ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 45 **2009** **Вып. 1**

УДК 621.391.1:519.2

© 2009 г. **В.А. Малышев, В.А. Швец**

О РАСПАДЕНИИ КОРРЕЛЯЦИЙ ДЛЯ ПРОЦЕССА С ЗАПРЕТАМИ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Рассматривается симметричный процесс с запретами на дискретном отрезке из S точек с разными граничными условиями на концах. Исследуется убывание корреляций асимптотически при $S \to \infty$. Основной результат – доказательство асимптотической независимости стационарного распределения в достаточно удаленных точках отрезка. Не используется алгебраическая техника Дерриды, а развивается новая техника, имеющая наглядный вероятностный смысл.

§ 1. Введение

Процессы с запретами (exclusion processes) – долгоживущая популярная тема как в математике, так и в теоретической физике. Они являются частным случаем процессов с локальным взаимодействием на решетке. Интерес к ним объясняется прежде всего тем, что процессы с запретами являются простейшей нетривиальной моделью столкновений в системе многих частиц. С их помощью строятся модели теплопроводности [1], вязкости [2, 3], квантовых ферромагнетиков [4], неравновесных процессов [5] и другие. Но даже независимо от физики эти процессы являются естественным вероятностным объектом. Первое систематическое изложение их теории было дано в известной монографии [6].

Простейшим процессом с запретами является симметричный процесс с запретами на целочисленной решетке Z. Хорошо известно, что для этого процесса существует континуум (пространственно) однородных инвариантных мер, являющихся взвесями бернуллиевских мер. Это же имеет место для процесса с запретами на конечном отрезке решетки, если граничные условия пустые. При других граничных условиях, как правило, нетрудно показать, что бернуллиевских инвариантных мер нет. Используя матричный метод (анзац; см. [5,7]), можно получить явный вид корреляционных функций для такого процесса. Отсюда будет следовать асимптотическая бернуллиевость инвариантной меры. Следует сказать, что этот мощный алгебраический метод, сходный со знаменитым анзацем Бете, является довольно громоздким, не всегда математически обоснован и имеет существенные ограничения на область применимости. А именно, нам не известно ни одного его применения, когда скачки частиц могут быть длиной более 1. Важно также, что вероятностная сущность этого метода совершенно не ясна.

В настоящей статье мы предлагаем другой – простой и естественный с точки зрения теории вероятностей – подход, который допускает обобщение на скачки, большие 1, а также на другие граничные условия. При всем отличии от методов Бете – Дерриды есть и общие черты – некая рекуррентная процедура. Здесь мы демонстрируем идею нашего подхода в простейшей ситуации. Различные обобщения будут рассмотрены впоследствии.

§ 2. Формулировка задачи и результат

Будем рассматривать простой симметричный процесс с запретами на интервале $I_S = \{0, 1, \ldots, S, S+1\}$ одномерной решетки. Пространством состояний для этой конечной марковской цепи

$$(\xi_t(0), \xi_t(1), \ldots, \xi_t(S+1)), \quad \xi_t(i) = 0, 1,$$

с непрерывным временем является множество $\{0,1\}^{I_S}$. Скачки определяются следующим образом. Для каждого временного интервала $[t, t+dt]$ и каждой пары $s, s+1$, где $s = 0, 1, \ldots, S$, с вероятностью λdt ячейки $s, s+1$ обмениваются (независимо для разных s) значениями, так что

$$\xi_{t+dt}(s) = \xi_t(s+1), \quad \xi_{t+dt}(s+1) = \xi_t(s).$$

Это определяет генератор марковского процесса, который мы называем процессом с пустыми граничными условиями. Мы, однако, будем рассматривать граничные условия

$$\xi_t(0) \equiv 0, \quad \xi_t(S+1) \equiv 1.$$

Точнее, это означает, что $\xi_0(0) = 0$ и обмен между точками $0, 1 \in I_S$ сводится к тому, что пара $\xi_t(0) = 0, \xi_t(1) = 1$ переходит в $\xi_{t+dt}(0) = 0, \xi_{t+dt}(1) = 0$ с вероятностью λdt. Точно также для точек S, $S+1 \in I_S$: $\xi_0(S+1) = 1$ и пара $\xi_t(S) = 0$, $\xi_t(S+1) = 1$ переходит в $\xi_{t+dt}(S) = 1$, $\xi_{t+dt}(S+1) = 1$ с вероятностью λdt.

