В. А. МАЛЫШЕВ Р. А. МИНЛОС

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В БЕСКОНЕЧНОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМАХ

Москва

1994

В.А.МАЛЫШЕВ Р.А.МИНЛОС

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В БЕСКОНЕЧНОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМАХ

МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ФИРМА
"ФИЗИКО—МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА"
ВО "НАУКА"
1994

ББК 22.171
М20
УДК 517.9

Малышев В. А., Минлос Р. А. **Линейные операторы в бесконечночастичных системах.**– М.: Физматлит, 1994.–432 с.–ISBN 5-02-014994-2.

Главная задача, возникающая при изучении любой физической системы—построение ее эволюции во времени (динамики) и, в частности, описание возможных асимптотических режимов этой эволюции (картина "рассеяния"). В случае квантовой системы эта задача тесно связана с исследованием спектра оператора энергии (гамильтониана) такой системы.

Основная тема книги—изложение современных математических методов изучения спектра и рассеяния гамильтонианов бесконечночастичных систем со слабым взаимодействием между частицами (модели квантовой теории поля, статистической физики и теории твердого тела). Большинство изложенных в книге результатов принадлежит ее авторам, их сотрудникам и ученикам. Кроме указанной основной темы в первых главах книги содержится обширный иллюстративный и учебный материал (примеры физических и теоретико-вероятностных моделей, для которых удается построить и описать их динамику, основные способы описания физических систем и их динамик: C^*-алгебры, фоковские пространства и вторичное квантование, основные и температурные состояния, т. н. "эвклидов подход" и т. д.).

Для специалистов по математической физике, функциональному анализу и теории вероятностей, а также для студентов и аспирантов, специализирующихся в этих областях.

Издание книги осуществлено при участии АО "ПОЛИМАТ".

М $\frac{1602070100-046}{053(02)-94}$ Без объявл.

ISBN 5-02-014994-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 2. Построение равновесной динамики 119

Глава 3. Спектральный анализ трансфер-матрицы эвклидова поля 205

Глава 4. Асимптотическая полнота для взаимодействующих фермионных систем 307

ВСТУПЛЕНИЕ

О чем эта книга.

На предмет этой книги можно смотреть с разных точек зрения. С точки зрения функционального анализа здесь изучаются спектральные свойства некоторого класса линейных операторов; с точки зрения теории вероятностей мы занимаемся анализом сингулярных марковских процессов и, наконец, с точки зрения математической физики—изучением динамики равновесных систем квантовой статистической физики и квантовой теории поля.

Область, которой посвящена эта книга, находится еще в развитии и становлении, что видно из необъятного количества относящихся к ней публикаций. При этом, однако, основные ее понятия уже выработаны, а также сформулирована главная ее цель—для каждой конкретной физической системы описать ее полную "корпускулярную" картину (т. е. найти все ее коллективные возбуждения—так называемые "квазичастицы"—а также их "связанные состояния", вместе с описанием их "рассеяния"). Иными словами—на языке современной теории рассеяния— требуется установить "асимптотическую полноту" физической системы. Не исключено, конечно, что при этом могут появиться какие-нибудь неожиданные аномалии и сюрпризы.

Главным и объединяющим стержнем для всех подходов и задач, разбираемых в книге, служит единый (и пока единственный) прием—метод кластерных разложений; его разнообразные модификации позволяют получить информацию о спектральных свойствах изучаемых здесь операторов. Этот метод достаточно полно описан в предыдущей книге авторов (см. [26]), на которую мы часто будем ссылаться.

Сейчас есть три основных подхода к нахождению спектральных свойств бесконечных физических гамильтонианов.

1. Так называемый метод "ядер Бете—Солпитера"; он был развит в работах Дж. Глимма и А. Джаффе и их сотрудников и последователей (см. библиографические примечания в конце книги).

2. "Московский" метод, развиваемый авторами этой книги и их учениками.

3. Метод, основанный на непосредственном кластерном разложении при "вещественном" времени, который восходит к более раннему "гамильтонову подходу" в работах К. Фридрихса, К. Хеппа, Дж. Глимма и А. Джаффе.

В настоящее время первые два подхода позволяют изучить только "нижние" ветви спектра гамильтонианов, в то время как последний метод дает возможность доказать их асимптотическую полноту "в целом" (на всем спектре).

Наша книга посвящена изложению 2–го и 3–го подхода, которые ранее не.излагались ни в какой монографии, а также одному фрагменту из теории ядер Бете—Солпитера —так называемому уравнению Дайсона. Кроме того, в ней приведен и необходимый предварительный материал, различные добавления и ответвления.

На наш взгляд, полная и исчерпывающая монография по такой тематике была бы преждевременной, поскольку, как уже говорилось, теория еще далеко не завершена и не получены основные ожидаемые в ней результаты. Поэтому данная книга написана как введение в предмет с охватом, однако, всех основных его идей. Мы старались излагать в книге новые факты, отсутствующие в других монографиях, однако с тем, чтобы облегчить читателю ее чтение (а также в чисто учебных целях), в книгу включен в нужном нам виде и некоторый хорошо известный материал. Перечислим монографии, на которые мы опирались: по теории вероятностей см. [8, 11, 16]; функциональный анализ и спектральная теория операторов хорошо изложены в [36], там же можно найти хорошее изложение квантовой механики и теории рассеяния. Наконец, теория C^*-алгебр и ее приложения к статистической физике подробно изложены в двухтомнике [7, 49]. Нужный нам материал по вторичному квантованию содержится в книгах [5, 36] и [44]. Наконец, очень полезна также книга [12], в которой, в частности, кратко изложен метод ядер Бете—Солпитера.

Система ссылок на формулы: (1) означает формулу (1) в этом параграфе, (2.1)—формулу 2 в § 1 этой же главы, (3.2.1) формулу 3 в § 2 главы 1. Аналогично записываются ссылки на теоремы и леммы.

ГЛАВА 0

РАСШИРЕННОЕ ВВЕДЕНИЕ

Цель такого введения—дать читателю общее представление о теме этой книги. Мы изложим здесь также основные понятия и на интуитивном уровне поясним их смысл.

§ 1. Общая схема

1. Как появляются линейные операторы в задачах математической физики. В этой книге мы изучаем динамику (или, иначе, эволюцию во времени) тех или иных физических систем, описываемую в терминах (бесконечномерных) линейных пространств и действующих в них линейных операторов.

