0$ и $H_1$ невырождены: для любых $\alpha, \beta$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{(\partial\alpha)^2} H_0(\alpha,\beta) & \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} H_0(\alpha,\beta) \\ \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} H_0(\alpha,\beta) & \frac{\partial^2}{(\partial\beta)^2} H_0(\alpha,\beta) \end{pmatrix} \neq 0$$

и

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{(\partial\alpha)^2} H_1(\alpha,\beta) & \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} H_1(\alpha,\beta) \\ \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} H_1(\alpha,\beta) & \frac{\partial^2}{(\partial\beta)^2} H_1(\alpha,\beta) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим следующие уравнения:

$$\partial_\alpha H_1(\alpha,\beta) = 0, \tag{27}$$

$$H_0(\alpha,\beta) = H_1(\alpha,\beta). \tag{28}$$

Нетрудно показать, что для любого $\beta \in R^\mu$ существует единственное $\alpha_0(\beta)$, для которого выполнено (27). Заметим, что для любого $\beta$, для которого

$$H_1(\alpha_0(\beta),\beta) < H_0(\alpha_0(\beta),\beta),$$

существует $\alpha_1(\beta)$, для которого (28) выполнено и

$$\partial_\alpha H_1(\alpha,\beta) < 0. \tag{29}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\alpha(\beta) = \begin{cases} \alpha_0(\beta), & \text{если } H_1(\alpha_0(\beta),\beta) \geq H_0(\alpha_0(\beta),\beta)\,, \\ \alpha_1(\beta), & \text{если } H_1(\alpha_0(\beta),\beta) < H_0(\alpha_0(\beta),\beta)\,. \end{cases}$$

Лемма 3.3.1. *Функция $\mathcal{H}(\beta) = H_1(\alpha(\beta),\beta)$ выпукла и имеет непрерывные первые производные.*

Доказательство. Рассмотрим множества:

$$\mathcal{C}_0 = \{\beta \in R^\mu : H_0(\alpha_0(\beta),\beta) \leq H_1(\alpha_0(\beta),\beta)\},$$
$$\mathcal{C}_1 = \{\beta \in R^\mu : H_0(\alpha_0(\beta),\beta) > H_1(\alpha_0(\beta),\beta)\}.$$

Нетрудно видеть, что функция $H_1(\alpha_0(\beta),\beta)$ выпукла и имеет непрерывные первые производные. Более того, легко показать, что функция $H_1(\alpha_1(\beta),\beta)$ определенная на множестве $\mathcal{C}_1$ также выпукла и имеет непрерывную первую производную внутри $\mathcal{C}_1$.

Поэтому, для того чтобы доказать лемму, достаточно показать, что для любого $\beta$, для которого

$$H_0(\alpha_0(\beta),\beta) = H_1(\alpha_0(\beta),\beta)\},$$

следующие равенства выполнены:

$$H_1(\alpha_0(\beta),\beta) = \lim_{\beta'\to\beta,\beta'\in C_1} H_1(\alpha_1(\beta'),\beta'),$$
$$\partial_\beta H_1(\alpha_0(\beta),\beta) = \lim_{\beta'\to\beta,\beta'\in C_1} \partial_{\beta'} H_1(\alpha_1(\beta'),\beta') = \partial_\beta H_1(\alpha_1(\beta),\beta).$$

Первое очевидно. Второе легко показать простым вычислением.

Рассмотрим преобразования Лежандра функций $H_1(\cdot,\cdot)$ и $\mathcal{H}(\cdot)$

$$L_1(v^0,\overline{v}) = \sup_{\alpha\in R,\beta\in R^\mu}\{\alpha v^0 + \beta\overline{v} - H_1(\alpha,\beta)\}$$
$$L_0(\overline{v}) = \sup_{\beta\in R^\mu}\{\beta\overline{v} - \mathcal{H}(\beta)\}$$

Пусть
$$L((x^0,\overline{x}),(v^0,\overline{v})) = \begin{cases} L_1(v^0,\overline{v}), & \text{если } x^0 = 0,\\ L_0(\overline{v}) & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Для каждого непрерывного пути $\varphi\colon [0,\tau]\to R^1_+\times R^\mu$ определим

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\tau L(\varphi(t),\dot\varphi(t))\,dt, & \text{если } \varphi \text{ абсолютно непрерывен,}\\ +\infty & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Теорема 3.3.1. *Случайное блуждание $S_t$ удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалами действия $\mathcal{L}_\tau$.*

Доказательство. Используя теорему 3.1.1, нам достаточно показать, что для любого $\tau > 0$ следующие утверждения выполняются.

1. Функционал $\mathcal{L}_\tau$ полунепрерывен снизу.
2. Для любых $x \in R^1_+\times R^\mu$, $\varphi\in\Phi_{x,\tau}$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует кусочно-линейный путь $\tilde\varphi\in\Phi_{x,\tau}$ такой, что
$$\sup_{0\le t\le\tau}|\varphi(t)-\tilde\varphi(t)| < \varepsilon \quad\text{и}\quad |\mathcal{L}_\tau(\varphi)-\mathcal{L}_\tau(\tilde\varphi)| < \varepsilon.$$
3. Оценка снизу больших уклонений (16) и верхняя оценка (17) выполнены для любого линейного пути $\varphi$.

Доказательство первых двух утверждений стандартно. Докажем нижнюю (16) и верхнюю оценки (17).

Лемма 3.3.2. *Пусть $\varphi\colon [0,\tau]\to R^1_+\times R^\mu$, $\varphi(t) = (\varphi^0(t),\overline{\varphi}(t))$ линейный путь такой, что для любого $0 < t < \tau$ $\varphi^0(t)\ne 0$ и $\dot\varphi(t) = v$.*

*Тогда нижняя* (16) *и верхняя оценки* (17) *выполняются с*

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \tau L_1(v).$$

Данная лемма легко следует из принципа больших уклонений для однородного случайного блуждания в $Z^{\mu+1}$ (см. [9])

ЛЕММА 3.3.3. *Пусть* $\varphi\colon [0,\tau] \to R^1_+ \times R^\mu$, $\varphi(t) = (\varphi^0(t), \overline{\varphi}(t))$ *линейный путь такой, что для любого* $t \in [0,\tau]$ $\varphi^0(t) = 0$ *и* $\dot{\overline{\varphi}}(t) = \overline{v}$.

*Тогда нижняя* (16) *и верхняя оценки* (17) *выполняются с*

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \tau L_0(\overline{v}),$$

*где* $\overline{v} = \dot{\overline{\varphi}}(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{v} = \dot{\overline{\varphi}}(t)$, $\varphi(0) = 0$, $x \in R^1_+ \times R^\mu$, $|x| < \frac{\delta}{2}$. Рассмотрим случайное блуждание $S_t = (S^0_t, \overline{S}_t)$ с началом в точке $[xN]$. Обозначим

$$A^0_{N\delta} = \left\{ \sup_{t=0,\dots,N\tau} |S^0_t| < N\delta \right\},$$

$$A^1_{N\delta} = \left\{ \sup_{t=0,\dots,N\tau} |\overline{S}_t - \overline{v}t| < N\delta \right\},$$

и

$$A_{N\delta} = \left\{ \sup_{t=0,\dots,N\tau} \left| S_t - \varphi\left(\frac{t}{N}\right) \right| < N\delta \right\} = A^0_{N\delta} \cap A^1_{N\delta}.$$

Рассмотрим семейство случайных блужданий в $Z^1_+ \times Z^\mu$ с переходными вероятностями

$$\begin{aligned} p^{\alpha,\beta}((i,x),(j,y)) = p^{\alpha,\beta}_{i,j}(x,y) &= p_{i,j}(x,y)\exp\{\alpha(j-i) + \beta(y-x) - H_i(\alpha,\beta)\} \\ &= \frac{p_{i,j}(x,y)\exp\{\alpha(j-i) + \beta(y-x)\}}{\sum\limits_y p_{i,j}(x,y)\exp\{\alpha(j-i) + \beta(\overline{y} - \overline{x})\}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$p^{0,0}_{i,j}(x,y) = p_{i,j}(x,y), \quad i,j \in Z^1_+,\ x,y \in Z^\mu.$$

Соответствующие распределения и математические ожидания будем обозначать через $P_{\alpha,\beta}$, $E_{\alpha,\beta}$. Легко видеть, что для любых $\alpha \in R^1$, $\beta \in R^\mu$

(30)

$$\begin{aligned} P\{A_{N\delta}\} &= P_{0,0}\{A_{N\delta}\} \\ &= E_{\alpha,\beta}\left( I_{A_{N\delta}} \exp\left\{ -\alpha S^0_{[N\tau]} - \beta \overline{S}_{[N\tau]} + \sum_{t=0}^{[N\tau]-1} H_{S^0_t}(\alpha,\beta) \right\} \right), \end{aligned}$$

где $I_{A_{N\delta}}$ – индикатор $A_{N\delta}$.

Рассмотрим $\beta_{\overline{v}} = (\beta^1_{\overline{v}}, \dots \beta^\mu_{\overline{v}})$, $\beta^j_{\overline{v}} \in R^1 \cup \{\pm\infty\}$, $j = 1, \dots, \mu$, такое, что

(31) $$L_0(\overline{v}) = \inf_\beta\{\overline{v}\beta - H_1(\alpha(\beta),\beta)\} = \overline{v}\beta_{\overline{v}} - H_1(\alpha(\beta_{\overline{v}}),\beta_{\overline{v}}).$$

Сначала докажем нижнюю и верхнюю оценки в случае, когда

(32) $$|\beta^j_{\overline{v}}| < \infty \text{ для любого } j = 1, \dots, \mu.$$

Тогда из определения функции $\alpha(\beta)$ следует, что

$$|\alpha(\beta_{\overline{v}})| < \infty.$$

Из (30) для $\beta = \beta_{\overline{v}}$, $\alpha = \alpha(\beta_{\overline{v}})$ получаем

$$P(A_{N\delta}) \leq \exp\{-[N\tau]L_0(\overline{v}) + |\beta_{\overline{v}}|N\delta + |\alpha(\beta_{\overline{v}})|N\delta\}) \tag{33}$$

Поэтому для случая, когда выполнено условие (32), верхняя оценка доказана.

Теперь докажем нижнюю оценку для случая, когда выполняется (32). Рассмотрим здесь два случая:

Случай 1.

$$H_0(\alpha_0(\beta_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}}) \leq H_1(\alpha_0(\beta_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}}). \tag{34}$$

Случай 2.

$$H_0(\alpha_0(\beta_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}}) > H_1(\alpha_0(\beta_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}}). \tag{35}$$

Пусть (34) выполняется. Тогда по определению

$$\alpha(\beta_{\overline{v}}) = \alpha_0(\beta_{\overline{v}}),$$

и, следовательно, для $\alpha_{\overline{v}} = \alpha(\beta_{\overline{v}})$

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha H_1(\alpha_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}}) = 0, \\ &\partial_\beta H_1(\alpha_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}}) = \overline{v} \end{aligned} \tag{36}$$

Из (36) следует, что

$$\begin{aligned} &E_{\alpha(\beta_{\overline{v}}),\beta_{\overline{v}}}(S^0_{t+1} - S^0_t \mid S^0_t = i, \overline{S}_t) = 0, \\ &E_{\alpha(\beta_{\overline{v}}),\beta_{\overline{v}}}(\overline{S}_{t+1} - \overline{S}_t \mid S^0_t = i, \overline{S}_t) = \overline{v}, \end{aligned} \tag{37}$$

для любого $i \in Z^1_+$, $i > 0$. Рассмотрим $i_0 \in Z^1_+$, $i_0 > 0$ и $y \in Z^\mu$ такие, что

$$p_\Lambda(i_0, y) > 0.$$

Пусть

$$p_\Lambda(i_0, y) = q.$$

Тогда для $N_1 = [\sqrt{N}]$

$$\begin{aligned} P(A_{N\delta}) &= E_{\alpha_0(\beta_{\overline{v}}),\beta_{\overline{v}}}\Bigg(I_{A_{N\delta}} \exp\Bigg\{-\alpha_0(\beta_{\overline{v}})S^0_{[N\tau]} - \beta_{\overline{v}}\overline{S}_{[N\tau]} \\ &\quad + \sum_{t=0}^{[N\tau]-1} H_{S^0_t}(\alpha_0(\beta_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}})\Bigg\}\Bigg) \\ &\geq q^{N_1} \exp\{-[N\tau]L_0(\overline{v}) - |\beta_{\overline{v}}|N\delta - |\alpha(\beta_{\overline{v}})|N\delta\} \\ &\quad \times P_{\alpha_0(\beta_{\overline{v}}),\beta_{\overline{v}}}\{B_{N_1,N\delta} \mid S^0_{N_1} = i_0 N_1, : \overline{S}_{N_1} = N_1 y\}, \end{aligned} \tag{38}$$

где

$$B_{N_1,N\delta} = \left\{ \inf_{t=N_1,\dots,N\tau} |S_t^0| > 0, \sup_{t=N_1,\dots,N\tau} |S_t^0| < N\delta, \sup_{t=N_1,\dots,N\tau} |\overline{S}_t - \overline{v}t| \le \delta N \right\}.$$

Из (37) легко следует, что существует $c > 0$ такое, что

$$P_{\alpha_0(\beta_{\overline{v}}),\beta_{\overline{v}}}\{B_{N_1,N\delta} \mid S_{N_1}^0 = i_0 N_1, \overline{S}_{N_1} = N_1 y\} \ge c. \tag{39}$$

Из (38) и (39) получаем нижнюю оценку для случая 1.

Теперь рассмотрим случай 2. Для этого случая по определению

$$\alpha(\beta_{\overline{v}}) = \alpha_1(\beta_{\overline{v}}),$$

где $\alpha(\beta_{\overline{v}})$ определяется системой

$$\begin{cases} H_0(\alpha_1(\beta_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}}) = H_1(\alpha_1(\beta_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}}), \\ \partial_\alpha H_1(\alpha_1(\beta_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}}) < 0. \end{cases}$$

Поэтому из (30) для $\alpha = \alpha_1(\beta_{\overline{v}})$, $\beta = \beta_{\overline{v}}$ легко получить

$$\begin{aligned} P(A_{N\delta}) &= E_{\alpha_1(\beta_{\overline{v}}),\beta_{\overline{v}}} \left( I_{A_{N\delta}} \exp\{-\alpha_1(\beta_{\overline{v}}) S^0_{[N\tau]} - \beta_{\overline{v}} \overline{S}_{[N\tau]} + [N\tau] H_1(\alpha_1(\beta_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}})\} \right) \\ &\ge \exp\{-N\tau L_0(\overline{v}) - N\delta(|\alpha_1(\beta_{\overline{v}})| + |\beta_{\overline{v}}|)\} P_{\alpha_1(\beta_{\overline{v}}),\beta_{\overline{v}}}(A_{N\delta}). \end{aligned}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3.3.4. *Пусть выполнено* (35). *Тогда*

$$P_{\alpha_1(\beta_{\overline{v}}),\beta_{\overline{v}}}(A_{N\delta}) \to 1, \text{ когда } N \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим для любых $\alpha$, $\beta$ индуцированную цепь Маркова с пространством состояний $Z_+$ и переходными вероятностями

$$p_{i,j}^{\alpha\beta} = \sum_y p_{i,j}^{\alpha\beta}(y).$$

Пусть выполнено (35). Тогда для $\alpha = \alpha_1(\beta_{\overline{v}})$, $\beta = \beta_{\overline{v}}$ индуцированная цепь эргодична. Рассмотрим для любых $\alpha$, $\beta$, для которых индуцированная цепь эргодична, стационарные вероятности этой цепи:

$$\pi_j^{\alpha\beta}, \quad j \in Z_+^1,$$

и рассмотрим вектор

$$V_0(\alpha,\beta) = \pi_0^{\alpha\beta} \sum_{y,j} y p_{0,j}^{\alpha\beta}(y) + (1 - \pi_0^{\alpha\beta}) \sum_{y,j} y p_{1,j}^{\alpha\beta}(y).$$

