Дискретная математика

том 13 выпуск 2 * 2001

УДК 519.1

Асимптотическое число карт на компактных ориентируемых поверхностях

© 2001 г. М. А. Крикун, В. А. Малышев

Получены асимптотические формулы для суммы

$$Z_N = \sum_{b+p=N} F_{b,p} y^p,$$

где

$$F_{b,p} = \sum_{\rho=0}^{\infty} F_{b,p}(\rho)$$

и $F_{b,p}(\rho)$ – число карт рода ρ с $p+1$ вершинами и $p+b$ ребрами.

1. Введение

Рассматривается задача о подсчете числа комбинаторных карт на компактных ориентированных поверхностях. Для поверхностей рода 0 эта задача была решена Таттом [3, 4]. Для произвольного, но фиксированного, рода асимптотические формулы для некоторых классов карт были найдены Бендером и другими (см., например, [5]). Помимо чисто комбинаторного интереса, недавно интерес к подобным задачам возник в теоретической физике (дискретной квантовой гравитации).

Однако, нам неизвестны асимптотические результаты для случая, когда род не фиксирован. Единственным исключением являются физические работы, относящиеся к так называемому двойному скейлинг пределу в дискретной квантовой гравитации (см. обзор [7]). Но, во-первых, применяемый там метод случайных матриц не является математически строгим в применении к проблемам подсчета карт, и, во-вторых, предполагаемый рост рода довольно медленный в сравнении с числом вершин. Мы решаем эту задачу для самого широкого класса карт, без ограничений.

Мы используем квадратичные рекуррентные уравнения. Заметим, что наиболее общие асимптотические результаты для линейных рекуррентных уравнений с рациональными коэффициентами были получены элементарными методами (то есть без применения производящих функций) в [2]. Однако, уже для квадратичных уравнений с рациональными коэффициентами нет столь общих результатов. Дело в том, что при их итерации таких уравнений возникают сложные суммы с суммированием по деревьям. Такие итерации позволяют интуитивно угадать результат и доказать его. Доказательство может быть затем проще проведено по индукции. Мы думаем, что приводимые элементарные методы могут быть применены к более общим классам полиномиальных уравнений с рациональными коэффициентами. Интересно также, что данные методы позволили получить асимптотику для всех комплексных значений параметра.

Остается много открытых проблем в этой задаче. Ф. Флажоле предположил, что гипергеометрические производящие функции позволят получить асимптотику в случае, когда число вершин и число ребер стремятся к бесконечности с разной скоростью. Мы благодарим его за интересные информативные обсуждения.

Другая важная задача — получить подобный результат для ограниченного класса карт, например, для триангуляций.

1.1. Карты

Приведем необходимые определения из [1]. Пусть S — замкнутая ориентируемая гладкая двумерная поверхность. Тогда с точностью до гомеоморфизма S определяется ее родом $\rho = \rho(S) = 0, 1, 2, \ldots$ Картой называется тройка (S, G, φ), где G — связный граф (графы рассматриваются как одномерные комплексы, допускаются петли и кратные ребра), а φ — гладкое вложение G в S такое, что дополнение к φG состоит из открытых областей, каждая из которых гомеоморфна диску. Концом ребра в G называется пара из вершины и инцидентного ей ребра. Корневая карта — это карта, у которой выделен один конец ребра. Две карты эквивалентны, если существует гомеоморфизм $S \to S$, сохраняющий ориентацию, множество всех вершин, множество всех ребер и корень.

Существует полезное комбинаторное определение для карт. Оно основывается на следующей теореме, для которой нам потребуется одно определение: упорядоченный граф — это граф с заданным циклическим порядком концов ребер в каждой вершине.

Теорема 1. *Для любого связного упорядоченного графа существует топологически единственное вложение в поверхность такое, что концы ребер упорядочены по часовой стрелке, а дополнение к графу состоит из областей, гомеоморфных диску.*

Эта теорема (см. [6]) объясняет, почему проблема становится разрешимой: она сводится к подсчет числа графов. Интересно заметить, что для трехмерного случая подсчет комплексов сводится к подсчету графов только для псевдомногообразий.