В случае квантовых систем такой способ описания предопределен самим языком квантовой теории: для всякой квантовой физической системы ее состояния совпадают с векторами некоторого гильбертова комплексного пространства $\mathcal{H}$ (более точно, с его лучами), а динамика задается унитарной однопараметрической группой операторов $\{U_t,\, t \in R^1\}$, t—время), действующих в $\mathcal{H}$. Иногда вводят также редуцированную динамику в алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, по формуле

$$\alpha_t A = U_t A U_t^{-1},\ t \in R^1,\ A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}). \tag{1}$$

Легко видеть, что $\{\alpha_t,\, t \in R^1\}$—группа $*$-автоморфизмов алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ (т. е. она сохраняет операцию сопряжения: $\alpha_t(A^*) = (\alpha_t(A))^*$).

Динамику $\{U_t,\, t \in R^1\}$ в пространстве $\mathcal{H}$ называют обычно *шредингеровской динамикой* , а порожденную ею динамику α_t в алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ (или какой-нибудь ее подалгебре, инвариантной относительно α_t)—*гайзенберговой динамикой.*

В случае системы классической механики ее динамика первоначально задается как группа $\{T_t,\, t \in R^1\}$ обратимых преобразований пространства состояний физической системы Ω

(фазового пространства) в себя. Однако, эту динамику также можно описать в терминах группы линейных операторов U_t или U_t^*, действующих соответственно в пространстве функций, определенных на Ω:

$$(U_t f)(\omega) = f(T_t^{-1}\omega), \ \omega \in \Omega, \tag{2}$$

или в пространстве мер (зарядов), заданных на Ω:

$$(U_t^* \mu)(A) = \mu(T_t^{-1}A), \ A \subseteq \Omega. \tag{3}$$

Такой подход к динамике в Ω зачастую оказывается проще и плодотворней, чем непосредственное изучение довольно сложной группы преобразований $\{T_t, \ t \in R^1\}$. В частности, в задачах неравновесной статистической механики динамика (3) U_t^* в пространстве мер на фазовом пространстве является главным объектом изучения; основные понятия, используемые физиками (убывание корреляций, спектральные моды, цепочки уравнений для моментов и т. д.) относятся именно к динамике мер. Разумеется, изучение эволюций U_t или U_t^* не заменяет полностью исследования исходной динамики T_t в Ω, и многие ее свойства (существование аттракторов, стохастичность или гиперболичность системы и т. д.) плохо выразимы в терминах динамики мер или функций на Ω.

С другой стороны, описание полной динамики мер U_t^* заменяется часто некоторым редуцированным и упрощенным ее описанием, которое может приводить уже к нелинейным уравнениям (уравнения Больцмана, гидродинамические уравнения и т. д. (см. [59])).

2. Общая схема описания динамики (некоммутативная теория вероятностей). Приведенные выше два примера: гайзенбергова динамика (1) и динамика (2) являются частными случаями более общей схемы, к которой мы часто прибегаем в этой книге. А именно, пусть задана тройка $(\mathfrak{A}, \langle\cdot\rangle, \alpha_t)$, где $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебра с единицей $\mathbf{1}$ и инволюцией $A \mapsto A^*$, $\langle\cdot\rangle$ — *состояние* на $\mathfrak{A}$, т. е. линейный функционал такой, что $\langle\mathbf{1}\rangle = 1$ и $\langle A^*A\rangle \geq 0$ для любого $A \in \mathfrak{A}$, и, наконец, $\{\alpha_t, \ t \in R^1\}$ — однопараметрическая группа $*$-автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$.

В случае квантовых систем, где, как мы видели, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ (или какая-нибудь подалгебра $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$), а α_t — это гайзенберговская динамика (1), состояние $\langle\cdot\rangle$ обычно задается в виде

$$\langle A\rangle = \mathrm{Sp}(\rho A), \tag{4}$$

где ρ — некоторый положительный ядерный оператор, действующий в $\mathcal{H}$ и такой, что $\mathrm{Sp}\,\rho = 1$ (оператор ρ называют *матрицей плотности* состояния (4); подробнее см. в [46].

В случае классических систем алгебра $\mathfrak{A}$ — это некоторая (коммутативная) алгебра ограниченных функций, определенных на фазовом пространстве Ω, динамика $\alpha_t = U_t$ определяется формулой (2), а состояние задается в виде интеграла

$$\langle f\rangle = \int\limits_{\Omega} f(\omega)d\mu(\omega), \tag{5}$$

где μ — некоторая вероятностная мера на пространстве Ω.

Для состояния $\langle\cdot\rangle$, определенного на алгебре $\mathfrak{A}$, можно ввести ряд общих понятий, обобщающих аналогичные понятия из теории вероятностей: $\langle A\rangle$ называется *средним значением* элемента $A \in \mathfrak{A}$, $\langle(A - \langle A\rangle\mathbf{1})^2\rangle$ — его *дисперсией*, $\langle A^n\rangle$ — *n-м моментом* A, $\langle\exp\{itA\}\rangle$ — *характеристической функцией* A и т. д.

Общую теорию, изучающую состояния на алгебрах, иногда называют некоммутативной теорией вероятностей.

Состояние $\langle\cdot\rangle$ на $\mathfrak{A}$ называется *инвариантным* (или *равновесным*) относительно динамики α_t, если $\langle\alpha_t A\rangle = \langle A\rangle$ для всех $A \in \mathfrak{A}$.

§ 2. Основные примеры физических систем

С тем, чтобы ориентировать читателя, а также ввести нужные нам обозначения и понятия, мы перечислим здесь главные примеры физических систем, встречающихся в литературе по математической физике.

Отметим сразу, что основной пафос этой книги направлен на изучение бесконечных систем (состоящих из бесконечного числа частиц, заполняющих все пространство). Однако, такие системы удобно описывать и изучать как пределы систем конечного числа частиц. Поэтому мы начнем с описания конечных систем.

1. Система классических частиц (классический газ). В случае системы N точечных одинаковых частиц, заключенных в ограниченной области $\Lambda \subset R^\nu$, ее фазовое пространство $\Omega_{\Lambda,N}$

состоит из всех последовательностей попарно различных пар

$$\omega = \{(q_1, v_1), \dots, (q_N, v_N)\}, \ (q_i, v_i) \in \Lambda \times R^\nu, \ i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

В последовательности (1) q_i—положение i-й частицы, а v_i— ее скорость.