Используя теорему 4.1.1, нетрудно видеть, что для доказательства леммы 3.3.4 достаточно показать следующее:

$$\overline{v} = V_0(\alpha_1(\beta_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}}).$$

Вычислим $V_0(\alpha, \beta)$. Для этого заметим вначале, что для любых $\alpha$, $\beta$

$$\sum_{j,y} y p_{i,j}^{\alpha,\beta}(y) = \partial_\alpha H_i(\alpha, \beta). \tag{40}$$

Более того, используя метод производящих функций, можно получить, что для любых $\alpha$, $\beta$, для которых индуцированная цепь эргодична:

$$\pi_0^{\alpha,\beta} = \frac{\partial_\alpha H_1(\alpha,\beta)}{\partial_\alpha H_0(\alpha,\beta) - \partial_\alpha H_1(\alpha,\beta)}. \tag{41}$$

Из (40) и (41) получаем:

$$V_0(\alpha,\beta) = \frac{\partial_\alpha(H_0(\alpha,\beta) - H_1(\alpha,\beta)}{\partial_\alpha H_1(\alpha,\beta)\partial_\beta H_0(\alpha,\beta) - \partial_\alpha H_0(\alpha,\beta)\partial_\beta H_1(\alpha,\beta)}. \tag{42}$$

Несложным вычислением можно показать, что для тех $\beta$, для которых

$$\mathcal{H}_0(\beta) = H_0(\alpha_1(\beta), \beta) = H_1(\alpha_1(\beta), \beta),$$

следующее равенство выполнено:

$$\frac{d}{d\beta}\mathcal{H}_0(\beta) = \frac{\partial_\alpha(H_0(\alpha,\beta) - H_1(\alpha,\beta))}{\partial_\alpha H_1(\alpha,\beta)\partial_\beta H_0(\alpha,\beta) - \partial_\alpha H_0(\alpha,\beta)\partial_\beta H_1(\alpha,\beta)}. \tag{43}$$

Но для $\beta = \beta_{\overline{v}}$ из определения $\beta_{\overline{v}}$ следует, что

$$\frac{d}{d\beta}\mathcal{H}_0(\beta_{\overline{v}}) = \overline{v}.$$

Следовательно, из (42) и (43) получаем

$$V_0(\alpha_1(\beta_{\overline{v}}), \beta_{\overline{v}}) = \overline{v}.$$

Лемма 3.3.4 доказана.

Мы доказали нижнюю и верхнюю оценки для случая, когда для любого $j = 1, \dots, \mu$

$$|\beta_{\overline{v}}^j| < \infty.$$

Чтобы рассмотреть случай, когда $1 \le j \le \mu$

$$|\beta_{\overline{v}}^j| = \infty,$$

заметим, что для любого $j = 1, \dots, \mu$, для которого $\beta_{\overline{v}}^j = \infty$, если траектория принадлежит событию $A_{N\delta}$, тогда

$$S_t^j = tv^j \text{ для любых } t = 0, \dots, [N\tau].$$

Рассматривая условные вероятности при условии:

$$S_t^j = tv^j \text{ для всех } t = 0, \dots, [N\tau] \text{ для всех } j, \text{ для которых } |\beta_{\overline{v}}^j| = \infty,$$

и используя для этих условных вероятностей те же аргументы, что и предыдущем случае, легко получить нижнюю и верхнюю оценки.

Лемма 3.3.3 доказана.

**3.4. Случайное блуждание в $Z^{\mu+1}$ с разрывом на гиперплоскости.**

Рассмотрим марковскую цепь с множеством состояний $Z^{\mu+1}$ (обозначая состояние марковской цепи с началом в точке $(i,x)$ в момент времени $t$ через $S_t(i,x)$), и имеющую следующие переходные вероятности

$$p((i,x)\to(j,y))=p((i,x),(j,y)),\qquad i,j\in Z^1,\quad x,y\in Z^\mu.$$

Допустим, что

(i) (ограниченность скачков)

$$p((i,x),(j,y))=0,\ \text{если или}\ \max\{|i-j|,|x-y|\}>d$$

для некоторого $d>0$ или $(j-i)\operatorname{sign}(i)<-1$;

(ii) (однородность) для всех $(i,x),(j,y),(k,z)$ таких, что $\operatorname{sign}(i)=\operatorname{sign}(j)$ выполняется

$$p((i,x),(j,y))=p((i+k,x+z),(j+k,y+z)).$$

Положим

$$p((i,x),(j,y))=p_{ij}(y-x);$$

(iii) индуцированная марковская цепь с множеством состояний $Z^1$ и переходными вероятностями

$$p_{i,j}=\sum_y p_{i,j}(y)$$

неприводима и апериодична.

Определим следующие функции:

$$H_+(\alpha,\beta)=\log\Bigl(\sum_{j,y}p_{i,j}(y)\exp\{\alpha(j-i)+\beta y\}\Bigr)$$

где $i>0$, $\alpha\in R^1$, и для $\beta=(\beta^1,\dots,\beta^\mu)\in R^\mu$, $y=(y^1,\dots,y^\mu)$ положим

$$\beta y=\sum_{k=1}^{\mu}\beta^k y^k,$$

$$H_-(\gamma,\beta)=\log\Bigl(\sum_{j,y}p_{i,j}(y)\exp\{-\gamma(j-i)+\beta y\}\Bigr),$$

где $i<0$, $\gamma\in R^1$, и

$$H_0(\alpha,\beta,\gamma)=\log\Bigl(\sum_{y,j\ge0}p_{0,j}(y)\exp\{\alpha j+\beta y\}+\sum_{y,j<0}p_{0,j}(y)\exp\{-\gamma j+\beta y\}\Bigr).$$

Допустим, что якобианы $H_+$, $H_0$ и $H_-$ нигде не равны нулю.

Рассмотрим следующие уравнения

$$\partial_\alpha H_+(\alpha,\beta)=0,\tag{44}$$

$$\partial_\gamma H_-(\gamma,\beta)=0.\tag{45}$$

Легко видеть, что для каждого $\beta\in R^\mu$ существует единственное решение $(\alpha_0(\beta),\beta)$ уравнения (44) и единственное решение $(\gamma_0(\beta),\beta)$ уравнения (45).

Лемма 3.4.1. *Пусть*

$$\max\{H_+(\alpha_0(\beta),\beta), H_-(\gamma_0(\beta),\beta)\} < H_0(\alpha_0(\beta),\beta,\gamma_0(\beta)).$$

*Тогда выполняется одно из следующих условий:*

1) *либо*

$$H_+(\alpha_0(\beta),\beta) \le H_-(\gamma_0(\beta),\beta) < H_0(\alpha_0(\beta),\beta,\gamma_0(\beta))$$

*и существует* $\alpha_1(\beta)$ *такое, что*

$$H_+(\alpha_1(\beta),\beta) < H_-(\gamma_0(\beta),\beta) = H_0(\alpha_1(\beta),\beta,\gamma_0(\beta))$$

*и*

$$\partial_\alpha H_+(\alpha_1(\beta),\beta) < 0;$$

2) *либо*

$$H_-(\gamma_0(\beta),\beta) \le H_+(\alpha_0(\beta),\beta) < H_0(\alpha_0(\beta),\beta,\gamma_0(\beta)),$$

*и существует* $\gamma_1(\beta)$ *такое, что*

$$H_-(\gamma_1(\beta),\beta) < H_+(\alpha_0(\beta),\beta) = H_0(\alpha_0(\beta),\beta,\gamma_1(\beta))$$

*и*

$$\partial_\gamma H_-(\gamma_1(\beta),\beta) < 0;$$

3) *или существуют* $\alpha_2(\beta)$ *и* $\gamma_2(\beta)$ *такие, что*

$$H_+(\alpha_2(\beta),\beta) = H_-(\gamma_2(\beta),\beta) = H_0(\alpha_2(\beta),\beta,\gamma_2(\beta))$$

*и*

$$\partial_\alpha H_+(\alpha_2(\beta),\beta) < 0 \qquad \partial_\gamma H_-(\gamma_2(\beta),\beta) < 0$$

Доказательство леммы 3.4.1. Рассмотрим случай когда

$$H_+(\alpha_0(\beta),\beta) \le H_-(\gamma_0(\beta),\beta) < H_0(\alpha_0(\beta),\beta,\gamma_0(\beta)).$$

Случай, когда

$$H_-(\gamma_0(\beta),\beta) < H_+(\alpha_0(\beta),\beta) < H_0(\alpha_0(\beta),\beta,\gamma_0(\beta)),$$

может быть рассмотрен аналогично.

Заметим, что $H_0(\alpha,\beta,\gamma)$ монотонно возрастающая по $\alpha$ для всех $\beta$, $\gamma$, и функция $H_+(\alpha,\beta)$ выпуклая по $\alpha$ для всех $\beta$. Из этого следует, что либо существует $\alpha_1(\beta) < \alpha_0(\beta)$ такое, что

$$H_+(\alpha_1(\beta),\beta) < H_-(\gamma_0(\beta),\beta) = H_0(\alpha_1(\beta),\beta,\gamma_0(\beta))$$

и

$$\partial_\alpha H_+(\alpha_1(\beta),\beta) < 0,$$

либо существует $\tilde{\alpha}(\beta) < \alpha_0(\beta)$ такое, что

$$H_+(\tilde{\alpha}(\beta), \beta) = H_-(\gamma_0(\beta), \beta) \le H_0(\tilde{\alpha}(\beta), \beta, \gamma_0(\beta)) \tag{46}$$

Покажем, что из (46) следует, что существуют $\alpha_2(\beta)$ и $\gamma_2(\beta)$ такие, что

$$H_+(\alpha_2(\beta), \beta) = H_-(\gamma_2(\beta), \beta) = H_0(\alpha_2(\beta), \beta, \gamma_2(\beta)) \tag{47}$$

и

$$\partial_\alpha H_+(\alpha_2(\beta), \beta) < 0 \qquad \partial_\gamma H_-(\gamma_2(\beta), \beta) < 0.$$

Для этого рассмотрим уравнение

$$H_+(\alpha, \beta) = H_-(\gamma, \beta). \tag{48}$$

Если выполнено (46), то можно легко показать, что для каждого $\gamma < \gamma_0(\beta)$ существует единственное $\alpha(\beta, \gamma) < \tilde{\alpha}(\beta)$ такое, что $(\alpha(\beta, \gamma), \beta, \gamma)$ решение (48), и, более того, $\alpha(\beta, \gamma)$ монотонно возрастающая по $\gamma$, и

$$\alpha(\beta, \gamma) \to -\infty \ \text{ при } \ \gamma \to -\infty.$$

Заметим, что

$$H_-(\gamma, \beta) = H_+(\alpha(\beta, \gamma), \beta) \to +\infty$$

при $\gamma \to -\infty$, и функция $H_0(\alpha(\beta, \gamma), \beta, \gamma)$ монотонно возрастает при $\gamma \to -\infty$. Тогда существует единственное $\gamma_2(\beta) < \gamma_0(\beta)$ такое, что

$$H_+(\alpha(\beta, \gamma_2(\beta)), \beta) = H_-(\gamma_2(\beta), \beta) = H_0(\alpha(\beta, \gamma_2(\beta)), \beta, \gamma_2(\beta))$$

Так как $\gamma_2(\beta) < \gamma_0(\beta)$ и $\alpha(\beta, \gamma_2(\beta)) \le \tilde{\alpha}(\beta) < \alpha_0(\beta)$, то

$$\partial_\alpha H_+(\alpha(\beta, \gamma_2(\beta)), \beta) < 0, \qquad \partial_\gamma H_-(\gamma_2(\beta), \beta) < 0.$$

Итак, положив $\alpha_2(\beta) = \alpha(\beta, \gamma_2(\beta))$ получим (47).

Лемма 3.4.1 доказана.

Определим функцию $\mathcal{H}(\beta)$, полагая

$$\mathcal{H}(\beta) = \max\{H_+(\alpha_0(\beta), \beta), H_-(\gamma_0(\beta), \beta)\},$$

если

$$\max\{H_+(\alpha_0(\beta), \beta), H_-(\alpha_0(\beta), \beta)\} \ge H_0(\gamma_0(\beta), \beta, \gamma_0(\beta)).$$

В противном случае положим

$$\mathcal{H}(\beta) = H_-(\gamma_0(\beta), \beta),$$

если выполняется случай 1 леммы 3.4.1, или

$$\mathcal{H}(\beta) = H_+(\alpha_0(\beta), \beta),$$

если выполняется случай 2 леммы 3.4.1, или

$$\mathcal{H}(\beta) = H_-(\gamma_2(\beta), \beta) = H_+(\alpha_2(\beta), \beta),$$

если выполняется случай 3 леммы 3.4.1. Тогда функция $\mathcal{H}$ определена для всех $\beta$.

Лемма 3.4.2. *Функция$\mathcal{H}$ выпукла и принадлежит $C^1(R^\mu)$.*

Доказательство леммы 3.4.2. Введем следующие множества:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_+ &= \{\beta \in R^\mu : \mathcal{H}(\beta) = H_+(\alpha_0(\beta), \beta)\},\\
\mathcal{C}_- &= \{\beta \in R^\mu : \mathcal{H}(\beta) = H_-(\gamma_0(\beta), \beta)\},\\
\mathcal{C}_0 &= \{\beta \in R^\mu : \mathcal{H}(\beta) = H_+(\alpha_2(\beta), \beta) = H_-(\gamma_2(\beta), \beta)\}.
\end{aligned}$$

Внутри каждого из этих множеств $\mathcal{H}$ выпуклая и гладкая.

Пусть $\mathcal{C}_+ \cap \mathcal{C}_0 \neq \varnothing$. Рассмотрим $\beta^* \in \mathcal{C}_+ \cap \mathcal{C}_0$. Непосредственным вычислением можно проверить, что функция $\mathcal{H}$ непрерывна в $\beta^*$ и

$$\lim_{\beta \to \beta^*, \beta \in \mathcal{C}_+} \nabla\mathcal{H}(\beta) = \lim_{\beta \to \beta^*, \beta \in \mathcal{C}_0} \nabla\mathcal{H}(\beta).$$

Тогда функция $\mathcal{H}$ выпукла на множестве $\mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_0$ и ее первая производная непрерывна внутри этого множества.

Аналогично можно показать, что $\mathcal{H}$ выпукла на множестве $\mathcal{C}_- \cup \mathcal{C}_0$ и что ее первая производная также непрерывна внутри этого множества.

Заметим также, что $\mathcal{C}_+ \cap \mathcal{C}_- = \varnothing$. Тогда $\mathcal{H}$ выпукла на множестве

$$\mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_- = R^\mu$$

и принадлежит классу $C^1(R^\mu)$.

Лемма 3.4.2 доказана.

Пусть $L_+$, $L_-$ и $L_0$ преобразования Лежандра функций $H_+$, $H_-$ и $\mathcal{H}$ соответственно,

$$\begin{aligned}
L_+(u,v) &= \sup_{\alpha,\beta}\{\alpha u + \beta v - H_+(\alpha,\beta)\},\\
L_-(u,v) &= \sup_{\gamma,\beta}\{\gamma u + \beta v - H_-(\gamma,\beta)\},\\
L_0(v) &= \sup_{\beta}\{\beta v - \mathcal{H}(,\beta)\}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующую функцию $L\colon R^{\mu+1} \times R^{\mu+1} \to R$

$$L((u,v),(x_0,x)) = \begin{cases} L_+(u,v), & \text{если } x^0 > 0,\\ L_-(u,v), & \text{если } x^0 < 0,\\ L_0(v), & \text{если } x^0 = 0. \end{cases}$$

Для каждого $\tau \geq 0$ определим на множестве непрерывных путей

$$\varphi\colon [0,\tau] \to R^{\mu+1}$$

функционал $\mathcal{L}_\tau$

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \int_0^\tau L(\varphi(t), \dot\varphi(t))dt$$

если путь $\varphi$ абсолютно непрерывен, и

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \infty$$

в противном случае.

