Московский Государственный Университет
им. М.В. Ломоносова
Российская Академия Наук
Академия Технологических Наук России
Российская Академия Естественных Наук

Интеллектуальные системы

ТОМ 4 ВЫПУСК 3-4 * 1999

МОСКВА

Дискретная математика и математическая физика

В.А. Малышев

Дается неформальный обзор различных связей между дискретной математикой и современной математической физикой. Одна из целей – облегчить специалистам по дискретной математике знакомство с современной математической физикой. Статья представляет собой расширенный вариант доклада на семинаре «Теория автоматов» на механико-математическом факультете МГУ.

1. Введение

Философия современного физического метода использовалась уже Демокритом, Платоном и Аристотелем. Мир считался построенным из бесконечно делимых дискретных компонент по законам максимальной симметрии и порядка. Кульминацией этих взглядов в настоящее время является стандартная модель, имеющая поразительное согласие с экспериментом. В ней вещество строится из кварков-фермионов, а три типа сил – электромагнитные, слабые и сильные – переносятся глюонами-бозонами. Однако, именно сейчас, в пике таких воззрений, чувствуется настоятельная необходимость новых идей.

Четкого разграничения дискретной и «непрерывной» (континуальной) математики не существует. Обычно понимается, что непрерывная математика добавляет к дискретной предельный переход. Однако, при таком определении все алгебраические манипуляции относятся к дискретной математике. Это также неудовлетворительно, так как идея симметрии – основа применения алгебры в физике –

чужда информатике. Другая возможность – отнести к дискретной математике все, что касается конечных множеств. Но в то же время и асимптотика (по числу элементов конечного множества) не чужда дискретной математике.

Континуальный объект можно различными способами получить из дискретного. Не говоря уже о том, что численные расчеты всегда основаны на дискретной аппроксимации, даже многие теоремы удается доказать только благодаря искусному выбору дискретной аппроксимации. В квантовой теории поля все примеры начинаются с выбора дискретной аппроксимации, с дальнейшим (очень !) трудным предельным переходом.

В то же время математика начиналась с дискретных объектов, и иногда необходимо возвращаться к первоначалу. Например, чтобы встать на твердую землю строгой математики. С другой стороны, дискретность не богата симметриями, и вся красота начинает проявляться только после предельных переходов. Свойства, не зависящие от вида дискретного приближения, называются в физике универсальностью – это один из видов дискретной симметрии, когда симметрия выявляется после предельного перехода. Предполагается, что в квантовой гравитации дискретные модели будут играть еще более важную роль, хотя, парадоксально, только те свойства таких моделей, которые в максимальной степени не зависят от дискретной конкретики.

В классической физике величины принимают значения из непрерывного множества и в принципе могут быть измерены с любой точностью. Мы хорошо представляем себе единицы длины l, времени t и массы m. Все остальные единицы могут быть выражены через эти три. Выбор единицы измерения для физической единицы есть выбор шкалы $A \to sA$. Единицы $meter, sec, gr$ соответствуют нормальной для нас шкале.

Другая система единиц – где скорость света и постоянная Планка берутся безразмерными и равными $c = \frac{h}{2\pi} = 1$. В качестве третьей единицы берется MeV как единица энергии.

Помимо систем единиц в физике довольно много фундаментальных постоянных. Самые важные из них: скорость света $c = 3 \cdot$

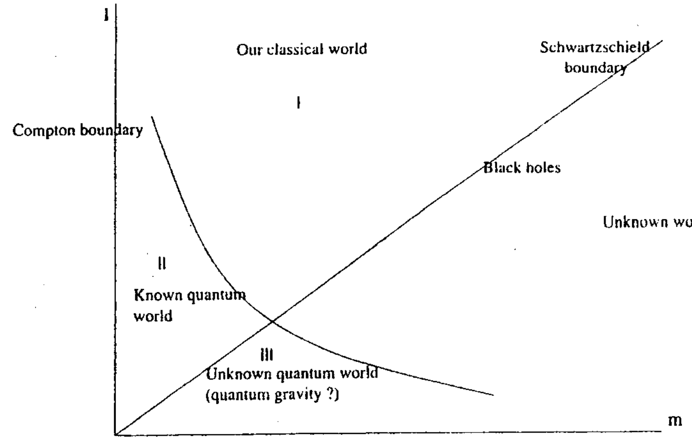

Рис. 1. Фазовая диаграмма теорий.