Энергия системы (или ее *функция Гамильтона*) полагается обычно равной

$$H_{\Lambda,N}(\omega) = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{N} v_i^2 + \sum_{1\le i<j\le N} U(q_i, q_j), \quad (2)$$

где m—масса каждой частицы, а $U(q_1, q_2)$—*потенциальная энергия* взаимодействия двух частиц, находящихся в точках q_1 и q_2 соответственно. Чаще всего полагают, что $U(q_1, q_2) = U(| q_1 - q_2 |)$, т. е. что энергия взаимодействия зависит только от расстояния между частицами.

Динамика

$$T_t : \Omega_{\Lambda,N} \to \Omega_{\Lambda,N} : \omega^0 = \{(q_1^0, v_1^0), \dots, (q_N^0, v_N^0)\} \mapsto$$
$$\mapsto \omega^t = \{(q_1^t, v_1^t), \dots, (q_N^t, v_N^t)\} \quad (3)$$

определяется из решения дифференциальных уравнений Ньютона

$$\frac{dq_i}{dt} = v_i, \quad m\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j\ne i} F(q_i, q_j) \quad (4)$$

с начальным условием $\omega^0 = \{(q_1^0, v_1^0), \dots, (q_N^0, v_N^0)\}$, где $F(q_1, q_2) = -(\nabla_{q_1} U)(q_1 q_2)$—сила, действующая на 1-ю частицу со стороны 2-й. Систему уравнений (4) следует дополнить каким-нибудь "граничным условием", т. е. предписать, как должна дальше двигаться частица, достигшая границы $\partial\Lambda$ области Λ. В случае области Λ с гладкой границей $\partial\Lambda$ чаще всего рассматривают условия "упругого отражения": составляющая скорости частицы вдоль нормали к границе $\partial\Lambda$ (в точке выхода частицы на границу) меняет знак. Иногда в случае, когда Λ—ν-мерный куб, рассматривают "периодические граничные условия", т. е. рассматривают вместо куба тор, получающийся "склеиванием" противоположных граней (заменяя потенциал $U(q_1, q_2)$ соответствующим периодическим потенциалом). В случае, когда потенциал $U(q_1, q_2)$—гладкая функция при всех $q_1 \ne q_2$ и имеет, быть может, особенность на гиперповерхности $q_1 = q_2$, в окрестности которой он монотонно стремится к $+\infty$ при $q_1 - q_2 \to 0$, существование (и единственность) решения системы (4) при всех начальных условиях $\{(q_1^0, v_1^0), \dots, (q_N^0, v_N^0)\} \in \Omega_{\Lambda,N}$ следует из общих теорем теории дифференциальных уравнений, а также из закона сохранения энергии

$$H(\omega^t) = H(\omega^0). \quad (5)$$

Это равенство легко выводится из уравнения движения (4). В случае потенциала $U(q_1, q_2)$, имеющего описанную выше особенность на гиперповерхности $q_1 = q_2$, никакие две частицы в силу равенства (5) не могут попасть в одну и ту же точку. Иногда рассматривают систему твердых упругих стержней, т. е. систему частиц, которые не могут подойти друг к другу ближе, чем на расстояние δ (δ—диаметр шарика). Фазовое простарнство $\Omega_{\Lambda,N}^\delta$ такой системы состоит из последовательностей вида (1) с дополнительным условием

$$| q_1 - q_2 | \ge \delta, \ i \ne j. \quad (6)$$

При этом потенциал $U(q_1, q_2)$ для такой системы определен для всех пар (q_1, q_2), таких, что $| q_1 - q_2 | > \delta$. Возможны два случая:

1. Потенциал $U(q_1, q_2) \to +\infty$ при $| q_1 - q_2 | \to \delta$. Тогда динамика $T_t : \Omega_{\Lambda,N}^\delta \to \Omega_{\Lambda,N}^\delta$ по-прежнему определяется системой дифференциальных уравнений (4) (вместе с граничным условием упругого отражения), поскольку никакие два шарика не могут столкнуться.

2. Потенциал $U(q_1, q_2)$—гладкая и ограниченная функция во всей области $| q_1 - q_2 | > \delta$. В этом случае возможны столкновения шариков и динамику следует доопределить каким-либо предписанием о том, как должны двигаться дальше столкнувшиеся шарики. Обычно снова рассматривают условие "упругого столкновения" двух шариков, что означает, что столкнувшиеся шарики "обмениваются" нормальными составляющими своих скоростей (т. е. проекциями своих скоростей на прямую, соединяющую их центры в момент столкновения). В случае, когда сталкиваются одновременно три и более шариков, никакого разумного правила (при $\nu > 1$) предложить нельзя. Поэтому из пространства $\Omega_{\Lambda,N}^\delta$ выбрасывают все начальные

состояния $\{(q_1^0, v_1^0), \ldots, (q_N^0, v_N^0)\}$, которые при своем движении приводят к тройным, четверным и т. д. столкновениям. Оказывается, что $2N\nu$-мерная лебеговская мера множества таких начальных состояний равна нулю (теорема Александера). На оставшемся множестве $\tilde{\Omega}_{\Lambda,N}^{\delta}$ динамика T_t определена описанным выше образом. Заметим, однако, что в случае $\nu = 1$ динамику T_t можно определить на всем множестве $\Omega_{\Lambda,N}^{\delta}$. При одновременном столкновении k стержней с центрами в точках

$$q_1 < q_2 < \ldots < q_k, \; q_{i+1} - q_i = \delta, \, i = 1, \ldots, k-1,$$

которое возможно лишь при условии, что $v_1 > v_2 > \ldots > v_k$, порядок этих скоростей должен измениться на обратный: первый шарик получает скорость v_k, второй скорость v_{k-1} и т. д., а последний скорость v_1; после этого шарики беспрепятственно расходятся.

Во всех перечисленных случаях для динамики T_t верна теорема Лиувилля: *мера Лебега* $\prod dq_i dv_i$ *любого подмножества* $A \subset \Omega_{\Lambda,N}$ *(или* $\Omega_{\Lambda,N}^{\delta}$*) фазового пространства системы сохраняется при движении.* Таким образом, преобразования U_t в пространстве функций $f \in L_2(\Omega_{\Lambda,N}, \prod_i dq_i dv_i)$, определенные формулой (2.1), порождают унитарную группу операторов в этом гильбертовом пространстве.