Обозначим через $\pi(n_0, n_1, \ldots, n_{S+1}) = \pi^{(S)}(n_0, n_1, \ldots, n_{S+1})$ стационарную меру этой марковской цепи. Нас будут интересовать функции

$$m_k^{(S)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \pi^{(S)}(n_{x_1} = 1, n_{x_2} = 1, \ldots, n_{x_k} = 1), \quad x_1 < \ldots < x_k.$$

Для пустых граничных условий процесс приводим (это связано с сохранением числа частиц, т.е. единиц), и любая стационарная мера является смесью бернуллиевских мер, т.е. мер, являющихся произведениями $S+2$ одинаковых мер. В случае наших граничных условий, как нетрудно показать, процесс неприводим (число частиц уже не сохраняется), и его инвариантная мера не является произведением независимых мер. Нашей целью будет доказать следующее свойство распадения корреляций для этого процесса.

Теорема. *Для всех* $0 \le x \le S+1$

$$m_1^{(S)}(x) = \frac{x}{S+1}.$$

Для любых $0 < x_1 = x_1(S) < x_2 = x_2(S) < S+1$, *таких что* $\dfrac{x_1(s)}{S+1} \to \alpha_1$, $\dfrac{x_2(s)}{S+1} \to \alpha_2$ *при* $S \to \infty$,

$$m_2^{(S)}(x_1, x_2) \xrightarrow[S\to\infty]{} \alpha_1 \alpha_2.$$

§ 3. Доказательство

Доказательство состоит из двух частей. Первая часть стандартная, но громоздкая – сведение к двойственному процессу (более простому для изучения). Вторая часть оригинальная – изучение самого двойственного процесса.

3.1. Моментная замкнутость. Сначала мы получим уравнения для моментов процесса ξ_t:

$$m_k(t; \{x_1, \ldots, x_k\}) := \mathbf{E} \prod_{i=1}^{k} \xi_t(x_i), x_1, \ldots, x_k \in I_S, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для процесса со значениями 0, 1 эти моменты однозначно определяют маргинальные распределения

$$\mathbf{P}\Bigg(\bigcap_{x\in S^\circ}\{\xi_t(x)=\theta_x\}\Bigg),$$

и, конечно, наоборот. Эти уравнения обладают свойством моментной или маргинальной замкнутости [8], что и позволит построить удобный двойственный процесс. Далее для простоты везде считаем, что $\lambda = 1$.

Введем понятие кластера. Пусть дано множество $Q \subset \mathbb{N}$. Назовем подмножество $(k_1 < \ldots < k_m) = K \subseteq Q$ кластером, если $k_{i+1} - k_i = 1$ для всех $i = 1, \ldots, m-1$ и, кроме того, $\{k_1 - 1\} \notin Q$, $\{k_m + 1\} \notin Q$. Другими словами, кластер – это максимальная цепочка идущих подряд элементов множества Q.

Лемма 1. *Рассмотрим множество* $X = (x_1, \ldots, x_k)$, *такое что* $0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_k < S+1$. *Пусть* $X = \bigcup\limits_{j=1}^{p} K_j$, *т.е.* X *представляет собой объединение кластеров* $K_j = \left(x_{i_1}^{(j)}, \ldots, x_{i_{q(j)}}^{(j)}\right)$. *Тогда для каждого* X *имеет место уравнение*

$$\frac{d}{dt}m_k\left(t,\{x_1,\ldots,x_k\}\right) = \sum_{j=1}^{p} m_k\left(t,\left\{x_1,\ldots,x_{i_1}^{(j)}-1,\ldots,x_k\right\}\right) +$$
$$+\sum_{j=1}^{p} m_k\left(t,\left\{x_1,\ldots,x_{i_{q(j)}}^{(j)}+1,\ldots,x_k\right\}\right) - 2pm_k\left(t,\{x_1,\ldots,x_k\}\right)$$