Пусть E — множество ребер, тогда $2E = E \times \{-1, 1\}$ — множество концов ребер графа и вершины задаются разбиением $2E$. Каждый блок разбиения имеет циклический порядок элементов, задавая таким образом перестановку P на $2E$. Другая перестановка, минус $(-)$, меняет местами, переставляет концы у одного ребра, то есть 1 и -1. Грань задается последовательностью концов ребер

$$e, (-)e, P(-)e, (-)P(-)e, \ldots$$

Таким образом циклы подстановки P дают вершины, циклы подстановки $(-)$ ребра, а циклы подстановки $P(-)$ грани.

Определение 1. Комбинаторная карта определяется как тройка $(2E, P, (-))$, состоящая из множества $2E$ с четным числом элементов и двух перестановок на нем таких, что порождаемая ими группа транзитивна на этом множестве (это соответствует связности графа). Предполагается также, что перестановка $(-)$ состоит из непересекающихся циклов порядка 2. Корень — это выделенный элемент множества $2E$.

Используя это соответствие и операцию удаления корневого ребра, получаем следующее рекуррентное соотношение для числа $F_{b,p}$ комбинаторных карт с $p+1$ вершинами и $b+p$ ребрами (см. [1]):

$$F_{b,p}=\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{b}F_{k,j}F_{b-k,p-j-1}+(2(b+p)-1)F_{b-1,p},\quad b,p\geqslant 1. \tag{1}$$

В действительности эти уравнения выполняются также при $b=0$ или $p=0$, кроме случая $b=p=0$, если считать, что

$$F_{0,0}=1,\qquad F_{-1,p}=F_{b,-1}=0.$$

Случай $b=p=0$ соответствует вложению одной вершины в сферу. Случай $p\geqslant 1, b=0$ соответствует деревьям, вложенным в сферу,

$$F_{0,p}=\frac{(2p)!}{p!\,(p+1)!}.$$

Числа $F_{b,p}$ при $p=0, b\geqslant 1$ равны

$$(2b-1)(2b-3)\ldots=\frac{(2b)!}{b!\,2^b},$$

то есть числу разбиений $\{1,2,\ldots,2b\}$ на пары.

Наша цель — получить асимптотику при $k\to\infty$ для сумм

$$b_k=b_k(y)=\sum_{b+p=k}F_{b,p}y^p,\quad b_{-1}=0,\quad b_0=1.$$

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого фиксированного y при $k\to\infty$*

$$b_k(y)=c(y)k!\,2^kk^{y-1/2}(1+o(1)),$$

где $c(y)$ аналитична по y.

Этот результат имеет приложения в теоретической физике. Рассмотрим вероятностную меру на множестве всех карт с $b+p=N$ (канонический ансамбль) со статистической суммой

$$Z_N(y)=\sum_{b+p=N}F_{b,p}\exp(-\mu b-\lambda p)=\exp(-\mu N)\sum_{b+p=N}F_{b,p}y^p,$$

где $y=\exp(-\lambda+\mu)$. Тогда при $N\to\infty$

$$Z_N(y)=f(y)N!\,\exp((\ln 2-\mu)N)N^{y-1/2}(1+o(1)).$$

2. Доказательство

Доказательство состоит из нескольких шагов. Сначала мы угадываем основные члены асимптотики, для удобства вычислений заменяем $k^{y-1/2}$ на произведение

$$\Pi_k(y) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{y-1/2}{j}\right),$$

добавляем множитель

$$\gamma(y) = \lim_{k\to\infty} \Pi_k(y)/k^{y-1/2},$$

и получаем рекуррентные соотношения для

$$f_k(y) = \frac{b_k(y)}{k!\,2^k k^{y-1/2}}.$$

Затем мы используем прямой индуктивный метод чтобы доказать ограниченность и сходимость $f_k(y)$ для любого фиксированного y кроме точек $1/2 - n, n = 1, 2, \dots$, и отдельно доказываем аналитичность произведения $f(y)\gamma(y)$ в этих точках.

