

70. Рыбко А.Н. Пуассоновская гипотеза для больших симметричных коммуникационных сетей // Глобус. Общественно-математический семинар. Вып. 4 / Под ред. М. А. Цфасмана и В. В. Прасолова. М.: МЦНМО, 2009. С. 105–126.
71. Гасников А.В., Гасникова Е.В. Об энтропийно-подобных функционалах, возникающих в стохастической химической кинетике при концентрации инвариантной меры и в качестве функций Ляпунова динамики квазисредних // Математические заметки, 2012. (в печати)
72. Montenegro R., Tetali P. Mathematical aspects of mixing times in Markov chains. 2006; <http://people.math.gatech.edu/~tetali/PUBLIS/survey.pdf>
73. Jerrum M., Sinclair A. The Markov chain Monte Carlo method: an approach to approximate counting and integration // Approximation Algorithms for NP-hard Problems / D.S.Hochbaum ed. Boston: PWS Publishing, 1996. P. 482–520.

А. А. Замятин, В. А. Малышев

## Введение в стохастические модели транспортных потоков

### Введение

Математические модели автомобильного трафика могут быть весьма различны: от дифференциальных уравнений с частными производными, средств современной компьютерной физики до создания игровых моделей, где точки на видео движутся по сети улиц с перекрестками. Мы рассматриваем здесь некоторые строгие вероятностные подходы к транспортным сетям. Основная цель этого приложения — не столько представить технику решения задач, сколько представить методику (и искусство) составления адекватных моделей, которые отличаются наглядностью определений (основной объект там именно автомобиль, а не потоки) и основаны на простых интуитивных рассуждениях. Более того, все вводимые постулаты в этих моделях допускают статистическую проверку, широкие уточнения и обобщения и не используют сомнительных физических аналогий. Вообще, вероятностные модели должны связываться с психикой водителей, если водители не роботы. Такой законченной и общепринятой теории пока не существует, здесь делаются, по-видимому, первые строгие попытки установить такую связь.

В текст включены упражнения для лучшего усвоения материала, а также задачи посложнее, в том числе и «публикабельные».

Вероятностный подход к транспортным потокам существует уже более 50 лет, см. [1–3], однако здесь мы даем более современную трактовку и рассматриваем более сложные задачи. В то же время мы не говорим здесь о других вероятностных подходах к проблемам транспорта, например [12, 14], они отражены в других частях этой книги. Мы также ничего не говорим о гидродинамическом подходе, так как связь его со статистическим подходом пока математически плохо изучена.

Приложение состоит из трех частей. В первой дано построение случайных потоков и некоторые модели, отражающие качественные явления на автомагистрали. В том числе новая модель, основанная на сравнительно недавней теории случайных грамматик. Во второй части показано, как можно получать явные формулы с помощью техники пуассоновских пото-

ков. В третьей рассмотрены сложные сети дорог и вычисление критической нагрузки, выше которой начинаются пробки.

## 1. Потоки автомобилей

### 1.1. Маркированные точечные поля

Под словом «поток» в зависимости от контекста понимают либо среднее число  $J$  автомобилей в единицу времени, пересекающих сечение транспортного пути в данном направлении, либо статическую случайную конфигурацию

$$\dots < x_i < x_{i-1} < \dots$$

автомобилей в данный момент времени, но можно понимать его динамически как меру на множестве траекторий  $\{x_i(t)\}$  автомобилей.

**Что такое конфигурация автомобилей.** Максимально детальное описание расположения автомобилей в данный момент времени таково. Автомобиль индивидуален и ему присваивается некий индекс  $\alpha$ . Например, пусть есть автотрасса с  $k$  полосами  $1, 2, \dots, k$ , представляемая  $k$  прямыми, параллельными оси  $x$ . Тогда индекс  $\alpha = (m, i)$  выделяет  $i$ -й автомобиль на полосе  $m$ . Индекс  $i$  нумерует автомобиль на полосе, так что автомобиль  $i$  следует за автомобилем  $i - 1$ . Пусть  $d_\alpha$  — длина этого автомобиля,  $x_\alpha(t)$  — его координата (например, переднего бампера). Автомобили движутся в положительном направлении оси  $x$ . Далее индекс полосы опускается — читатель может его добавлять где надо — и используем только индекс  $i$ .

Обозначим расстояние автомобиля  $i$  до предыдущего автомобиля в реальном потоке в момент  $t$  через

$$d_i^+(t) = x_{i-1}(t) - x_i(t) - d_{i-1}.$$

Обозначим (тоже важная величина для водителя)

$$d_i^-(t) = d_{i+1}^+(t)$$

— расстояние до следующего автомобиля.

**Как вводятся вероятности на множестве конфигураций.** Формально точечный случайный поток на прямой задается вероятностной мерой на множестве всех счетных локально конечных (то есть конечных на каждом ограниченном интервале) подмножеств прямой. Иначе говоря, поток задается согласованной системой вероятностей

$$P(I_1, k_1; \dots; I_n, k_n)$$

того, что в интервалах  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , находится ровно  $k_j$  частиц.

Для более конкретного задания этих распределений существует две большие науки: *теория восстановления* (см., например, [6]) и *теория гиббсовских точечных полей* [23, 24]. Первая теория существенно проще, но годится только в одномерном случае. Вторая глубоко связана с физикой, годится и для многомерных ситуаций, но довольно сложна, и мы не будем ее здесь касаться.

Самый простой случайный поток — пуассоновский, см., например, [30]. Простейший способ его понять такой. Рассмотрим интервал  $[-N, N]$  и бросим на него независимо и случайно (точнее, равномерно)  $M = [\rho N]$  точек, где  $\rho > 0$  — некоторая константа, называемая плотностью. Легко вычислить биномиальную вероятность  $P_{N,M}(k, I)$  того, что в конечный интервал  $I$  попадет ровно  $k$  точек. Последняя при  $N \rightarrow \infty$  стремится к пуассоновскому выражению

$$P(k, I) = \frac{\{\rho|I\}^k}{k!} e^{-\rho|I|}.$$

Более общие потоки легко строятся на полупрямой  $[0, \infty)$ . Именно, случайные точки

$$x_0 = 0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

определяются как суммы независимых одинаково распределенных случайных величин  $\xi_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , с распределением  $G(x)$ :

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_1 + \xi_2, \quad \dots$$

Для определения трансляционно-инвариантного потока на всей прямой остается одна проблема — где разместить начальную точку потока, от которой откладывать независимые величины налево и направо. Для этого надо воспользоваться следующим (одним из основных) утверждением теории восстановления. Пусть  $P(t, t + \Delta t)$  — вероятность того, что в интервал  $(t, t + \Delta t)$  попадет ровно одна точка  $x_n$ . Тогда если  $\xi_i$  имеют плотность, то на полупрямой предел  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(t, t + \Delta t)$  существует и стремится при  $t \rightarrow \infty$  к  $\rho = (E\xi)^{-1}$ . Предельная (при  $t \rightarrow \infty$ ) плотность вероятности того, что расстояние от точки  $t$  до первой случайной точки  $x_i > t$  больше  $s$ , равна произведению  $\rho$  на вероятность того, что  $\xi_i = x_{i+1} - x_i > s$ , то есть равна

$$\rho \cdot (1 - G(s)).$$

Поэтому первую после начала координат точку потока следует взять на случайном расстоянии с этой плотностью. Расстояния же между точками будут по-прежнему независимыми с функцией распределения  $G(x)$ .

**Альтернирующие потоки.** Расстояния между соседними точками потока не обязательно одинаково распределены. Распределения могут чередоваться. Например, возьмем две последовательности случайных величин:  $\xi_1, \xi_2, \dots$  и  $\eta_1, \eta_2, \dots$  и положим

$$x_{2n} = \xi_1 + \dots + \xi_n + \eta_1 + \dots + \eta_n, \quad x_{2n-1} = \xi_1 + \dots + \xi_n + \eta_1 + \dots + \eta_{n-1}.$$

Тогда построение потока на всей прямой делается как и выше. В нашем случае чередуются длины автомобилей  $d_i$  (независимые и одинаково распределенные) и функции  $d_i^+$  (независимые и одинаково распределенные).

**Маркированные потоки.** Каждой точке  $x_i$  точечного процесса может быть сопоставлена величина  $\sigma_i$ , принимающая значения в некотором множестве  $S$ . Эту величину в разных случаях называют маркой или спином в точке  $x_i$  и говорят о случайном маркированном точечном множестве (потоке, процессе). Он определяется мерой на последовательностях пар  $(x_i, \sigma_i)$ . Проще всего, когда задана мера на счетных множествах, то есть задан поток без марок, а величины  $\sigma_i$  объявляются независимыми и одинаково распределенными. В разделе 1.5 мы построим маркированный процесс, где марками являются скорости, причем их распределение будет сложным образом коррелировать во времени с траекториями точек.

**О марковских процессах.** Для описания (моделирования) эволюции во времени конфигураций автомобилей часто используются марковские процессы, и необходимо сказать о соответствующей терминологии. Часто определение самого процесса и его свойств (например, эргодичности) отличаются в разных источниках. Поясним это. Для простоты ограничимся случаем дискретного времени.

Рассмотрим на некотором фазовом пространстве  $X$  систему мер (переходных вероятностей)  $P(A|x)$ , определяющих вероятности того, что в момент  $t+1$  процесс попадет в множество  $A \subset X$ , если в момент  $t$  процесс находился в состоянии  $x \in X$ . Если все меры  $P(A|x)$  одноточечные, то это эквивалентно заданию детерминированного отображения  $T: X \rightarrow X$ , точнее,  $P(\cdot|x) = \delta(T(x))$  — единичная мера в точке  $T(x)$ . Тогда говорят о детерминированном отображении, задающем динамическую систему.

Заметим, что система мер  $P(A|x)$  определяет очевидным образом преобразование  $U$  множества вероятностных мер на  $X$  в себя:

$$U\mu = \int P(\cdot|x) d\mu(x).$$

Важным является понятие инвариантной (относительно  $U$ ) меры. Обычно исследуется ее существование, единственность и другие свойства.

По системе переходных вероятностей можно построить разные последовательности случайных величин  $\xi_n$  со значениями в  $X$  или их распределений  $\mu_n$  на  $X$ , где  $P(\xi_n \in A) = \mu_n(A)$ . Вероятностным пространством

при этом служит множество траекторий  $\{x_n\}$ . Например, по вероятностной инвариантной мере строится стационарный марковский процесс как последовательность  $\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+$  случайных величин со значениями в  $X$ . Или по заданной начальной мере  $\mu_0$  на  $X$  строится последовательность  $\xi_n, n \in \mathbb{Z}_+$ .

Под марковским процессом может пониматься как одна из таких последовательностей случайных величин, так и все семейство таких последовательностей  $\xi_n$ . Соответственно разнится терминология, например, определение эргодичности. Динамическая система с заданной инвариантной мерой  $\mu$  называется эргодической, если любое инвариантное множество имеет меру  $\mu$  ноль или единицу. На любой стационарный марковский процесс можно смотреть как на динамическую систему — сдвиг в пространстве траекторий. Тогда понятие эргодичности совпадает с понятием эргодичности этой динамической системы.