с граничными условиями

$$m_k\left(t,\{0,x_2\ldots,x_k\}\right) = 0,$$
$$m_k\left(t,\{x_1\ldots,x_{k-1},S+1\}\right) = m_{k-1}\left(t,\{x_1\ldots,x_{k-1}\}\right).$$

Доказательство леммы. Сначала выведем уравнение для одноточечной функции. Свойство моментной замкнутости основано на линейности условной вероятности

$$\mathbf{P}\left(\xi_{t+dt}(x) = 1 \mid \xi(x-1)=\alpha,\ \xi_t(x)=\beta,\ \xi_t(x+1)=\gamma\right) = \alpha dt + \beta(1-2dt) + \gamma dt.$$

По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\left(\xi_{t+dt}(x)=1\right) =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{1}\left(dt(\alpha+\gamma-2\beta)+\beta\right)\mathbf{P}\left(\xi_t(x-1)=\alpha,\ \xi_t(x)=\beta,\ \xi_t(x+1)=\gamma\right) =$$
$$= dt\left(\mathbf{P}(\xi_t(x-1)=1) + \mathbf{P}(\xi_t(x+1)=1) - 2\mathbf{P}(\xi_t(x)=1)\right) + \mathbf{P}(\xi_t(x)=1),$$

откуда

$$\frac{d}{dt}m_1(t;\{x\}) = m_1(t;\{x+1\}) + m_1(t;\{x-1\}) - 2m_1(t;\{x\}).$$

Перейдем теперь к корреляционным функциям произвольного порядка k. Пусть множество X состоит лишь из кластеров длины 1. Так как за время dt изменение может быть лишь в одной из точек x_i, то аналогичная выкладка для каждой из них дает

$$\frac{d}{dt}m_k(t;\{x_1,\dots,x_k\}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}(m_k(t;\{x_1,\dots,x_i+1,\dots,x_k\}) + m_k(t;\{x_1,\dots,x_i+1,\dots,x_k\})) -$$
$$- 2km_k(t;\{x_1,\dots,x_k\}).$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда встречаются кластеры большей длины. Как и выше, можно ограничиться случаем одного такого кластера. Итак, пусть $K_j = \left(x_{i_1}^{(j)},\dots,x_{i_{q(j)}}^{(j)}\right)$ – j-й кластер из разбиения множества X. Изменения могут быть лишь на концах кластера. Запишем общий вид условной вероятности в этом случае, опуская индекс j:

$$\mathbf{P}\big(\xi_{t+dt}(x_{i_1}) = 1,\ \dots,\ \xi_{t+dt}(x_{i_q}) = 1 \mid \xi_t(x_{i_1}-1) = \alpha,\ \xi_t(x_{i_1}) = \beta,\ \xi_t(x_{i_q}) = \gamma,$$
$$\xi_t(x_{i_q}+1) = \delta\big) = \alpha\gamma dt + \beta\gamma(1-2dt) + \beta\delta dt.$$

Условная вероятность берется, конечно, при условии $\xi_t(x_{i_j}) = 1$, $\forall j = 2,\dots,q-1$. Далее получаем