Мы объясняем также другой метод, которым решение было первоначально получено в некоторых случаях. Он состоит в итерировании рекуррентного уравнения до тех пор, пока не получится ряд, члены которого занумерованы специального вида деревьями. Затем сходимость этого ряда может быть доказана оценкой каждого члена в отдельности. Такая техника широко используется в кластерных разложениях.

2.1. Главные множители

Мы можем угадать члены основного порядка и свести проблему к оценке $f(y)$. Умножая уравнения (1) на y^p и суммируя по b, p таким, что $b+p=j$, получим основное рекуррентное соотношение

$$b_0 = 1, \quad b_j = (2j-1)b_{j-1} + y\sum_{i=0}^{j-1} b_i b_{j-1-i}, j \geqslant 1. \tag{2}$$

В частности $b_1 = 1 + y$.

Подставляя $b_j = j!\,2^j d_j$ в уравнения (2), получим, что $d_0 = 1$ и

$$d_j = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) d_{j-1} + \frac{y}{2j}\sum_{i=0}^{j-1} \frac{i!\,(j-1-i)!}{(j-1)!} d_i d_{j-1-i},$$

или

$$d_j = \left(1 + \frac{y-1/2}{j}\right) d_{j-1} + \frac{y}{2j}\sum_{i=1}^{j-2} \frac{i!\,(j-1-i)!}{(j-1)!} d_i d_{j-1-i}, j \geqslant 1$$

Положим

$$d_j = f_j \prod_{k=1}^{j} \left(1 + \frac{y-1/2}{k}\right)$$

Тогда

$$f_j = f_{j-1} + \frac{y}{2j}\sum_{i=1}^{j-2}\frac{i!\,(j-1-i)!}{(j-1)!}\rho_{ij}f_i f_{j-1-i},$$

$$\rho_{ij} = \rho_{ij}(y) = \prod_{k=1}^{i}\left(1+\frac{y-1/2}{k}\right)\prod_{k=1}^{j-1-i}\left(1+\frac{y-1/2}{k}\right)\prod_{k=1}^{j}\left(1+\frac{y-1/2}{k}\right)^{-1}.$$

Это можно переписать в виде

$$f_j = f_{j-1} + y\sum_{i=1}^{[(j-2)/2]}\rho_{ij}b_{j,i}f_i f_{j-1-i}, \qquad f_0 = 1, \tag{3}$$

где, в свою очередь,

$$b_{j,i} = \frac{i!\,(j-1-i)!}{j!}.$$

2.2. Индуктивная оценка

Здесь мы изменяем обозначения, полагая $\varepsilon = y - 1/2$ и

$$\varphi_{a,b}(\varepsilon) = b_{a,a+b+1}\rho_{a,a+b+1} = \prod_{k=1}^{a}(k+\varepsilon)\prod_{k=1}^{b}(k+\varepsilon)\prod_{k=1}^{a+b+1}(k+\varepsilon)^{-1} \tag{4}$$

Тогда

$$f_{j+1} = f_j + \frac{y}{2}\sum_{i=1}^{j-1}\varphi_{i,j-i}(\varepsilon)f_i f_{j-i}. \tag{5}$$

Здесь и далее предполагается, что $\varepsilon \neq -1, -2, \ldots$

Основная идея оценки $\varphi(\varepsilon)_{i,j-i}$ состоит в том, что при достаточно большом j для всех $i \leqslant (j-1)/2$ выполняется неравенство $|\varphi_{i+1,j-i-1}| \leqslant |\varphi(\varepsilon)_{i,j-i}|$. Действительно,

$$\frac{|\varphi(\varepsilon)_{i+1,j-i-1}|}{|\varphi(\varepsilon)_{i,j-i}|} = \frac{|i+1+\varepsilon|}{|j-i+\varepsilon|} \leqslant 1, \tag{6}$$

если

$$|i+1+\mathrm{Re}(\varepsilon)| \leqslant |j-i+\mathrm{Re}(\varepsilon)|. \tag{7}$$