Рассматриваемое случайное блуждание в $Z^{\mu+1}$, которое выше обозначено $S_t(i,x)$ в покомпонентном виде запишем в следующей форме:

$$S_t(i,x) = (S_t^1(i,x), S_t^2(i,x)),$$

где $S_t^1(i,x)$ – одномерная координата блуждания, соответствующая направлению, перпендикулярному гиперплоскости разрыва: $i = 0$.

Для того чтобы вычислить функционал действия в рассматриваемом случае, необходимо и достаточно получить логарифмическую асимптотику вероятностей следующего вида:

$$P\left(\sup_{t=0,\dots,N\tau}\left|S_t^2(i,x) - \varphi_2\left(\frac{t}{N}\right)\right| \le \delta N, \sup_{t=0,\dots,N\tau}|S_t^1(i,x)| \le \delta N\right),$$

где $\varphi_2(\cdot)$ – вторая компонента пути $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$ и $\varphi\colon [0,\tau] \to R^\mu$ – допустимый путь из $\Phi_{(i,x),\tau}$ такой, что $\varphi_1 = 0$.

Нетрудно видеть, что указанная вероятность равна вероятности:

$$P\left(\sup_{t=0,\dots,N\tau}\left|S_t(i,x) - \varphi_2\left(\frac{t}{N}\right)\right| \le \delta N, \sup_{t=0,\dots,N\tau}|S_t^+(i,x)| \le \delta N, S_t^-(i,x) \le \delta N\right),$$

где $S_t^+(i,x) = \max(0, S_t^1(i,x))$, $S_t^-(i,x) = \min(0, S_t^1(i,x))$, $S_t(i,x) = S_t^2(i,x)$. Таким образом, $S_t^+(i,x) \ge 0$ и $S_t^-(i,x) \ge 0$.

Нетрудно видеть, что функции $H_+(\cdot,\cdot)$, $H_-(\cdot,\cdot)$ и $H_0(\cdot,\cdot,\cdot)$ являются логарифмами экспоненциальных моментов скачков случайного блуждания

$$(S_t^+(i,x), S_t(i,x), S_t^-(i,x)),$$

соответствующим точкам в верхнем ($i > 0$), и нижнем ($i < 0$) полупространствах, и точкам на гиперплоскости разрыва ($i = 0$) соответственно.

Теорема 3.4.1. *Для случайного блуждания $S_t$ принцип больших уклонений выполнен с функционалом действия $\mathcal{L}_\tau$.*

Доказательство. Из теоремы 3.1.1 следует, что нам достаточно вычислить логарифмическую асимптотику вероятностей вида:

$$P\left(\sup_{t=0,\dots,N\tau}\left|S_t(i,x) - \varphi\left(\frac{t}{N}\right)\right| \le \delta N, \sup_{t=0,\dots,N\tau}|S_t^+(i,x)| \le \delta N, S_t^-(i,x) \le \delta N\right)$$

для случая линейного пути $\varphi(t) = tv$ из $\Phi_{(i,x),\tau}$, и убедиться в том, что мы получим необходимые константы $L(v,\Lambda)$, где $\Lambda$ это грань $i = 0$.

Событие:

$$\left\{\sup_{t=0,\dots,N\tau}\left|S_t(i,x)-\varphi_2\left(\frac{t}{N}\right)\right|\le\delta N,\ \sup_{t=0,\dots,N\tau}\left|S_t^+(i,x)\right|\le\delta N, S_t^-(i,x)\le\delta N\right\}$$

обозначим через $A_{N\delta}$.

Как и в п. 3.3 рассмотрим два случая:

1) $L_0(v)=\beta_v v-\mathcal{H}(\beta_v)$ и $|\beta_v|<\infty$, 2) $|\beta_v|=\infty$.

Рассмотрим случай 1). Нетрудно видеть, что получение верхней оценки здесь аналогично получению верхней оценки в п. 3.3 и в качестве константы $L(v,\Lambda)$ в верхней оценке имеем $\mathcal{L}_0(v)$.

Докажем оценку снизу. Рассмотрим отдельно три случая: первый, когда

$$\mathcal{H}(\beta)=H_+(\alpha_0(\beta_v),\beta_v), \tag{49}$$

второй, когда

$$\mathcal{H}(\beta)=H_-(\gamma_0(\beta_v),\beta_v), \tag{50}$$

и третий, когда

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\beta)&=H_-(\gamma_2(\beta_v),\beta_v)=H_+(\alpha_2(\beta_v),\beta_v)\\&=H_0(\alpha_2(\beta_v),\beta_v,\gamma_2(\beta_v)).\end{aligned} \tag{51}$$

Пусть выполнено (49). Тогда, как было показано ранее (см. определение функции $\mathcal{H}(\cdot)$), либо

$$H_+(\alpha_0(\beta_v),\beta_v)\ge H_-(\gamma_0(\beta_v),\beta_v),$$

и

$$H_+(\alpha_0(\beta_v),\beta_v)\ge H_0(\alpha_0(\beta_v),\beta_v,\gamma_0(\beta_v)), \tag{52}$$

либо существует $\gamma_1(\beta_v)$ такое, что

$$H_-(\gamma_1(\beta_v),\beta_v)\ge H_+(\alpha_0(\beta_v),\beta_v)=H_0(\alpha_0(\beta_v),\beta_v,\gamma_1(\beta_v)) \tag{53}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}H_-(\gamma_1(\beta_v),\beta_v)<0.$$

Положим
$\alpha_v=\alpha_0(\beta_v)$ и
$\gamma_v=\gamma_0(\beta_v)$ в первом случае, и
$\gamma_v=\gamma_1(\beta_v)$ в втором случае.

Пусть

$$H_i(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases}H_+(\alpha,\beta), & \text{если } i>0,\\ H_0(\alpha,\beta,\gamma), & \text{если } i=0,\\ H_i(\gamma,\beta), & \text{если } i<0.\end{cases}$$

Рассмотрим для каждых $\alpha, \beta, \gamma$ цепь Маркова $\mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma}$ с множеством состояний $\mathbf{Z}^{\mu+1}$ и вероятностями перехода

$$_{\alpha,\beta,\gamma}p((i,x),(j,y)) = {}_{\alpha,\beta,\gamma}p_{ij}(y-x),$$

где

$$(54) \quad {}_{\alpha,\beta,\gamma}p_{ij}(y-x) = p_{ij}(y-x)\exp\{(\beta, y-x) + \alpha(j-i)\chi_{\{i>0\}\cap\{i=0,j\geq 0\}} - \gamma(j-i)\chi_{\{i<0\}\cap\{i=0,j<0\}} - H_i(\alpha,\beta,\gamma)\},$$

где для любого множества $A \subseteq \mathbf{Z}^2$ $\chi_A = 1$ в том и только в том случае, если $(i,j) \in A$.

Пусть $S_0^+ = S_0^- = 0$. Обозначим через $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ вероятностную меру на пространстве траекторий случайного блуждания $(S_t^+, S_t, S_t^-)$, соответствующую цепи Маркова $\mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Пусть $E_{\alpha,\beta,\gamma}(\cdot)$ математическое ожидание относительно меры $P_{\alpha,\beta,\gamma}$. Легко видеть, что для любых $\alpha, \beta, \gamma$

$$(55) \quad P(A_{N\delta}) = E_{\alpha,\beta,\gamma}(\chi_{(A_{N\delta})}\exp\{-(\beta, S_t) - \sum_{t=0}^{[N\tau]-1} \alpha(S_{t+1}^+ - S_t^+)\chi_{\{S_t^+>0\}\cap\{S_t^+=0,S_{t+1}^+>0\}} + \sum_{t=0}^{[N\tau]-1} \gamma(S_{t+1}^- - S_t^-)\chi_{\{S_t^-<0\}\cap\{S_t^-=0,S_{t+1}^-<0\}},$$

где для любого события $B$ $\chi_B$ – индикатор этого события.

Рассмотрим $\alpha = \alpha_v$, $\beta = \beta_v$, $\gamma = \gamma_v$, и рассмотрим следующее событие

$$B_{N\delta} = \left\{ \sup_{t=0,\dots,[N\tau]} \left| \frac{1}{N}S_t - \left(\frac{vt}{N}\right) \right| < \delta, \inf_{t=1,\dots,[N\tau]} S_t^+ > 0 \right\}.$$

Тогда

$$P(A_{N\delta}) \geq E_{\alpha_v,\beta_v,\gamma_v}\Bigg(\chi_{\{B_{N\delta}\}}\exp\Bigg(-(\beta_v, S_t) - \sum_{t=0}^{[N\tau]-1} H_{S_t^+}(\alpha_v,\beta_v,\gamma_v) - \sum_{t=0}^{[N\tau]-1} \alpha_v(S_{t+1}^+ - S_t^+)\chi_{\{S_t^+>0\}\cap\{S_t^+=0,S_{t+1}^+>0\}} + \sum_{t=0}^{[N\tau]-1} \gamma_v(S_{t+1}^- - S_t^-)\chi_{\{S_t^-<0\}\cap\{S_t^-=0,S_{t+1}^-<0\}}\Bigg)\Bigg),$$

и, далее, в силу (52) и (53)

$$(56) \quad \geq \exp\{-[N\tau](\beta_v, v) + ([N\tau]-1)H_+(\alpha_0(\beta_v),\beta_v) - |\alpha_v|\delta N - |\gamma_v|\delta N - |\beta_v|\delta N + H_0(\alpha_0(\beta_v),\beta_v,\gamma_v)\}P_{\alpha_v,\beta_v,\gamma_v}(B_{N\delta}).$$

Оценим вероятность $P_{\alpha_v,\beta_v,\gamma_v}(B_{N\delta})$. Для этого заметим, что

$$E_{\alpha_v,\beta_v,\gamma_v}(S_{t+1}^+ - S_t^+ | S_t^+ > 0) = \frac{\partial}{\partial\alpha} H_+(\alpha, \beta_v)|_{\alpha=\alpha_0(\beta_v)} = 0$$

и

$$E_{\alpha_v,\beta_v,\gamma_v}(S_{t+1}^- - S_t^- | S_t^- < 0) = \frac{\partial}{\partial\gamma} H_-(\gamma, \beta_v)|_{\gamma=\gamma_v} \le 0$$

$$E_{\alpha_v,\beta_v,\gamma_v}(S_{t+1} - S_t | S_t) = \frac{\partial}{\partial\alpha} H_+(\alpha, \beta)|_{\alpha=\alpha_v,\beta=\beta_v} = v.$$

Отсюда легко следует, что для любого $\delta' > 0$ существует $N(\delta')$ такое, что при $N > N(\delta')$

$$P_{\alpha_v,\beta_v,\gamma_v}(B_{N\delta}) \ge \exp\{-\delta' N\}.$$

Таким образом, в случае, когда имеет место (49), нижняя оценка доказана. Аналогично доказывается нижняя оценка в случае, когда имеет место (50).

Рассмотрим случай, когда имеет место (51). В этом случае из (51) для $\beta = \beta_v$, $\alpha = \alpha_v = \alpha_2(\beta_v)$ и $\gamma = \gamma_v = \gamma_2(\beta_v)$ имеем

$$(57)\qquad P(A_{N\delta}) \ge \exp\{-(\beta_v, v) - |\beta_v|\delta N - |\alpha_v|\delta N - |\gamma_v|\delta N + \sum_{t=0}^{[N\tau]-1} \mathcal{H}(\beta_v)\} P_{\alpha_v,\beta_v,\gamma_v}(A_{N\delta}).$$

Оценим снизу $P_{\alpha_v,\beta_v,\gamma_v}(A_{N\delta})$. Для этого рассмотрим индуцированную цепь Маркова $\mathcal{A}_{\alpha\beta\gamma}^{ind}$ с множеством состояний $\mathbf{Z}^1$ и вероятностями перехода ${}_{\alpha\beta\gamma}p_{ij}$, $i, j \in \mathbf{Z}^1$, где

$${}_{\alpha\beta\gamma}p_{ij} = \sum_y {}_{\alpha\beta\gamma}p_{ij}(y).$$

Легко видеть, что для любых $\alpha, \beta, \gamma$

$$E_{\alpha_v,\beta_v,\gamma_v}(S_{t+1}^+ - S_t^+ | S_t^+ > 0) = \frac{\partial}{\partial\alpha} H_+(\alpha, \beta)|_{\alpha=\alpha_v,\beta=\beta_v} = \sum_j {}_{\alpha_v\beta_v\gamma_v}p_{ij}(j-i).$$

Отсюда в силу п. 3 леммы 3.4.1 следует, что для $\beta = \beta_v$, $\alpha = \alpha_v = \alpha_2(\beta_v)$ и $\gamma = \gamma_v = \gamma_2(\beta_v)$ цепь Маркова $\mathcal{A}_{\alpha\beta\gamma}^{\mathrm{ind}}$ эргодична. Обозначим через ${}_v\pi_j$, $j \in \mathbf{Z}^1$ стационарные вероятности этой цепи. Рассмотрим для цепи $\mathcal{A}_{\alpha_v\beta_v\gamma_v}$ вектор второго векторного поля

$$(58)\qquad V = V(\alpha_v, \beta_v, \gamma_v) = \sum_j {}_v\pi_j \sum_y {}_{\alpha_v\beta_v\gamma_v}p_{ij}(y) = {}_v\pi_0 \frac{\partial}{\partial\beta} H_0(\alpha_v, \beta_v, \gamma_v) + {}_v\pi_+ \frac{\partial}{\partial\beta} H_+(\alpha_v, \beta_v) + {}_v\pi_- \frac{\partial}{\partial\beta} H_-(\gamma_v, \beta_v).$$

Аналогично тому, как это было сделано в [~~2~~47], можно показать, что

$$P_{\alpha_v,\beta_v,\gamma_v}(A_{N\delta}) \to 1$$

в том и только в том случае, если

$$V(\alpha_v,\beta_v,\gamma_v) = v. \tag{59}$$

Таким образом, для доказательства нижней оценки в этом случае достаточно показать, что когда имеет место (51) и $|\beta_v| < \infty$ выполнено равенство (59).

Для каждого $i = 1,\dots,\mu$ рассмотрим матрицу

$$D_iH = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\gamma}H_0(\alpha_v,\beta_v,\gamma_v) & \frac{\partial}{\partial\alpha}H_0(\alpha_v,\beta_v,\gamma_v) & \frac{\partial}{\partial\beta_i}H_0(\alpha_v,\beta_v,\gamma_v) \\ \frac{\partial}{\partial\gamma}H_-(\gamma_v,\beta_v) & 0 & \frac{\partial}{\partial\beta_i}H_-(\gamma_v,\beta_v) \\ 0 & \frac{\partial}{\partial\alpha}H_+(\alpha_v,\beta_v) & \frac{\partial}{\partial\beta_i}H_+(\alpha_v,\beta_v) \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что для любого $i = 1,\dots,\mu$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_i}\mathcal{H}(\beta_v)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = D_iH\begin{pmatrix}\gamma_i'\\ \alpha_i'\\ 1\end{pmatrix},$$

где

$$\gamma_i' = \frac{\partial}{\partial\beta_i}\gamma_2(\beta_v), \qquad \alpha_i' = \frac{\partial}{\partial\beta_i}\alpha_2(\beta_v).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial\beta_i}\mathcal{H}(\beta_v) = v^i, \qquad i = 1,\dots,\mu, \quad v = (v^1,\dots,v^\mu).$$

Следовательно, для каждого $i = 1,\dots,\mu$ имеем

$$v^i\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = D_iH\begin{pmatrix}\gamma_i'\\ \alpha_i'\\ 1\end{pmatrix}. \tag{60}$$

Для стационарных вероятностей ${}_v\pi_+, {}_v\pi_0, {}_v\pi_-$ нетрудно получить (используя, например, метод производящих функций)

$${}_v\pi_0\frac{\partial}{\partial\alpha}H_0(\alpha_v,\beta_v,\gamma_v) + {}_v\pi_+\frac{\partial}{\partial\alpha}H_+(\alpha_v,\beta_v) = 0$$

и

$${}_v\pi_0\frac{\partial}{\partial\gamma}H_0(\alpha_v,\beta_v,\gamma_v) + {}_v\pi_-\frac{\partial}{\partial\gamma}H_-(\gamma_v,\beta_v) = 0. \tag{61}$$

(60) и (61) вместе для каждого $i = 1,\dots,\mu$ дают следующую систему:

$$({}_v\pi_-, {}_v\pi_0, {}_v\pi_+)D_iH = (0,0,V^i). \tag{62}$$

Таким образом, получаем

$$1 = {}_v\pi_- + {}_v\pi_0 + {}_v\pi_+ = ({}_v\pi_-, {}_v\pi_0, {}_v\pi_+) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0, (V^i)^{-1})(D_i H)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или

$$V^i = \left( (0, 0, 1)(D_i H)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1}, \quad i = 1, \ldots, \mu.$$

Из (60) получаем

$$v^i (D_i H)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_i' \\ \alpha_i' \\ 1 \end{pmatrix}$$

или

$$v^i = (0, 0, 1)(D_i H)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} \gamma_i' \\ \alpha_i' \\ 1 \end{pmatrix} = 1. \tag{63}$$

Сравнивая (60) и (63) получаем

$$v^i = V^i \text{ для всех } i = 1, \ldots, \mu.$$

Случай 2) рассматривается также, как аналогичный случай в лемме 3.3.3. Таким образом, теорема доказана.