$$\mathbf{P}\left(\xi_{t+dt}(x_{i_1}) = 1,\ \dots,\ \xi_{t+dt}(x_{i_q}) = 1\right) =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^{1}(\alpha\gamma dt + \beta\gamma(1-2dt) + \beta\delta dt)\,\mathbf{P}\big(\xi_t(x_{i_1}-1) = \alpha,\ \xi_t(x_{i_1}) = \beta,$$
$$\xi_t(x_{i_1}+1) = 1,\ \dots,\ \xi_t(x_{i_q}-1) = 1,\ \xi_t(x_{i_q}) = \gamma,\ \xi_t(x_{i_q}+1) = \delta\big) =$$
$$= dt\big(m_q\left(t;\left\{x_{i_1}-1,\dots,x_{i_q}\right\}\right) + m_q(t;\{x_{i_1},\dots,x_{i_q}+1\}) - 2m_q(t;\{x_{i_1},\dots,x_{i_q}\})\big) +$$
$$+ m_q\left(t;\left\{x_{i_1},\dots,x_{i_q}\right\}\right),$$

откуда и следует, что для отдельного кластера имеет место уравнение

$$\frac{d}{dt}m_q(t;\left\{x_{i_1},\dots,x_{i_q}\right\}) =$$
$$= m_q(t;\left\{x_{i_1}-1,\dots,x_{i_q}\right\}) + m_q(t;\left\{x_{i_1},\dots,x_{i_q}+1\right\}) - 2m_q(t;\left\{x_{i_1},\dots,x_{i_q}\right\}).$$

Беря сумму по кластерам, получаем утверждение леммы. Для удобства запишем правую часть уравнения следующим образом:

$$\frac{d}{dt}m_k(t;\{x_1,\dots,x_k\}) = \sum_{j=1}^{k}\Delta_{x_j}^2 m_k(t;\{x_1,\dots,x_k\}).$$

3.2. Двойственный процесс. Обозначим через 2^{I_S} множество (конечных) подмножеств множества I_S, включая пустое $\varnothing$. Пусть $(\xi_t,\ t \ge 0)$ – определенный выше процесс с запретом. Процесс $(A_t,\ t \ge 0)$ со значениями в 2^{I_S} называется *двойственным* к процессу $(\xi_t,\ t \ge 0)$, если для всех $t \ge 0$

$$\mathbf{E}\prod_{x\in A_0}\xi_t(x) = \mathbf{E}\prod_{x\in A_t}\xi_0(x).$$

В [6, гл. VIII, § 1, теорема 1.1] доказано, что *симметричный* процесс с запретами *самодвойствен*. Таким образом, например, изучение двухточечных корреляционных функций может быть сведено к рассмотрению двух частиц, совершающих блуждания с запретами. Для обобщения этого результата на наши граничные условия обратимся к выписанным выше уравнениям. Они приводят нас к следующему утверждению.

Лемма 2. *Двойственным процессом к процессу* $(\xi_t,\ t \geq 0)$ *является процесс* $(A_t,\ t \geq 0)$, *представляющий собой процесс с запретами для конечного числа частиц со следующей модификацией:*

а) *если одна из частиц множества* A_t *выходит на границу* 0, *вся конфигурация частиц погибает (будем также говорить, что все частицы достигают поглощающего состояния* 0):

$$\sigma := \sup\{s > 0 : \ A_s \cap \{0\} \neq \varnothing\} \quad \Rightarrow \quad A_\sigma = \varnothing;$$

б) *любая частица, достигающая границы* $S+1$, *прилипает к ней. После этого остальные частицы блуждают независимо от прилипшей частицы, координата которой остается равной* $S+1$.

Обратим внимание, что после достижения одной из частиц правой границы другие частицы либо попадут в 0, либо достигнут точки $S+1$. Поэтому определенный таким образом марковский процесс с течением времени с вероятностью 1 приходит в одно из двух поглощающих состояний: $\varnothing$ и $\{S+1, \ldots, S+1\}$.

Как следствие, получаем следующее

Утверждение. *Имеет место равенство*

$$m_k^{(S)}(A) = \sum_{\ell \in L(A)} \mathbf{P}(\ell), \qquad |A| = k,$$

где $L(A)$ – *множество всех траекторий двойственного процесса, начинающихся в множестве* A *и не попадающих на границу* 0.