Пусть $i \leqslant (j-1)/2$ и $j \geqslant j_0 > -2\,\mathrm{Re}(\varepsilon)$, тогда выражение под модулем в правой части (7) положительно, и при любом знаке выражения в левой части неравенство выполняется. Оценим сумму коэффициентов в (5):

$$\left|\frac{y}{2}\sum_{i=1}^{j-1}\varphi(\varepsilon)_{i,j-i}\right| \leqslant \frac{|y|}{2}\left(2|\varphi(\varepsilon)_{1,j-1}| + (j-3)|\varphi(\varepsilon)_{2,j-2}|\right) \tag{8}$$

$$= \frac{|y|}{2}\left(\frac{2|1+\varepsilon|}{|(j+\varepsilon)(j+1+\varepsilon)|} + \frac{(j-3)|(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)|}{|(j-1+\varepsilon)(j+\varepsilon)(j+1+\varepsilon)|}\right) \leqslant \frac{C_1(\varepsilon)}{j^2},$$

так как при $j \geqslant -2\,\mathrm{Re}(\varepsilon)$

$$j \leqslant 2|j+\varepsilon| \leqslant 2|j+1+\varepsilon|, \qquad j-3 \leqslant 2|j-1+\varepsilon|.$$

Положим $C_2(\varepsilon) = \max\{C_1(\varepsilon), |f_0|, \dots, |f_{j_0}|)\}$ и $g_j = C_2^{-1}(\varepsilon)|f_j|$. Тогда из (5) следует, что для $j \geqslant j_0$

$$g_{j+1} \leqslant g_j + \frac{1}{j^2} \max_{1 \leqslant i \leqslant j-1} g_i g_{j-i}.$$

Кроме того, $g_0, \dots, g_{j_0} \leqslant 1$, и по индукции получим, что $g_j \leqslant j$. Следовательно, $|f_j| \leqslant C_2(\varepsilon) j$ для всех j.

Пусть

$$S(\varepsilon) = \sup_{j \geqslant 0} \frac{j}{|j+1+\varepsilon|}.$$

Снова оценивая члены суммы в уравнении (5), получаем, что

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j-1} \varphi(\varepsilon)_{i,j-i} |f_i f_{j-i}| &\leqslant C_2(\varepsilon) S^2(\varepsilon) \sum_{i=1}^{j-1} \varphi(\varepsilon)_{i,j-i} |(i+1+\varepsilon)(j-i+1+\varepsilon)| \\
&= C_2(\varepsilon) S^2(\varepsilon) \sum_{i=1}^{j-1} \varphi(\varepsilon)_{i+1,j-i+1} |(j+2+\varepsilon)(j+3+\varepsilon)| \\
&\leqslant C_2(\varepsilon) S^2(\varepsilon) \Big(2|\varphi(\varepsilon)_{2,j}| + (j-3)|\varphi(\varepsilon)_{3,j-1}|\Big) |(j+2+\varepsilon)(j+3+\varepsilon)| \\
&\leqslant \frac{C_3(\varepsilon)}{j},
\end{aligned}$$

для $j > j_0$. Значит, $|f_j| \leqslant |f_{j_0}| + C_3(\varepsilon) \log j$. Используя снова оценку (8), находим, что

$$|f_{j+1} - f_j| \leqslant (|f_{j_0}| + C_3(\varepsilon) \log j)^2 \frac{C_1(\varepsilon)}{j^2}. \tag{9}$$

Отсюда следует существование предела f_j при $j \to \infty$.

2.3. Особые точки

Рассмотрим теперь точку $y = 1/2 - n$, или $\varepsilon = -n$. В этой точке множитель $\gamma(y)$ имеет ноль первого порядка, и если мы покажем что $f(y)$ в этой точке имеет полюс первого порядка, аналитичность $c(y)$ будет доказана.