Отметим сразу, что среди мер в $\Omega_{\Lambda,N}$, инвариантных относительно динамики T_t, наиболее существенными являются *гиббсовские* (равновесные) меры $\mu_{\beta,\Lambda,N}$. Их плотность относительно лебеговской меры $\prod_i dq_i dv_i$ задается формулой

$$d\mu_{\beta,\Lambda,N} = p_{\beta,\Lambda,N}(\{(q_i, v_i), \, i = 1, \ldots, N\}) \prod_i dq_i dv_i,$$

где

$$p_{\beta,\Lambda,N}(\{(q_1, v_1), \ldots, (q_N, v_N)\}) = \\ = \frac{1}{Z_{\beta,\Lambda,N}} \exp\{-\beta H_{\Lambda,N}(\{(q_1, v_1), \ldots, (q_N, v_N)\})\}. \qquad (7)$$

Здесь $\beta > 0$—параметр, а $Z_{\beta,\Lambda,N}$—нормирующий множитель (*статистический интеграл*):

$$Z_{\beta,\Lambda,N} = \int\limits_{\Omega_{\Lambda,N}} \exp\{-\beta H_{\Lambda,N}(\{(q_1, v_1), \ldots, (q_N, v_N)\})\} \prod_i dq_i dv_i. \; (8)$$

Обсуждение того, для каких парных потенциалов $U(q_1, q_2)$ в (2) плотность гиббсовской меры (7) корректно определена (т. е. $Z_{\beta,\Lambda,N} \neq 0, \infty$), содержится в [37]. Поскольку мы имеем дело с одинаковыми частицами, удобно считать их неразличимыми, т. е. в качестве фазового пространства $\Omega_{\Lambda,N}^{\text{неразл}}$ рассматривать фактор-пространство

$$\Omega_{\Lambda,N}^{\text{неразл}} = \Omega_{\Lambda,N}/S_N, \qquad (9)$$

где S_N—группа всех перестановок (перенумераций) частиц. При этом в качестве лебеговской меры $A \subset \Omega_{\Lambda,N}^{\text{неразл}}$ следует считать $\frac{1}{N!}\text{mes}(\pi^{-1}(A))$, где $\pi^{-1}(A)$ — полный прообраз множества $A \subseteq \Omega_{\Lambda,N}^{\text{неразл}}$ при естественном отображении $\pi : \Omega_{\Lambda,N} \to \Omega_{\Lambda,N}^{\text{неразл}}$, а $\text{mes}\, B$—$2\nu N$-мерная лебеговская мера $B \subset \Omega_{\Lambda,N}$. Состояние $\omega \in \Omega_{\Lambda,N}^{\text{неразл}}$ системы неразличимых частиц можно представлять себе как N-точечное подмножество одночастичного пространства $\Lambda \times R^{\nu}$. Динамика $T_t^{\text{неразл}}$ в $\Omega_{\Lambda,N}^{\text{неразл}}$ и гиббсовская мера в этом пространстве естественно редуцируется динамикой T_t и гиббсовской мерой (7) в $\Omega_{\Lambda,N}$.

Часто в статистической физике ради удобства рассматриваются также системы с переменным числом частиц. В случае классического газа, описанного нами в этом параграфе, пространством состояний такой системы является множество

$$\Omega_{\Lambda}^{\text{неразл}} = \bigcup_{N \geq 0} \Omega_{\Lambda,N}^{\text{неразл}}, \qquad (10)$$

т. е. совокупность всех конечных подмножеств $c \subset \Lambda \times R^{\nu}$. Динамики T_t в $\Omega_{\Lambda}^{\text{неразл}}$ действуют независимо в каждом страте $\Omega_{\Lambda,N}^{\text{неразл}}$, лебеговская мера dc в $\Omega_{\Lambda}^{\text{неразл}}$ также вводится как мера $\frac{1}{N!}\prod_i dq_i dv_i$ на страте $\Omega_{\Lambda,N}^{\text{неразл}}$, а гиббсовская $\mu_{\beta,\mu,\Lambda}$-мера в $\Omega_{\Lambda}^{\text{неразл}}$ задается плотностью (относительно лебеговской меры в $\Omega_{\Lambda}^{\text{неразл}}$)

$$d\mu_{\beta,\mu,\Lambda} = P_{\beta,\mu,\Lambda}(c)dc,$$

где

$$P_{\beta,\mu,\Lambda}(c) = \frac{1}{\Xi_{\beta,\mu,\Lambda}} \exp\{-\beta(H_{\Lambda}(c) + \mu N(c))\}. \qquad (11)$$

Здесь $c = \{(q_i, v_i), \; i = 1, 2, \ldots, N\}$, $H_{\Lambda}(c) = H_{\Lambda,N}(\{(q_1, v_1), \ldots$

$\ldots,(q_N,v_N)\})$, а $N(c)=N$, $\beta>0$ и μ—параметры, $\Xi_{\beta,\mu,\Lambda}$—нормирующий множитель, равный

$$\Xi_{\beta,\mu,\Lambda}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{e^{-\beta\mu N}}{N!}Z_{\beta,\Lambda,N}. \tag{12}$$

Распределение (11) называют часто *большим каноническим ансамблем Гиббса*, а распределение (7)—*малым каноническим ансамблем*. Легко проверить, что условное распределение, порождаемое большим ансамблем на страте $\Omega^{\text{неразл}}_{\Lambda,N}$, совпадает с малым каноническим ансамблем на этом страте. Подробнее обо всем этом можно прочесть в [37] и [30].

2. Классическая решетчатая система частиц. В предыдущем пункте мы описали газ из одинаковых частиц, движущихся в конечной области $\Lambda\subset R^\nu$. В этом пункте мы опишем систему из конечного числа частиц, каждая из которых колеблется вокруг своего положения равновесия. Пусть Z^ν—ν-мерная решетка, $\Lambda\subset Z^\nu$—конечное подмножество этой решетки, и каждой точке $x\in\Lambda$ приписана частица, отклонение которой от точки x мы обозначим q_x, а ее скорость v_x. Пространство состояний такой системы $\Omega_\Lambda=(R^\nu\times R^\nu)^\Lambda$; энергия (функция Гамильтона) выбирается равной

$$H_\Lambda=\frac{m}{2}\sum_{x\in\Lambda}v_x^2+\sum_{\substack{x,y\subset\Lambda\\ x\neq y}}\Phi_{x,y}(q_x,q_y)+\sum_{x\in\Lambda}U(q_x). \tag{13}$$

Здесь $U(\cdot)$—потенциальная энергия взаимодействия частицы q_x с силовым центром в точке $x\in\Lambda$ (обуславливающая ее притяжение к положению равновесия $q_x=0$), а $\Phi_{x,y}(q_x,q_y)$—потенциальная энергия взаимодействия двух частиц, приписанных к точкам x и y и отклонившихся на q_x и q_y соответственно. В случае, когда $U(q)$ и $\Phi_{x,y}(q_x,q_y)$ являются квадратичными формами от своих переменных, систему с гамильтонианом (13) называют системой *линейных взаимодействующих осцилляторов*.