$10^9 meter \cdot sec^{-1}$; гравитационная постоянная $G = 6,7 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{gr \cdot sec^2}$, входящая в закон Ньютона

$$F = -Gmm' \frac{1}{r^2},$$

и постоянная Планка $\hbar = 10^{-34} sec^{-1} meter^2 kg$, входящая в соотношение неопределенностей.

На рисунке показаны две кривые в (m, l)-плоскости. Первая – граница Шварцшильда, определяемая сжатием массы m до радиуса Шварцшильда $l_S \approx \frac{Gm}{c^2}$. Около этой границы начинают играть роль эффекты общей теории относительности. Вторая линия отделяет классическую физику от квантовой: комптоновская длина $l_C \approx \frac{h}{mc}$ определяет границу, когда квантовые эффекты начинают играть роль для частицы массы m. Точка пересечения $l_S = l_C$ этих кривых определяет характерные величины

$$l_P = \sqrt{\frac{hG}{c^3}} \approx 10^{35} meter, m_P = \sqrt{\frac{hc}{G}} \approx 10^{-6} gr, t_P \approx 10^{-44} sec,$$

называемые длиной Планка, массой Планка и временем Планка. Область I заключает шкалы длины и массы, описываемые классической физикой. Область II соответствует шкалам, описываемым

В дискретном случае из обратимости следует цикличность траекторий. Автомат называется эргодическим, если есть только одна траектория, то есть все состояния сообщаются между собой. Тогда за один цикл каждое состояние посещается по одному разу и, значит, равномерная мера μ на множестве состояний $\{\omega\}$ является инвариантной. Ее принято записывать в виде

$$\mu(\omega) = Z^{-1}\exp(-H(\omega)), Z = \sum_{\omega}\exp(-H(\omega)),$$

так как на множестве где $H = const$ это соответствует равномерной мере. Гиббсовская мера определяется той же формулой, но уже на множестве всех возможных значений H.

3. Вероятность и квантовость

В фундаментальных законах классической физики нет случайности. Вероятность возникает за счет нашего незнания начального состояния Вселенной, незнания времени от начала Мира и т.д. Предполагается, что то, чего мы не знаем, в некотором смысле типично. Точнее, детерминированная динамика такова, что ее инвариантная мера (то есть гиббсовская мера) обладает хорошими свойствами перемешивания. Гиббсовская мера характеризует типичное состояние системы в равновесном состоянии. Чтобы получить стохастическую динамику из детерминированной, надо делать дополнительные скейлинги.

Квантовая же физика до сих пор не имеет прочной и интуитивно приемлемой интерпретации, тем более философской основы. Проблема прежде всего в том, что в жизни мы мыслим как на языке детерминированных, так и случайных явлений, но не на квантовом языке. Первые трудности понимания квантовой теории связаны с новой логикой.

3.1. Логика

С классической физикой, так же как и с информатикой, связывается стандартная логика высказываний, булевы алгебры или алгебры множеств. При этом каждому событию приписывается функция истинности, равная 1 или 0, в зависимости от того, произошло событие или нет. Случайность усложняет функцию истинности – теперь все значения между нулем и единицей возможны – оставляя дистрибутивность структуры. Получающаяся вероятностная мера на булевой алгебре определяет среднее – линейный функционал на алгебре случайных величин.

В квантовой логике меняется структура – вместо дистрибутивной булевой алгебры берется множество проекторов в гильбертовом пространстве, дедекиндова структура с ортодополнениями (не дистрибутивная). Высказывание (о событии в данный момент времени) соответствует проектору в гильбертовом пространстве. Связки «или», «и» разрешается применять только к парам событий, которые принадлежат одной булевой подалгебре.

Глобальной вероятностной меры больше нет, но есть глобальное среднее, называемое состоянием – линейный положительный нормированный функционал $<A>$ на алгебре операторов в гильбертовом пространстве. Однако, для интерпретации экспериментов (измерений в заданный момент времени) вероятностные меры имеются на каждой булевой подалгебре: любой булевой подалгебре B алгебры проекторов приписывается вероятностная мера $\mu(P) = |<P>|^2, P \in B$. Следует сказать, что в квантовой физике есть и другой тип вероятностей, аналогичный классическим мерам Гиббса. Они возникают в квантовой статистической физике (в полной аналогии с классической) в виде матрицы плотности ρ, через которую выражается состояние

$$<A> = Tr(A\rho).$$

Одна из интерпретаций новой логики состоит в том, что измерение величины в данный момент времени влияет на измерение всех других в следующие моменты. Это наиболее естественно видно на примере квантовой механики с дискретным временем.