### 3.5. Оптимальные пути.

Рассмотрим случайное блуждание $S_t, t \in Z_+$, в $Z_+^\nu \times Z^\mu$, определенное в параграфе 3.1. Допустим, что это случайное блуждание удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $\mathcal{L}_\tau$.

Для любых $x, y \in R_+^\nu \times R^\mu$ рассмотрим множество всех непрерывных путей, идущих от $x$ к $y$. Будем обозначать его $\Phi^{x,y}$.

Определение 3.5.1. Рассмотрим две точки $x, y \in R_+^\nu \times R^\mu$.

Путь $\varphi \colon [0, \tau] \to R_+^\nu \times R^\mu$, $\varphi \in \Phi^{x,y}$, называется оптимальным путем от точки $x$ к точке $y$, если для любых $\tau'$ и для любого пути $\varphi' : [0, \tau'] \to R_+^\nu \times R^\mu$, $\varphi' \in \Phi^{x,y}$, выполнены следующие неравенства

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) \le \mathcal{L}_{\tau'}(\varphi').$$

Определим

$$\mathcal{L}_{x,y} = \inf_\tau \inf_{\varphi:[0,\tau]\to R_+^\nu \times R^\mu, \varphi \in \Phi^{x,y}} \mathcal{L}_\tau(\varphi).$$

Если существует оптимальный путь $\varphi \colon [0, \tau] \to R_+^\nu \times R^\mu$ от точки $x$ к точке $y$, то

$$\mathcal{L}_{x,y} = \mathcal{L}_\tau(\varphi).$$

Рассмотрим некоторые свойства оптимальных путей.

Лемма 3.5.1 (Аддитивность). *Пусть* $\varphi\colon [0,\tau] \to R^\nu_+ \times R^\mu$ *оптимальный путь от точки* $x$ *к точке* $y$. *Тогда для любого* $t \in [0,\tau]$ *путь* $\varphi\colon [0,t] \to R^\nu_+ \times R^\mu$ *оптимален от* $x$ *к* $z = \varphi(t)$, *путь* $\varphi : [t,\tau] \to R^\nu_+ \times R^\mu$ *оптимален от* $z$ *к* $y$, *и*

$$\mathcal{L}_{x,y} = \mathcal{L}_{x,z} + \mathcal{L}_{z,y}.$$

Данная лемма легко следует из интегрального представления функционала действия.

Определение. Скажем, что аффинное отображение

$$G\colon R^\nu_+ \times R^\mu \to R^\nu_+ \times R^\mu$$

является собственным тогда и только тогда, когда для любой грани $\Lambda$

$$G(\Lambda) = \Lambda.$$

Легко видеть, что для любого собственного отображения $G$ существует $k \in R_+$ и $b = (0, b^2) \in R^\nu_+ \times R^\mu$ такие, что

$$G(x) = kx + b.$$

Лемма 3.5.2 (Инвариантность относительно собственных отображений). *Пусть* $\varphi\colon [0,\tau] \to R^\nu_+ \times R^\mu$ *оптимальный путь из* $x$ *в* $y$.

*Тогда для любого собственного отображения* $G(x) = kx+b$ *путь* $\varphi'\colon [0,k\tau] \to R^\nu_+ \times R^\mu$, *где* $\varphi'(t) = k\varphi(kt)+b$, $t \in R_+$, *является оптимальным путем из точки* $G(x)$ *в точку* $G(y)$.

Эта лемма легко следует из определения случайного блуждания $S_t$. Пусть $p((x,y) \to (x',y'))$, $(x,y),(x',y') \in Z^\nu_+ \times Z^\mu$ переходные вероятности случайного блуждания $S_t$. Тогда, по определению, для любой грани $\Lambda$ и для любых $(x,y) \in \Lambda \cap Z^\nu_+ \times Z^\mu$

$$p((x,y) \to (x',y')) = p(\Lambda, (x'-x, y'-y)), \qquad (x',y') \in Z^\nu_+ \times Z^\mu.$$

Для каждой грани $\Lambda$ рассмотрим функцию

$$H^{\nu,\mu}_\Lambda(\alpha,\beta) = \log \sum_{x \in Z^\nu_+, y \in Z^\mu} p(\Lambda,(x,y)) \exp\{\alpha x + \beta y\}.$$

Для $\nu = 0$ мы должны рассмотреть только грань $\Lambda = \{\emptyset\}$ и, следовательно,

$$H^{0,\mu}_{\{\emptyset\}}(\alpha,\beta) = H^\mu(\beta).$$

Рассмотрим преобразование Лежандра $L^\mu(\cdot)$ функции $H^\mu(\cdot)$.

Для $\nu = 0$ случайное блуждание $S_t$ в $Z^\mu$ однородно по определению и удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $\mathcal{L}_\tau$, где

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \int_0^\tau L^\mu(\dot\varphi(t))\,dt,$$

если путь $\varphi\colon [0,\tau] \to R^\mu$ абсолютно непрерывен, и

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \infty$$

в противном случае (см. [9]).

Теорема 3.5.1. *Пусть* $\nu = 0$, *и*

$$\nabla H^{\mu}(0) \neq 0.$$

*Тогда для любого* $x \neq y \in R^{\mu}$ *существует единственный оптимальный путь* $\varphi \colon [0,\tau] \to R^{\mu}$ *из точки* $x$ *в точку* $y$. *Этот путь линеен*

$$\varphi(t) = x + \frac{t}{\tau}(y - x),$$

*и*

$$\mathcal{L}_{x,y} = \mathcal{L}_{\tau}(\varphi) = (\beta, y - x),$$

*где* $(\beta, \tau)$ *единственное решение системы*

$$\begin{cases} H^{\mu}(\beta) = 0, \\ \tau \nabla H^{\mu}(\beta) = y - x, \\ \tau > 0. \end{cases} \tag{64}$$

Доказательство. Из леммы 3.5.1 и леммы 3.5.2 легко следует, что если оптимальный путь из точки $x$ к точке $y$ существует, то он линеен. Для любого линейного пути

$$\varphi(t) = x + \frac{t}{\tau}(y - x)$$

выполняется

$$\mathcal{L}_{\tau}(\varphi) = \tau L^{\mu}\left(\frac{y - x}{\tau}\right).$$

Следовательно, для оптимального пути $\varphi \colon [0,\tau] \to R^{\mu}$

$$\tau L^{\mu}\left(\frac{y - x}{\tau}\right) = \inf_{t>0}\left\{t L^{\mu}\left(\frac{y - x}{t}\right)\right\}.$$

Заметим, что функция $tL^{\mu}(\frac{y-x}{t})$ выпукла по $t$ для любого $y \neq x$, и

$$tL^{\mu}\left(\frac{y - x}{t}\right) \to \infty \quad \text{при } t \to 0 \text{ или } t \to \infty.$$

Отсюда следует, что $\tau$ единственное решение уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(tL^{\mu}\left(\frac{y - x}{t}\right)\right) = 0. \tag{65}$$

Легко видеть, что $t = \tau$ – решение уравнения (65), если $(\tau, \beta)$, где $\beta = \nabla L^{\mu}(\frac{y-x}{\tau})$, решение системы (64). Так как функция $H^{\mu}(\cdot)$ выпукла, то эта система имеет единственное решение. Отсюда следует теорема 3.5.1.

Рассмотрим теперь случай $\nu = 1$. И рассмотрим следующее уравнение

$$\partial_{\alpha} H^{1,\mu}_{\{1\}}(\alpha, \beta) = 0. \tag{66}$$

Для любого $\beta$ существует единственное решение $(\alpha_0(\beta),\beta)$ уравнения (66). Заметим, что для любого $\beta$, для которого

$$H^{1,\mu}_{\{1\}}(\alpha_0(\beta),\beta) < H^{1,\mu}_{\{\emptyset\}}(\alpha_0(\beta),\beta),$$

существует единственное решение $(\alpha_1(\beta),\beta)$ системы

$$\begin{cases} H^{1,\mu}_{\{1\}}(\alpha,\beta) = H^{1,\mu}_{\{\emptyset\}}(\alpha,\beta), \\ \partial_\alpha H^{1,\mu}_{\{1\}}(\alpha,\beta) < 0. \end{cases} \tag{67}$$

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{H}^{1,\mu}_{\emptyset}(\beta) = \begin{cases} H^{1,\mu}_{\{1\}}(\alpha_0(\beta),\beta), & \text{если } H^{1,\mu}_{\{1\}}(\alpha_0(\beta),\beta) \geq H^{1,\mu}_{\{\emptyset\}}(\alpha_0(\beta),\beta), \\ H^{1,\mu}_{\{1\}}(\alpha_1(\beta),\beta) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 3.5.2. *Пусть $\nabla\mathcal{H}^{1,\mu}_{\emptyset}(0) \neq 0$. Тогда для любых $x = (x^0,\overline{x}), y = (y^0,\overline{y}) \in R^1_+ \times R^\mu$ таких, что $x^0 = y^0 = 0$ и $\overline{x} \neq \overline{y}$ существует единственный оптимальный путь $\varphi\colon [0,\tau] \to R^1_+ \times R^\mu$ из $x$ в $y$, этот оптимальный путь линеен*

$$\varphi(t) = x + \frac{t}{\tau}(y-x),$$

*и*

$$\mathcal{L}_{x,y} = \mathcal{L}_\tau(\varphi) = (\beta, \overline{y}-\overline{x}),$$

*где $(\beta,\tau)$ единственное решение системы*

$$\begin{cases} \mathcal{H}^{1,\mu}_{\emptyset}(\beta) = 0, \\ \tau\nabla\mathcal{H}^{1,\mu}_{\emptyset}(\beta) = \overline{y}-\overline{x}. \end{cases} \tag{68}$$

Для доказательства теоремы прежде всего заметим, что для любого линейного пути $\varphi\colon [0,\tau] \to R^\nu_+ \times R^\mu$ такого, что $\varphi(t) = (\varphi^0(t),\overline{\varphi}(t)), \varphi^0(t) = 0$, мы имеем

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \tau L_\emptyset\left(\frac{\varphi(\tau)-\varphi(0)}{\tau}\right),$$

где $L_\emptyset(\cdot)$ преобразование Лежандра функции $\mathcal{H}^{1,\mu}_{\emptyset}(\cdot)$. Поэтому достаточно повторить доказательство теоремы 3.5.1.

Для произвольных $x, y \in R^1_0 \times R^\mu$ легко получить следующую теорему.

Теорема 3.5.3. *Пусть* $\nabla\mathcal{H}_{\emptyset}^{1,\mu}(0) \neq 0$. *Тогда для любых* $x = (x^0, \overline{x}), y = (y^0, \overline{y})$ *существует оптимальный путь* $\varphi\colon [0,\tau] \to R_+^1 \times R^\mu$ *из* $x$ *в* $y$, *этот оптимальный путь кусочно-линеен*

$$\varphi(t) = \begin{cases} x + \dfrac{t}{\tau_1}(x_1 - x) & \text{для } 0 \le t \le \tau_1, \\ x_1 + \dfrac{t-\tau_1}{\tau_2}(x_2 - x_1) & \text{для } \tau_1 \le t \le \tau_1 + \tau_2, \\ x_2 + \dfrac{t-\tau_2-\tau_1}{\tau_3}(y - x_2) & \text{для } \tau_1 + \tau_2 \le t \le \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \end{cases}$$

*где* $x_1 = (0, \overline{x}_1)$, $x_2 = (0, \overline{x}_2)$, *и*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{x,y} &= \tau_1 L_{\{1\}}^{1,\mu}\left(\frac{x_1 - x}{\tau_1}\right) + \tau_2 L_{\emptyset}^{1,\mu}\left(\frac{\overline{x}_2 - \overline{x}_1}{\tau_2}\right) + \tau_3 L_{\{1\}}^{1,\mu}\left(\frac{y - x_2}{\tau_3}\right) \\ &= \inf_{t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, t_3 \ge 0, \overline{x}_1, \overline{x}_2} t_1 L_{\{1\}}^{1,\mu}\left(\frac{x_1 - x}{t_1}\right) + t_2 L_{\emptyset}\left(\frac{\overline{x}_2 - \overline{x}_1}{t_2}\right) + t_3 L_{\{1\}}\left(\frac{y - x_2}{t_3}\right),\end{aligned}$$

*где* $L_{\{1\}}(\cdot)$ *преобразование Лежандра функции* $H_{\{1\}}^{1,\mu}(\cdot)$, $L_{\emptyset}(\cdot)$ *преобразование Лежандра функции* $\mathcal{H}_{\emptyset}^{1,\mu}(\cdot)$.

Рассмотрим случай $\nu = \mu = 1$. Предположим, что

$$\frac{d}{d\beta}\mathcal{H}_{\emptyset}^{1,1}(0) \neq 0. \tag{69}$$

Тогда из построения функции $\mathcal{H}_{\emptyset}^{1,1}(0)$ следует, что

$$\nabla H_{\{1\}}^{1,1}(0,0) \neq 0.$$

Рассмотрим следующее уравнение

$$\mathcal{H}_{\emptyset}^{1,1}(\beta) = 0.$$

Из (69) следует, что это уравнение имеет в точности два различных действительных решения $\beta_1 \le 0 \le \beta_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$. Рассмотрим также систему

$$\begin{cases} H_{\{1\}}^{1,1}(\alpha,\beta) = 0, \\ \tau\nabla H_{\{1\}}^{1,1}(\alpha,\beta) = x, \\ \tau > 0. \end{cases}$$

Для любого $x = (x^0, x^1) \neq 0$ данная система имеет единственное решение $\alpha^*(x)$, $\beta^*(x)$, $\tau^*(x)$.