Однако чаще, когда говорят о марковском процессе, имеют в виду не только стационарные процессы. Наиболее часто используемым определением эргодичности является следующее. Процесс называется эргодическим, если существует единственная инвариантная мера  $\mu$  на  $X$  и для любой начальной меры  $\mu_0$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет место слабая сходимость  $\mu_n \rightarrow \mu$ .

Отметим, что марковские процессы резко разделяются на два класса. Первый класс — для которых существует положительная мера на  $X$  (не обязательно вероятностная), относительно которой все меры  $P(\cdot|x)$  абсолютно непрерывны. К ним относятся почти все классические марковские процессы — конечные и счетные цепи Маркова, диффузионные процессы и другие. Такие процессы называются эргодическими, если, во-первых, у преобразования нет нетривиальных инвариантных множеств, а во-вторых, существует единственная инвариантная вероятностная мера. Во многих случаях отсюда следует сходимость к этой инвариантной мере из любого начального распределения. Для счетных цепей эквивалентным условием является положительная возвратность, то есть конечность (для всех пар  $x, y \in X$ ) среднего времени достижения  $y$  из  $x$ .

Второй класс характеризуется тем, что все меры  $P(\cdot|x)$  взаимно сингулярны. К этому классу относятся почти все процессы с бесконечным числом частиц. Теория таких процессов существенно сложнее.

## 1.2. Связь скорости и плотности с пропускной способностью

**Психика водителя в простейшем потоке.** Полностью моделировать психику, конечно, невозможно, но многие закономерности очевидны. Так, водитель  $i$  видит несколько автомобилей (часто только один впереди себя) в потоке и выбирает оптимальное для себя расстояние до предыдущего автомобиля. Если скорость  $v_{i-1}(t) = \frac{dx_{i-1}(t)}{dt}$  меняется медленно, то можно считать, что реакция водителя быстрее, и выбираемое расстояние  $D_i^+$

зависит только от этой скорости:

$$D_i^+ = D_i^+(v_{i-1})$$

(индекс  $i$  говорит, что функции  $D_i^+(v)$  разные для разных водителей). Назовем поток алгоритмическим в момент  $t$ , если для всех  $i$

$$d_i^+(t) = D_i^+(v_{i-1}(t)),$$

то есть все скорости последовательно определяются по скорости первого автомобиля. Конечно, нас интересуют не сами функции, а их статистические характеристики. При вероятностном подходе функции  $D_i^+(v)$  становятся независимыми одинаково распределенными случайными функциями, зависящими от скорости  $v$  предыдущего водителя как от параметра. Распределение этих функций не может быть выведено из математических, статистических, физических и т. д. законов. Оно зависит от индивидуальной и коллективной психики водителя и должно находиться экспериментально, см. [22].

**Детерминированная динамика без обгона.** Если все автомобили, водители и скорости  $v$  одинаковы, то многие задачи решаются просто. Обозначим через  $d$  длину автомобиля, через  $d^+ = D^+(v)$  — расстояние до впереди идущего автомобиля, которое водитель соблюдает. Уже такая динамика позволяет понять многие качественные эффекты.

Определим пропускную способность дороги как максимально возможный поток по ней:

$$J_{\max} = \max_v v\lambda(v),$$

где максимум берется по разрешенному интервалу скоростей, а

$$\lambda(v) = \frac{k}{d + D^+(v)}$$

— плотность автомобилей на  $k$ -полосной дороге при заданной скорости  $v$ . Отсюда видно, что пропускная способность может уменьшаться при увеличении скорости. Этот простой вывод говорит лишь о том, что многие водители увеличивают расстояние до впереди идущего автомобиля при увеличении его скорости.

**Случайная динамика без обгона.** То же самое получится, если скорости  $v$  одинаковы, функции  $d_i^+$  случайны и независимы, а их средние равны (для заданного  $v$ ) некоторому числу  $d^+(v)$ . Мы видим, что сам факт нетривиальной зависимости пропускной способности от скорости тривиален, и для него совершенно не нужны вероятностные модели. Однако для более тонких вопросов вероятностные модели необходимы. Сейчас мы введем довольно общую вероятностную модель с очень богатым спектром

фаз. При этом процессы с запретами (exclusion processes) появляются как вырожденный частный случай. Другие модели см. [10, 12, 22].

**Случайная динамика с обгоном (случайные грамматики).** Здесь естественно возникает связь с таким недавно открытым объектом, как случайные грамматики, см. [25]. Мы дадим краткое содержательное описание одной такой модели.

Пусть в момент  $t = 0$  все автомобили находятся на левой полуоси, движение однополосное. Мы разбиваем полосу движения на клетки определенной длины и считаем, что в каждой клетке не более одного автомобиля. Таким образом, конечная последовательность автомобилей изображается парой  $(S, r)$ , где  $r \in \mathbb{Z}$ , а  $S$  — конечная последовательность (слово) из трех символов 0, 1, 2:

$$S = s_N \dots s_2 s_1.$$

При этом 0 соответствует пустой клетке, 1 — активному (быстрому) водителю в клетке, 2 — спокойному водителю в клетке. Длина слова  $N = N(t)$  и все символы  $s_k(t)$  могут меняться во времени, но так, что всегда  $s_1(t) \neq 0$  для всех  $t \geq 0$ . В произвольный момент  $t$  каждый символ  $s_k(t)$  имеет координату  $x(s_k(t))$ . Координаты однозначно определяются

$$x(s_k(t)) = x(s_1(t)) - k + 1 \quad (1)$$

координатой  $x(s_1(t))$  первого символа, которую мы обозначим  $r = r(t)$ .

Динамика моделирует процесс ускорений и торможений отдельных водителей и определяется как цепь Маркова  $(S(t), r(t))$  с непрерывным временем на множестве пар  $\{(S, r)\}$ . Интенсивности скачков определяются так. Изменения  $S$  и  $r$  независимы друг от друга. Изменение  $r$  моделирует движение всего потока с постоянной скоростью  $v$ . Именно,  $r$  увеличивается на единицу с вероятностью  $v dt$  за время  $dt$ , и все координаты немедленно изменяются соответственно формуле (1). Динамика  $S$ , таким образом, будет описывать ситуацию относительно некоторого равномерного движения. Эта динамика задается случайной грамматикой, то есть списком возможных локальных замен подслов (всего будет 5 типов замен)  $S$  на другое подслово. Любые замены из приводимого ниже списка производятся независимо, случайно и имеют разные интенсивности (всего 4 параметра). Вот этот список.

1)  $10 \rightarrow 01$  — быстрый водитель передвигается на 1-го вперед, освобождая свободное место за собой, с вероятностью  $\lambda_0^+ dt$  за время  $dt$ ;

2)  $120 \rightarrow 021$  — быстрый водитель обгоняет спокойного, с вероятностью  $\lambda_1^+ dt$ ;

3)  $22 \rightarrow 202, 21 \rightarrow 201$  — предусмотрительный водитель тормозит, увеличивая дистанцию перед собой, с вероятностью  $\lambda_2^- dt$ . Отметим, что здесь

увеличивается длина  $S$  (возникает лишняя свободная ячейка), что ведет к сдвигу всех автомобилей сзади этого водителя на 1-го назад. Это нелокальный скачок, реально он растянут во времени, но это совместимо с правилом сложения относительных скоростей;

4)  $200 \rightarrow 020$  — спокойный водитель ускоряется с вероятностью  $\lambda_2^+ dt$  (если впереди, с его точки зрения, много свободного места).

Необходимо сказать, что для точной формулировки результатов, которые мы лишь обрисуем, надо делать разнообразные скейлинги параметров  $t, N, \lambda$ . Это будет сделано в отдельной статье. В зависимости от 4 параметров могут быть разнообразные типы (фазы) движения. Мы приведем только три из них.

Если  $\lambda_2^\pm$  малы по сравнению с остальными двумя параметрами, то автомобили типа 2 едут синхронно и с постоянной скоростью, а быстрые автомобили имеют дополнительную относительную скорость. Если быстрых автомобилей мало, то эта дополнительная скорость определяется движением одного автомобиля среди неподвижных препятствий и зависит от плотности  $\rho_2$  автомобилей типа 2 и плотности дырок  $\rho_0$  и примерно равна

$$v_{\text{rel}} = \lambda_0^+ \rho_0 + 2\lambda_1^+ \rho_2.$$

Если  $\lambda_2^-$  мала по сравнению с остальными двумя параметрами (нет нелокальных эффектов), а  $\lambda_2^+$  имеет такой же порядок, как  $\lambda_0^+, \lambda_1^+$ , то разница между типами стирается. Мы имеем тогда процесс, близкий к так называемому полностью асимметричному процессу с запретами (TASEP — totally asymmetric exclusion process), а для значений

$$\lambda_0^+ = \lambda_1^+, \quad \lambda_2^- = 0$$

— полностью с ним совпадающий (о TASEP см. приложение М. Бланка и ссылки в нем).

Если  $\lambda_2^+$  мала, а  $\lambda_2^-$  велика по сравнению с остальными двумя параметрами, то картина иная. Каждый обгон  $120 \rightarrow 021$  вызывает немедленное торможение автомобиля 2 и, как следствие, все последующие автомобили замедляются. Для автомобилей ближе к концу слова замедление будет весьма существенным, если поток достаточно плотный (мало ячеек с нулями), так как много автомобилей типа 2 будет тормозиться.

Можно усложнять введенную динамику, например, избежать дискретизации (см. конец этого раздела), вводя вместо нулей положительные вещественные числа — расстояния между последовательными автомобилями. Это потребует существенных (см., однако, раздел 1.5) переформулировок, особенно для скачков типа 3, но сохранит грубые качественные эффекты.

### 1.3. Рост пробки

Если входной транспортный поток в некоторую фиксированную область равен  $J_{\text{in}}$ , а выходной  $J_{\text{out}} < J_{\text{in}}$ , то количество автомобилей в данной области за время  $t$  увеличится на

$$t(J_{\text{in}} - J_{\text{out}}).$$

Так будет, однако, только если рассматриваемая область не находится на самом транспортном пути. Например, если автомобили скапливаются в пробке на самой дороге, то ответ другой. Дело в том что область сама может расти за счет скапливающихся автомобилей. Чтобы уточнить эти утверждения, надо уточнить модель.

Пусть автомобили одинаковой длины  $d$  едут в потоке (по одной полосе) со скоростью  $v$  один за другим на одинаковом расстоянии  $d^+$  между ними. Пусть в течение времени  $t$  движение остановлено неким препятствием, например, красным светофором. При этом автомобили останавливаются на расстоянии  $d_0^+ < d^+$  до предыдущего автомобиля.

**Упражнение 1.** Доказать, что за время  $t \rightarrow \infty$  пробка (то есть максимальная длина  $L(t)$  участка, где все автомобили стоят) перед препятствием будет иметь длину, асимптотически равную

$$L(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} tv \frac{d + d_0^+}{d^+ - d_0^+}. \quad (2)$$

По-видимому, этот результат зависит в действительности лишь от средних величин и остается верным при возможности обгона. Это сделано в [16] для независимого движения автомобилей (то есть когда автомобили не мешают друг другу), причем скорости автомобилей имеют флуктуации, однако средние скорости всех автомобилей одинаковы и равны  $v$ . Однако доказательство там совсем не просто. Другие модели роста пробки см. в [17] и главе 2.