3.2. Механика с дискретным временем

В дискретном варианте квантования координата $x \in R$ и ее значение $f(x)$ в следующий момент не могут быть точно измерены од-

Постулируется также «марковское» свойство: после измерения эволюция забывает о том, что было до редукции, и в качестве начальной матрицы плотности «после момента t» берется $\rho(t)$. Если P – проектор на вектор ϕ, это значит, что система переходит в состояние ϕ и все начинается сначала.

С этим связан спор о том, является ли классическая физика пределом квантовой или даже ее частным случаем. Несмотря на то, что квазиклассическая асимптотика дает определенную связь между классической и квантовой физикой, есть разные точки зрения, см. [14].

Существуют модели, где мир и наблюдатель объединяются в единую систему, описываемую одной динамикой. При этом естественно появляется интуиционистская логика Брауэра и алгебра Гейтинга, см. [13]. Для различения же наблюдателя и самой системы может быть полезен язык теории категорий, см. [17] и [18].

При этом установившаяся логическая интерпретация существует только для событий в фиксированный момент времени. Общепринятого взгляда на то, как трактовать события в разные моменты времени (например, как приписывать им вероятности), не существует. Это центральный вопрос, связанный с поисками альтернатив копенгагенской интерпретации квантовой теории. Квантовая система, описываемая только унитарной эволюцией, называется замкнутой. Насколько в замкнутой системе можно ввести обычную вероятностную трактовку, исследуется в подходе, называемом «согласованные истории» (consistent histories) [15, 16].

Заметим, что квантовый компьютер [49] есть просто квантовая система с унитарной эволюцией и с двумя актами измерения: в первый (приготовление состояния) и в последний момент (измерение результата).

4. Пространство, время – локальность, причинность

4.1. Клеточные автоматы

Единственными объектами физики до последнего времени были поля (частицу можно рассматривать как вырожденное δ-образное поле) на фиксированном классическом пространстве-времени. Пространство соответствует ячейкам памяти в компьютере, ленте в машине Тьюринга, клеткам клеточного автомата. Тогда поле соответствует биту информации в ячейке памяти. Физические законы инвариантны относительно сдвигов пространства, трансляционно инвариантны. Это соответствует однородности клеточного автомата, определенного на $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, кубе с центром в начале координат и со стороной длины $2N$. В каждой точке x определено поле $\sigma(x)$, принимающее конечное число значений, спин.

4.1.1. Квантование клеточного автомата

Если $f : S \to S$ – взаимно-однозначное отображение конечного или счетного множества S в себя, то в $l_2(S)$ ему соответствует перестановочная матрица U, определяемая равенством

$$(U\phi)(s) = \phi(f^{-1}s).$$

Преобразование U в гильбертовом пространстве $l_2(S)$ и считается квантованием детерминированного отображения f. Такая точка зрения пропагандировалась Нобелевским лауреатом Тоофтом ('t Hooft), см. [24, 25]. Необходимо подчеркнуть, что речь идет как-бы о квантовании системы «первого порядка».

Если f взаимно-однозначно, то существует матрица H такая, что

$$U_t = \exp(itH), U_1 = U.$$

Интересно, что в нецелые моменты времени U_t не определяет детерминированного отображения S в себя. Более того, H определена не

- Пространство-время Галилея. Топология и гладкая структура здесь та же, но группа преобразований дополняется трехпараметрической группой преобразований Галилея

$$t' = t, x' = x + vt.$$

Время по-прежнему имеет абсолютный характер, но пространство теряет абсолютный смысл. Имеет смысл говорить о расстояниях между точками пространства (и даже о самих точках пространства) только при фиксированном времени. В информатике этому отвечает возможность перенумерации ячеек памяти по ходу времени. Более того, это означает переход к языкам более высокого уровня, где мы не заботимся о том, как ячейки занумерованы. Следует, однако, подчеркнуть различие. В информатике ячейки памяти реально существуют и есть язык низкого уровня, учитывающий нумерацию. В физике же нумерация (координатизация) мыслится как вспомогательное средство для удобства записи.