В окрестности точки $\varepsilon = -n$ введем функции $\tilde f_j$, отличающиеся от f_j множителем $n + \varepsilon$, полагая

$$\tilde f_j = \begin{cases} f_j, & j < n, \\ (n+\varepsilon) f_j, & j \geqslant n. \end{cases}$$

Эти функции аналитичны в окрестности $\varepsilon = -n$ и удовлетворяют соотношениям, аналогичным (5), с коэффициентами

$$\tilde\varphi(\varepsilon) = {\prod_{k=1}^{a}}' (k+\varepsilon) {\prod_{k=1}^{b}}' (k+\varepsilon) {\prod_{k=1}^{a+b-1}}' (k+\varepsilon)^{-1}, \tag{10}$$

где штрих в произведениях означает, что должны быть пропущены множители с $k = n$, и поэтому оценка для них может быть получена почти дословным повторением выкладок, использованным для получения оценки f_j. Необходимо лишь убедиться, что при $j > 2n$ и $i < j/2$ выполняется неравенство

$$|\tilde{\varphi}_{i+1,j-i-1}| \leqslant |\tilde{\varphi}_{i,j-i}|.$$

Проверка отличается от (6) лишь в случае $i = n - 1$, когда

$$\frac{|\tilde{\varphi}(\varepsilon)_{n,j-n}|}{|\tilde{\varphi}(\varepsilon)_{n-1,j-n+}|} = \frac{1}{|j-n+1+\varepsilon|} \leqslant 1.$$

Следовательно, в точке $\varepsilon = -n$ и ее окрестности существует предел

$$\tilde{f}(y) = \lim_{j\to\infty} \tilde{f}_j$$

и так как $\tilde{f}(y) = (n + y - 1/2)f(y)$, произведение $\gamma(y)f(y)$ аналитично в $1/2 - n$ для каждого n.

2.4. Итерации и деревья

Другой метод исследования квадратичных уравнений (5) состоит в их итерациях. В результате мы представим f_k как полином от $\varphi_{i,j-i-1}$ с $i, j < k$. Его члены удобно обозначить специального вида деревьями. Рассмотрим дерево T с корнем. Будем считать, что его ребра направлены к корню. Каждая вершина (кроме корня) имеет одно исходящее ребро и два, одно или ни одного входящих. Соответственно вершина называется бинарной, унарной или концевой. Для каждого дерева T единственным образом задается функция $r_T(v) = r(v)$ на его вершинах со значениями в Z_+, согласно следующим правилам: для конечных вершин $r(v) = 1$, так как $f_1 = 1$; если v — унарная вершина и имеет одно входящее ребро из вершины v_1, то $r(v) = r(v_1) + 1$; если v — бинарная вершина и имеет два входящих ребра из вершин v_1, v_2, то $r(v) = r(v_1) + r(v_2) + 1$. Так для данного дерева T функция $r_T(v)$ однозначно определяется по индукции, начиная с конечных вершин. Можно заметить, что значение $r(v)$ равно числу вершин в поддереве с корнем v.

Вклад $f(T)$ каждого дерева записывается как

$$f(T) = \prod_{v \in V_2(T)} \frac{y}{2}\varphi_{r(v_1),r(v_2)}, \qquad r = r_T,$$

где $V_2(T)$ — множество бинарных вершин T, v_1 и v_2 — вершины, исходящие ребра которых попадают в v, так что они зависят от v.

Лемма 1. *Решение рекуррентного уравнения* (5) *можно записать в виде*

$$f_j = \sum_{T\colon r_T(v_0)=j} f(T).$$

Другими словами,

$$f_j = 1 + \sum_T f(T),$$

где сумма берется по всем деревьям T таким, что $r_T(v_0) \leqslant j$, и в которых корень является бинарной вершиной. Единица соответствует дереву, не имеющему бинарных вершин.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Обозначим τ_j множество всех деревьев с j вершинами из рассматриваемого класса деревьев и докажем, что

$$f_j = \sum_{T\in\tau_j} f(T).$$

Для $j = 1$ это равенство верно. Пусть оно верно до некоторого j. Тогда из основного соотношения следует, что

$$f_{j+1} = \sum_{T'\in\tau_j} f(T') + \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{T_1\in\tau_i, T_2\in\tau_{j-i}} \frac{y}{2}\varphi(\varepsilon)_{i,j-i} f(T_1) f(T_2).$$