**Локальные расширения и сужения трассы.** Что происходит при переходе участка дороги с  $k$  полосами в участок с  $l$  полосами? Пусть этот переход происходит в точке с координатой  $x = 0$ .

*Случай  $k < l$ .* Пусть максимально разрешенная скорость равна  $v_{\text{max}}$  и предполагается дисциплинированность водителей. Пусть автомобили движутся по  $k$ -полосной трассе со скоростью  $v < v_{\text{max}}$  и быстрее ехать невозможно по причине фундаментального соотношения между плотностью автомобилей  $\rho$  и их скоростью:

$$d + D^+(v) = \rho^{-1} k.$$

Тогда по  $l$ -полосной трассе длины  $L$  автомобили теоретически могут сохранить  $\rho$  и двигаться с такой же скоростью, но  $\rho$  может скорректироваться

так, что автомобили смогут двигаться быстрее с некоторой большей скоростью  $v_1$ . Выгода во времени будет

$$\frac{L}{v} - \frac{L}{v_1}.$$

*Случай  $k > l$ .* Тогда возможны три разных ситуации.

**Свободный поток.** Если поток очень редкий, то автомобили будут подъезжать к точке 0 в одиночку и не заметят перехода.

**Растущая пробка.** Обозначим через  $J_k$  текущий входящий поток и через  $J_{l,\max}$  — максимально возможный поток по  $l$ -полосной трассе. Если  $J_k > J_{l,\max}$ , то будет образовываться пробка, и число автомобилей в пробке в среднем будет расти как  $t(J_k - J_{l,\max})$ , а точнее, как в формуле (2).

**Задержка.** В случае  $J_k < J_{l,\max}$  практическое наблюдение таково: перед сужениями могут возникать пробки случайной длины, которые, однако, не растут слишком сильно. Соответствующих стохастических моделей пока нет, для этого прежде всего нужны нестационарные модели начала и остановки движения. Некоторые из этих моделей мы сейчас опишем.

#### 1.4. Модели начала движения

В работе [9] автомобили задаются точками

$$\dots < x_i(t) < x_{i-1}(t) < \dots$$

на прямой. В начальный момент времени  $t = 0$  автомобили стоят и образуют пуассоновское точечное поле с плотностью  $\rho < 1$ . Автомобили могут иметь две скорости: 0 или 1; обгоны запрещены. Каждый стоящий автомобиль, через независимое экспоненциально распределенное время со средним 1, начинает двигаться со скоростью 1. Может случиться так, что автомобиль с номером  $i$  доедет до автомобиля  $i - 1$  пока тот еще не начал двигаться. Тогда он останавливается и начинает двигаться через экспоненциальное время после того как начнет двигаться автомобиль  $i - 1$ . Такое правило действует всегда. Этот процесс в некотором смысле описывает выезд автомобилей из пробки.

Основной результат состоит в том, что с вероятностью 1 каждый автомобиль будет останавливаться только конечное число раз (при условии  $\rho < 1$ ). Пусть  $t_i$  — момент времени, начиная с которого автомобиль  $i$  все время движется. Тогда для любых  $i > k$  и любых  $t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-k}$  случайные величины

$$x_{i-1}(t_{i-1}) - x_i(t_i), \quad x_{i-2}(t_{i-2}) - x_{i-1}(t_{i-1}), \quad \dots, \quad x_{i-k}(t_{i-k}) - x_{i-k+1}(t_{i-k+1})$$

будут независимы и экспоненциально распределены. Иначе говоря, после выезда из пробки автомобили будут образовывать пуассоновскую конфигурацию той же самой интенсивностью  $\rho$ , что и в начале.

Пусть теперь в момент 0 пуассоновский точечный поток с плотностью  $\rho$  находится на левой полуоси. Каждая точка движется со скоростью  $v > 0$ , если расстояние до предыдущей точки не меньше некоторого  $d_{\text{эфф}} > 0$ , и стоит в противном случае. Здесь очевидно, что каждая частица не останавливается, начиная с некоторого момента. Но здесь можно получить больше. Рассмотрим следующие случайные величины:  $\tau_k^{(1)}$  — случайное время начала движения  $k$ -й точки,  $\tau_k^{(2)}$  — случайное время, начиная с которого эта точка больше не останавливается,  $x_k$  — расстояние до первой точки, начиная с момента  $\tau_k^{(2)}$ .

**Задача 1.** Найти асимптотику распределений этих случайных величин при  $k \rightarrow \infty$ .

Связь с задачей задержки очевидна. Пусть есть две полосы и на каждой полосе интенсивность потока  $\rho$ ; объединенный поток, таким образом, имеет плотность  $2\rho$ . Автомобиль из первой полосы надо втиснуться во вторую. Алгоритмы втискивания могут быть разными. Например, любой автомобиль втискивается независимо от других, если его расстояние (по оси  $x$ ) до предыдущего и последующего автомобиля из второй полосы было не менее некоторого числа  $d^+$ .

#### 1.5. Ближний и дальний порядок при меняющихся во времени скоростях автомобилей

Здесь автомобили представляются точками  $x_i$ . С автомобилем  $i$  связывается случайный процесс  $w_i(t)$ , определяющий его скорость в момент  $t$  «на свободной дороге» (то есть при отсутствии препятствия спереди). Величина этой скорости косвенно определяет активность водителя в данный момент времени. Будем говорить, что автомобиль  $i$  имеет впереди себя препятствие в момент  $t$ , если

$$x_i(t - 0) = x_{i-1}(t).$$

Процессы  $w_i(t)$  взаимно независимы и определяются лишь психикой индивидуального водителя. Предположим, что существуют константы  $0 < C_1 < C_2 < \infty$  такие, что для всех  $t, i$

$$C_1 < w_i(t) < C_2.$$

Поток задается начальным положением  $x_i(0)$  автомобилей, а их движение определяется как

$$x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t v_i(s) ds,$$

где  $v_i(t)$  — определяемая ниже скорость автомобиля в потоке. При этом начальные положения таковы, что расстояния  $d_i^+(0)$  независимы и, например,

экспоненциальны с заданным параметром  $\rho(0)$ . Процесс будет полностью определен, если для всех  $t_1, \dots, t_n, i_1, \dots, i_n$  мы зададим конечномерные распределения векторов:

$$(v_{i_1}(t_1), \dots, v_{i_n}(t_n)),$$

где среди индексов  $i_k$  могут быть одинаковые. Эти распределения полностью определяются следующими правилами:

1) (правило свободной дороги) если ни один из автомобилей  $i_1, \dots, i_k$  при  $k \leq n$  не имеет впереди себя препятствия, то распределение вектора  $(v_{i_1}(t_1), \dots, v_{i_k}(t_k))$  совпадает с распределением вектора  $(\omega_{i_1}(t_1), \dots, \omega_{i_k}(t_k))$  и является независимым от распределения вектора  $(v_{i_{k+1}}(t_{k+1}), \dots, v_{i_n}(t_n))$ ;

2) (правило препятствия) если автомобиль  $i$  имеет впереди себя препятствие в момент  $t$ , то  $v_i(t) = v_{i-1}(t)$ ;

3) (правила обгона) если автомобиль  $i$  имеет впереди себя препятствие в момент  $t$ , то он меняется местами с предыдущим автомобилем с некоторой интенсивностью  $\lambda$  в течение (случайного) интервала времени пока  $w_i(t) > v_{i-1}(t)$ . Смысл этого условия состоит в том, что водитель обгоняет, если его активность высока в течение некоторого промежутка времени.

Уже для этого простейшего определения транспортного потока с зависимыми от времени скоростями есть много задач. Некоторые из них мы сейчас сформулируем.

Назовем свободной фазой случай, когда автомобиль не задерживается при обгоне догоняемого автомобиля, то есть интенсивность обгона равна бесконечности. Тогда для любых автомобилей с индексами  $i, j$  их скорости независимы, и, значит, ковариации

$$\text{cov}_{ij}(t) = Ev_i(t)v_j(t) - Ev_i(t)Ev_j(t) = 0.$$

**Задача 2.** Для заданных распределений процессов  $w_i(t)$  существует константа  $0 < \lambda_0 < \infty$  такая, что при  $\lambda < \lambda_0$  существует предельный стационарный процесс (по  $i$  и по  $t$ ), в котором ковариации  $\text{cov}_{ij}(t)$  убывают экспоненциально по  $|j - i|$ .

Назовем этот тип движения фазой с ближним порядком. Существование фазы дальнего порядка определяется следующей гипотезой.

**Задача 3.** Существует константа  $0 < \lambda_{cr} < \infty$  такая, что при  $\lambda > \lambda_{cr}$  существует предельный стационарный процесс, в котором ковариации  $\text{cov}_{ij}(t)$  не стремятся к нулю при  $|j - i| \rightarrow \infty$ .

Будет ли  $\lambda_{cr} = \lambda_0$  предыдущей задачи?

Эти три фазы могут иметь отношение к фазам, определенным Б. С. Кернером [15].

**Задача 4.** Определить подобный процесс с длинами  $d_i, d_i^+$ , а также с дополнительными индексами, соответствующими полосам движения, и с поведением водителя, зависящим не только от следующего, но и от предыдущего автомобиля. Какие дополнительные качественные эффекты могут ловить эти модели?

## 2. Расчет средней скорости на автотрассе

Мы приводим здесь простейшую постановку задачи о снижении средней скорости движения автомобиля по автотрассе из-за случайных неподвижных (аварии и ремонтные работы) и движущихся (медленные автомобили) препятствий. Цель — показать (полностью решив модельные задачи), что во многих случаях можно получить простые красивые формулы, позволяющие понять основные причины замедления. Мы четко формулируем технические предположения для получения таких формул. Основное предположение касается однородности трассы, именно въезда, выезда автомобилей, специфики обгона.

### 2.1. Дорога как одномерная сеть массового обслуживания

Следующая модель заимствована из [8, с. 117]. Пусть есть бесконечная дорога и два типа автомобилей, задаваемые точками на бесконечной прямой, которые движутся в одном направлении. Автомобили первого типа (быстрые) двигаются с постоянной скоростью  $v_1$ , автомобили второго типа (медленные) имеют постоянную скорость  $v_2$ , где  $v_1 > v_2$ .