- Хотя в пространстве-времени Минковского событие по-прежнему есть точка $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, но понятия момента времени и точки пространства теряют абсолютный смысл. Группа преобразований Галилея заменяется на группу Лоренца, группу линейных преобразований $\mathbb{R}^4$, сохраняющих квадратичную форму

$$(s' - s)^2 = c^2(t' - t)^2 - (x' - x)^2.$$

Световой конус точки (t, x) определяется уравнением

$$c^2(t' - t)^2 - (x' - x)^2 = 0$$

и состоит из полуконусов прошлого и будущего. Два события $(t, x), (t', x')$ могут быть либо времениподобны ($(s' - s)^2 > 0$), в этом случае событие (t', x') произошло раньше (t, x), если (t', x') лежит в конусе прошлого точки (t, x). Либо пространственноподобны ($(s'-s)^2 < 0$), в этом случае не имеет смысла говорить, какое из событий произошло раньше другого.

- Пространство Минковского одно и то же для всевозможных физических систем и служит вместилищем для вещества и ареной событий. Пространство-время Эйнштейна в общей теории относительности сохраняет от пространства-времени только факт наличия структуры четырехмерного гладкого локально лоренцева многообразия. Метрика и даже топология меняются в зависимости от наличия вещества. Говорить же о конкретном пространстве-времени разрешается только имея в виду и вещество в нем: не во всякое пространство-время можно положить любое вещество.

- Однако, самое существенное, что объединяет все перечисленные типы пространства-времени – существование единственного мира в прошлом и в будущем. Если рассмотреть все более поздние попытки изменить взгляды на пространство-время, то не видно никаких кардинальных перемен в понимании именно этого последнего свойства. Хотя, к таким кардинальным переменам ведет вся логика событий.

5. Симметрии и деформации

Идея симметрии в физике начинается с инвариантности относительно некоторой группы – группы симметрии. Так, частица в квантовой физике определяется как неприводимое представление группы симметрии. Помимо эстетической привлекательности, симметрия и механизмы ее нарушения оказались мощным средством для реализации основных требований к физической теории: предсказание спектра масс частиц, устранения расходимостей и аномалий, проблемы киральности (различения левого и правого). По первоначальной идее симметрия должна выбрать из континуума возможных теорий единственную. К сожалению, это пока далеко не достигнутая цель.

Различают глобальные (пространственно-временные и внутренние) и локальные (калибровочные) симметрии. Эту терминологию легко пояснить на следующем примере. Рассмотрим конфигурации на дискретном торе, то есть на квадрате $[-N, N]^2$ с отождествленными противоположными сторонами, со значениями в конечном мно-

Есть два фундаментальных нюанса, отличающих «новую» струну от «архаичной». Первый – инвариантность относительно алгебры Ли группы диффеоморфизмов $[0,1]$ или ее минимального расширения – алгебры Вирасоро. Второй – суперсимметричные обобщения и другие видоизменения струны. Они позволяют подправлять спектр частиц и устранять аномалии и расходимости. Неожиданное ограничение $d+1=10$ (следующее из инвариантности относительно группы Лоренца или из отсутствия состояний с отрицательной нормой) устраняется компактификацией «лишних» 6 измерений до незаметных нам многообразий малого радиуса. Эти многообразия могут быть либо тором (или его фактором по конечной группе), либо многообразиями Калаби-Яо (последних очень много).

Ограничения на спектр и отсутствие аномалий определили 5 приемлемых теорий струн с континуумом возможных компактификаций. Объединение всех таких теорий – называемое сейчас M-теорией – может возникнуть из разного рода двойственностей между ними.