Динамика $T_t:\Omega_\Lambda\to\Omega_\Lambda,\omega^0\to\omega^t$ описанной системы снова получается из решения дифференциальных уравнений Ньютона

$$\frac{dq_x}{dt}=v_x,\quad m\frac{dv_x}{dt}=F^{(1)}(q_x)+\sum_{y\neq x}F^{(2)}_{x,y}(q_x,q_y) \tag{14}$$

с начальным условием $\omega^0=\{\{q_x^0,v_x^0\},x\in\Lambda\}$. Здесь $F^{(1)}(q_x)=-(\nabla U)(q_x)$, $F^{(2)}_{x,y}(q_x,q_y)=-(\nabla_{q_x}\Phi)(q_x,q_y)$— силы, действующие на частицу, приписанную к точке x, со стороны притягивающего центра (в точке x) и со стороны остальных частиц.

Снова легко проверить, что функция Гамильтона (13) и лебеговская мера $\prod\limits_{x\in\Lambda}dq_xdv_x$ сохраняются при движении. Гиббсовское распределение $\mu_{\beta,\mu,\Lambda}$ в Ω_Λ по-прежнему определяется формулой, аналогичной формуле (11).

3. Квантовые системы частиц. Рассмотрим систему из N квантовых частиц, заключенных в конечной области $\Lambda\subset R^\nu$ пространства R^ν. Опишем три наиболее важных случая.

А. Случай различимых частиц. Гильбертовым пространством состояний такой системы служит пространство $\mathcal{H}_{\Lambda,N}=L_2(\Lambda^N,\prod\limits_i dq_i)$ функций $f(q_1,\ldots,q_N),q_i\in\Lambda$. Оператор энергии задается в виде

$$H_{\Lambda,N}f=-\sum\frac{1}{2m_i}\Delta_{q_i}f+U(q_1,\ldots,q_N)f, \tag{15}$$

где m_i—масса i-й частицы, $U(q_1,\ldots,q_N)$—некоторая (ограниченная снизу) функция от N переменных $q_1,\ldots,q_N$ (потенциальная энергия), а Δ_{q_i}—оператор Лапласа (по переменной q_i), рассматриваемый вместе с каким-нибудь самосопряженным граничным условием на границе $\partial\Lambda$ области Λ. Чаще всего рассматривают граничные условия Дирихле, т. е. предполагают, что функции из области определения $D_{H_{\Lambda,N}}$ обращаются в нуль, если хотя бы один из аргументов $q_i\in\partial\Lambda$. В случае, когда $\Lambda\subset R^\nu$— куб, рассматривают также "периодические граничные условия": значения функции f и ее первых производных $\dfrac{\partial f}{\partial g_i}$ совпадают для наборов $(q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_N)$ $(q_1,\ldots,q_{i'},\ldots,q_N)$, в которых (при каком-нибудь i) q_i и $q_{i'}$ расположены на двух противоположных гранях куба. Чаще всего рассматривают случай парного взаимодействия частиц, помещенных, быть может, во внешнее поле, т. е. полагают

$$U(q_1,\ldots,q_N)=\sum_{i<j}\Phi_{ij}(q_i,q_j)+\sum_i\Phi_i(q_i),$$

где Φ_{ij}—потенциал взаимодействия i-й и j-й частиц, а Φ_i— потенциал внешнего поля, действующего на i-ю частицу.

В книге [36] подробно разбираются условия относительно потенциалов Φ_{ij} и Φ_i, при которых оператор (15) самосопряжен. Динамика $U_t^{\Lambda,N} : \mathcal{H}_{\Lambda,N} \to \mathcal{H}_{\Lambda,N}$ задается, как обычно, в виде

$$U_t^{\Lambda,N} f = \exp\{itH_{\Lambda,N}\}f, \ \ f \in \mathcal{H}_{\Lambda,N}, \ \ t \in R^1. \qquad (16)$$

Среди состояний на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\Lambda,N})$ ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}_{\Lambda,N}$, инвариантных относительно динамики (16), наиболее важным является гиббсовское состояние, определяемое формулой

$$\langle A\rangle_\beta = \mathrm{Sp}(\rho A), \ \ A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}_{\Lambda,N}), \qquad (17)$$

где

$$\rho = \frac{1}{Z_{\beta,\Lambda,N}} \exp\{-\beta H_{\Lambda,N}\},$$

$\beta > 0$—параметр, а $Z_{\beta,\Lambda,N}$—нормирующий множитель:

$$Z_{\beta,\Lambda,N} = \mathrm{Sp}\exp\{-\beta H_{\Lambda,N}\}. \qquad (18)$$

Для большого класса потенциалов Φ_{ij} и Φ_i оператор ρ (матрица плотности состояния (17)) для всех N, всех ограниченных областей Λ и $\beta > 0$ оказывается ядерным оператором, т. е. определения (17) и (18) корректны. Подробнее см. об этом в [37].

Состояния вида (17) называют иногда *температурными состояниями* (параметр $\beta = T^{-1}$, где T—температура системы). Кроме них изучают также *основные состояния* на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\Lambda,N})$ (также инвариантные относительно динамики (16)). Пусть $\Psi_{\text{осн}} \in \mathcal{H}_{\Lambda,N}$— нормированный собственный вектор оператора $H_{\Lambda,N}$ с минимальным (простым) собственным значением (*основной вектор*). Тогда основное состояние $\langle\,\cdot\,\rangle_{\text{осн}}$ на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\Lambda,N})$ определяется формулой

$$\langle A\rangle_{\text{осн}} = (A\Psi_{\text{осн}}, \Psi_{\text{осн}}), \ \ A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\Lambda,N}). \qquad (19)$$