Предположим, что быстрые автомобили в начальный момент времени образуют пуассоновскую случайную конфигурацию (пуассоновский точечный поток) на всей прямой с плотностью  $\lambda_1$ . Медленные автомобили расположены в момент  $t = 0$  в точках

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n < \dots,$$

причем расстояния  $x_k - x_{k-1}$  одинаково распределены со средним  $\lambda_2^{-1}$  (не обязательно экспоненциально). Медленные автомобили едут независимо, не замечая других автомобилей. Быстрые же «взаимодействуют» с каждым автомобилем, с которым их координаты совпадают. Именно, быстрым автомобилям разрешено обгонять медленные. Когда быстрый автомобиль догоняет медленный, то есть их координаты совпадают, то он сколько-то времени едет вместе с медленным, то есть со скоростью  $v_2$ . Через экспоненциально распределенное время с параметром  $\mu$  он обгоняет медленного, то есть начинает ехать со скоростью  $v_1$ . Если быстрый автомобиль догоняет группу быстрых автомобилей, следующих за медленным, то обгон происходит в порядке очереди, точнее, в том порядке, в котором быстрые автомобили догоняли данный медленный автомобиль. Без ограничения общности, скорости медленных автомобилей можно считать равными нулю

$v_2 = 0$ , а скорости быстрых соответственно равными  $v = v_1 - v_2$ . Поэтому каждый медленный автомобиль можно представлять узлом обслуживания, на который приходят клиенты (быстрые автомобили) и в порядке очереди (то есть прибытия) ждут обслуживания (обгона), а затем обслуживаются с интенсивностью обслуживания  $\mu$ .

Теперь эта задача может быть сведена к линейной сети массового обслуживания, которую мы сейчас опишем. Имеется бесконечная последовательность

$$S_0 \rightarrow \dots \rightarrow S_k \rightarrow S_{k+1} \rightarrow \dots$$

узлов обслуживания двух типов. Каждый узел  $S_k$  представляет собой систему типа  $M/M/1$  с дисциплиной обслуживания FIFO (first in — first out), то есть обслуживание в порядке естественной очереди. Эти узлы соответствуют медленным автомобилям, а требования — быстрым. Например, узел  $S_0$  соответствует крайнему левому медленному автомобилю. Вторая буква  $M$  означает экспоненциальность времени обслуживания. Это вместе с дисциплиной FIFO отвечает формулировке нашей модели. Первая буква  $M$  означает пуассоновость входящего потока прибывающих требований. Так, на узел  $S_0$  поступление требований образует стационарный пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda_1 v$ . Из элементарной теории очередей известно, во-первых, что если  $\lambda_1 v < \mu$ , то устанавливается стационарный режим с вероятностями  $P_n$  того, что длина очереди равна  $n$ :

$$P_n = (1 - r)r^n, \quad r = \frac{\lambda_1 v}{\mu}.$$

Во-вторых, известно (теорема Бюрке (Burke)), что в стационарном режиме выходящий поток из системы типа  $M/M/1$  будет пуассоновским с интенсивностью, равной интенсивности входящего потока, то есть в нашем случае это  $\lambda_1 v$ .

После первого узла, со случайным, но одинаковым для всех автомобилей временным сдвигом  $\frac{x_1 - x_0}{v}$ , поток требований поступает на узел  $S_1$ , где также устанавливается стационарный режим.

Найдем среднюю скорость быстрого автомобиля на интервале  $(x_0, x_N)$ ,  $N \rightarrow \infty$ . При этом мы будем предполагать, что стационарный режим уже установился. Время проезда этого участка складывается из  $N$  обгонов и  $N$  путей между медленными автомобилями.

Среднее время, затрачиваемое быстрым автомобилем на обгон медленного, составит

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - r)r^n \frac{(n+1)}{\mu} = \frac{1}{(1-r)\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda_1 v},$$

в то время как среднее время движения до следующего медленного автомобиля есть

$$\frac{1}{\lambda_2 v}.$$

Поэтому расстояние между соседними медленными автомобилями (в среднем равное  $\lambda_2^{-1}$ ) быстрый автомобиль в среднем проходит за время  $(\mu - \lambda_1 v)^{-1} + (\lambda_2 v)^{-1}$ .

Таким образом, средняя скорость быстрого автомобиля составит

$$v_{\text{mean}} = \frac{\lambda_2^{-1}}{(\mu - \lambda_1 v)^{-1} + (\lambda_2 v)^{-1}}.$$

В следующих разделах мы рассмотрим более сложную ситуацию с более общими распределениями.

## 2.2. Снижение средней скорости из-за ремонтных работ

По длинной автотрассе едут автомобили с постоянной скоростью  $v$ , встречая препятствия. Препятствия обычно имеют малый размер в сравнении с расстояниями между ними, поэтому можно представлять их точками. Они возникают на произвольном участке дороге  $(x, x + dx) \subset \mathbb{R}$  за время  $(t, t + dt) \subset \mathbb{R}$  с вероятностью  $\lambda dx dt$ . Точнее говоря, пары (место и момент возникновения препятствия)  $(x_j, t_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  образуют пуассоновское точечное поле  $\Pi$  на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  с интенсивностью  $\lambda$ . Другое эквивалентное определение состоит в том, что для любого интервала  $I \subset \mathbb{R}$  есть пуассоновский поток прибывающих препятствий интенсивности  $\lambda|I|$ , причем в момент прибытия препятствие выбирает точку равномерно на интервале  $I$ .

Предположим, что  $j$ -е препятствия находится на дороге некоторое случайное время  $\tau_j$ , после чего оно убирается с дороги. Будем считать, что  $\tau_j$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения  $Q(t)$ , не зависящие от пуассоновского точечного поля  $\Pi$ . Предположим, что первые два момента с.в.  $\tau_j$  конечны. Обозначим  $m_Q = E\tau_j$  и  $m_Q^{(2)} = E\tau_j^2$ .

Далее мы будем рассматривать два случая. В первом случае объезд запрещен и автомобиль вынужден стоять до тех пор, пока не уберут препятствие, после чего автомобиль мгновенно набирает свою скорость  $v$ . Во втором случае объезд разрешен. Более точно, автомобилю требуется некоторое случайное время для того, чтобы объехать препятствие или группу автомобилей, стоящих перед препятствием, причем время обгона не зависит от размера этой группы. Обозначим через  $\eta_{m,i}$  случайное время объезда  $i$ -м автомобилем  $m$ -го препятствия. Мы предполагаем, что  $\eta_{m,i}$  независимы и одинаково распределены с функцией распределения  $F(u)$ . Эти предположения естественны для слабой нагрузки дороги, тогда пе-

ред препятствием не будет много автомобилей. Случай большой нагрузки рассматривается ниже.

Нашей первой задачей будет вычисление средней скорости автомобиля. При сделанных предположениях автомобили не мешают друг другу, поэтому достаточно рассмотреть какой-нибудь один из них. Обозначим через  $T(x)$  случайное время, затрачиваемое автомобилем на прохождение расстояния  $x$ . Мы хотим найти предел отношения  $\frac{x}{T(x)}$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Пусть  $b = \lambda m_Q$ ,  $\zeta$  — с.в. с плотностью распределения

$$h(t) = m_Q^{-1}(1 - Q(t)). \quad (3)$$

**Упражнение 2.** Показать, что  $h$  — плотность.

Отметим, что

$$E\zeta = \frac{1}{m_Q} \int_0^\infty t(1 - Q(t)) dt = \frac{1}{m_Q} \int_0^\infty (1 - Q(t)) d\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{1}{2m_Q} \int_0^\infty t^2 dQ(t) = \frac{m_Q^{(2)}}{2m_Q},$$

где  $m_Q^{(2)}$  — второй момент распределения  $Q(t)$ .

Определим с.в.  $\alpha = \min(\eta, \zeta)$ , где равенство по распределению, при этом с.в.  $\eta, \zeta$  считаются независимыми и с.в.  $\eta$  имеет функцию распределения  $F(u)$ . Положим

$$a = E\alpha.$$

**Теорема 1.** С вероятностью 1 при  $x \rightarrow \infty$

$$\frac{x}{T(x)} \rightarrow \frac{v}{1 + av}. \quad (4)$$

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что автомобиль выезжает в точке  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Пусть  $T_0(x)$  — время простоя автомобиля. Тогда, очевидно,  $T(x) - T_0(x) = v^{-1}x$  и

$$\frac{x}{T(x)} = \frac{x}{T(x) - T_0(x) + T_0(x)} = \frac{1}{v^{-1} + x^{-1}T_0(x)}.$$

Поэтому достаточно найти предел отношения  $\frac{T_0(x)}{x}$  при  $x \rightarrow \infty$ . Мы хотим показать, что

$$T_0(x) = \sum_{i=1}^{\pi(x)} \alpha_i, \quad (5)$$

где  $\alpha_i$  — н.о.р. с.в., распределенные как  $\alpha$ ,  $\pi(x)$  — с.в. с пуассоновским распределением с параметром  $bx$ , причем  $\alpha_i$  и  $\pi(x)$  независимы. Смысл этой формулы в том, что автомобиль при прохождении расстояния  $x$  встретит  $\pi(x)$  препятствий и потеряет случайное время  $\alpha_i$  на  $i$ -м препятствии.

Из (5) и усиленного закона больших чисел легко следует, что  $\frac{T_0(x)}{x} \rightarrow ab$  п.н. при  $x \rightarrow \infty$ .

Докажем (5). Введем маркированное пуассоновское точечное поле  $\Pi_1$  на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  с конфигурацией  $(x_j, t_j, \tau_j)$ , то есть  $\tau_j$  — марка в точке  $(x_j, t_j)$ . Следующее утверждение можно найти в [5]:

**Лемма 1.** Маркированное точечное поле  $\Pi_1$  эквивалентно по распределению пуассоновскому полю на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$  с интенсивностью

$$\lambda dx dt dQ(t).$$

Препятствия, возникающие на дороге, удобно представлять в виде горизонтальных отрезков, изображенных на рис. 1. Координаты начальной точки определяют место и время возникновения препятствия (пара  $(x_j, t_j)$ ). Длина отрезка — время пребывания препятствия на дороге (марка  $\tau_j$ ).

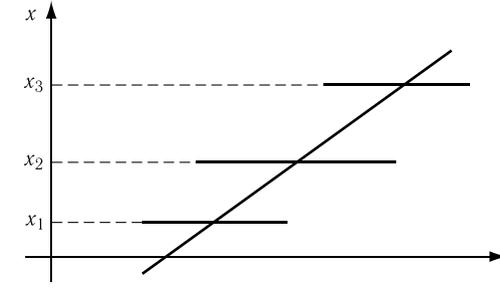


Рис. 1

Возьмем произвольную прямую  $c_1t + c_2$  и рассмотрим точки пересечения этой прямой с горизонтальными отрезками. Обозначим через  $\{x_i\}$  пространственные координаты этих точек, как показано на рис. 1. Следующая лемма доказана в [7].

**Лемма 2.** Конфигурация  $\{x_i\}$  образует пуассоновский процесс интенсивности  $b = \lambda m_Q$ .

На рис. 2 изображена траектория движения автомобиля, который стартует в точке  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Обозначим через  $x_i$  пространственные координаты препятствий, которые возникают при движении автомобиля,  $t_i$  — моменты их возникновения,  $s_i$  — моменты времени, когда автомобиль встречает препятствие,  $u_i$  — моменты времени, когда автомобиль избавляется от препятствия либо в результате объезда препятствия, либо в результате исчезновения препятствия;  $\alpha_i = u_i - s_i$  — задержка автомобиля на  $i$ -м препятствии.