**Теорема 3.5.4.** *Пусть выполняется* (67). *Тогда для любого* $x = (x^0, x^1) \in R^1_+ \times R^1$ *имеют место следующие утверждения:*

(i) *Пусть* $\beta_1 \le \beta^*(x) \le \beta_2$, *тогда*

$$\mathcal{L}_{0,x} = \alpha^*(x)x^0 + \beta^*(x)x^1,$$

*и оптимальный путь из* 0 *в* $x$ *линеен*

$$\varphi(t) = \frac{t}{\tau^*(x)}x, \qquad t \in [0, \tau^*(x)].$$

(ii) *Пусть* $\beta^*(x) < \beta_1$, *тогда*

$$\mathcal{L}_{0,x} = \alpha_1 x^0 + \beta_1 x^1,$$

*где* $\alpha_1$ *определяется из системы*

$$\begin{cases} H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha_1, \beta_1) = 0, \\ \partial_\alpha H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha_1, \beta_1) > 0, \end{cases} \tag{70}$$

*и оптимальный путь из* 0 *в* $x$ *кусочно-линеен*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau^\emptyset_-} z_-, & \text{если } 0 \le t \le \tau^\emptyset_-, \\[2ex] z_- + \dfrac{t - \tau^\emptyset_-}{\tau^*_-}(x - z_-), & \text{если } \tau^\emptyset_- \le t \le \tau^\emptyset_- + \tau^*_-, \end{cases}$$

*где* $z_- = (0, z^1_-)$, $z^1_- < 0$, $\tau^\emptyset_- > 0$, $\tau^*_- > 0$ *определяются из системы*

$$\begin{cases} \nabla H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha_1, \beta_1) = \dfrac{x - z_-}{\tau^*_-}, \\[2ex] \partial_\beta \mathcal{H}^{1,1}_\emptyset(\beta_1) = \dfrac{z^1_-}{\tau^\emptyset_-}. \end{cases}$$

(iii) *Пусть* $\beta_2 < \beta^*(x)$, *тогда*

$$\mathcal{L}_{0,x} = \alpha_2 x^0 + \beta_2 x^1,$$

*где* $\alpha_2$ *определяется из системы*

$$\begin{cases} H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha_2, \beta_2) = 0, \\ \partial_\alpha H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha_2, \beta_2) > 0, \end{cases} \tag{71}$$

*и оптимальный путь из* 0 *в* $x$ *кусочно-линеен*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau^\emptyset_+} z_+, & \text{если } 0 \le t \le \tau^\emptyset_+, \\[2ex] z_+ + \dfrac{t - \tau^\emptyset_+}{\tau^*_+}(x - z_+), & \text{если } \tau^\emptyset_+ \le t \le \tau^\emptyset_+ + \tau^*_+, \end{cases}$$

*где* $z_+ = (0, z^1_+)$, $z^1_+ > 0$, $\tau^\emptyset_+ > 0$, $\tau^*_+ > 0$ *определяются из системы*

$$\begin{cases} \nabla H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha_2, \beta_2) = \dfrac{x - z_+}{\tau^*_+}, \\ \dfrac{d}{d\beta}\mathcal{H}^{1,1}_\emptyset(\beta_2) = \dfrac{z^1_+}{\tau^\emptyset_+}. \end{cases}$$

Прежде чем доказывать теорему 3.5.4, дадим геометрическую интерпретацию условий (i), (ii) и (iii) данной теоремы. Для этого введем полярные координаты в $R^1_+ \times R^1 \setminus \{0\}$

$$x^1 = r(x)\cos\gamma(x), \qquad x^0 = r(x)\sin\gamma(x),$$
$$r(x) > 0, \qquad 0 \le \gamma(x) \le \pi.$$

Рассмотрим два угла $\gamma_2 < \gamma_1$ таких, что

$$\operatorname{ctg}\gamma_1 = \frac{\partial_\beta H(\alpha_1, \beta_1)}{\partial_\alpha H(\alpha_1, \beta_1)}$$

и

$$\operatorname{ctg}\gamma_2 = \frac{\partial_\beta H(\alpha_2, \beta_2)}{\partial_\alpha H(\alpha_2, \beta_2)},$$

$\gamma_1$ это угол между положительным направлением оси $x^1$ $(x^0 = 0)$, вектором нормали к кривой

$$H(\alpha, \beta) = 0$$

в точке $(\alpha_1, \beta_1)$.

$\gamma_2$ это угол между положительным направлением оси $x^1$ и вектором нормали к кривой

$$H(\alpha, \beta) = 0$$

в точке $(\alpha_2, \beta_2)$.

Легко показать, что $0 \le \gamma_2 < \gamma_1 \le \pi$.

Теперь заметим, что для любого $x \in R^1_+ \times R^1$

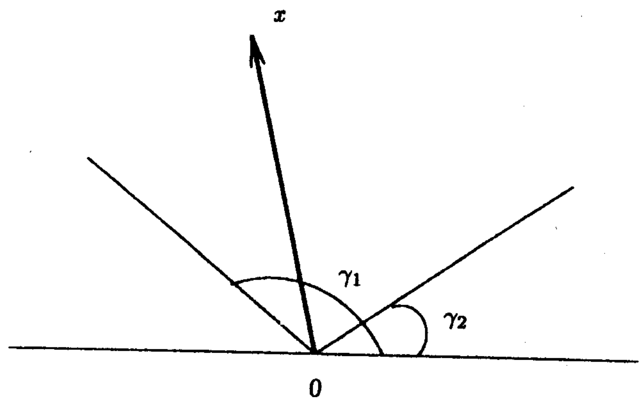
$$\beta^*(x) = \beta_1 \Longleftrightarrow \gamma(x) = \gamma_1,$$
$$\beta^*(x) = \beta_2 \Longleftrightarrow \gamma(x) = \gamma_2,$$

и, более того,

$$\beta_1 \le \beta^*(x) \le \beta_2 \Longleftrightarrow \gamma_2 \le \gamma(x) \le \gamma_1,$$
$$\beta^*(x) < \beta_1 \Longleftrightarrow \gamma(x) > \gamma_1,$$
$$\beta^*(x) > \beta_2 \Longleftrightarrow \gamma(x) < \gamma_2.$$

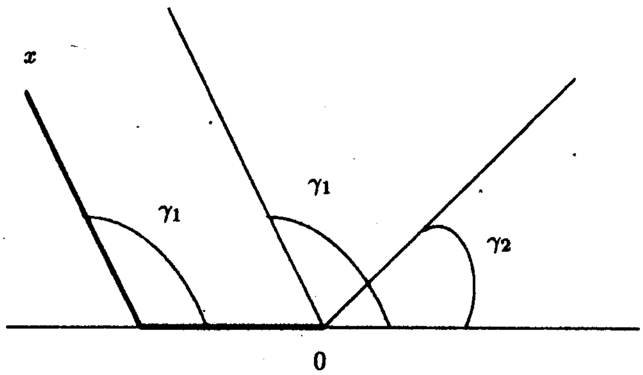
Из теоремы 3.5.4 вытекает, что для любого $x \in R^1_+ \times R^1$ следующие утверждения выполняются.

(i) Пусть $\gamma_2 \le \gamma(x) \le \gamma_1$. Тогда оптимальный путь из точки 0 в точку $x$ линеен.



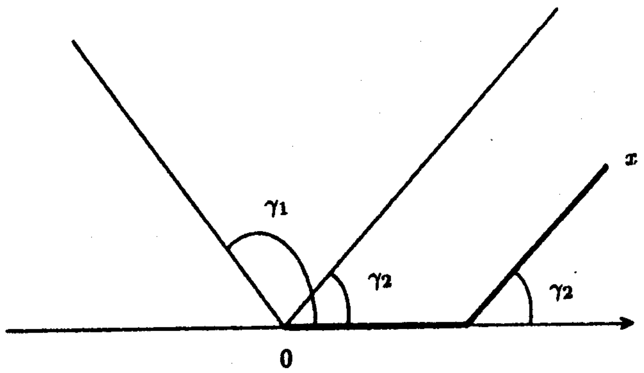

(ii) Пусть $\gamma(x) > \gamma_1$. Тогда оптимальный путь из точки 0 в точку $x$ – это кусочно-линейный путь $\varphi_1$ состоящий из двух линейных отрезков: оптимального пути из 0 в $z_- = (0, z_-^1)$ и оптимального пути из $z_-$ в $x$, где $z_- = (0, z_-^1)$, $z_-^1 < 0$ определяется единственным образом из следующего равенства

$$\gamma(x - z_-) = \gamma_1$$




(iii) Пусть $\gamma(x) < \gamma_1$. Тогда оптимальный путь из точки 0 в точку $x$ кусочно-линейный путь $\varphi_1$, состоящий из двух линейных отрезков: оптимального пути из 0 в $z_+ = (0, z_+^1)$ и оптимального пути из $z_+$ в $x$, где $z_+ = (0, z_+^1)$, $z_+^1 < 0$ определяется единственным образом из следующего равенства

$$\gamma(x - z_+) = \gamma_2.$$




Доказательство теоремы 3.5.4. Для любого $x = (x^0, x^1)$, для которого $x^0 = 0$, эта теорема следует из теоремы 3.5.2.

Рассмотрим $x = (x^0, x^1) \in R^1_+ \times R^1$, $x^0 \neq 0$. Из теоремы 3.5.3 следует, что существует кусочно-линейный оптимальный путь из 0 в $x$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau^\emptyset} z, & \text{если } 0 \le t \le \tau^\emptyset, \\ z + \dfrac{t - \tau^\emptyset}{\tau^*}(x - z), & \text{если } \tau^\emptyset \le t \le \tau^\emptyset + \tau^* \end{cases}$$

и

$$\mathcal{L}_{0,x} = \tau^\emptyset L^{1,1}_{\{\emptyset\}}\left(\frac{z^1}{\tau^\emptyset}\right) + \tau^* L^{1,1}_{\{1\}}\left(\frac{x - z}{\tau^*}\right) \tag{72}$$
$$= \inf_{t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, z = (0, z^1)} t_1 L^{1,1}_\emptyset\left(\frac{z^1}{t_1}\right) + t_2 L^{1,1}_{\{1\}}\left(\frac{x - z}{t_2}\right)$$

где $z_- = (0, z^1)$, $\tau^\emptyset \ge 0$, $\tau^* \ge 0$ определяются из (72).

Рассмотрим для любого $z = (0, z^1) \neq 0$

$$F(z) = \inf_{t_1 > 0, t_2 > 0}\left\{t_1 L_\emptyset\left(\frac{z^1}{t_1}\right) + t^2 L^{1,1}_{\{1\}}\left(\frac{x - z}{t_2}\right)\right\},$$

и

$$F(0) = \inf_{t \ge 0}\left\{t L^{1,1}_{\{1\}}\left(\frac{x}{t}\right)\right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{L}_{0,x} = \inf_{z = (0, z^1)} F(z). \tag{73}$$

Можно легко показать, что

$$F(0) = \tau^*(x) L^{1,1}_{\{1\}}\left(\frac{x}{\tau^*(x)}\right) = \alpha^*(x) x^0 + \beta^*(x) x^1,$$

и

$$F(z) = \tau^{\emptyset}(z)L_{\emptyset}\left(\frac{z^1}{\tau^{\emptyset}(z)}\right) + \tau^*(x-z)L^{1,1}_{\{1\}}\left(\frac{x-z}{\tau^*(x-z)}\right)$$
$$= \beta^{\emptyset}(z)z^1 + \alpha^*(x-z)x^0 + \beta^*(x-z)(x^1 - z^1),$$

где $\alpha^*(x-z)$, $\beta^*(x-z)$, $\tau^*(x-z)$ единственное решение системы

$$\begin{cases} H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha,\beta) = 0, \\ \nabla H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha,\beta) = \dfrac{x-z}{\tau}, \end{cases}$$

и $\beta^{\emptyset}(z)$, $\tau^{\emptyset}(z)$ единственное решение системы

$$\begin{cases} \mathcal{H}^{1,1}_{\{\emptyset\}}(\beta) = 0, \\ \dfrac{d}{d\beta}\mathcal{H}^{1,1}_{\{\emptyset\}}(\beta) = \dfrac{z^1}{\tau}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\beta^{\emptyset}(z) = \begin{cases} \beta_1, & \text{если } z^1 > 0, \\ \beta_2, & \text{если } z^1 < 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$F(z) = \begin{cases} \beta_1 z^1 + \alpha^*(x-z)x^0 + \beta^*(x-z)(x^1 - z^1), & \text{если } z^1 < 0, \\ \alpha^*(x)x^0 + \beta^*(x)x^1, & \text{если } z = 0, \\ \beta_2 z^1 + \alpha^*(x-z)x^0 + \beta^*(x-z)(x^1 - z^1), & \text{если } z^1 > 0. \end{cases}$$

Также заметим, что

$$\beta^*(x-z) \to \overline{\beta} > 0 \text{ при } z = (0, z^1),\ z^1 \to -\infty,$$

и

$$\beta^*(x-z) \to \underline{\beta} < 0 \text{ при } z = (0, z^1),\ z^1 \to +\infty,$$

где $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$, $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ два различных решения системы

$$\begin{cases} H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha,\beta) = 0, \\ \partial_\alpha H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha,\beta) = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $F(\cdot)$ непрерывна и выпукла на каждом из множеств $\{z^1 \le 0\}$ и $\{z^1 \ge 0\}$, но она не выпукла на $R^1$. Поэтому

$$F(z) \to \infty \text{ при } z^1 \to \pm\infty.$$

Чтобы получить инфинум (57), мы должны рассмотреть

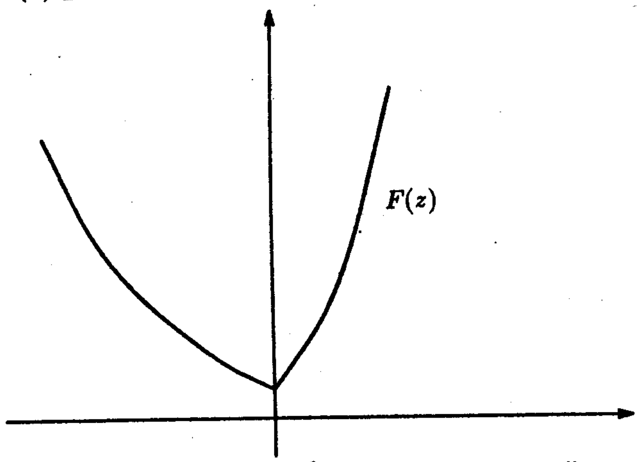
$$F'_-(0) = \lim_{z \to 0-} \frac{d}{dz^1}F(z) = \beta_1 - \beta^*(x),$$

и

$$F'_+(0) = \lim_{z\to 0+} \frac{d}{dz^1} F(z) = \beta_2 - \beta^*(x).$$

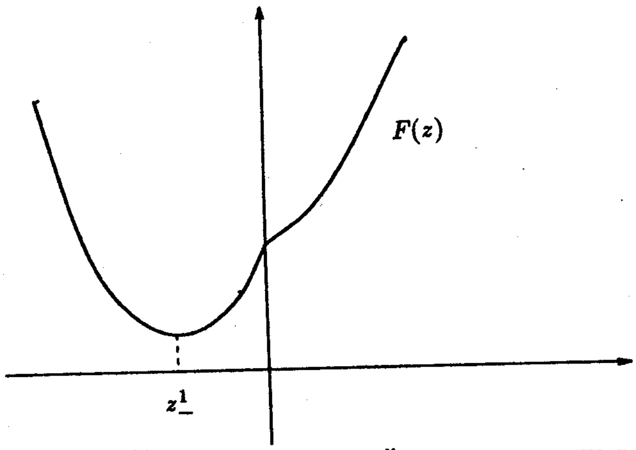
Рассмотрим три случая.

(i) Пусть $\beta_1 \le \beta^*(x) \le \beta_2$. Тогда $F'_-(0) \le 0$ и $F'_+(0) \ge 0$.




В этом случае функция $F(\cdot)$ выпукла на $R^1$ и имеет единственный минимум в точке $z = 0$.

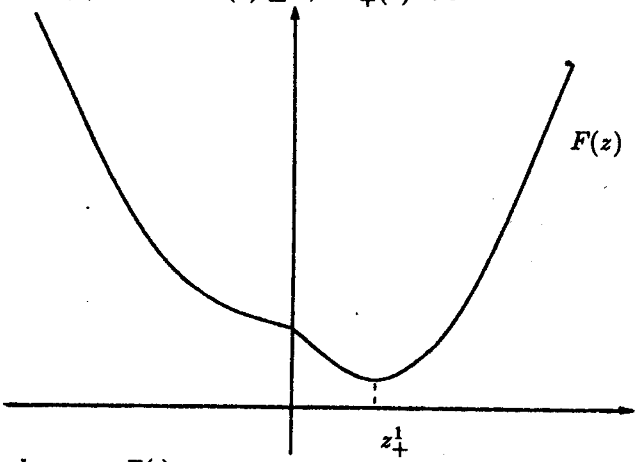
(ii) Пусть $\beta^*(x) < \beta_1$. Тогда $F'_-(0) > 0$ и $F'_+(0) \ge 0$.