Доказательство. Пусть $\eta_t(x) = (\eta_t^1(x_1), \ldots, \eta_t^k(x_k)) \in \mathbb{Z}_+^k$ – процесс случайного блуждания с запретами k частиц на отрезке $[0, S+1]$, где $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ – начальное расположение частиц. Для доказательства двойственности достаточно показать, что функция $\mathbf{E}\prod\limits_{i=1}^{k}\xi_0(\eta_t^i(x_i))$ удовлетворяет тем же дифференциальным уравнениям, что и корреляционная функция $\mathbf{E}\prod\limits_{i=1}^{k}\xi_t(x_i)$. По формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k}\xi_0(\eta_t^i(x_i)) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mathbf{P}\big(\xi_0(i_1) = 1,\ \ldots,\ \xi_0(i_k) = 1\big)\, \mathbf{P}(\eta_t^1(x_1) = i_1,\ \ldots,\ \eta_t^k(x_k) = i_k).$$

Обозначим

$$P_t(i_1, \ldots, i_k) := \mathbf{P}(\eta_t^1(x_1) = i_1,\ \ldots,\ \eta_t^k(x_k) = i_n).$$

Эта функция удовлетворяет тому же уравнению, что и моменты, т.е.

$$\frac{d}{dt}P_t(i_1, \ldots, i_n) = \sum_{j=1}^{k}\Delta_{i_j}^2 P_t(i_1, \ldots, i_k).$$

Действительно, для одной частицы имеем

$$P_{t+dt}(i) = \sum_{j=i-1}^{i+1}\mathbf{P}\left(\eta_{t+dt}(x) = i \mid \eta_t(x) = j\right)\mathbf{P}\left(\eta_t(x) = j\right) =$$

$$= dt\left(\mathbf{P}\left(\eta_t(x) = i-1\right) + \mathbf{P}\left(\eta_t(x) = i+1\right)\right) + (1 - 2dt)\mathbf{P}\left(\eta_t(x) = i\right).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}P_t(i) = P_t(i-1) + P_t(i+1) - 2P_t(i).$$

Аналогичные рассуждения проходят и для нескольких частиц. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k}\xi_0(\eta_t^i(x_i)) = \sum_{i_1<\dots<i_k}\mathbf{P}(\xi_0(i_1)=1,\ \dots,\ \xi(i_k)=1)\frac{d}{dt}P_t(i_1,\dots,i_k) =$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k}\mathbf{P}(\xi_0(i_1)=1,\ \dots,\ \xi_0(i_k)=1)\left\{\sum_{j=1}^{k}\Delta_{i_j}^2 P_t(i_1,\dots,i_k)\right\} =$$

$$= \sum_{i_1<\dots<i_k}\left\{\sum_{j=1}^{k}\Delta_{i_j}^2\mathbf{P}(\xi_0(i_1)=1,\ \dots,\ \xi_0(i_k)=1)\right\}P_t(i_1,\dots,i_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\Delta_{x_j}^2\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k}\xi_0(\eta_t^i(x_i)).$$

Граничные условия, очевидно, такие же, как и для исходного процесса с запретами:

$$\mathbf{E}\xi_0(\eta_t^1(0))\prod_{i=1}^{k-1}\xi_0(\eta_t^i(x_i)) \equiv 0, \quad \mathbf{E}\prod_{i=1}^{k-1}\xi_0(\eta_t^i(x_i))\xi_0(\eta_t^i(S+1)) = \mathbf{E}\prod_{i=1}^{k-1}\xi_0(\eta_t^i(x_i)).$$

Стало быть, построенный нами процесс действительно является двойственным к исходному процессу с запретами. Учитывая сказанное, а также тот факт, что все частицы рано или поздно останутся в одном из двух поглощающих состояний, получим

$$m_k(\infty;\{x_1,\dots,x_k\}) = \mathbf{E}\prod_{i=1}^{k}\xi_\infty(x_i) = \mathbf{E}\prod_{i=1}^{k}\xi_0(\eta_\infty^i(x_i)) =$$

$$= \mathbf{P}(\eta_\infty^1(x_1) = S+1,\dots,\eta_\infty^k(x_k) = S+1) = P_\infty^{(k)},$$

где $P_\infty^{(k)}$ – вероятность того, что в двойственном процессе все частицы достигнут поглощающего состояния $S+1$.