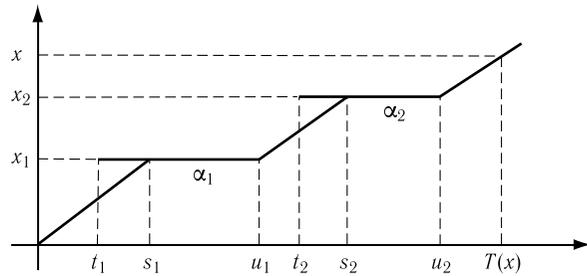


Рис. 2

Из леммы 2 и пространственно-временной однородности пуассоновского точечного поля  $\Pi$  следует, что точки  $x_i$  образуют пуассоновский процесс интенсивности  $b$ .

Под временем жизни препятствия будем понимать время его пребывания на дороге. Назовем остаточным временем жизни препятствия время его нахождения на дороге после того как его догнал автомобиль. Другими словами, это задержка автомобиля, если объезд невозможен.

**Лемма 3.** *Остаточное время жизни препятствия имеет распределение с плотностью  $h(s)$ , где  $h(s)$  определяется формулой (3).*

В самом деле, из свойств пуассоновского точечного поля следует, что условное распределение остаточного времени жизни препятствия при условии, что полное время жизни равно  $t$ , совпадает с равномерным распределением на отрезке  $[0, t]$ . В силу леммы 2 вероятность возникновения препятствия в интервале длины  $dx$  равна  $\lambda m_Q dx + o(dx)$ , а вероятность возникновения препятствия с фиксированным временем жизни  $t$  в интервале длины  $dx$  есть  $\lambda t dQ(t) dx + o(dx)$ , что вытекает из леммы 1. Поскольку

$$\frac{\lambda t dQ(t) dx + o(dx)}{\lambda m_Q dx + o(dx)} = \frac{t dQ(t)}{m_Q}$$

есть условная вероятность возникновения препятствия с фиксированным временем жизни  $t$ , то плотность распределения остаточного времени жизни препятствия имеет вид

$$\int_s^\infty \frac{t dQ(t) ds}{m_Q} = m_Q^{-1} (1 - Q(s)) ds = h(s) ds.$$

Лемма доказана.

В том случае, когда объезд возможен, автомобиль потеряет время, которое есть минимум из времени обгона и остаточного времени жизни препятствия, т. е.  $\alpha_i = \min(\eta, \zeta)$ . Теорема доказана.  $\square$

Обсудим результат. Смысл константы  $a$  мы уже пояснили, а константа  $b$  имеет смысл стационарной плотности препятствий в пространстве.

Этот результат довольно точен при малой плотности автомобилей, так как около препятствия будет по одному автомобилю. При высокой плотности автомобилей время объезда будет пересчитываться (увеличиваться) в зависимости от средней длины очереди перед препятствием.

### 2.3. Снижение средней скорости из-за медленных автомобилей

Автодорога описывается действительной осью  $\mathbb{R}$ . Потоки считаются не очень плотными, поэтому длина автомобиля роли не играет, и в данный момент времени положение автомобиля задается точкой  $x_i(t) \in \mathbb{R}$ , где  $i$  — индекс, нумерующий автомобили. Каждый автомобиль имеет фиксированный маршрут: место и время въезда  $x_{i,\text{in}}, t_{i,\text{in}}$ , а также предписанное ему место выезда  $x_{i,\text{out}}$ . Но время выезда  $t_{i,\text{out}}$  зависит от степени загруженности дороги. Мы определяем среднюю скорость автомобиля  $i$  как

$$V_i = \frac{x_{i,\text{out}} - x_{i,\text{in}}}{t_{i,\text{out}} - t_{i,\text{in}}}.$$

Есть два типа автомобилей: быстрые и медленные, каждый движется с постоянной скоростью слева направо. У быстрых автомобилей скорость  $v_1$ , у медленных —  $v_2$ , где  $v_1 > v_2 > 0$ . Пусть  $v = v_1 - v_2$ . Заметим, что случай неподвижных препятствий соответствует нулевой скорости  $v_2$ . Медленные автомобили движутся до пункта назначения нигде не останавливаясь, а быстрые до тех пор, пока не догонят впереди идущий медленный автомобиль. После этого быстрый автомобиль  $i$  движется вместе с этим медленным автомобилем  $j$  некоторое случайное время  $\tau_{i,j}$  и затем обгоняет его, сразу набирая скорость  $v_1$ . Основное предположение состоит в том, что эти случайные величины независимы и одинаково распределены с функцией распределения  $F(s)$ .

Эта функция распределения может быть найдена статистически двумя способами как путем прямой выборки (оценки времени ожидания обгона), так и по статистике препятствий к обгону — плотности встречного потока.

Прибытие медленных автомобилей задается тем же самым пуассоновским точечным полем  $\Pi$  интенсивности  $\lambda$ , которое было определено в предыдущем разделе. Нам потребуются также новые обозначения. С каждым медленным автомобилем мы свяжем случайное расстояние, которое ему необходимо проехать. Будем предполагать, что  $j$ -му медленному автомобилю необходимо проехать случайное расстояние  $\rho_j$ , после чего он съедет с дороги. С.в.  $\rho_i$  независимы и одинаково распределены с общей функцией распределения  $G(r)$ . С.в.  $\rho_j$  не зависят также от пуассоновского точечного поля  $\Pi$ . Будем предполагать существование первых двух моментов с.в.  $\rho_1$ . Обозначим  $m_G = E\rho_1$ ,  $m_G^{(2)} = E\rho_1^2$ .

Медленный автомобиль не встречает на своем пути препятствий и проходит свой путь со скоростью  $v_2$ . Быстрым автомобилям могут мешать медленные. Мы рассмотрим два случая. В первом случае обгон запрещен и быстрый автомобиль вынужден следовать за медленным до тех пор, пока медленный автомобиль не доедет до нужного места, после чего быстрый автомобиль мгновенно набирает свою скорость  $v_1$ . Во втором случае обгон разрешен. Более точно, когда  $i$ -й быстрый автомобиль догоняет  $j$ -й медленный или группу быстрых автомобилей (следующих за  $j$ -м медленным), ему требуется случайное время  $\tau_{i,j}$  для того, чтобы обогнать  $j$ -й медленный автомобиль или всю эту группу автомобилей. При этом время обгона не зависит от размера группы. С.в.  $\tau_{i,j}$  предполагаются независимыми и одинаково распределенными с функцией распределения  $F(u)$ .

Пусть  $d = \lambda m_G (v_2^{-1} - v_1^{-1})$ . Введем с.в.  $\beta$  с плотностью распределения  $g(x) = m_G^{-1}(1 - G(x))$  и с.в.  $\gamma = \min(v_2 \tau_{1,1}, \beta)$ , где равенство по распределению и с.в.  $\tau_{1,1}, \beta$  считаются независимыми. Отметим, что

$$E\beta = \frac{m_G^{(2)}}{2m_G}.$$

Положим  $c = E\gamma$ .

**Теорема 2.** С вероятностью 1 при  $x \rightarrow \infty$

$$\frac{x}{T(x)} \rightarrow \bar{v}_1 = \frac{1 + dc}{1 + dc v_1 v_2^{-1}} v_1. \quad (6)$$

**Доказательство.** Покажем, что этот случай сводится к рассмотренному случаю  $v_2 = 0$ . Введем систему координат, которая движется со скоростью  $v_2$  относительно исходной. Найдем среднюю скорость быстрого автомобиля относительно новой системы координат по формуле (4), подставляя  $v = v_1 - v_2$ ,  $b = \frac{\lambda m_G}{v_2}$ ,  $a = \frac{c}{v_2}$ :

$$\frac{1}{(v_1 - v_2)^{-1} + \frac{\lambda m_G}{v_2^2}} = \frac{v_1 - v_2}{1 + dc v_1 v_2^{-1}}.$$

Тогда средняя скорость быстрого автомобиля относительно исходной системы координат составит

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1 - v_2}{1 + dc v_1 v_2^{-1}} + v_2 = \frac{1 + dc}{1 + dc v_1 v_2^{-1}} v_1. \quad \square$$

### 3. Критерии образования пробок в сложных транспортных сетях

Обязательным атрибутом транспортной сети (например, городских улиц) является граф, где множество  $V$  вершин представляет перекрест-

ки (узлы или пункты обслуживания), а множество ребер  $L = \{(i, j)\}$  — отрезки путей без перекрестков. Пусть число перекрестков равно  $N$ . Мы предполагаем, что между двумя перекрестками существует не более одного пути без перекрестков.

Наиболее разработанными являются два класса сетей. С одной стороны, это (по имени авторов и в порядке увеличения общности) сети Джексона, ВСМР-сети, DB-сети (см., например, [8,26]). В них требование (сообщение, автомобиль, работа) обслуживается в каждом проходимом ими узле и затем выбирает случайно следующий узел. С другой стороны, — сети Келли (см. [8]), где каждое требование имеет заранее фиксированный маршрут. Эти два класса сетей связаны как общей техникой, так и близостью результатов. Именно они обладают замечательным свойством мультипликативности — стационарные распределения в них имеют вид так называемой проакт-формы. Мы рассматриваем только первый класс сетей.

#### 3.1. Замкнутые сети

Если предполагается, что автомобили не прибывают извне и не уезжают вовне, то такая сеть называется **замкнутой**. Таким образом, число автомобилей в сети сохраняется и далее обозначается через  $M$ . Движение отдельного автомобиля определяется так. Автомобиль ждет некоторое время на перекрестке  $i$  и затем направляется на перекресток  $j$ . Выбор  $j$  определяется стохастической матрицей маршрутизации:  $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$ , где  $p_{ij}$  — вероятность того, что с перекрестка  $i$  автомобиль поедет (после ожидания) на перекресток  $j$  (например, прямо, налево, направо), то есть по улице  $(i, j)$ .

Стохастическая матрица  $P$  определяет конечную цепь Маркова с дискретным временем, множеством состояний  $V = \{1, \dots, N\}$ . Эта цепь Маркова предполагается неразложимой. В этом случае система линейных уравнений

$$\rho P = \rho, \quad \rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) \iff \sum_{i=1}^N \rho_i p_{ij} = \rho_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (7)$$

имеет единственное решение (с точностью до произвольного множителя). Нормированное решение имеет вид

$$\pi_i = \frac{\rho_i}{\sum_{i=1}^N \rho_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

С каждым узлом  $i \in V$  свяжем функцию  $\mu_i(n_i)$  от числа автомобилей  $n_i$  в  $i$ -м узле, где  $\mu_i(0) = 0$  и  $\mu_i(n_i) > 0$  при  $n_i > 0$ . Эта функция характеризует пропускную способность данного узла и определяет интенсивность

выходящего из узла потока автомобилей. Именно, вероятность того, что за малый промежуток времени  $dt$  из узла  $i$  выедет автомобиль, равна  $\mu_i(n_i) dt + o(dt)$  при условии, что в узле находится  $n_i$  автомобилей. Используя терминологию теории очередей, будем называть  $\mu_i(n_i)$  интенсивностью обслуживания в узле  $i$ .

Порядок, в котором пропускаются (обслуживаются) прибывающие в узел автомобили, определяется дисциплиной обслуживания. Простейший вариант дисциплины обслуживания — это обслуживание в порядке поступления. В узле прибывающие автомобили становятся в очередь друг за другом в том порядке, в котором они приехали, и узел пропускает автомобили согласно этой очереди. Если в узле  $i$  находится  $n_i$  автомобилей, то первый автомобиль в очереди обслуживается с интенсивностью  $\mu_i(n_i)$ .