Б. Случай неразличимых частиц (бозе и ферми). Предположим, что массы всех частиц m_i одинаковы, $m_i = m$, а также одинаковы потенциалы взаимодействия:

$$\Phi_{ij}(q_i, q_j) = \Phi(q_i, q_j), \ \ \Phi_i(q_i) = \Phi(q_i).$$

Тогда оператор $H_{\Lambda,N}$ в $\mathcal{H}_{\Lambda,N}$ коммутирует с любой перестановкой частиц и следующие два подпространства $\mathcal{H}_{\Lambda,N}$ инвариантны относительно $H_{\Lambda,N}$—подпространство $\mathcal{H}_{\Lambda,N}^{\text{sym}}$ функций $f(q_1, \dots, q_N)$, симметричных относительно своих переменных, и подпространство $\mathcal{H}_{\Lambda,N}^{\text{asym}}$ функций, антисимметричных относительно $(q_1, \dots, q_N)$ (т. е. меняющих знак при перестановке любой пары частиц). Части оператора $H_{\Lambda,N}$ в $\mathcal{H}_{\Lambda,N}^{\text{sym}}$ и $\mathcal{H}_{\Lambda,N}^{\text{asym}}$ обозначим соответственно $H_{\Lambda,N}^{\text{sym}}$ и $H_{\Lambda,N}^{\text{asym}}$. Частицы, описываемые векторами пространства $\mathcal{H}_{\Lambda,N}^{\text{sym}}$ и гамильтонианом $H_{\Lambda,N}^{\text{sym}}$, называют *бозе*-частицами (или *бозонами),* а частицы, описываемые элементами пространства $\mathcal{H}_{\Lambda,N}^{\text{asym}}$— *ферми*-частицами *(фермионами)*. Динамика U_t^a в пространствах $\mathcal{H}_{\Lambda,N}^a, a = \text{sym}, \text{asym}$, задается соответственно сужением динамики U_t (16) в $\mathcal{H}_{\Lambda,N}$ на инвариантные подпространства $\mathcal{H}_{\Lambda,N}^a, a = \text{sym}, \text{asym}$; температурные и основные состояния определяются формулами (17) и (19) с заменой $H_{\Lambda,N}$ на $H_{\Lambda,N}^{\text{sym}}$ и $H_{\Lambda,N}^{\text{asym}}$ соответственно, а вектора $\Psi_{\text{осн}}$ на $\Psi_{\text{осн}}^{\text{sym}} (= \Psi_{\text{осн}})$ или $\Psi_{\text{осн}}^{\text{asym}} (\neq \Psi_{\text{осн}})$.

Часто рассматривают бозе- и ферми-системы с переменным числом частиц. В качестве гильбертова пространства таких систем выбирают пространства

$$\mathcal{F}_\Lambda^{\text{sym}} \equiv \mathcal{H}_\Lambda^{\text{sym}} = \mathbb{C}^1 \oplus (\oplus_{N=1}^\infty \mathcal{H}_{\Lambda,N}^{\text{sym}}) \qquad (20)$$

и

$$\mathcal{F}_\Lambda^{\text{asym}} \equiv \mathcal{H}_\Lambda^{\text{asym}} = \mathbb{C}^1 \oplus (\oplus_{N=1}^\infty \mathcal{H}_{\Lambda,N}^{\text{asym}}), \qquad (21)$$

которые состоят из бесконечных последовательностей

$$F = \{f_0, f_1(q_1), \dots, f_n(q_1, \dots, q_N), \dots\} \qquad (22)$$

симметрических и соответственно антисимметрических функций возрастающего числа переменных. При этом норма последовательности (22) такова:

$$\| F \|^2 = | f_0 |^2 + \sum_{N=1}^{\infty} \| f_N \|^2_{\mathcal{H}_{\Lambda,N}} . \qquad (23)$$

Пространства $\mathcal{H}_\Lambda^a = \mathcal{F}_\Lambda^a, a = \text{sym}, \text{asym}$, называют *пространствами Фока*. Гамильтониан H_Λ^a, действующий в пространстве $\mathcal{F}_\Lambda^a$, равен

$$H_\Lambda^a = \oplus_{N=0}^\infty H_{\Lambda,N}^a, \ \ a = \text{sym}, \text{asym} \ \ (H_{\Lambda,0}^a = 0), \qquad (24)$$

а динамика по-прежнему задается формулой (16) (и в каждом подпространстве $\mathcal{H}^a_{\Lambda,N}$ совпадает с прежней динамикой $U_t^{\Lambda,N}$). При этом гиббсовское температурное состояние задается матрицей плотности

$$\rho^a_\Lambda = \frac{1}{\Xi^a}\exp\{-\beta(H^a_\Lambda + \mu\hat{N})\},$$
$$\Xi^a = \operatorname{Sp}\exp\{-\beta(H^a_\Lambda + \mu\hat{N})\}, \qquad (25)$$

где $\beta > 0, \mu$—параметры, $\hat{N}$—оператор числа частиц, действующий в каждом подпространстве $H^a_{\Lambda,N}$ как умножение на N. Основное состояние определяется формулой (19), где $\Psi^a_{\text{осн}}$—основной вектор для оператора $H^a_\Lambda + \mu N$ в $\mathcal{H}^a_\Lambda$.

Более общая конструкция пространств Фока, а также связанный с ними операторный формализм (т. н. метод "вторичного квантования") будут описаны в §3.1. Там же будут приведены примеры гамильтонианов (в частности, гамильтониана (15)), записанных во "вторично-квантованном" виде.

4. Квантовые спиновые (решетчатые) системы. Пусть Z^ν—ν-мерная решетка и каждой ее точке x приписано конечномерное гильбертово пространство $\mathcal{H}_x$ (изоморфное пространству $\mathbb{C}^n$). Для каждого конечного множества $\Lambda \subset Z^\nu$ обозначим $\mathcal{H}_\Lambda$ тензорное произведение пространств $\mathcal{H}_x, x \in \Lambda$:

$$\mathcal{H}_\Lambda = \otimes_{x\in\Lambda}\mathcal{H}_x. \qquad (26)$$

Векторы пространства $\mathcal{H}_\Lambda$ описывают состояния системы "частиц", "сидящих" (по одной) во всех точках $x \in \Lambda$, у которых "внутренние степени свободы" ("спин") задаются элементами пространства $\mathcal{H}_x$. Очевидно, что алгебра операторов $\mathfrak{A}_x = \mathfrak{B}(\mathcal{H}_x)$ изоморфна алгебре $\mathfrak{M}$ матриц порядка $n \times n$, а алгебра $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_\Lambda) = \otimes_{x\in\Lambda}\mathfrak{A}_x$. Для двух множеств $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ определено гомоморфное (и изометричное) вложение

$$\mathfrak{A}_{\Lambda_1} \to \mathfrak{A}_{\Lambda_1} \otimes \mathbf{1}_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1} \subset \mathfrak{A}_{\Lambda_2}, \qquad (27)$$

где $\mathbf{1}_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1} \in \mathfrak{A}_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}$— единичный элемент этой алгебры. Пусть теперь для каждого конечного множества $A \subset Z^\nu$ выбран самосопряженный элемент $\Phi_A \in \mathfrak{A}_\Lambda$, который в силу (27) можно считать элементом $\mathfrak{A}_\Lambda$ при $A \subseteq \Lambda$. Определим теперь самосопряженный оператор $H_\Lambda \in \mathfrak{A}_\Lambda$

$$H_\Lambda = \sum_{A\subseteq\Lambda}\Phi_A \qquad (28)$$

как гамильтониан нашей системы. Динамика, как обычно, задается формулой (16). Температурные и основные состояния задаются формулами, аналогичными формулам (17)–(19).