Двойственности выросли из известных ранее двойственностей (см. обзор по двойственностям в статистической физике [35]): первая из них аналогична преобразованию двойственности Крамерса-Ванные (между высокотемпературной и низкотемпературной областями) для модели Изинга, вытекающее из преобразования Пуассона, где высокотемпературная система включает солитонный сектор низкотемпературной. Таким образом, для модели Изинга системы в некотором смысле эквивалентны при температурах β и β^*, если

$$\exp(-2\beta^*) = \operatorname{th}\beta.$$

Другие дуальности имеют геометрическую природу: электромагнитная двойственность имеет в своей основе двойственность Ходжа в дифференциальной геометрии, так называемая зеркальная симметрия основана на специальных преобразованиях многообразий Калаби-Яо. Количество двойственностей еще более растет (см. [33]), если вместе со струнами рассматриваются p-браны, то есть p-мерные обьекты, движущиеся в d-мерном пространстве. Струна соответствует случаю $p=1$, мембрана – $p=2$. Есть также другие взгляды на двойственности p-бран – некоммутативный (так называемая матричная теория [48]), где координаты – некоммутативные матрицы (см. также ниже), голографический принцип Тоофта и Сасскинда, F-теория с двумя временами и другие.

5.1.1. Дискретные струны

Дискретную струну можно определить [26] как квантование в смысле Тоофта простейшего клеточного автомата. Автомат состоит из клеток $i=1,...,N$, расположенных по окружности, с $2(d+1)$ числами $v_i^{\mu,R}, v_i^{\mu,L}, \mu=0,1,...,d$ в каждой, и клетки 0 с $d+1$ числами v_0^μ. Эволюция чрезвычайно проста

$$v_0^\mu(t+1) = v_0^\mu(t) + \frac{q}{N}, v_i^{\mu,R}(t+1) = v_{i-1}^{\mu,R}(t), v_i^{\mu,L}(t+1) = v_{i+1}^{\mu,L}(t),$$

где q – константа и i понимается по $\bmod N$. Можно проверить (см. [26]), что квантование по Тоофту дает дискретное приближение простейшей бозонной струны. Возможно, это правильный путь для построения струнной теории поля (вторичного квантования теории струн), где струны могут склеиваться и распадаться. Однако, здесь необходимо учитывать изменение числа клеток, см. ниже. Отметим, что основная симметрия струнной теории – алгебра Вирасоро – в урезанном виде также появляется уже для дискретных струн.

5.2. Некоммутативные деформации

Помимо прямой дискретизации есть и другие подходы к приближению классического понятия пространства. Хотя дискретность обнаруживает себя и здесь как дискретность спектра соответствующих операторов.

Идея о некоммутативной деформации пространства, группы симметрии и квантовой теории поля на них была впервые реализована Снайдером [36, 37] и Янгом [38], см. также [39]. В последствии она получила грандиозное развитие в работах Конна и других, см. [40].

В идее Снайдера с дополнениями Янга вводятся операторы ($\partial_k = \frac{\partial}{\partial \xi_k}$)

$$X_k = ia(\xi_k\partial_\eta - \eta\partial_k), k=1,2,3; X_0 = iac^{-1}(\xi_0\partial_\eta + \eta\partial_0);$$

6.1. Грамматики в классической математике

Здесь мы приведем аргументы, показывающие важность введенного понятия графа с локальной структурой. Речь идет о большом количестве примеров следующей схемы классификации в математике: классический объект $\to$ графы с локальной структурой $\to$ упрощение локальной структуры $\to$ одномерная грамматика $\to$ инвариант. При этом самый трудный момент обычно – переход от многомерной грамматики к одномерной. Мы приведем только три примера.

Первым примером является гомотопическая топология. Классический объект здесь – само топологическое пространство. Если оно является CW-комплексом, то в размерностях 1,2,3 Hauptvermutung гласит, что они гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда они комбинаторно эквивалентны, то есть могут быть получены одно из другого с помощью специальных подстановок в графах с локальной структурой. Отсюда можно получить много одномерных грамматик. Простейшая из них – абелевы группы гомологий, подстановки – определяющие соотношения. Получение инвариантов – частный случай проблемы тождества слов – здесь тривиально. Есть более сложные грамматики – кольца гомологий и т.д.

Второй пример – проблема изотопии узлов, которая сводится к плоским графам с локальной структурой, где подстановки – движения Радемахера. Грамматики снова многочисленны – алгебры полиномов, квантовые группы.

Третья группа примеров – дифференциальная и кусочно-линейная топология.

6.2. Случайные и квантовые локальные структуры

В квантовой теории поля пространство и его структуры являются фиксированными, и только поля являются случайными или квантовыми. Напротив, в квантовой гравитации структуры пространства и само пространство становятся квантовыми. Начинается с того, что метрический тензор g_{ij} рассматривается как дополнительное поле. Однако, в этом случае ультрафиолетовый предел не существует

из-за слишком сингулярного поведения метрики на малых расстояниях. Такое сингулярное поведение может привести к изменению самой топологии на малых масштабах. Поэтому требуется определение динамики на графах с локальной структурой, где меняется не только функция на графе, но и сам граф.