Более общая дисциплина обслуживания — это дисциплина разделения общего ресурса, где под ресурсом в данном случае понимается пропускная способность узла. Согласно этой дисциплине ресурс делится в некоторой пропорции между всеми автомобилями, находящимися в данный момент в узле. В общем случае предположим, что  $k$ -й автомобиль в  $i$ -м узле обслуживается с интенсивностью  $\mu_{i,k}(n_i) \leq \mu_i(n_i)$ . При этом потребуем, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n_i} \mu_{i,k}(n_i) = \mu_i(n_i).$$

Например, общий ресурс может быть разделен в равной степени между всеми автомобилями в очереди:

$$\mu_{i,k}(n_i) = \frac{\mu_i(n_i)}{n_i}.$$

В этом случае каждый из  $n_i$  автомобилей потратит экспоненциальное время со средним  $n_i \mu_i^{-1}(n_i)$  на прохождение этого узла, при условии, что число автомобилей будет сохраняться равным  $n_i$ . Если взять  $\mu_{i,1}(n_i) = \mu_i(n_i)$ , то получим дисциплину обслуживания в порядке поступления. Таким образом, интенсивности  $\mu_{i,k}(n_i)$  полностью определяют дисциплину обслуживания в узлах.

Динамика сети описывается с помощью  $N$ -мерной марковской цепи с непрерывным временем  $\xi(t) = (\xi_i(t), i = 1, \dots, N)$ , где  $\xi_i(t)$  — число автомобилей, скопившихся в  $i$ -м узле в момент времени  $t$ . Случайный процесс  $\xi(t)$  принимает значение в пространстве  $S_M$ , где  $S_M$  — множество всех таких векторов с неотрицательными целочисленными координатами  $\bar{n} = (n_1, \dots, n_N)$ , что  $n_1 + \dots + n_N = M$ .

Пусть  $e_i$  — базисный вектор, в котором  $i$ -я координата равна 1, а остальные координаты равны 0. Из состояния  $\bar{n}$  марковская цепь  $\xi(t)$  может перейти в одно из состояний  $T_{i,j}\bar{n} = \bar{n} - e_i + e_j$ ,  $i \neq j$ , с интенсивно-

стью

$$\alpha(\bar{n}, T_{i,j}\bar{n}) = \mu_i(n_i) p_{i,j}, \quad (8)$$

при условии, что  $n_i \neq 0$ . Переход  $\bar{n} \rightarrow T_{i,j}\bar{n}$  соответствует тому, что, выехав из узла  $i$ , автомобиль поступает в узел  $j$ .

Отметим, что марковская цепь  $\xi(t)$  однозначно определяется матрицей маршрутизации  $P$  и набором интенсивностей обслуживания в узлах  $(\mu_i(n_i), i = 1, \dots, N)$ .

Пусть  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)$  — решение уравнения (7), которое рассматривается как формальное уравнение для интенсивностей  $\rho_i$  входящих потоков в узлы (в стационарном режиме они равны выходящим). Решая эти уравнения, находим  $\rho_i$ , и тогда стационарное распределение  $\nu(n_1, \dots, n_N)$  марковской цепи  $\xi(t)$  будет иметь вид

$$\nu(n_1, \dots, n_N) = \frac{1}{Z_{N,M}} \prod_{i=1}^N \frac{\rho_i^{n_i}}{\mu_i(1)\mu_i(2)\dots\mu_i(n_i)}, \quad (9)$$

где нормирующий множитель (малая статсумма)

$$Z_{N,M} = \sum_{n_1+\dots+n_N=M} \prod_{i=1}^N \frac{\rho_i^{n_i}}{\mu_i(1)\mu_i(2)\dots\mu_i(n_i)},$$

что проверяется подстановкой ответа (9) в уравнения Колмогорова для стационарных вероятностей, см., например, [8, 29].

### 3.2. Открытые сети

Рассмотрим сеть, состоящую из  $N$  узлов. В отличие от замкнутой сети, общее число автомобилей в сети теперь не фиксировано. Предположим, что извне сети в узел  $i$  поступает пуассоновский поток автомобилей интенсивности  $\lambda_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

Зададим матрицу маршрутизации  $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$ , где матрица  $P$  неразложима и

$$\forall i: \sum_{j=1}^N p_{ij} \leq 1 \quad \exists i_0: \sum_{j=1}^N p_{i_0j} < 1. \quad (10)$$

Как и в случае замкнутой сети,  $p_{i,j}$  — это вероятность того, что из узла  $i$  автомобиль едет в узел  $j$ . В отличие от замкнутой сети, добавляется вероятность того, что, выйдя из узла  $i$ , автомобиль покидает сеть. Эта вероятность по определению равна

$$p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^N p_{ij}.$$

Как и в случае замкнутой сети, пусть  $\mu_i(n_i)$  — интенсивность обслуживания в  $i$ -м узле. Тогда с интенсивностью  $\mu_i(n_i)p_{i,0}$  автомобиль покидает сеть после выхода из узла  $i$ .

Мы будем описывать динамику сети с помощью  $N$ -мерного случайного процесса с непрерывным временем  $\eta(t) = (\eta_i(t), i = 1, \dots, N)$ , где  $\eta_i(t)$  — число автомобилей в  $i$ -м узле в момент времени  $t$ . Случайный процесс  $\eta(t)$  является марковской цепью с непрерывным временем и с пространством состояний  $S$ , где  $S$  — множество  $N$ -мерных векторов с неотрицательными целочисленными координатами  $\bar{n} = (n_1, \dots, n_N)$ .

Из состояния  $\bar{n}$  марковская цепь  $\xi(t)$  может перейти в одно из состояний  $T_{i,j}\bar{n} = \bar{n} - e_i + e_j$ ,  $T_{i,0}\bar{n} = \bar{n} - e_i$ ,  $T_i\bar{n} = \bar{n} + e_i$  с интенсивностями

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{n}, T_{i,j}\bar{n}) &= \mu_i(n_i)p_{i,j}, \\ \alpha(\bar{n}, T_{i,0}\bar{n}) &= \mu_i(n_i)p_{i,0}, \\ \alpha(\bar{n}, T_i\bar{n}) &= \lambda_i, \end{aligned} \quad (11)$$

при условии, что  $T_{i,j}\bar{n}, T_{i,0}\bar{n}, T_i\bar{n} \in S$ .

Таким образом, марковская цепь  $\eta(t)$  однозначно определяется триплетом  $(\lambda, \mu, P)$ , где  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  — вектор интенсивностей внешних потоков,  $\mu = (\mu_i(n_i), i = 1, \dots, N)$  — набор интенсивностей обслуживания в узлах и  $P$  — матрица маршрутизации.

Рассмотрим формальное уравнение для интенсивностей входящих потоков в узлы (в стационарном режиме они равны выходящим):

$$\rho = \lambda + \rho P \iff \rho_i = \lambda_i + \sum_{k=1}^N \rho_k p_{ki} \quad \forall i. \quad (12)$$

В силу условия (10) и неразложимости матрицы  $P$  это уравнение имеет единственное решение, которое можно представить в виде

$$\rho = \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda P^n.$$

Далее рассмотрим случай, когда интенсивности обслуживания  $\mu_i(n_i) \equiv \mu_i$  не зависят от числа автомобилей в узлах. Введем нагрузки в узлах по формуле

$$r_i = \frac{\rho_i}{\mu_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Следующую теорему можно найти, например, в [8, 20], она называется иногда теоремой Гордона—Ньюэлла.

**Теорема 3.** *Марковская цепь  $\eta(t)$  является эргодической тогда и только тогда, когда для всех  $i = 1, \dots, N$  будет  $r_i < 1$ . При этом*

стационарное распределение цепи имеет вид

$$\sigma(n_1, \dots, n_N) = \prod_{i=1}^N (1 - r_i) r_i^{n_i}.$$

Из этой теоремы легко следует, что средние длины очередей в стационарном режиме равны

$$m_i = \frac{r_i}{1 - r_i}.$$

Если в некоторых узлах  $i_1, \dots, i_k$  нагрузка строго больше 1, то марковская цепь  $\eta(t)$  является транзитной (см., например, [33]). Это свидетельствует о том, что средние очереди в узлах  $i_1, \dots, i_k$  стремятся к бесконечности с течением времени. Подробный анализ открытых сетей дан в работе [19]. В частности, показано, что в узлах, где нагрузка больше 1, средние очереди увеличиваются линейно с ростом времени. При этом найдены скорости роста средних очередей.

### 3.3. Алгоритм вычисления критической нагрузки в замкнутых сетях

Этот раздел основан на работе [18]. Мы рассмотрим последовательность замкнутых сетей  $J_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Сеть  $J_N$  состоит из  $N$  узлов и  $M = M(N)$  автомобилей. Интенсивности обслуживания в узлах сети  $J_N$  не зависят от длины очереди:  $\mu_{i,N}(n_i) \equiv \mu_{i,N}$ . Пусть  $P_N = \{p_{i,j,N}\}$  — матрица маршрутизации в  $N$ -й сети;  $P_N$  предполагается неразложимой.

Пусть  $\rho_N = (\rho_{1,N}, \dots, \rho_{N,N})$  — вектор с положительными компонентами, удовлетворяющий уравнению

$$\rho_N = \rho_N P_N. \quad (13)$$

Относительные нагрузки в узлах определяются как

$$r_{i,N} = C_N^{-1} \rho_{i,N} \tau_{i,N},$$

где  $\tau_{i,N} = \mu_{i,N}^{-1}$  и  $C_N = \max_{i=1, \dots, N} \rho_{i,N} \tau_{i,N}$ . Очевидно, что  $r_{i,N} \in [0, 1]$ .

В соответствии с (9) стационарное распределение числа автомобилей  $\xi_{i,N,M}$  в узлах сети  $J_N$  равно

$$P_{N,M}(\xi_{i,N,M} = n_i, i = 1, \dots, N) = \frac{1}{Z_{N,M}} \prod_{i=1}^N r_{i,N}^{n_i},$$

где нормирующий множитель (малая статсумма)

$$Z_{N,M} = \sum_{n_1 + \dots + n_N = M} \prod_{i=1}^N r_{i,N}^{n_i}. \quad (14)$$

Многие важные характеристики сети выражаются через статсумму.

**Упражнение 3.** Показать, что среднее число автомобилей в  $i$ -м узле в стационарном режиме равно

$$m_{i,N,M} = E\tilde{\xi}_{i,N,M} = \frac{r_{i,N}}{Z_{N,M}} \frac{\partial Z_{N,M}}{\partial r_{i,N}}. \quad (15)$$

Ниже мы будем требовать слабую сходимость относительных нагрузок  $r_{i,N}$ . Точнее, определим выборочную меру на отрезке  $[0, 1]$ :

$$I_N(A) = \frac{1}{N} \sum_{i: r_{i,N} \in A} 1,$$

где  $A$  — произвольное борелевское множество из отрезка  $[0, 1]$ . Предположим, что при  $N \rightarrow \infty$  меры  $I_N$  слабо сходятся к некоторой вероятностной мере  $I$ , заданной на отрезке  $[0, 1]$ .