3.3. Исследование двойственного процесса. Рассмотрим процесс с запретами $\eta_t = \eta_t^{(\infty)} = (x_t, y_t)$ для двух частиц на отрезке $[0, S+1]$. При этом в начальный момент времени частицы находятся в точках $0 < x_0(S) < y_0(S) < S+1$ соответственно, таких что $\frac{x_0(S)}{S+1} \xrightarrow[S\to\infty]{} \alpha$ и $\frac{y_0(S)}{S+1} \xrightarrow[S\to\infty]{} \beta$. При этом удобно считать, что расстояние между ними не менее 2. Очевидно, что это не ограничивает общности. Мы покажем, что $P_\infty^{(2)} \xrightarrow[S\to\infty]{} \alpha\beta$, откуда и будет следовать теорема.

Для процесса с запретами η_t введем интервалы времени (T_k, T_k'), когда частицы находятся на расстоянии 1 друг от друга, имея в виду, что в остальные моменты расстояния между частицами больше 1. T_k будем называть k-м моментом встречи. Используя эти моменты, определим для $k = 0, 1, \dots$, процессы $\eta^{(k)}(t)$ (немарковские при $k > 0$!). В каждом из этих процессов блуждают две частицы с одним и тем же начальным расположением.

В процессе $\eta^{(0)}(t)$ частицы блуждают независимо (простое симметричное случайное блуждание), не видя друг друга. В процессе $\eta^{(k)}(t)$ процесс с запретами действует до момента T_k'. С этого момента частицы оказываются на расстоянии 2, и они начинают блуждать независимо, не видя друг друга.

Пусть P_k – вероятность того, что в процессе $\eta^{(k)}(t)$ обе частицы окажутся в точке $S+1$ раньше, чем одна из них окажется в нуле. Так как число встреч частиц до поглощения конечно с вероятностью 1, то достаточно доказать, что для больших S вероятности P_k мало отличаются от P_0.

Прежде всего нетрудно доказать, что $P_0 \to \alpha\beta$ асимптотически при $S \to \infty$. Основным нашим методом будут рекуррентные соотношения между вероятностями P_k.

Для начала сравним P_1 с P_0. Определим случайную величину $\tau(x,y)$ – момент первой встречи частиц при условии, что они стартовали из точек x и y. Очевидно, что для всех процессов $\eta^{(k)}(t)$, $k > 0$, распределение этой величины одинаково. Пусть x_τ и $y_\tau = x_\tau + 1$ – точки, в которых будут находиться первая и вторая частицы соответственно в момент первой встречи, а $\mathbf{P}_0(x_\tau = n)$ – вероятность того, что при этой встрече первая частица окажется в точке n. Пусть $P_k(x,y)$ – вероятность в k-й задаче двум частицам прийти в $S+1$, если в начальный момент времени они находятся в точках x и y. Отметим также, что событие $\bigcup\limits_{n=1}^{S}(x_\tau = n)$ включает в себя исход прийти двум частицам в $S+1$ раньше, чем погибнуть, поскольку в этом случае расстояние между частицами обязательно будет равно единице, хотя бы в точках $(S,\ S+1)$.