5. Системы со стохастической динамикой. В последнее время в математической физике стали популярны модели систем, в которых динамика является не однозначно детерминированной, как в предыдущих примерах, а определяется некоторым стохастическим механизмом. При этом возможны различные ситуации: либо сам закон эволюции системы является стохастическим (цепи Маркова), либо рассматривают семейство детерминированных законов, зависящих от случайных параметров ("случайная среда"), и изучают "типичные" свойства возникающего семейства динамик. Наконец, возможен и смешанный случай (случайные блуждания в "случайной" среде). Мы остановимся здесь на первой ситуации и рассмотрим случай так называемых марковских цепей с *локальным взаимодействием* (см. [24]) (в конечной области Λ). Наиболее простые из них—это те, для которых переходные распределения условно-независимы. Подробнее: пусть $\Lambda \subset Z^\nu$—конечное множество и конфигурация (состояние системы) определяется функцией $\{s(x), x \in \Lambda\}$ со значениями в некотором конечном множестве S. При заданном состоянии системы $s_0 \in S^\Lambda$ в начальный момент ее вероятность попасть в состояние s в момент времени $t = 1$ равна

$$p(s/s_0) = \prod p_x(s(x)/s_0), \qquad (29)$$

где $p_x(\cdot/s_0)$—семейство распределений на S, зависящих от конфигурации s_0. Формула (29) и выражает условную независимость распределения для конфигураций s в момент времени $t = 1$ при фиксированной конфигурации s_0. При этом семейство распределений $p_x(\cdot/s_0)$ зависит от s_0 следующим образом:

$$p_x(\cdot/s_0) = p_x(\cdot/s_0\,|_{Q_x}), \qquad (30)$$

где $Q_x = Q + x$—конечная фиксированная окрестность точки x (получающаяся сдвигом на x фиксированной окрестности Q точки $x = 0$), а $s_0\,|_{Q_x}$— сужение конфигурации s_0 на Q_x. Формула (30) выражает “локальность взаимодействия” для марковской цепи.

§ 3. Бесконечные системы и термодинамический предельный переход

Макроскопические физические системы состоят из большого числа частиц и занимают большую (по сравнению с характерными размерами взаимодействия) область в пространстве R^ν (или на решетке Z^ν). Поэтому удобно перейти к некоторой идеализированной бесконечной системе (бесконечное число частиц, движущихся во всем пространстве), атрибуты которой, в частности, ее динамика и равновесные состояния близки к соответствующим атрибутам допредельных конечных систем. Можно привести также три чисто математических аргумента в пользу рассмотрения бесконечных систем:

а) только в терминах бесконечной системы можно сформулировать понятие фазового перехода для равновесных систем;

б) лишь динамика бесконечной системы имеет непрерывный спектр и лишь для нее имеет смысл “корпускулярная” картина (картина “квазичастиц”), а также теория рассеяния (об этом подробно говорится в § 6);

в) наконец, только для предельных равновесных состояний в точности верен так называемый принцип эквивалентности равновесных ансамблей: предельные состояния, получающиеся из малого и большого ансамблей Гиббса (а также из так называемого микроканонического ансамбля, см. [37]) в “однофазовых” областях параметров, от которых они зависят (температура и плотность частиц для малого, температура и химический потенциал для большого и, наконец, плотность энергии и плотность частиц для микроканонического ансамбля), совпадают при надлежащем соответствии между этими параметрами.

Здесь мы для всех перечисленных в предыдущем параграфе конечных систем кратко опишем соответствующие бесконечные системы, динамику в них и равновесные (гиббсовские) состояния.

1. **Классический газ (из неразличимых частиц).** Фазовым пространством Ω такой системы служит совокупность

всевозможных локально конечных подмножеств $c = R^\nu \times R^\nu$ пространства состояний $(q,v) \in R^\nu \times R^\nu$ одной частицы, где q— положение, а v—скорость частицы. Подмножество $c \subset R^\nu \times R^\nu$, состоящее из пар (q,v), называется локально-конечным, если в любом ограниченном подмножестве $\Lambda \subset R^\nu$ содержится лишь конечное число частиц из c.

В случае систем с гамильтонианом вида (2.2) на пространстве Ω можно ввести два семейства предельных гиббсовских распределений. Одно получается из малого канонического ансамбля $\mu_{\beta,\Lambda,N}$ (7.2) в термодинамическом предельном переходе

$$\mu_{\beta,\rho} = \lim_{\substack{\Lambda\uparrow R^\nu \\ \frac{N}{|\Lambda|}\to\rho}} \mu_{\beta,\Lambda,N}, \tag{1}$$

где ρ—предельная плотность частиц, а предел (1) понимается в смысле слабой сходимости конечномерных распределений (подробно см. в [26]). Другое семейство предельных распределений на Ω получается с помощью предельного перехода из большого канонического ансамбля Гиббса $\mu_{\beta,\mu,\Lambda}$ (11.2):

$$\mu_{\beta,\mu} = \lim_{\Lambda\uparrow R^\nu} \mu_{\beta,\mu,\Lambda}. \tag{2}$$

При этом оказывается, что в регулярных областях параметров (β,ρ) и (β,μ) (в которых все характеристики соответствующего семейства распределений—корреляционные функции, свободная энергия и т. д. (см. [37]) аналитически зависят от этих параметров) оба семейства совпадают

$$\mu_{\beta,\rho} = \mu_{\beta,\mu} \tag{3}$$

при условии, что μ выбрано так, что средняя предельная плотность частиц в большом ансамбле

$$\rho_{\beta,\mu} = \lim_{\Lambda\uparrow R^\nu} \frac{\langle N\rangle_{\beta,\mu,\Lambda}}{|\,\Lambda\,|}$$

равна ρ:

$$\rho_{\beta,\mu} = \rho \tag{4}$$

($\langle\ \rangle_{\beta,\mu,\Lambda}$ означает усреднение по $\mu_{\beta,\mu,\Lambda}$). Утверждение (3) вместе с (4) и называется *принципом эквивалентности* ансамблей.