Это сделано в серии работ автора довольно простым и естественным способом. Стохастизация и квантование грамматики состоит в расширении понятия подстановки – разрешаются линейные комбинации подстановок, см. [4].

Случайное слово есть выпуклая комбинация обычных слов, а квантовое слово есть произвольная линейная комбинация слов (с произвольными комплексными коэффициентами). Поэтому случайная эволюция слов определяется линейным стохастическим оператором в выпуклом конусе, а квантовая эволюция – линейным унитарным оператором в гильбертовом пространстве. Таким образом, при квантовании грамматики расширяется предложение Тоофта о квантовании отображения множества в себя. Квантуется более общий объект – недетерминированный автомат, где для каждого состояния может быть несколько возможных переходов. Именно, каждой подстановке $\alpha \to \beta$ и ей обратной ставится в соответствие матрица $E_{\alpha\beta}+E_{\beta\alpha}$ в гильбертовом пространстве $l_2(S^*)$. Сумма таких матриц является самосопряженным гамильтонианом, генератором унитарной группы.

Заметим, что случайные грамматики и локальные структуры на графах включают в себя ветвящиеся процессы, фракталы и процессы с локальным взаимодействием, см. [2].

6.2.1. Случайные графы

В классической теории случайных графов [46] граф фактически статичен во времени, все графы с одинаковым числом вершин N равновероятны. Даже в такой постановке многие понятия могут иметь физическую интерпретацию. Случайная динамика во времени, где в каждый момент прибавляются или отнимаются ребра или вершины, вводилась как в физических [47] так и в математических работах [2].

Если $\overline{D}_S = \underline{D}_S = D_S$, то D_S называется скейлинговой макроразмерностью G. Например, деревья могут иметь любую макроразмерность, но бинарное дерево имеет $D_S = \infty$. Однако, однородные решетки L в $\mathbb{R}^d$ имеют $D_S(L) = d$. В [29] доказано, что D_S является инвариантом относительно марковской динамики со случайными подстановками на графе с локальной структурой.

Макроразмерность Хаусдорфа. Рассмотрим теперь бесконечный граф G, некоторое $\delta > 0$ и вершину x. Пусть $O_N(x) = O_N$ - N-окрестность x. Положим

$$\mathcal{H}(G,\delta,s) = \lim_{N\to\infty} \inf_{\{A_i\}} \inf \sum_i d_i^s, \quad \mathcal{H}(G,s) = \inf_\delta \mathcal{H}(G,\delta,s),$$

где inf берется по всем покрытиям $\{A_i\}$ окрестности O_N множествами A_i с диаметрами $d_i = \mathrm{diam}(A_i)$, не превосходящими δN. Тогда $\mathcal{H}(G,\delta,t) \leqslant \delta^{t-s}\mathcal{H}(G,\delta,s)$ при $t \geqslant s$. Тогда существует единственное $s_0 = \dim_H(G)$ (называемое макроразмерностью Хаусдорфа G) такое, что $\mathcal{H}(G,s) = 0$ при $s < s_0$ и $\mathcal{H}(G,s) = \infty$ при $s > s_0$.

Энтропийная макроразмерность. Пусть $N_\delta(O_N)$ - наименьшее число множеств диаметра не более δN, покрывающих O_N. Положим

$$N_\delta = \lim_{N\to\infty} \inf N_\delta(O(N)), \dim_E G = \lim_{\delta\to 0}(-\frac{\log N_\delta}{\log \delta}).$$

Если предел существует, то $\dim_E G$ называется энтропийной макроразмерностью графа G. Легко показать, что $\dim_H(\mathbb{Z}^d) = \dim_E G = d$. Можно доказать также, что $\dim_H(G)$ и $\dim_E G$ не зависят от выбора x.

Индуктивная макроразмерность. Определим макроразмерность последовательности G_k конечных графов. Положим

$$\underline{D}_{n,k} = \inf_x \frac{\ln|U_n(x,G_k)|}{\ln n}, \overline{D}_{n,k} = \sup_x \frac{\ln|U_n(x,G_k)|}{\ln n}.$$

Если $\lim \underline{D}_{n,k} = \lim \overline{D}_{n,k} = D$ для всех последовательностей (k,n) с $\frac{n}{k} \to 0$, то D называется скейлинговой макроразмерностью последовательности G_k. Аналогично определяются другие макроразмерности последовательности G_k.