Далее, по формуле полной вероятности

$$P_1 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{S-1}\mathbf{P}_0(x_\tau = n)(P_0(n,n+2) + P_0(n-1,n+1)) + \frac{S}{S+1}\mathbf{P}_0(x_\tau = S).$$

Преобразуем сумму в скобках, предварительно переписав каждое слагаемое:

$$P_0(n,n+2) - P_0(n,n+1) = \frac{n(n+2)}{(S+1)^2} - \frac{n(n+1)}{(S+1)^2} = \frac{n}{(S+1)^2},$$

$$P_0(n-1,n+1) - P_0(n,n+1) = \frac{(n-1)(n+1)}{(S+1)^2} - \frac{n(n+1)}{(S+1)^2} = -\frac{n+1}{(S+1)^2},$$

поэтому

$$P_0(n,n+2) + P_0(n-1,n+1) = 2P_0(n,n+1) - \frac{1}{(S+1)^2}.$$

Итак, окончательно получаем выражение для P_1 через P_0:

$$P_1 = \sum_{n=1}^{S-1}\mathbf{P}_0(x_\tau = n)\left(P_0(n,n+1) - \frac{1}{2(S+1)^2}\right) + \frac{S}{S+1}\mathbf{P}_0(x_\tau = S) =$$

$$= \sum_{n=1}^{S}\mathbf{P}_0(x_\tau = n)P_0(n,n+1) - \frac{1}{2(S+1)^2}\sum_{n=1}^{S-1}\mathbf{P}_0(x_\tau = n) = P_0 - \frac{C_1}{2(S+1)^2}.$$

Чтобы получить последнее равенство, мы снова использовали формулу полной вероятности. Обратим внимание, что $C_1 = \sum\limits_{n=1}^{S-1}\mathbf{P}_0(x_\tau = n)$ – положительная константа, меньшая единицы, так как данная сумма есть вероятность того, что частицы встретятся хотя бы раз до поглощения одной из частиц в точках 0 или $S+1$.

Теперь, учитывая полученный результат, проведем аналогичные рассуждения для вероятности P_2:

$$P_2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{S-1}\mathbf{P}_0(x_\tau = n)(P_1(n,n+2) + P_1(n-1,n+1)) + \frac{S}{S+1}\mathbf{P}_0(x_\tau = S) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{S-1}\mathbf{P}_0(x_\tau = n)\Bigg(P_0(n,n+2) + P_0(n-1,n+1) -$$

$$- \frac{1}{2(S+1)^2}(C_1(n,n+2) + C_1(n-1,n+1))\Bigg) + \frac{S}{S+1}\mathbf{P}_0(x_\tau = S),$$

где

$$C_1(i,j) = \sum_{n=1}^{S-1} \mathbf{P}_0(x_{\tau(i,j)} = n).$$

Обозначим

$$C_2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{S-1} \mathbf{P}_0(x_\tau = n)(C_1(n, n+2) + C_1(n-1, n+1)),$$

тогда

$$P_2 = P_1 - \frac{C_2}{2(S+1)^2}.$$

Учитывая, что $C_1 < 1$, оценим C_2 грубо:

$$C_2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{S-1} \mathbf{P}_0(x_\tau = n)(C_1(n, n+2) + C_1(n-1, n+1)) < \sum_{n=1}^{S-1} \mathbf{P}_0(x_\tau = n) < 1.$$

Аналогично можно выписать подобное соотношение для любого k:

$$P_k = P_{k-1} - \frac{C_k}{2(S+1)^2},$$

где

$$C_k(i,j) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{S-1} \mathbf{P}_0(x_{\tau(i,j)} = n)(C_{k-1}(n, n+2) + C_{k-1}(n-1, n+1)),$$

$$C_k := C_k(\alpha, \beta), \quad C_k < 1.$$

Перепишем данное соотношение следующим образом:

$$P_k = P_0 - \frac{1}{2(S+1)^2}\sum_{i=1}^{k} C_i.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$P_\infty = P_0 - \frac{1}{2(S+1)^2}\sum_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Таким образом, имеем выражение для разности вероятностей

$$P_0 - P_\infty = \frac{1}{2(S+1)^2}\sum_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Осталось оценить эту разность и показать, что она стремится к нулю, когда $S \to \infty$.

По построению C_k – вероятность того, что две независимо блуждающие частицы встретятся до поглощения одной из них по крайней мере k раз. Чтобы оценить эту величину, введем вспомогательную модель.