В этом случае функция $F(\cdot)$ имеет единственный минимум в точке $z_- = (0, z^1_-)$, $z^1_- < 0$, которая определяется из следующего уравнения

$$\beta^*(x - z) = \beta_1, \qquad z = (0, z^1_-).$$

(iii) Пусть $\beta_2 < \beta^*(x)$. Тогда $F'_-(0) \le 0$, и $F'_+(0) < 0$.




В этом случае функция $F(\cdot)$ имеет единственный минимум в точке $z_+ = (0, z^1_+)$, $z^1_+ > 0$, которая определяется из следующего уравнения

$$\beta^*(x - z) = \beta_2, \qquad z = (0, z^1_+).$$

В первом случае

$$\mathcal{L}_{0,x} = F(0) = \alpha^*(x)x^0 + \beta^*(x)x^1,$$

и оптимальный путь из 0 в $x$ линеен

$$\varphi(t) = \frac{t}{\tau^*(x)}x, \qquad t \in [0, \tau^*].$$

Во втором случае

$$\mathcal{L}_{0,x} = \alpha_1 x^0 + \beta_1 x^1,$$

где $\alpha_1$ определяется из системы (56), и оптимальный путь из 0 в $x$ кусочно-линеен

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau^\emptyset_-} z_-, & \text{если } 0 \le t \le \tau^\emptyset_-, \\[2ex] z_- + \dfrac{t - \tau^\emptyset_-}{\tau^*_-}(x - z_-), & \text{если } \tau^\emptyset_- \le t \le \tau^\emptyset_- + \tau^*_-, \end{cases}$$

где $z_- = (0, z^1_-)$, $z^1_- < 0$, $\tau^\emptyset_- > 0$, $\tau^*_- > 0$ определяются из системы

$$\begin{cases} \nabla H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha_1, \beta_1) = \dfrac{x - z_-}{\tau^*_-}, \\[2ex] \partial_\beta \mathcal{H}^{1,1}_\emptyset(\beta_1) = \dfrac{z^1_-}{\tau^\emptyset_-}. \end{cases}$$

В случае (iii)

$$\mathcal{L}_{0,x} = \alpha_2 x^0 + \beta_2 x^1,$$

где $\alpha_2$ определяется системой (71), и оптимальный путь из 0 в $x$ кусочно-линеен

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau_+^{\emptyset}} z_+, & \text{если } 0 \le t \le \tau_+^{\emptyset}, \\ z_+ + \dfrac{t - \tau_+^{\emptyset}}{\tau_+^*}(x - z_+), & \text{если } \tau_+^{\emptyset} \le t \le \tau_+^{\emptyset} + \tau_+^*, \end{cases}$$

где $z_+ = (0, z_+^1)$, $z_+^1 > 0$, $\tau_+^{\emptyset} > 0$, $\tau_+^* > 0$ определяются из системы

$$\begin{cases} \nabla H_{\{1\}}^{1,1}(\alpha_2, \beta_2) = \dfrac{x - z_+}{\tau_+^*}, \\ \partial_\beta \mathcal{H}_{\emptyset}^{1,1}(\beta_2) = \dfrac{z_+^1}{\tau_+^{\emptyset}}. \end{cases}$$

Теорема 3.5.4 доказана.

Теорема 3.5.5. *Пусть имеет место* (69). *Тогда для любого* $x = (x^0, x^1) \in R_+^1 \times R^1$ *выполняются следующие утверждения.*

(i) *Пусть* $\beta_1 \le \beta^*(-x) \le \beta_2$, *тогда*

$$\mathcal{L}_{x,0} = -\alpha^*(-x)x^0 - \beta^*(-x)x^1,$$

*и оптимальный путь из* $x$ *в* 0 *линеен*

$$\varphi(t) = x - \frac{t}{\tau^*(-x)}x, \qquad t \in [0, \tau^*(-x)].$$

(ii) *Пусть* $\beta^*(-x) < \beta_1$, *тогда*

$$\mathcal{L}_{x,0} = -\alpha_1^{\zeta} x^0 - \beta_1 x^1,$$

*где* $\alpha_1^{\zeta}$ *определяется из системы*

$$\begin{cases} H_{\{1\}}^{1,1}(\alpha_1^{\zeta}, \beta_1) = 0, \\ \partial_\alpha H_{\{1\}}^{1,1}(\alpha_1^{\zeta}, \beta_1) < 0, \end{cases}$$

*и оптимальный путь из* $x$ *в* 0 *кусочно-линеен*

$$\varphi(t) = \begin{cases} x + \dfrac{t}{\tau_+^*}(z_+ - x), & \text{если } 0 \le t \le \tau_+^*, \\ z_+ - \dfrac{t - \tau_+^*}{\tau_+^{\emptyset}} z_+, & \text{если } \tau_+^* \le t \le \tau_+^{\emptyset} + \tau_+^*, \end{cases}$$

*где* $z_+ = (0, z_+^1)$, $z_+^1 > 0$, $\tau_+^{\emptyset} > 0$, $\tau_+^* > 0$ *определяются из системы*

$$\begin{cases} \nabla H_{\{1\}}^{1,1}(\alpha_1^{\zeta}, \beta_1) = \dfrac{z_+ - x}{\tau_+^*}, \\ \partial_\beta \mathcal{H}_{\emptyset}^{1,1}(\beta_1) = \dfrac{-z_+^1}{\tau_+^{\emptyset}}. \end{cases}$$

(iii) *Пусть* $\beta_2 < \beta^*(-x)$, *тогда*

$$\mathcal{L}_{x,0} = -\alpha_2^{\zeta} x^0 - \beta_2 x^1,$$

*где* $\alpha_2^{\zeta}$ *определяется из системы*

$$\begin{cases} H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha_2^{\zeta}, \beta_2) = 0, \\ \partial_\alpha H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha_2^{\zeta}, \beta_2) < 0, \end{cases}$$

*и оптимальный путь из* $x$ *в* $0$ *кусочно-линеен*

$$\varphi(t) = \begin{cases} x + \dfrac{t}{\tau_-^*}(z_- - x), & \text{если } 0 \le t \le \tau_-^*, \\ z_- - \dfrac{t - \tau_-^*}{\tau_-^{\emptyset}} z_-, & \text{если } \tau_-^* \le t \le \tau_-^{\emptyset} + \tau_-^*, \end{cases}$$

*где* $z_- = (0, z_-^1)$, $z_-^1 < 0$, $\tau_-^{\emptyset} > 0$, $\tau_-^* > 0$ *определяются из системы*

$$\begin{cases} \nabla H^{1,1}_{\{1\}}(\alpha_2^{\zeta}, \beta_2) = \dfrac{z_- - x}{\tau_-^*}, \\ \partial_\beta \mathcal{H}^{1,1}_{\emptyset}(\beta_2) = -\dfrac{-z_-^1}{\tau_-^{\emptyset}}. \end{cases}$$

Данную теорему можно легко доказать, используя те же рассуждения что и при доказательстве теоремы 3.5.4.

### 3.6. Стационарные вероятности для эргодического случайного блуждания в $Z_+^2$.

Рассмотрим случайное блуждание $S_t(i,j)$, $t \in Z_+$, в $Z_+^2$ с началом в точке $(i,j) \in Z_+^2$:

$$S_0(i,j) = (i,j),$$

и переходными вероятностями, определенными в параграфе 2.2. Здесь мы не будем предполагать, что $d = 1$.

Рассмотрим следующие функции

$$H(\alpha,\beta) = \log\left\{\sum_{(i,j)} p_{ij} \exp\{\alpha i + \beta j\}\right\},$$

$$h_1(\alpha,\beta) = \log\left\{\sum_{(i,j))} p'_{ij} \exp\{\alpha i + \beta j\}\right\},$$

$$h_2(\alpha,\beta) = \log\left\{\sum_{i,j} p''_{ij} \exp\{\alpha i + \beta j\}\right\}.$$

Для любого $\alpha$ рассмотрим $\beta_0(\alpha)$ такое, что

$$\partial_\beta H(\alpha, \beta_0(\alpha)) = 0,$$

и для любого $\beta$ рассмотрим $\alpha_0(\beta)$ такое, что

$$\partial_\alpha H(\alpha_0(\beta), \beta) = 0.$$

Рассмотрим

$$\mathcal{H}_{\{1\}}(\alpha) = \begin{cases} H(\alpha, \beta_0(\alpha)), & \text{если } H(\alpha, \beta_0(\alpha)) \geq h_1(\alpha, \beta_0(\alpha)), \\ H(\alpha, \beta(\alpha)) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\beta(\alpha)$ определяется из системы

$$\begin{cases} H(\alpha, \beta) = h_1(\alpha, \beta(\alpha)), \\ \partial_\beta H(\alpha, \beta(\alpha)) < 0. \end{cases} \tag{74}$$

Также рассмотрим

$$\mathcal{H}_{\{2\}}(\beta) = \begin{cases} H(\alpha_0(\beta), \beta), & \text{если } H(\alpha_0(\beta), \beta) \geq h_2(\alpha_0(\beta), \beta), \\ H(\alpha(\beta), \beta) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\alpha(\beta)$ определяется из системы

$$\begin{cases} H(\alpha(\beta), \beta) = h_2(\alpha(\beta), \beta), \\ \partial_\alpha H(\alpha(\beta), \beta) < 0. \end{cases} \tag{75}$$

Пусть $L(\cdot)$, $L_1(\cdot)$, $L_2(\cdot)$ преобразования Лежандра функций $H(\cdot), \mathcal{H}_{\{1\}}(\cdot), \mathcal{H}_{\{2\}}(\cdot)$ соответственно. Рассмотрим функцию

$$L((i,j), v) = \begin{cases} L_{1,2}(v), & \text{если } i > 0, j > 0, \\ L_1(v^1), & \text{если } i > 0, j = 0, \\ L_2(v^2), & \text{если } i = 0, j > 0, \\ 0, & \text{если } i = j = 0, \end{cases}$$

где $v = (v^1, v^2)$.

Из принципа больших уклонений для случайного блуждания в $Z_+^1 \times Z^1$ (3.1.1) легко следует принцип больших уклонений для эргодического случайного блуждания в $Z_+^2$. В транзиентном случае в четверти плоскости остается открытой проблема нахождения вероятности быть в окрестности $(0,0)$. Этот случай в данной статье не обсуждается.

Теорема 3.6.1. *Пусть случайное блуждание $S_t$ эргодично. Тогда оно удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия $\mathcal{L}_\tau$ таким, что для любого $\tau \geq 0$ и для любого непрерывного пути $\varphi$: $[0,\tau] \to R_+^2$*

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \int_0^\tau L(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))\, dt,$$

*если путь $\varphi$ абсолютно непрерывен, и*

$$\mathcal{L}_\tau(\varphi) = \infty$$

*в противном случае.*

Пусть случайное блуждание $S_t$ эргодично. Рассмотрим стационарные вероятности $\pi(x)$, $x \in Z_+^2$, этого случайного блуждания. Используя принцип больших уклонений, мы сейчас получим логарифмическую асимптотику $\pi([xN])$ при $N \to \infty$ для любого $x \in R_+^2$.

Будем предполагать, что

$(H_0)$:

(0) Марковская цепь, соответствующая случайному блужданию $S_t$ неприводима и апериодична.

(1) Индуцированная марковская цепь с множеством состояний $Z_+$ и переходными вероятностями

$$p_1(l,l') = \sum_{k'} p\big((1,l) \to (1+k',l')\big)$$

неприводима и апериодична..

(2) Те же предположения выполняются и для индуцированной цепи с переходными вероятностями

$$p_2(k,k') = \sum_{l'} p\big((k,1) \to (k',1+l')\big).$$

$(H)$:

$$\nabla H(0,0) \neq 0,$$
$$\frac{d}{d\alpha}\mathcal{H}_{\{1\}}(0) \neq 0,$$
$$\frac{d}{d\beta}\mathcal{H}_{\{2\}}(0) \neq 0.$$

Используя те же рассуждения , что и в пункте 3.5 нетрудно показать для любых двух точек существует оптимальный путь из одной точки в в другую. Рассмотрим для любой точки $x \in R_+^2$ оптимальный путь из точки 0 в $x$

$$\varphi_x : [0,\tau_x] \to R_+^2,$$

и рассмотрим

$$\mathcal{L}_{0,x} = \mathcal{L}_{\tau_x}(\varphi_x).$$

**Теорема 3.6.2.** *Для любого $x \in R_+^2$*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \pi([xN]) = -\mathcal{L}_{0,x}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что:

$$\pi([xN]) \geq \pi(0)P(S_{N\tau}(0) = [xN]).$$

Используя оценку снизу для последнего множителя, получаем:

$$\frac{1}{N}\log \pi([xN]) \geq -\mathcal{L}_{0,x} - \varepsilon. \tag{76}$$

Чтобы получить оценку сверху

$$\frac{1}{N}\log \pi([xN]) \leq -\mathcal{L}_{0,x} + \varepsilon,$$

мы рассмотрим интервал времени $[0, Nr_1+Nr+N\tau_x]$ для достаточно большого $r_1$, $r_1$ – наименьшее целое такое, что $r\alpha > \mathcal{L}_{0,x}$, где $\alpha$ – некоторая фиксированная константа (см. ниже), $\tau_x$ – время оптимального пути из точки 0 в точку $x$. Учитывая экспоненциальную сходимость к стационарным вероятностям достаточно доказать следующую верхнюю оценку:

$$P\big(S_{Nr_1+Nr+N\tau_x}(0) = [xN]\big) \leq \exp(-\mathcal{L}_{0,x}N + \varepsilon N).$$

Пусть $\gamma_0$ – первый момент времени, когда случайное блуждание попадает в 0 и такой, что $\gamma_0 > Nr_1$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} P\big(S_{Nr_1+Nr+N\tau_x}(0) &= [xN]\big) \\ &= \sum_{k=Nr_1}^{Nr_1+Nr} P\big(\gamma_0 = k, S_{Nr_1+Nr+N\tau_x}(0) = [xN]\big) + P\big(\gamma_0 \geq N(r_1+r)\big). \end{aligned} \tag{77}$$

Для каждого слагаемого в первой сумме имеем оценку:

$$\begin{aligned} P\big(\gamma_0 = k, &S_{Nr_1+Nr+N\tau}(0) = [xN]\big) \\ &\leq \sum_{\varphi^i_\cdot} P\left(\sup_{t=0,\dots,Nr+N\tau} |S_t(0) - \varphi_t^{(N),i}| < \delta(\varepsilon, \varphi^{(i)})N\right) \end{aligned} \tag{78}$$

где $\varphi^i_\cdot$, $i = 1, \dots,$ – конечное подпокрытие множества $\Phi_{0,x,r+\tau_x}$ всех допустимых путей из точки 0 в точку $x$, выбранное из покрытия множества $\Phi_{0,x,r+\tau_x}$ $\delta(\varepsilon, \varphi)$-окрестностями, участвующими в определении верхней оценки принципа больших уклонений.

Для каждой вероятности

$$P\left(\sup_{t=0,\dots,Nr+N\tau} |S_t(0) - \varphi_t^{(N),i}| < \delta N\right)$$

выполнена верхняя оценка принципа больших уклонений:

$$P\left(\sup_{t=0,\dots,Nr+N\tau} |S_t(0) - \varphi_t^{(N),i}| < \delta(\varepsilon, \varphi)N\right) < \exp(-\mathcal{L}_{0,x}N + N\varepsilon)$$

при достаточно больших $N$. Нужно учесть также, что в первой сумме линейное по $N$ число слагаемых.