Последовательность G_k имеет (малую) индуктивную макроразмерность $\dim_{\sin d}(\{G_k\}) = 0$, если число точек в G_k ограничено. Последовательность G_k имеет (малую) индуктивную макроразмерность $\leqslant k, k \geqslant 1$, если для любой последовательности $N(k)$, $\frac{N(k)}{k} \to 0, N(k) \to \infty$, и для всех $x_k \in G_k$, будет $\dim_{\sin d}(\{\partial O_{N(k)}(x_k)\}) \leqslant k-1$. Скажем, что последовательность G_k имеет $\dim_{\sin d}(\{G_k\}) = d$, если $\dim_{\sin d}(\{G_k\}) \leqslant d$ но $\dim_{\sin d}(\{G_k\}) \leqslant d-1$ не имеет места. Таким образом, $\dim_{\sin d}$ может принимать только неотрицательные целые значения.

Будем говорить, что граф G имеет (большую) индуктивную макроразмерность $\dim_{\mathrm{lind}}(G) = 0$, если число точек в G конечно. Граф G имеет (большую) индуктивную макроразмерность $\dim_{\mathrm{lind}}(G) \leqslant d$, если для любого $\varepsilon > 0$, любых подмножеств $V_1, V_2 \subset V(G), d(V_1,V_2) \geqslant \varepsilon N$ его можно разделить подмножеством W с $\dim_{\mathrm{lind}}(G(W)) \leqslant d-1$, где $G(W)$ - регулярный подграф G, имеющий множество вершин W. Точнее это значит, что $V(G) \setminus W$ является объединением двух подмножеств W_1, W_2 таких, что $V_1 \subset W_1, V_2 \subset W_2$, причем между W_1 и W_2 нет ребер.

6.3. Анализ на графах

Имея дискретную аппроксимацию топологии, надо иметь еще дискретный анализ с достаточно богатой структурой. Есть несколько независимых направлений, где развиваются разные аспекты анализа на фиксированном графе.

В серии работ [43] строится исчисление дифференциальных форм и тензорных полей на графах, основываясь на общей конструкции дифференциальной алгебры над произвольной ассоциативной алгеброй, см. [41]. Более простой подход в частном случае кубической решетки для построения аналога дифференциальных форм был ранее предложен в [35].

В [45] изучается спектр и теория рассеяния для оператора Шре-

[3] Малышев В.А. Вероятность вокруг квантовой гравитации // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54. Вып. 4. С. 3–46.

[4] Malyshev V. Quantum Grammars // J. Math. Physics. 2000. V. 41. No. 7.

[5] Reid D. Introduction to causal sets: an alternate view of space-time structure. Preprint. 1999. gr-qc/9909075.

[6] Rideout D., Sorkin R. A classical sequential growth dynamics for causal sets. Preprint. 1999. gr-qc/9904062.

[7] Criscuolo A., Waelbroeck H. Causal sets dynamics: a toy model. Preprint. 1998. gr-qc/9811088.

[8] Evako A.V. Dimension on discrete spaces. Preprint. 1994. gr-qc/9402035.

[9] Jaroszkiewicz G., Norton K. Principles of Discrete Time Mechanics: I. Particle Systems. Preprint. 1997. hep-th/9703079.

[10] Penrose R. The Emperor's New Mind. London: Oxford Univ. Press, 1989.

[11] Isham C.J. Quantum topology and quantization on the lattice of topologies // Class. Quant. Gravity. 1989. V. 6. P. 1509–1534.

[12] Larson R., Andima S. J. Math. 1975. V. 5. 177.

[13] Markopoulou F. The internal description of a causal set: What the universe looks like from the inside // Comm. Math. Phys. 2000. V. 211. P. 559–583.

[14] Rovelli C. Relational quantum mechanics // Int. J. of Theor. Physics. 1996. V. 35. 1637.

[15] Griffiths R. Consistent Quantum Realism: a reply to Bassi and Ghirardi. Preprint. 2000. quant-ph/0001093.