Определим две операции над деревьями. Первая, $a(T) = T'$, состоит в добавлении к корню исходящего ребра. При этом число вершин увеличивается на 1, а вклад дерева не меняется, $f(T) = f(T')$. Вторая, $b(T_1, T_2) = T$, состоит в добавлении исходящего ребра к корню каждого из двух деревьев и объединении их в двоичную вершину. При этом, если $T_1 \in \tau_i$, $T_2 \in \tau_k$, то $T \in \tau_{i+k+1}$ и $f(T) = (y/2)\varphi(\varepsilon)_{i,k} f(T_1) f(T_2)$. Теперь равенство можно переписать в виде

$$f_{j+1} = \sum_{T\in a(\tau_j)} f(T) + \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{T\in b(\tau_i,\tau_{j-i})} f(T) = \sum_{f\in\tau_{j+1}} f(T).$$

Последнее равенство следует из того, что

$$\tau_{j+1} = a(\tau_j) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} b(\tau_i, \tau_{j-i}) \right).$$

Чтобы получить второй вариант выражения f_j, у каждого дерева $T \in \tau_j$ отбросим все унарные вершины со стороны корня. Получим все деревья с бинарным корнем и числом вершин, не большим j, каждое один раз, причем вклад $f(T)$ не изменится.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\lim_{j\to\infty} f_j = 1 + \sum_T f(T)$$

где сумма берется по всем деревьям, в которых корень является бинарной вершиной.

2.5. Пересуммирование

Идея оценок состоит в пересуммировании — сведении к сумме по деревьям без унарных вершин. При этом каждой вершине бинарного дерева будет приписан множитель $c(y)/h$. Этого достаточно для доказательства сходимости ряда. Мы не будем проводить последовательно все этапы этого прямого, но громоздкого построения. Для краткости ограничимся лишь случаем малых y.

Определим отображение $S(T)$, которое ставит в соответствие дереву T его бинарный скелет (бинарный скелет получается, если стереть в дереве T все унарные вершины). Тогда для каждого дерева T со скелетом G естественным образом определено взаимно однозначное соответствие бинарных вершин T и G. Рассмотрим бинарную вершину v дерева G. Пусть в произведении $f(G)$ ей соответствует множитель $\varphi_{a,b}(y)$. Тогда вершине $S^{-1}(v) \in T$ соответствует множитель $\varphi_{a',b'}(y)$, где $a' \geqslant a$, $b' \geqslant b$. Зная такие a', b' для всех $v \in G$, то есть, зная число вершин справа и слева от $S^{-1}(v) \in T$, можно однозначно восстановить дерево T по его бинарному скелету.

Фиксируем G и возьмем сумму $f(T)$ по всем T таким, что $S(T) = G$ и корень T — бинарная вершина. Последнее условие необходимо, так как иначе получится сумма, в которой бесконечное количество деревьев дает одинаковый вклад. Тогда

$$\sum_{T\in S^{-1}(G),r(T)\in V_2(T)} f(T) \leqslant \prod_{v\in G} \frac{y}{2}\hat{\varphi}_{a(v),b(v)}(\varepsilon), \tag{11}$$

где

$$\hat{\varphi}_{a,b}(\varepsilon) = \sum_{i\geqslant a,j\geqslant b} \varphi_{i,j}(\varepsilon).$$

Обращая доказательство предыдущей леммы, получим следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть g_j определены по индукции равенствами*

$$g_j = \frac{y}{2}\sum_{i=1}^{j-2} \hat{\varphi}_{i,j-i-1}(\varepsilon) g_i g_{j-i-1}, \qquad g_1 = 1.$$

Тогда

$$f_j \leqslant \sum_{i=1}^{j} g_i, \qquad \lim_{j\to\infty} f_j \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} g_i. \tag{12}$$

Доказательство. Индукцией по j можно показать, что g_j является суммой правых частей (11) по всем бинарным скелетам G с j вершинами. Если же мы возьмем дерево T с j вершинами, его скелет будет иметь от 1 до j вершин. Это и дает доказательство.