Для того чтобы оценить второе слагаемое из (63) заметим, что в нашем случае эргодического блуждания в четверти плоскости следующая оценка имеет место:

$$P(\gamma_0 \geq Nr) \leq \exp(-\alpha r N), \tag{79}$$

$-\alpha$ – некоторая фиксированная константа. Оценку сверху (79) можно получить изменением аналогичных оценок в [5]. Таким образом, теорема 3.6.2 доказана.

Вычислим для любого $x \in R^2_+$ значение $\mathcal{L}_{0,x}$. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{cases} H(\alpha,\beta) = 0, \\ \tau \nabla H(\alpha,\beta) = x, \\ \tau > 0. \end{cases} \tag{80}$$

Для любого $x \in R^2_+$ существует единственное решение этой системы $\alpha^*(x)$, $\beta^*(x)$, $\tau^*(x)$.

Рассмотрим также следующие уравнения

$$\mathcal{H}_{\{1\}}(\alpha) = 0, \tag{81}$$

и

$$\mathcal{H}_{\{2\}}(\beta) = 0. \tag{82}$$

Из-за выпуклости функций $\mathcal{H}_{\{1\}}(\cdot)$ и $\mathcal{H}_{\{2\}}(\cdot)$ и предположений $(H)$ следует, что каждое из этих двух уравнений имеет ровно два различных решения. Пусть $\alpha^1_{\{1\}} < \alpha^2_{\{1\}}$ и $\beta^1_{\{2\}} < \beta^2_{\{2\}}$ решения уравнений (81) и (82) соответственно. Легко показать, что

$$\alpha^1_{\{1\}} \leq 0 \leq \alpha^2_{\{1\}}, \qquad \beta^1_{\{2\}} \leq 0 \leq \beta^2_{\{2\}},$$
$$\frac{d}{d\alpha}\mathcal{H}_{\{1\}}(\alpha^1_{\{1\}}) < 0, \qquad \frac{d}{d\alpha}\mathcal{H}_{\{1\}}(\alpha^2_{\{1\}}) > 0,$$

и

$$\frac{d}{d\beta}\mathcal{H}_{\{2\}}(\beta^1_{\{2\}}) < 0, \qquad \frac{d}{d\beta}\mathcal{H}_{\{2\}}(\beta^2_{\{2\}}) > 0.$$

Теорема 3.6.3. *Для любого $x \in R^2_+$ выполняются следующие утверждения*
(i) *Пусть $\alpha^*(x) \leq \alpha^2_{\{1\}}$ и $\beta^*(x) \leq \beta^2_{\{2\}}$, тогда*

$$\mathcal{L}_{0,x} = \alpha^*(x)x^1 + \beta^*(x)x^2,$$

*и оптимальный путь из* 0 *в $x$ линеен*

$$\varphi_x(t) = \frac{t}{\tau^*(x)}x, \qquad t \in [0, \tau^*(x)].$$

(ii) *Пусть* $\alpha^*(x) > \alpha^2_{\{1\}}$ *и* $\beta^*(x) \le \beta^2_{\{2\}}$, *тогда*

$$\mathcal{L}_{0,x} = \alpha^2_{\{1\}} x^1 + \beta^2_{\{1\}} x^2,$$

*где* $\beta^2_{\{1\}}$ *определяется из системы*

$$\begin{cases} H(\alpha^2_{\{1\}}, \beta^2_{\{1\}}) = 0, \\ \partial_\beta H(\alpha^2_{\{1\}}, \beta^2_{\{1\}}) \ge 0. \end{cases}$$

*Для* $x^2 = 0$ *оптимальный путь из* 0 *в* $x$ *линеен*

$$\varphi^1_x(t) = \frac{t}{\tau^1} x, \qquad t \in [0, \tau^1],$$

*где* $\tau^1 > 0$ *определяется из уравнения*

$$\frac{d}{d\alpha} \mathcal{H}_{\{1\}}(\alpha^2_{\{1\}}) = \frac{x^1}{\tau^1}.$$

*Для* $x^2 > 0$ *оптимальный путь из* 0 *в* $x$ *кусочно-линеен*

$$\varphi^1_x(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau^1_1} z_1, & \text{если } 0 \le t \le \tau^1_1, \\ z_1 + \dfrac{t - \tau^1_1}{\tau^2_1}(x - z_1), & \text{если } \tau^1_1 \le t \le \tau^1_1 + \tau^2_1, \end{cases}$$

*где* $z_1 = (z^1_1, 0)$, $z^1_1 > 0$, $\tau^1_1 > 0$, $\tau^2_1 > 0$ *определяются из системы*

$$\begin{cases} \nabla H(\alpha^2_{\{1\}}, \beta^2_{\{1\}}) = \dfrac{x - z_1}{\tau^2_1}, \\ \dfrac{d}{d\alpha} \mathcal{H}_{\{1\}}(\alpha^2_{\{1\}}) = \dfrac{z^1_1}{\tau^2_1}. \end{cases}$$

(iii) *Пусть* $\alpha^*(x) \le \alpha^2_{\{1\}}$ *и* $\beta^*(x) > \beta^2_{\{2\}}$, *тогда*

$$\mathcal{L}_{0,x} = \alpha^2_{\{2\}} x^1 + \beta^2_{\{2\}} x^2,$$

*где* $\alpha^2_{\{2\}}$ *определяется из системы*

$$\begin{cases} H(\alpha^2_{\{2\}}, \beta^2_{\{2\}}) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \alpha} H(\alpha^2_{\{2\}}, \beta^2_{\{2\}}) \ge 0. \end{cases} \tag{83}$$

*Для* $x^1 = 0$ *оптимальный путь из* 0 *в* $x$ *линеен*

$$\varphi^2_x(t) = \frac{t}{\tau^2} x, \qquad t \in [0, \tau^2],$$

*где $\tau^2 > 0$ определяется из уравнения*

$$\frac{d}{d\beta}\mathcal{H}_{\{2\}}(\beta^2_{\{2\}}) = \frac{x^2}{\tau^2}.$$

*Для $x^1 > 0$ оптимальный путь из 0 в $x$ кусочно-линеен*

$$\varphi^2_x(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau_1^2} z_2, & \text{если } 0 \le t \le \tau_1^2, \\ z_2 + \frac{t-\tau_1^2}{\tau_2^2}(x - z_2), & \text{если } \tau_1^2 \le t \le \tau_1^2 + \tau_2^2, \end{cases}$$

*где $z_2 = (0, z_2^2)$, $z_2^2 > 0$, $\tau_2^1 > 0$, $\tau_2^2 > 0$ определяются из системы*

$$\begin{cases} \nabla H(\alpha^2_{\{2\}}, \beta^2_{\{2\}}) = \frac{x - z_2}{\tau_2^2}, \\ \frac{d}{d\beta}\mathcal{H}_{\{2\}}(\beta^2_{\{2\}}) = \frac{z_2^2}{\tau_2^2}. \end{cases}$$

(iv) *Пусть $\alpha^*(x) > \alpha^2_{\{1\}}$ и $\beta^*(x) > \beta^2_{\{2\}}$, тогда*

$$\mathcal{L}_{0,x} = \min\{\alpha^2_{\{1\}}x^1 + \beta^2_{\{1\}}x^2, \alpha^2_{\{2\}}x^1 + \beta^2_{\{2\}}x^2\},$$

*и оптимальный путь из 0 в $x$ следующий*

$$\varphi_x(t) \equiv \begin{cases} \varphi^1_x(t), & \text{если } \alpha^2_{\{1\}}x^1 + \beta^2_{\{1\}}x^2 > \alpha^2_{\{2\}}x^1 + \beta^2_{\{2\}}x^2 \ , \\ \varphi^1_x(t), & \text{если } \alpha^2_{\{1\}}x^1 + \beta^2_{\{1\}}x^2 > \alpha^2_{\{2\}}x^1 + \beta^2_{\{2\}}x^2 \ . \end{cases}$$

Эту теорему легко доказать, используя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3.5.4.

Полезно рассмотреть следующие условия, которые эквивалентны условиям (i), (ii), (iii) и (iv) теоремы 3.6.3.

1. $\sim$ (i) $h_1(\alpha^*(x), \beta^*(x)) \le 0$, $h_2(\alpha^*(x), \beta^*(x)) \le 0$.
2. $\sim$ (ii) $h_1(\alpha^*(x), \beta^*(x)) > 0$, $h_2(\alpha^*(x), \beta^*(x)) \le 0$.
3. $\sim$ (iii) $h_1(\alpha^*(x), \beta^*(x)) \le 0$, $h_2(\alpha^*(x), \beta^*(x)) > 0$.
4. $\sim$ (iv)$'$ $h_1(\alpha^*(x), \beta^*(x)) > 0$, $h_2(\alpha^*(x), \beta^*(x)) > 0$.

Данная эквивалентность легко следует из определения функций $\mathcal{H}_{\{1\}}$ и $\mathcal{H}_{\{2\}}$.

Дадим геометрическую интерпретацию условий (i)–(iv). Для этого введем полярные координаты в $R^2_+ \setminus \{0\}$

$$x^1 = r(x)\cos\gamma(x), \qquad x^2 = r(x)\sin\gamma(x)$$
$$r(x) > 0, \qquad 0 \le \gamma(x) \le \frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим $0 \le \gamma_1 \le \frac{\pi}{2}$ и $0 \le \gamma_2 \le \frac{\pi}{2}$ такие, что

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\dfrac{\partial}{\partial \beta} H(\alpha^2_{\{1\}}, \beta^2_{\{1\}})}{\dfrac{\partial}{\partial \alpha} H(\alpha^2_{\{1\}}, \beta^2_{\{1\}})},$$

и

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\dfrac{\partial}{\partial \beta} H(\alpha^2_{\{2\}}, \beta^2_{\{2\}})}{\dfrac{\partial}{\partial \alpha} H(\alpha^2_{\{2\}}, \beta^2_{\{2\}})}.$$

Заметим, что для любого $x \in R^2_+$

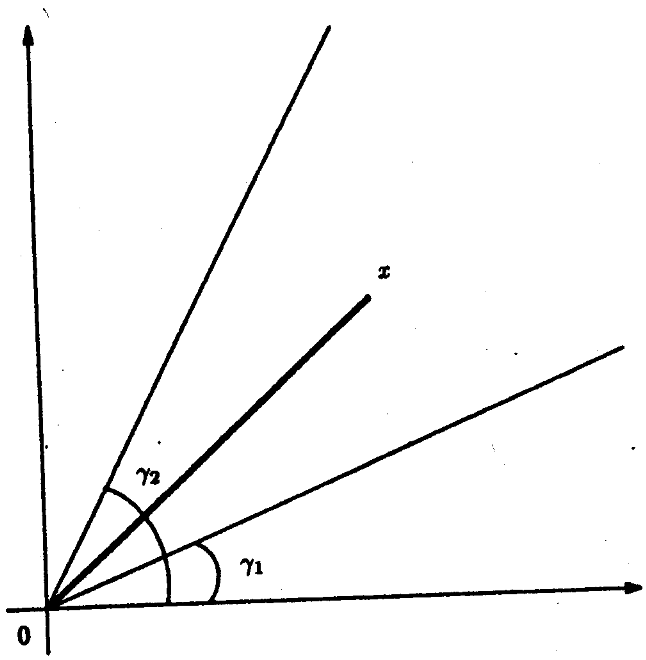
$$\alpha^*(x) = \alpha^2_{\{1\}} \Longleftrightarrow \gamma(x) = \gamma_1,$$
$$\beta^*(x) = \beta^2_{\{2\}} \Longleftrightarrow \gamma(x) = \gamma_2,$$

и, кроме того,

$$\alpha^*(x) < \alpha^2_{\{1\}} \Longleftrightarrow \gamma(x) > \gamma_1,$$
$$\alpha^*(x) > \alpha^2_{\{1\}} \Longleftrightarrow \gamma(x) < \gamma_1,$$
$$\beta^*(x) < \beta^2_{\{2\}} \Longleftrightarrow \gamma(x) < \gamma_2,$$
$$\beta^*(x) > \beta^2_{\{2\}} \Longleftrightarrow \gamma(x) > \gamma_2.$$

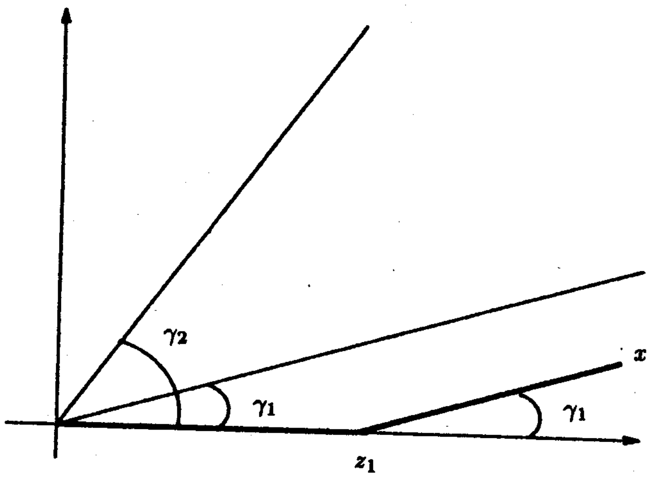
Из теоремы 3.6.3 вытекает, что для $x \in R^2_+$ выполняются следующие утверждения.

(i) Пусть $\gamma_1 \le \gamma(x) \le \gamma_2$. Тогда оптимальный путь из точки 0 в точку $x$ линеен.



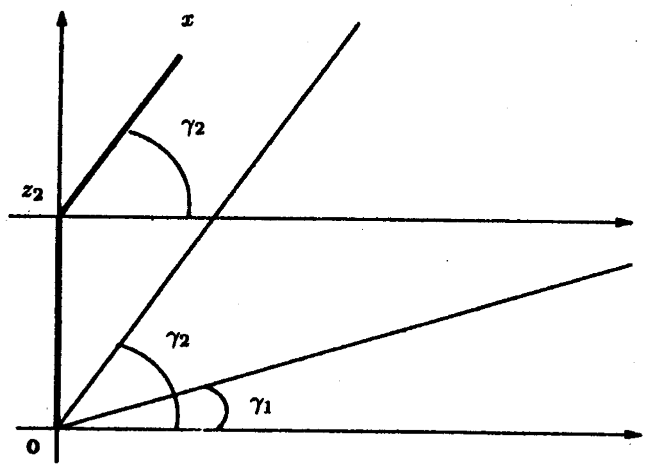
(ii) Пусть $\gamma(x) < \gamma_1$ и $\gamma(x) \leq \gamma_2$. Тогда оптимальным путь из точки 0 в точку $x$ кусочно-линеен $\varphi_1$ состоит из двух линейных отрезков: оптимального пути из 0 в $z_1 = (z^1, 0)$ и оптимального пути из $z_1$ в $x$, где $z_1 = (z^1, 0)$, $z^1 > 0$, единственное решение уравнения

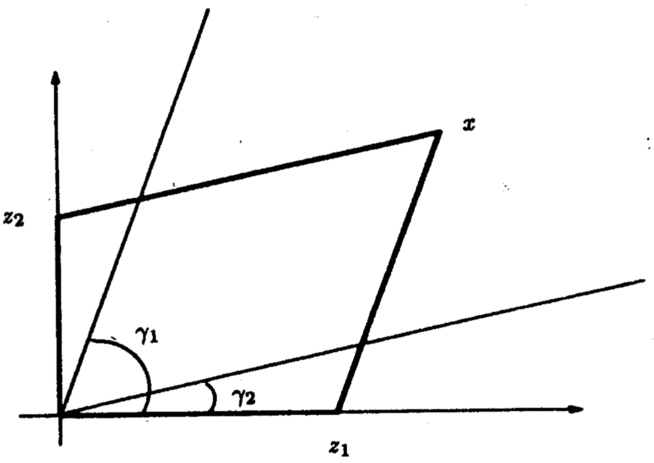
$$\gamma(x - z_1) = \gamma_1.$$




(iii) Пусть $\gamma(x) \geq \gamma_1$ и $\gamma(x) > \gamma_2$. Тогда оптимальный путь из точки 0 в точку $x$ кусочно-линейный путь $\varphi_2$, состоящий из двух линейных отрезков: оптимального пути из 0 в $z_2 = (0, z^2)$ и оптимального пути из $z_2$ в $x$, где $z_2 = (0, z^2)$, $z^2 > 0$, определяется единственным образом из уравнения

$$\gamma(x - z_2) = \gamma_2.$$






(iv) Пусть $\gamma(x) < \gamma_1$ и $\gamma(x) > \gamma_2$. Тогда оптимальный путь из точки 0 в точку $x$ это путь $\varphi_x^1$ или $\varphi_x^2$, на котором достигает минимума функционал действия.