[16] Isham C.J. Quantum logic and the Histories Approach to Quantum Theory // J. Math. Phys. 1994. V. 23. P. 2157–2185.

[17] Isham C.J. Some possible roles for Topos Theory in Quantum Theory and Quantum Gravity. Preprint. 1999. gr-qc/9910005.

[18] Baez J., Muniain J. Gauge Fields, Knots and Gravity // World Scientific. 1994.

[19] Baez J. An Introduction to n-categories. Preprint. 1997. q-alg/9705009.

[20] Gibbs Ph. The Small Scale Structure of Space-Time: A Bibliographical Review. Preprint. 1995. hep-th/9506171.

[21] Wallace D. The Quantization of Gravity – an introduction. Preprint. 2000. gr-qc/0004005.

[22] Rovelli C. Strings, loops and others: a critical survey of the present approaches to quantum gravity. Preprint. 1998. gr-qc/9803024.

[23] Feynman R. Int. J. Theor. Physics. 1982. V. 21. 467.

[24] 't Hooft G. Quantization of discrete deterministic theories by Hilbert space extension // Nuclear Physics B342. 1990. P. 471–485.

[25] 't Hooft G. Determinism and Dissipation in Quantum Gravity. Preprint. 2000. hep-th/0003005.

[26] Russo J. Discrete Strings and Deterministic Cellular Strings. Preprint. 1993. hep-th/9304003.

[27] Bohm D. Quantum Theory. Prentice-Hall, Eglewood Cliffs, NJ, 1966.

[28] Малышев В. Элементарное введение в физику бесконечночастичных систем. Дубна.

[29] Малышев В. Макроразмерность – инвариант локальной динамики // Теория вероятностей и примен. 2000. Вып. 2.

[30] Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. М.: Мир, 1984.

[31] Грин М., Шварц Дж., Виттен Е. Теория суперструн. М.: Мир, 1990.

[32] Kac V.G., Raina A.K. Bombey Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras // Advanced Series in Mathematical Physics. World Scientific. 1987. Vol. 2.

[33] Duff M. A Layman's Guide to M-theory. Preprint. 1998. hep-th/9805177.

[34] Antoniadis I., Ovarlez G: An introduction to perturbative and non-perturbative string theory. Preprint. 1999. hep-th/9906108.

[35] Малышев В., Петрова Е. Преобразования двойственности гиббсовских случайных полей // Итоги науки. ВИНИТИ. Сер. Теория вероятностей. 1981. С. 3–51.

[36] Snyder H.S. Quantized Space-Time // Phys. Rev. 1947. 71. P. 38–41.

[37] Snyder H.S. The Electromagnetic Field in Quantized Space-Time // Phys. Rev. 1947. 72. P. 68.

[38] Young C. Phys. Review. 1947. V. 72. P. 874.

[39] Tanaka S. Space-Time Quantization and Nonlocal Field Theory. Preprint. 2000. hep-th/0002001.

[40] Connes A. A short survey of noncommutative geometry. Preprint. 2000. hep-th/0003006.

[41] Landi G. An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometry. Preprint. 1997. hep-th/9701078.

[42] Landi G., Lizzi F. Projective Systems of Noncommutative Lattices as a Pregeometric Substratum. Preprint. 1998. math-ph/9810011.

[43] Dimakis A., Muller-Hoissen F. Discrete Riemannian Geometry. Preprint. 1998. gr-qc/9808023.

[44] Requardt M. Spectral Analysis and Operator Theory. Preprint. 2000. math-ph/0001026.

[45] Novikov S.P. Schrodinger Operators on Graphs and Symplectic Geometry. Preprint. 2000. math-ph/0004013.

[46] Bollobas B. Random Graphs. New York: Academic Press, 1985.

[47] Antonsen F. Random Graphs as a Model of Pregeometry // Int. Journ. of Theor. Physics. 1994. V. 33. No. 6. P. 1189–1205.

[48] Banks T., Fischler W., Shenker S., Susskind L. M-theory as a Matrix Model: a conjecture // Phys. Rev. D55. 1997. P. 5112–5128.

[49] Aharonov D. Quantum Computation. Preprint. 1998. quant-ph/9812037.

[50] Cornwell J. Group theory in physics. London: Acad. Press, 1989. V. 3.

[51] Umbral calculus and Hopf algebras / Ed. Morris. Providence, 1982.