Рассмотрим процесс $X_t \in [0, S]$ – симметричное случайное блуждание частицы на отрезке $[0, S]$, причем $X_0 = 1$. Пусть γ_k – вероятность k раз частице побывать в нуле, прежде чем она попадет в точку S. Утверждается, что C_k не превосходит γ_k. Действительно, $X_t + 1$ можно интерпретировать как расстояние между двумя частицами в нашей исходной задаче в момент времени t. Условие $X_0 = 1$ означает, что в начальный момент времени мы поместили частицы на минимальное до встречи расстояние, т.е. на расстояние 2. При $X_t = S$ одна из частиц будет гарантировано поглощена, так как расстояние станет равным $S+1$. Поэтому, если две независимо блуждающие частицы встретятся до поглощения одной из них k раз, то вспомогательная частица X_t обязательно побывает в нуле k раз, прежде чем попадет в точку S. Таким образом, вероятность k раз побывать в нуле во вспомогательной модели, по крайней мере, не меньше, чем вероятность в исходной задаче встретиться k раз.

Вычислим γ_k. Очевидно, что $\gamma_1 = \dfrac{S-1}{S}$. Если частица приходит в точку 0, то следующий шаг она делает вправо в единицу и все начинается заново, стало быть, $\gamma_k = \gamma_{k-1}\dfrac{S-1}{S}$. Окончательно получаем $\gamma_k = \left(\dfrac{S-1}{S}\right)^k$.

Теперь мы сможем оценить разность P_0 и P_∞:

$$P_0 - P_\infty = \frac{1}{2(S+1)^2}\sum_{i=1}^{\infty} C_i \leqslant \frac{1}{2(S+1)^2}\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i =$$

$$= \frac{1}{2(S+1)^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{S-1}{S}\right)^i = \frac{S-1}{2(S+1)^2} = \frac{1}{2(S+1)} - \frac{1}{(S+1)^2}.$$

Значит, $|P_\infty - P_0| = O\left(\dfrac{1}{S+1}\right)$ при $S \to \infty$, и так как $P_k \xrightarrow[k\to\infty]{} P_\infty$ для любого S, это завершает доказательство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Derrida B., Enaud C., Landim C., Olla S.* Fluctuations in the Weakly Asymmetric Exclusion Process with Open Boundary Conditions // J. Stat. Phys. 2005. V. 118. № 5–6. P. 795–811.
2. *Landim C., Olla S., Varadhan S.* On Viscosity and Fluctuation-dissipation in Exclusion Processes // J. Stat. Phys. 2004. V. 115. № 1–2. P. 323–363.
3. *Малышев В., Манита А.* Стохастическая микромодель течения Куэтта // Теория вероятностей и ее применения (в печати).
4. *Caputo P., Martinelli F.* Relaxation Time of Anisotropic Simple Exclusion Processes and Quantum Heisenberg Models // Ann. Appl. Prob. 2003. V. 13. № 2. P. 691–721.
5. *Derrida B., Lebowitz J.L., Speer E.R.* Entropy of Open Lattice Systems // J. Stat. Phys. 2007. V. 126. № 4–5. P. 1083–1108.
6. *Лиггетт Т.* Марковские процессы с локальным взаимодействием. М.: Мир, 1989.
7. *Derrida B., Evans M.R., Hakim V., Pasquier V.* Exact Solution of a 1D Asymmetric Exclusion Model Using a Matrix Formulation // J. Physics A: Math. Gen. 1993. V. 26. № 7. P. 1493–1517.
8. *Ignatyuk I.A., Malyshev V.A., Molchanov S.A.* Moment-closed Processes with Local Interaction // Selecta Mathematica Sovietica. 1989. V. 8. № 4. P. 351–384.

Малышев Вадим Александрович
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
лаборатория больших случайных систем
malyshev2@yahoo.com
Швец Владимир Александрович
Пенсионный фонд Российской Федерации
shvets_va@rambler.ru

Поступила в редакцию
11.09.2008
После переработки
24.12.2008