Нас будет интересовать случай больших  $N$ ,  $M$ , точнее  $N, M \rightarrow \infty$ , причем так, что  $\frac{M}{N} \rightarrow \lambda = \text{const}$ , то есть удельное число автомобилей на один узел постоянно. Именно это число определяет существование пробок.

**Замечание 1.** Интересно найти конкретные последовательности растущих графов, для которых предельная мера  $I$  явно описывается. Некоторые примеры, где мера  $I$  одноточечна, см. в ссылках к работе [18], см. также с. 157–160 в [29].

В терминах предельной меры  $I$  мы найдем критическое значение плотности  $\lambda_{\text{cr}}$ , так что при  $\lambda < \lambda_{\text{cr}}$  средние длины очередей равномерно ограничены. Если  $\lambda \geq \lambda_{\text{cr}}$ , то в узле с максимальной относительной нагрузкой средняя длина очереди стремится к бесконечности, что означает возникновение пробки.

Положим

$$h(z) = \int_0^1 \frac{r}{1-zr} dI(r),$$

где  $z \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ . Функция  $h(z)$  строго возрастает на  $[0, 1)$ . Обозначим

$$\lambda_{\text{cr}} = \lim_{z \rightarrow 1^-} h(z).$$

Будем предполагать, что  $\lambda_{\text{cr}} > 0$ .

**Теорема 4.** 1) Если  $\lambda < \lambda_{\text{cr}}$ , то средние очереди равномерно ограничены: существует такая константа  $B$ , что  $m_{i,N} < B$  равномерно по  $N \geq 1$  и  $1 \leq i \leq N$ .

2) Если  $\lambda \geq \lambda_{\text{cr}}$  и  $i(N)$  удовлетворяет условию  $r_{i(N),N} = 1$ , то  $m_{i(N),N} \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ , т. е. пробки будут в тех узлах, где нагрузка максимальна.

При  $z \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$  положим

$$S_N(z) = -\lambda(1 + \varepsilon_N) \ln z - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(1 - zr_{i,N}), \quad (16)$$

$$S(z) = -\lambda \ln z - \int_0^1 \ln(1 - zr) dI(r),$$

где  $\lambda(1 + \varepsilon_N) = \frac{M}{N}$ .

Введем производящую функцию (большую статсумму):

$$\Xi_N(z) = \sum_{M=0}^{\infty} z^M Z_{N,M} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - zr_i}, \quad |z| < 1.$$

По формуле Коши и формуле (16) имеем следующее выражение для статсуммы (14):

$$Z_{N,M} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Xi_N(z)}{z^{M+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\exp(NS_N(z))}{z} dz, \quad (17)$$

где  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \sigma < 1\}$ . Для средних, согласно (15), имеем

$$m_{i,N} = \frac{1}{2\pi i Z_N} \int_{\gamma} \frac{r_{i,N}}{1 - zr_{i,N}} \exp(NS_N(z)) dz. \quad (18)$$

Можно показать, что для стационарного распределения длин очередей справедлива формула

$$P_{N,M}(\xi_{1,N,M} = n_1, \dots, \xi_{K,N,M} = n_K) = \frac{1}{2\pi i Z_N} \int_{\gamma} z^{-1} \prod_{i=1}^K (1 - zr_{i,N})(zr_{i,N})^{n_i} \exp(NS_N(z)) dz. \quad (19)$$

В доказательстве теорем этого раздела существенную роль играет метод перевала (см. [27]), точнее его обобщение, поскольку функция в показателе экспоненты зависит от  $N$ . Из уравнения

$$\frac{\partial S_N(z)}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

находятся точки перевала. Пусть  $z_{0,N}$  — корень этого уравнения, лежащий в интервале  $(0, 1)$ .

**Упражнение 4.** Показать, что все корни уравнения (20) действительны и положительны. Всегда существует единственный корень, лежащий в интервале  $(0, 1)$ .

Пусть  $z_0$  — корень уравнения

$$h(z) = \frac{\lambda}{z} \iff \frac{\partial S(z)}{\partial z} = 0, \quad (21)$$

лежащий в интервале  $(0, 1)$ .

**Упражнение 5.1)** Доказать, что при всех  $\lambda$  существует предел  $\lim_{N \rightarrow \infty} z_{0,N} = z_0 = z_0(\lambda) > 0$ .

2) Если  $\lambda < \lambda_{cr}$ , то  $z_0(\lambda)$  — корень уравнения (21);  $z_0(\lambda)$  строго возрастает по  $\lambda$ ,  $z_0(\lambda) \in (0, 1)$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{cr}^-} z_0(\lambda) = 1$ .

3) Если  $\lambda \geq \lambda_{cr}$ , то  $z_0 = 1$ .

В следующей теореме мы находим асимптотику статсуммы и предельное распределение для последовательности замкнутых сетей  $J_N$ .

**Теорема 5.** Пусть  $\lambda < \lambda_{cr}$ .

1) При  $N \rightarrow \infty$  статсумма  $Z_N$  и свободная энергия  $F_N = \frac{1}{N} \ln Z_N$  имеют следующие асимптотики:

$$Z_N \sim \frac{\exp(NS_N(z_{0,N}))}{z_0 \sqrt{2\pi NS''(z_0)}}, \quad F_N = \frac{1}{N} \ln Z_N \sim S(z_0).$$

2) Если при  $i = 1, \dots, K$  существуют пределы  $r_i = \lim_{N \rightarrow \infty} r_{i,N}$ , то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m_{i,N} = \frac{z_0 r_i}{1 - z_0 r_i},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,M}(\xi_{1,N,M} = n_1, \dots, \xi_{K,N,M} = n_K) = \prod_{i=1}^K (1 - z_0 r_i) (z_0 r_i)^{n_i}.$$

Таким образом, в пределе мы получаем открытую сеть, состоящую из независимых очередей.

**Доказательство теорем 4 и 5.** Мы приведем более общий результат, из которого будут следовать теоремы 4 и 5. Пусть  $U_d(v) = \{z \in \mathbb{C} : |z - v| < d\}$ . Рассмотрим контур  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = z_0(\lambda)\}$ .

**Теорема 6.** Пусть  $\lambda < \lambda_{cr}$  и  $f(\theta, z)$ ,  $\theta \in \Theta$ , — семейство функций, голоморфных в кольце  $\{z \in \mathbb{C} : z_0(\lambda) - \delta_0 < |z| < z_0(\lambda) + \delta_0\}$  при некотором  $\delta_0 > 0$ , равномерно ограниченных в этом кольце и таких, что для заданного достаточно малого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta_u > 0$  и такая ненулевая действительная константа  $f_u$ , что  $|f(\theta, z)/f_u - 1| < \varepsilon$  при  $z \in U_{2\delta_u}(z_0)$ ,  $\theta \in \Theta$ .

Тогда при достаточно больших  $N$  равномерно по  $\theta \in \Theta$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\theta, z) \exp(NS_N(z)) dz = \frac{f_u \exp(NS_N(z_{0,N}))}{\sqrt{2\pi NS''(z_0)}} (1 + \zeta_N),$$

где  $|\zeta_N| < 25\varepsilon$ .

Доказательство этой теоремы основано на применении метода перевала (saddle-point method, см. [27]). Отличие от стандартной ситуации состоит в том, что функция в показателе экспоненты зависит от  $N$ . Подробное доказательство можно найти в оригинальной статье [18].

Доказательство теоремы 5. Используя теорему 6, докажем первый пункт теоремы 5. Согласно (17) имеем

$$Z_{N,M} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\exp(NS_N(z))}{z} dz,$$

где  $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = z_0(\lambda)\}$ . Положив  $f(\theta, z) = z^{-1}$ ,  $f_u = z_0^{-1}$  и применив теорему 6, получим, что для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  при достаточно больших  $N$

$$Z_N = \frac{\exp(NS_N(z_{0,N}))}{z_0 \sqrt{2\pi NS''(z_0)}} (1 + \zeta_N), \quad |\zeta_N| < 25\varepsilon. \quad (22)$$

Второй пункт теоремы 5 доказывается аналогично с использованием формулы (18) для средней очереди и формулы (19) для совместного распределения длин очередей.

**Упражнение 6.** Доказать третье утверждение теоремы 5, используя теорему 6 и формулы (18), (19). □

Доказательство теоремы 4. Чтобы доказать первый пункт теоремы 4, рассмотрим семейство функций

$$f(\theta, z) = \frac{A}{z} + \frac{\theta}{1 - z\theta}, \quad \theta \in \Theta = [0, 1], \quad A > 0, \quad f_u = \frac{A}{z_0}.$$

Зафиксируем малое  $\varepsilon > 0$  и выберем  $\sigma_u = \frac{\varepsilon}{8}$ ,  $A = \frac{16z_0}{(1 - z_0)\varepsilon}$ . По теореме 6 имеем для достаточно больших  $N$  и всех  $\theta \in \Theta$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \frac{A}{z} + \frac{\theta}{1 - z\theta} \right) \exp(NS_N(z)) dz = \frac{A \exp(NS_N(z_{0,N}))}{z_0 \sqrt{2\pi NS''(z_0)}} (1 + \zeta_N), \quad |\zeta_N| < 25\varepsilon. \quad (23)$$

Разделив на  $Z_N$  и применив (22) к правой части получившегося равенства, получим при достаточно больших  $N$

$$A + \frac{1}{Z_N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\theta}{1 - z\theta} \exp(NS_N(z)) dz = A (1 + \zeta'_N), \quad |\zeta'_N| < 30\varepsilon.$$

Из последнего равенства и формулы (18) следует равномерная ограниченность  $m_{i,N}$ .

Докажем второе утверждение теоремы 4. Для этого потребуется следующее свойство монотонности: при любых  $M_2 \geq M_1 > 0$  и любом  $N \geq 1$  выполнено  $m_{i,M_2,N} \geq m_{i,M_1,N}$ .

Поскольку  $z_0(\lambda)$  строго возрастает по  $\lambda$ ,  $z_0(\lambda) \in (0, 1)$  и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{cr-}} z_0(\lambda) = 1,$$

то функция

$$\frac{z_0(\lambda)}{1 - z_0(\lambda)}$$

монотонно возрастает и стремится к  $\infty$ , когда  $\lambda \nearrow \lambda_{cr}$ . Поэтому для любого  $m > 0$  существует такое  $\lambda' = \lambda'(m) < \lambda_{cr}$ , что

$$\frac{z_0(\lambda')}{1 - z_0(\lambda')} = m + 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что  $i(N) \equiv 1$  и  $r_{1,N} = 1$ . Если взять  $M'(N) = [\lambda'N]$ , то по теореме 5

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m_{1,M'(N),N} = \frac{z_0(\lambda')}{1 - z_0(\lambda')}.$$

Следовательно, при достаточно больших  $N$

$$m_{1,M'(N),N} > \frac{z_0(\lambda')}{1 - z_0(\lambda')} - 1 = m.$$

Но  $M/N \rightarrow \lambda \geq \lambda_{cr} > \lambda'$ , поэтому при достаточно больших  $N$  имеем  $M(N) \geq M'(N)$ . По свойству монотонности  $m_{1,N} = m_{1,M(N),N} \geq m_{1,M',N} > m$  для достаточно больших  $N$ . Это доказывает, что  $m_{1,N} \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Технические обобщения и математические проблемы.** Мы предполагали мгновенное перемещение между перекрестками. При этом не учитываются времена движения по улицам. Это допущение, однако, легко устраняется усложнением графа. Именно, введением дополнительных вершин  $u_{ij}$ , соответствующих улицам, и средних времен  $\tau_{i,j} = \mu_{ij}^{-1}$  пребывания на улицах. В терминах теории очередей это значит, что улицы рассматриваются как узлы обслуживания с бесконечным числом обслуживающих устройств и время обслуживания экспоненциально распределено со средним  $\tau_{i,j} = \mu_{ij}^{-1}$ .