Лемма 4. *Если $\varepsilon \leqslant 0$, то для $a, b \geqslant 1$*

$$\hat{\varphi}_{a,b}(\varepsilon) \leqslant \varphi_{a-1,b-1}(\varepsilon)$$

и $\hat{\varphi}_{a,b}(\varepsilon) \leqslant 1$, причем равенство достигается при $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Разобьем сумму на части. Пусть

$$\sigma_{a,b}(\varepsilon) = \varphi_{a,b}(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{a+i,b}(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{a,b+i}(\varepsilon),$$

тогда

$$\hat{\varphi}_{a,b}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{a+j,b+j}(\varepsilon).$$

Заметим, что для $\varepsilon \leqslant 0$

$$\varphi_{a,b}(\varepsilon) \geqslant \varphi_{a+1,b}(\varepsilon) + \varphi_{a,b+1}(\varepsilon),$$

это следует из неравенства

$$\frac{a+1+\varepsilon}{a+b+2+\varepsilon} + \frac{a+2+\varepsilon}{a+b+2+\varepsilon} \leqslant 1.$$

Тогда $\sigma_{a-1,b-1}(\varepsilon) \geqslant (\sigma_{a-1,b-1}(\varepsilon) - \varphi_{a-1,b-1}(\varepsilon)) + (\sigma_{a,b}(\varepsilon) + \varphi_{a,b}(\varepsilon))$, для $a, b \geqslant 1$ и следовательно, $\sigma_{a,b}(\varepsilon) \leqslant \varphi_{a-1,b-1}(\varepsilon) - \varphi_{a,b}(\varepsilon)$ (в действительности, при a или b, равном 1, сумма $\sigma_{a-1,b-1}(\varepsilon)$ расходится, но вместо нее мы используем конечную сумму $\sigma^{(n)}_{a-1,b-1}(\varepsilon)$, а затем в последней перейдем к пределу по n; результат сохранится).

Чтобы завершить доказательство остается показать, что

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_{a+j,b+j}(\varepsilon) = 0.$$

Это следует из оценки

$$\varphi_{a+1,b+1}(\varepsilon) = \frac{(a+1+\varepsilon)(b+1+\varepsilon)}{(a+b+2+\varepsilon)(a+b+3+\varepsilon)}\varphi_{a,b}(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{4}\varphi_{a,b}(\varepsilon).$$

Теперь мы можем закончить доказательство в случае $0 < y < 1/2$. Из последней леммы, в частности, следует, что $\hat{\varphi}_{a,b}(\varepsilon) \leqslant 1$, и значит, вклад каждого бинарного дерева G в g_j не более $(y/2)^j \leqslant 4^{-j}$. Известно, что число бинарных деревьев с j вершинами не более 4^j (см. [4]), и значит, сумма (12) сходится (для $y = 1/2$ нужно заметить, что лишь $\hat{\varphi}_{1,1}(0) = 1$, а все остальные коэффициенты φ меньше некоторого $q < 1$, и результат остается тем же).

Из разложения по деревьям немедленно следует, что $f_k(y)$ являются аналитическими функциями на комплексной плоскости везде, за исключением точек $y = -n + 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$, где они имеют полюса. Тогда аналитичность вытекает из сходимости ряда аналитических функций.

Список литературы

1. Walsh T., Lehman A., Counting rooted maps by genus. I. *J. Comb. Theory* (1972) **13**, 192–218.
2. Wimp J., Zeilbreger D., Resurrecting the asymptotics of linear recurrences. *J. Math. Anal. and Appl.* (1985) **111**, 162–176.
3. Tutte W., The enumerative theory of planar maps. *A Survey of Combinatorial Theory.* North Holland, Amsterdam, 1873, 437–448.
4. Goulden I., Jackson D., *Combinatorial Enumeration.* Wiley, New York, 1983.
5. Bender E., Canfield E., Richmond L., The asymptotic number of rooted maps on a surface. II. Enumeration by vertices and faces. *J. Comb. Theory.* (1993) **63**, 318–329.
6. Edmonds J., A combinatorial representation for polyhedral surfaces. *Notices Amer. Math. Soc.* (1960) **7**, 646.
7. Fernandez R., Frolich J., Sokal A., *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Fields.* Springer, Berlin, 1992.

Статья поступила 07.03.2001.