Определим множества

$$\mathcal{P}_{--} = \{x \in R_+^2 : \gamma_1 \le \gamma(x) \le \gamma_2\},$$
$$\mathcal{P}_{+-} = \{x \in R_+^2 : \gamma(x) < \gamma_1, \gamma(x) \le \gamma_2\},$$
$$\mathcal{P}_{-+} = \{x \in R_+^2 : \gamma_1 \le \gamma(x), \gamma_2 < \gamma(x)\},$$
$$\mathcal{P}_{++} = \{x \in R_+^2 : \gamma(x) < \gamma_1, \gamma_2 < \gamma(x)\}.$$

Из теоремы 3.6.2 и теоремы 3.6.3 следует

Теорема 3.6.4. *Для любого $x \in R_+^2$*

$$\frac{1}{N}\log\pi([Nx]) \sim -\min\{\alpha_{\{1\}}^2(x)x^1 + \beta_{\{1\}}^2(x)x^2, \alpha_{\{2\}}^2(x)x^1 + \beta_{\{2\}}^2(x)x^2\},$$

*если $x \in \mathcal{P}_{++}$, и*

$$\frac{1}{N}\log\pi([Nx]) \sim \begin{cases} -\alpha^*(x)x^1 - \beta^*(x)x^2, & \text{если } x \in \mathcal{P}_{--}, \\ -\alpha_{\{1\}}^2(x)x^1 - \beta_{\{1\}}^2(x)x^2, & \text{если } x \in \mathcal{P}_{+-}, \\ -\alpha_{\{2\}}^2(x)x^1 - \beta_{\{2\}}^2(x)x^2, & \text{если } x \in \mathcal{P}_{-+}. \end{cases}$$

Легко видеть, что эти результаты совпадают с результатами теоремы 2.2.1. Представляет интерес нахождение более глубокой связи между аналитическим и вероятностными подходами.

## 4. Приложение

Рассмотрим счетную марковскую цепь с множеством состояний $X$ и переходными вероятностями $p_{i,j}$, $i, j \in X$.

Допустим, что выполнены следующие условия

$D$:

(i) Эта марковская цепь неприводима и апериодична.

(ii) Существуют функции $f\colon X \to R_+$ и $k\colon X \to Z_+$ такие, что

(a) для любого $b > 0$

$$\sum_{j \in X} \exp\{-bf(j)\} < \infty;$$

(b) существует $d > 0$ такое, что для любых $i, j \in X$

$$p_{i,j} = 0, \quad \text{если } |f(j) - f(i)| > d;$$

(c) $\sup\limits_i k(i) < \infty$;

(d) существует конечное подмножество $X_0 \subset X$ такое, что для любого $i \in X \setminus X_0$

$$\sum_j p_{i,j}^{(k(i))} f(j) \leq f(i) - \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ не зависит от $i \in X \setminus X_0$.

Из этих предположений следует (см. [5]), что данная марковская цепь эргодична и, кроме того, выполнены следующие два условия.

1. Для любого $h > 0$ существует $c > 0$ и $h' > 0$ такие, что для любых $i, j \in X$ и любого $t \in Z_+$

$$p_{i,j}^{(t)} \leq ce^{hf(i) - h'f(j)}. \tag{84}$$

2. Для любого $h > 0$ существуют $c > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что для любого $i \in X$ и любого $t \in Z_+$

$$\sum_{j \in X} |p_{i,j}^{(t)} - \pi(j)| \leq ce^{hf(i) - \alpha t}, \tag{85}$$

где $\pi(j)$, $j \in X$, стационарные вероятности данной марковской цепи.

Рассмотрим марковскую цепь с множеством состояний $Z_+$ и переходными вероятностями $p_{i,j}$, $i, j \in Z_+$, такими что

$$p_{i,j} = p_{j-i} \quad \text{и} \quad \sum_j p_{j-i}(j - i) < 0$$

для всех $i > d_1$, и

$$p_{i,j} = 0, \quad \text{если } |j - i| > d_2$$

с некоторыми положительными константами $d_1$, $d_2$. Тогда данная марковская цепь эргодична и удовлетворяет условиям $D$ с функциями

$$f(j) = j \quad \text{и} \quad k(j) = 1, \qquad j \in Z_+.$$

Марковская цепь с множеством состояний $Z^1$ и переходными вероятностями $p_{i,j}$, $i,j \in Z^1$, такими что

$$p_{i,j} = p_{+,j-i} \text{ и } \sum_j p_{+,j-i}(j-i) < 0 \text{ для всех } i > d_1 > 0,$$
$$p_{i,j} = p_{-,j-i} \text{ и } \sum_j p_{-,j-i}(j-i) > 0 \text{ для всех } i < -d_1 < 0,$$

и

$$p_{i,j} = 0, \text{ если } |j-i| > d_2$$

с некоторыми положительными константами $d_1, d_2$, также эргодична и удовлетворяет условиям $D$.

Приведенные два примера тривиальны. Чтобы получить более сложный пример, можно рассмотреть почти однородное случайное блуждание в $Z_+^\nu$, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям (см., например, [1], [4], и [5]).

Пусть $\xi_t(i)$, $i \in X$, случайное блуждание в $X$ соответствующее нашей марковской цепи с началом в точке $i$.

ТЕОРЕМА 4.1 (Неравенство Колмогорова). *Пусть $V_t(i,j)$, $i,j \in X$, $t \in Z_+$, независимые случайные векторы со значениями в $R^\mu$ такие, что для любых $i,j \in X$ векторы $V_t(i,j)$, $t \in Z_+$, одинаково распределены и*

$$\|V_t(i,j)\| \le C_0 < \infty \text{ п.н.,} \tag{86}$$

*где $C_0 > 0$ не зависит от $i,j$.*

*Тогда для любого $i \in X$ существует $c = c(i) > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ и любого $T \in Z_+$*

$$P\left\{\sup_{\tau=1,\dots,T}\left\|\sum_{n=0}^{t} V_n(\xi_n(i),\xi_{n+1}(i)) - EV_n(\xi_n(i),\xi_{n+1}(i))\right\| > \delta T\right\} \le \frac{c}{\delta^2 T} \tag{87}$$

Для того чтобы доказать эту теорему, нам понадобится

ЛЕММА 4.1. *Для любого $i \in X$ существуют $c_1 > 0$ и $\alpha_1 > 0$ такие, что для любых $n, m \in Z_+$*

$$\begin{aligned} &\big|E\big(V_n(\xi_n(i),\xi_{n+1}(i)) - EV_n(\xi_n(i),\xi_{n+1}(i),\\ &\qquad V_m(\xi_m(i),\xi_{m+1}(i)) - EV_m(\xi_m(i),\xi_{m+1}(i))\big)\big| \le c_1 e^{-\alpha_1|n-m|}, \end{aligned} \tag{88}$$

*где $(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение в $R^\mu$,*

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{\mu} x^j y^j, \qquad x,y \in R^\mu.$$

Доказательство. Из (91) и (86) следует, что для любого $h > 0$ существует $C_1 > 0$ такое, что

$$\sum_{j=n+1}^{t-1} |E(S_n I_n, V_l - a_j)| \le C_1 E(|S_n| I_n \exp\{h\xi_x^\Lambda(n)\}). \tag{93}$$

Заметим, что из (86) следует, что

$$I_n = 0 \text{ п.н. для } n \le \frac{\delta t}{2C_0}. \tag{94}$$

Тогда из (86), (93) и (94) получаем

$$I_2 \le C_1 \sum_{n=\theta t}^{t-1} nE(I_n \exp\{h\xi_x^\Lambda(n)\}), \tag{95}$$

где $\theta = \delta/2C_0$.

Рассмотрим следующее событие

$$B_n = \{\xi_x^\Lambda(n) > \varepsilon t\}.$$

Пусть $I_{B_n}$ его индикатор. Рассмотрим

$$J_2'(t) = \sum_{n=\theta t}^{t-1} nE(I_{A_n} I_n \exp\{h\xi_x^\Lambda(n)\}),$$
$$J_2''(t) = \sum_{n=\theta t}^{t-1} nE((1 - I_{A_n}) I_n \exp\{h\xi_x^\Lambda(n)\}).$$

Для $J_2''(t)$ при малых $\varepsilon > 0$ можно легко получить

$$J_2'' \le \sum_{n=\theta t}^{t-1} nE(I_n \exp\{\varepsilon t\}) \le C_2 \exp(-\beta t), \tag{96}$$

так как

$$E(I_n) \le C_2' \exp(-\beta' t).$$

Для $J_2'$ имеем

$$J_2' \le \sum_{n=\theta t}^{t-1} nE(I_{A_n} \exp\{h\xi_x^\Lambda(n)\}) \le C_3 \exp(-\gamma t), \tag{97}$$

так как

$$E(\exp(h\xi_x^\Lambda(n))) < \infty$$

для малых $h > 0$.

Из (95), (96) и (97) следует (92).

Доказательство леммы 4.1. Пусть $i \in X$ фиксировано, и

$$V_n = V_n(\xi_n(i), \xi_{n+1}(i)), \quad a_n = EV_n, \qquad n \in Z_+.$$

Для любых $n, m \in Z_+$, $n > m$, можно легко получить

$$(89) \qquad E(V_n - a_n, V_m - a_m) = \sum_{i',i'' \in X} p_{i,i'}^{(m)} p_{i',i''} \times \sum_{j',j'' \in X} \bigl(p_{i'',j'}^{(n-m-1)} - \pi(j')\bigr) p_{j',j''} \bigl(EV_m(i',i'') - a_m, EV_n(j',j'') - a_n\bigr).$$

Из (89) в силу (86) следует, что

$$(90) \qquad \bigl|E(V_n - a_n, V_m - a_m)\bigr| \le 4C_0^2 \sum_{i',j' \in X} p_{i,i'}^{(m+1)} \bigl|p_{i',j'}^{(n-m-1)} - \pi(j')\bigr|.$$

Из (90), (84) и (85) следует (88).

Лемма 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $i \in X$ фиксировано,

$$V_n = V_n(\xi_n(i), \xi_{n+1}(i)), \quad a_n = EV_n \ \text{ и } \ S_n = \sum_{j=0}^{n} (V_j - a_j), \qquad n \in Z_+.$$

Для данных $\delta > 0$ и $T \in Z_+$ рассмотрим следующие события

$$A_n = \bigl\{\|S_{n+1}\| > \delta T, \ \|S_0\| < \delta T, \dots, \|S_n\| < \delta T\bigr\}, \qquad n = 0, \dots, T.$$

Пусть $I_n$ индикатор события$A_n$. Тогда

$$(91) \qquad E\|S_t\|^2 \ge \sum_{n=0}^{t-1} \|S_n\|^2 - 2 \sum_{n=0}^{t-1} \sum_{j=n+1}^{t-1} |E(S_n I_n, V_l - a_j)| = J_1(t) - J_2(t).$$

Лемма 4.2. *Существует $C > 0$ такое, что для любого $t$*

$$(92) \qquad J_2(t) \le C.$$

Лемма 4.2 доказана.

Из (91), используя лемму 4.1, получаем

$$E\|S_t\|^2 \geq \sum_{n=0}^{t-1} E\|S_n\|^2 I_n - C, \tag{85}$$

где $c' = c'(x) > 0$.

Теперь заметим, что

$$\sum_{n=0}^{t-1} E\|S_n\|^2 I_n \geq \delta^2 t^2 P\left\{\max_{n=1,\dots,t} \|S_n\| > \varepsilon t\right\}. \tag{99}$$

Из (98) и (99) следует, что

$$P\left\{\max_{n=1,\dots,t} \|S_n\| > \varepsilon t\right\} \leq \frac{E\|S_t\|^2 + C}{\varepsilon^2 t^2}. \tag{100}$$

Теперь оценим значение $E\|S_t\|^2$.

$$E\|S_t\|^2 \leq \sum_{j=1}^{t} E\|V_j - a_j\|^2 + 2\sum_{j=1}^{t} \sum_{e=j+1}^{t} |E(V_j - a_j, V_e - a_e)|. \tag{101}$$

Из (101), используя (86) и лемму 4.1, получаем

$$E\|S_t\|^2 \leq c'' t, \tag{102}$$

где $c'' = c''(x) > 0$ Из (100) и (102) вытекает (87).

Теорема 4.1 доказана.

Из теоремы 4.1 в силу эргодичности цепи $\mathcal{L}_\Lambda$ легко следует

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1, *и*

$$V = \sum_{i,j \in X} \pi_i p_{i,j} EV_0(i,j).$$

*Тогда для любого $i \in X$ существует $c = c(i) > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ и любого $t \in Z_+$ выполнены следующие оценки*

$$P\left\{\sup_{\tau=1,\dots,t} \left\|\sum_{n=0}^{\tau} V_n(\xi_n(i), \xi_{n+1}(i)) - V\tau\right\| > \delta t\right\} \leq \frac{c}{\delta^2 t}. \tag{103}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] Malyshev V.A. Networks and Dynamical Systems // Adv. Appl. Probab. 1993. V. 25. P. 140–175.

[2] Dupuis P., Ellis R. Large deviations for Markov Processes with discontinuous statistics, II: random walks // Probab. Theory Relat. Fields. 1992. V. 91. P. 153–194.

[3] Dupuis P., Ishii H., Soner H. Mete A viscosity solution approach to the asymptotic analysis of queueing systems // Annals of Probab. 1990. V. 18. №1. P. 226–255.

[4] Ignatyuk I., Malyshev V. Classification of Random Walks in $Z^4_+$ // Selecta Math. (formerly Sovietica) 1993. V. 12. №2. P. 129–194.

[5] Малышев В., Меньшиков М. Эргодичность, непрерывность и аналитичность счетных цепей Маркова // Труды ММО. 1979. Т. 39. С. 3–48.

[6] Малышев В. Асимптотическое поведение стационарных вероятностей для эргодического случайного блуждания в четверти плоскости // Сибир. матем. журнал 1972. Т. 14. №1. С. 156–169.

[7] Вентцель А. Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов. М.: Наука, 1986.

[8] Deuschel J.-D., Stroock D.W. Large Deviations: Acad. Press Inc., 1989.

[9] Ellis R.S. Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics: Springer-Verlag, 1985.

[10] Dobrushin R.L. Analyticity of correlation functions in one-dimensional classical systems with slowly decreasing potentials // Comm. Math. Phis. 1973. V. 32. P. 269–289.

[11] Campanino M., Capocaccia D., Olivieri E. Analyticity for one-dimensional systems with long-range superstable interactions // J. Statist. Phis. 1983. V. 33. №2. P. 437–476.

[12] Blinovskii V.M., Dobrushin R.L. Process level large deviations for a class of piece-wise homogeneous random walks // Preprint, 1993. Institute for Problems of Information Transmission, Russian Academy of Sciences.

[13] Dobrushin R.L., Pecherskii E.A. Large deviations for random processes with independent increments // Preprint, 1993. Institute for Problems of Information Transmission, Russian Academy of Sciences.

[14] Коростелев А.П., Леонов С.Л. Функционал действия для диффузионного процесса с разрывным переносом // Теор. вер. и ее прим. 1992. Т. 37. №3. С. 350–357.

[15] Иоффе, Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.


Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
28.12.1993