Отметим, что результаты раздела 3.1 могут быть обобщены на случай, когда сеть содержит узлы с бесконечным числом обслуживающих устройств. Пусть, например, сеть содержит один узел такого типа ( $i = 0$ ) и  $\mu_{0,N}(n) = n\nu_N$  — интенсивность обслуживания в этом узле. Пусть  $\rho_N = (\rho_{0,N}, \dots, \rho_{N,N})$  — решение уравнения (13). Тогда относительные нагрузки определим по формуле

$$r_{i,N} = \frac{\mu_{0,N} \rho_{i,N}}{\rho_{0,N} \mu_{i,N}},$$

так что  $r_{0,N} = 1$ . Согласно (9), стационарное распределение длин очередей имеет вид

$$P_{N,M}(\xi_{i,N,M} = n_i, i = 1, \dots, N) = \frac{1}{\hat{Z}_{N,M}} \frac{1}{\left(M - \sum_{i=1}^M n_i\right)!} \prod_{i=1}^N r_{i,N}^{n_i},$$

где

$$\hat{Z}_{N,M} = \sum_{n_1 + \dots + n_N \leq M} \frac{1}{\left(M - \sum_{i=1}^M n_i\right)!} \prod_{i=1}^N r_{i,N}^{n_i},$$

и большая статсумма сети равна

$$\hat{\Xi}_N(z) = e^z \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - zr_{i,N}}.$$

Положим

$$q_{i,N} = \frac{r_{i,N}}{p_N}, \quad \omega = zp_N, \quad p_N = \max_{1 \leq i \leq N} r_{i,N}.$$

Тогда

$$\hat{\Xi}_N(\omega) = e^{\omega/p_N} \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - \omega q_{i,N}}.$$

В предположении, что  $p_N N \rightarrow \alpha > 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , мы можем найти критическое значение плотности  $\lambda$  по формуле

$$\lambda_{cr} = \alpha^{-1} + \lim_{\omega \rightarrow 1-} \int_0^1 \frac{q}{1 - \omega q} dI(q),$$

где, как и раньше, мера  $I$  есть слабый предел при  $N \rightarrow \infty$  выборочных мер

$$I_N(A) = \frac{1}{N} \sum_{i: q_{i,N} \in A} 1,$$

где  $A$  — произвольное борелевское множество из отрезка  $[0, 1]$ .

В работе [21] для замкнутых сетей аналогичные результаты получаются для случая более общей зависимости интенсивностей от длин очередей в узлах.

Прием усложнения графа позволяет устранить также другое ограничение, что для данного перекрестка средняя длительность красного света одна для всех направлений. Необходимо вместо вершины  $i$ , соответствующей перекрестку, ввести несколько вершин  $(i, d)$ , где  $d$  перечисляет

возможные направления движения на перекрестке  $i$ . Это, конечно, налагает ограничение на соответствующие времена обслуживания  $\tau_{i,d}$  в новых вершинах типа

$$\sum_d \tau_{i,d} = \tau_i.$$

Мы ограничились задачей, когда в системе возникала хотя бы одна пробка. Интереснее рассмотреть ситуацию, когда в разных местах графа одновременно возникает много пробок.

**Связь с практикой.** Эта модель удобна тем, что все ее параметры можно оценить. Именно, на практике статистические оценки параметров  $p_{ij}$ ,  $\mu_i$  имеют вид (например, для постоянных  $\mu_i$ )

$$p_{ij} \sim \frac{N_{ij}(T)}{\sum_j N_{ij}(T)}, \quad \mu_i = \frac{1}{T} \sum_j N_{ij}(T),$$

где  $N_{ij}(T)$  — число автомобилей, повернувших за время  $T$  на перекрестке  $i$  в направлении  $j$ .

Практически интересна прежде всего задача оптимизации светофоров, которая может достигаться выбором  $\tau_{i,d}$  и, за счет изменения матрицы  $P$ , подсказками о выборе маршрута. Более того, в экспоненциальной модели многие случайные величины независимы, и, значит, полностью игнорируется проблема синхронизации светофоров.

Следует сказать, что проблема светофоров в стохастическом контексте только начинает изучаться, и постановки задач там должны быть более тонкими. Ранее данная проблема изучалась в жидкостных моделях. Однако пока нет понимания (а тем более вывода) связи жидкостных транспортных моделей со стохастическими (как в статистической физике).

### Литература

1. Хейм Ф. Математическая теория транспортных потоков. М.: Мир, 1966.
2. Renyi A. On two mathematical models of the traffic on a divided highway // Journal of Applied Probability. 1964. V. 1. P. 311–320.
3. Solomon H., Wang P. Nonhomogeneous Poisson fields of random lines with applications to traffic flow // Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. 1972. V. 3. P. 383–400.
4. Solomon H. Geometric Probability. Philadelphia: SIAM, 1978.
5. Daley D., Vere-Jones D. An Introduction to the Theory of Point Processes. V. 1. Springer, 2003.
6. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. М.: Мир, 1967.
7. Cox D.R., Isham V. Point processes. Chapman and Hall, 1980.
8. Kelly F. Reversibility and stochastic networks. N.Y.: Wiley, 1979.

9. Caceres F., Ferrari P., Pechersky E. A slow-to-start traffic model related to a M/M/1 queue // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2007; arXiv:0703709 cond-mat
10. Иносэ Х., Хамада Т. Управление дорожным движением. М.: Транспорт, 1983.
11. Traffic flow theory: A state-of-the-art report / Editors N. H. Gartner, C. J. Messer, A. K. Rathi. Washington DC: Transportation Research Board, 2001.
12. Blank M. Ergodic properties of a simple deterministic traffic flow model // J. Stat. Phys. 2003. V. 111. P. 903–930.
13. Jost D., Nagel K. Probabilistic Traffic flow breakdown in stochastic car following models // Traffic and Granular Flow. 2005. V. 03. Part 2. P. 87–103.
14. Lotito P., Mancinelli E., Quadrat J.-P. A min-plus derivation of the fundamental car-traffic law // Automatic Control IEEE Transactions. May 2005. V. 50, № 5. P. 699–705.
15. Kerner B.S. Introduction to modern traffic flow theory and control. Berlin: Springer, 2009.
16. Замятин А. А., Малышев В. А. Накопление на границе для одномерной стохастической системы частиц // Проблемы передачи информации. 2007. Т. 43, № 4. С. 68–82.
17. Lighthill M.J., Whitham G.B. On kinematic waves. II. Theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1955. V. 229. P. 281–345.
18. Malyshev V., Yakovlev A. Condensation in large closed Jackson networks // Ann. Appl. Probab. 1996. V. 6, № 1. P. 92–115.
19. Botvich D.D., Zamyatin A.A. On fluid approximations for conservative networks // Markov Processes and Related Fields. 1995. V. 1, № 1. P. 113–141.
20. Fayolle G., Malyshev V., Menshikov M. Topics in the constructive theory of countable Markov chains. Cambridge University Press, 1995.
21. Fayolle G., Lasgouttes J.-M. Asymptotics and Scalings for Large Product-Form Networks via the Central Limit Theorem // Markov Processes and Related Fields. 1996. V. 2, № 2. P. 317–349.
22. Revised Traffic Flow Theory. A state-of-art report / Editors J.-M. Gartner, C. J. Messer, A. K. Rathi. Washington DC: Transportation Research Board, 2001.
23. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971.
24. Малышев В. А., Минлос П. А. Гиббсовские случайные поля. М.: Наука, 1985.
25. Малышев В. А. Случайные грамматики // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, № 2. С. 107–134.
26. Serfozo R. Introduction to stochastic networks. Springer, 1999.
27. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
28. Буслаев А. П., Новиков А. В., Приходько В. М., Таташев А. Г., Яшина М. В. Вероятностные и имитационные подходы к оптимизации автодорожного движения. М.: Мир, 2003.
29. Афанасьева Л. Г. Очерк исследования операций. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2007.
30. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М.: МЦНМО, 2007.

31. *Blythe R. A., Evans M. R.* Nonequilibrium steady states of matrix-product form: a solver's guide // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2007. V. 40, № 46.
32. *Derrida B.* Non-equilibrium steady states: fluctuations and large deviations of the density and of the current // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. July 2007.
33. *Малышев В. А.* Кратчайшее введение в современные вероятностные модели. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2009; <http://mech.math.msu.su/~malyshev/Malyshev/Lectures/course.pdf>

**А. В. Колесников**

## Транспортная задача и концентрация

Первые результаты о концентрации были получены П. Леви в его книге по функциональному анализу [10]. Само название «концентрация мер» было предложено В. Мильманом. Благодаря ему же явление концентрации приобрело большую популярность в математическом сообществе и нашло многочисленные приложения в функциональном анализе, геометрии, вероятности, комбинаторике и технических науках.

Среди сугубо математических приложений упомянем: 1) новое доказательство теоремы Дворецкого о «почти круглых» сечениях выпуклых тел, 2) изопериметрические теоремы сравнения М. Громова для многообразий положительной кривизны Риччи, 3) приложения в теории гауссовских случайных процессов (например, оценки статистического супремума), 4) применения к другим функциональным и вероятностным неравенствам (неравенства типа Соболева, неравенства типа Брунна—Минковского для выпуклых тел и т. п.). Подробнее об этом можно узнать в книгах [2, 7–9]. О вероятностных приложениях см. статью [11]. Для ознакомления с недавними результатами о концентрации и функциональных неравенствах для логарифмически вогнутых распределений также рекомендуем статью [13]. Теоремы о концентрации также позволяют оценить скорость сходимости системы к равновесному состоянию (см. комментарий ниже и приложение Е. В. Гасниковой настоящего пособия).

Классический пример свойства концентрации дает стандартное нормальное (гауссовское)  $d$ -мерное распределение  $\gamma$ . Как известно, плотность такого распределения задается формулой

$$\rho_\gamma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right).$$

Для произвольного множества  $A$  со свойством  $\gamma(A) > \frac{1}{2}$  рассмотрим его  $r$ -окрестность:

$$A_r = \{x: \exists y \in A: |x - y| \leq r\}.$$

Тогда выполнено следующее неравенство концентрации:

$$\gamma(A_r) \geq 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{r^2}{2}}. \quad (1)$$