В случае систем с парным потенциалом взаимодействия $U(q_1,q_2)$ в формуле (2.2) динамика в фазовом пространстве Ω определяется бесконечной системой дифференциальных уравний Ньютона, получающейся формальным предельным переходом от системы (4.2): пусть $c = \{(q, v)\} \in \Omega$; тогда для пары $(q, v) \in c$

$$\dot{q} = v,$$
$$\dot{v} = \frac{1}{m} \sum_{q' \neq q} F(q, q'), \tag{5}$$

где сумма берется по всем частицам из конфигурации c, не совпадающим с данной частицей. В простейшем предположении, что потенциал $U(q_1, q_2)$ финитен, сумма $\sum\limits_{q'} F(q, q')$ конечна и правая часть в (5) корректно определена.

Поскольку, как показывают простейшие примеры, система уравнений (5) для некоторых начальных конфигураций $c^0 = \{(q^0, v^0)\} \in \Omega$ может не иметь решений даже для сколь угодно малых промежутков времени (мгновенный коллапс системы, при котором в конечной области оказывается сколь угодно большое число частиц), основной трудностью в задаче корректного построения динамики с помощью системы уравнений (5) является такой выбор достаточно обширного подмножества $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ начальных конфигураций c^0, для которых система (5) имеет решение $c(t)$ при всех $t \in R^1$ и это решение не покидает множества $\tilde{\Omega} : c(t) \in \tilde{\Omega}$.

В существующей литературе имеется два подхода к построению множества $\tilde{\Omega}$— либо явное его описание (соответствующая динамика в $\tilde{\Omega}$ называется *абсолютной*), либо неявное выделение такого множества с тем, однако, свойством, что оно обладает полной мерой относительно любого равновесного распределения (гиббсовского) в Ω. Такая динамика называется *равновесной*; это название объясняется тем, что любое равновесное распределение инвариантно относительно динамики в $\tilde{\Omega}$ (как, впрочем, и относительно абсолютной динамики, если множество $\tilde{\Omega}$ достаточно обширно и имеет полную меру относительно равновесного распределения). Первый (абсолютный) подход удобен тем, что позволяет автоматически (по формулам (3.1)) ввести динамику в пространстве мер на $\tilde{\Omega}$, а второй подход позволяет определить такую динамику лишь в классе мер, абсолютно непрерывных относительно какой-нибудь равновесной меры.

Заметим, однако, что независимо от построения динамики T_t в фазовом пространстве Ω можно определить и исследовать динамику U_t в пространстве $C_0^{\text{лок}}(\Omega)$ гладких локальных функций на Ω, задаваемую уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{q} \left(v \frac{\partial f}{\partial q} \right)(c) + \frac{1}{m} \sum_{q, q'} \left(\frac{\partial f}{\partial v}, F(q, q') \right), \;\; c = \{(q, v)\} \in \Omega. \tag{6}$$

В первой сумме суммирование происходит по всем частицам из c, а во второй по всем неупорядоченным парам таких частиц. Поскольку функция f зависит лишь от конечной части конфигурации c (это и означает, что f локальна), суммы в (6) конечны.

Можно также определить (снова независимо от построения динамики T_t в Ω) непосредственно динамику U_t^* в пространстве мер на Ω. Наиболее удобный способ задания этой динамики— эволюционные уравнения относительно корреляционных функций таких мер. Это приводит к бесконечной системе зацепляющихся уравнений, которая изучалась многими авторами, что и оставило след в ее названии: иерархическая цепочка ББГКИ (Боголюбов, Борн, Грин, Кирквуд, Ивон; подробнее см. в [34], а также в [35]).

Заметим, что полное построение перечисленных динамик (в пространстве конфигураций, в пространстве функций и в пространстве мер) проведено лишь в немногих простейших случаях. При этом во всех этих случаях динамики получаются как пределы (в некотором естественном смысле) соответствующих конечных динамик при термодинамическом предельном переходе (подробнее см. об этом в [50]).

2. Классические системы частиц на решетке. Пространством состояний Ω такой системы служат пространства $(R^\nu \times R^\nu)^{Z^\nu}$ бесконечных конфигураций $\{(q_x, v_x), x \in Z^\nu\}$. Динамика снова определяется бесконечной системой уравнений, получающейся формальным переходом $\Lambda \uparrow Z^\nu$ из системы (14.2)

$$\dot{q}_x = v_x, \;\; m\dot{v}_x = F^{(1)}(q_x) + \sum_{y \neq x} F^{(2)}(q_x, q_y). \tag{7}$$

Здесь снова возникает вопрос о выборе достаточно обширного множества начальных конфигураций $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, для которых можно построить решение системы (7) и которое было бы инвариантно относительно возникающей таким образом динамики. Эта проблема решена лишь для некоторых специальных случаев (например, для системы линейных осцилляторов). То же самое можно сказать и о динамиках U_t и U_t^* в пространствах функций и мер на Ω, которые, как и в предыдущем случае, можно изучать независимо от построения динамики T_t в пространстве конфигураций.

В пространстве Ω можно определить семейство предельных гиббсовских мер $\mu_{\beta,\mu}$ как термодинамические пределы при $\Lambda \uparrow Z^\nu$ конечных гиббсовских распределений $\mu_{\beta,\mu,\Lambda}$. Эти меры инвариантны относительно динамики U_t^*.

3. Квантовые системы. В случае бесконечной квантовой системы построение гильбертова пространства ее состояний (вместе со шредингеровской динамикой) уже не столь прозрачно, как построение пространства состояний бесконечных классических систем.

Здесь применяется два подхода—эвклидов подход, который мы кратко опишем в одном из следующих пунктов, а также подход, связанный с непосредственным построением предельной гайзенберговой динамики, исходя из конечных гайзенберговых динамик в алгебрах $\mathfrak{A}_\Lambda = \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\Lambda)(\mathcal{H}_\Lambda$— гильбертово пространство состояний конечной системы). Эта динамика определяется как группа $*$-автоморфизмов некоторой предельной алгебры $\mathfrak{A}$ — так называемой алгебры квазилокальных наблюдаемых, описанной чуть ниже. В большинстве случаев равновесные (температурные или гиббсовские) состояния на алгебрах $\mathfrak{A}_\Lambda$ (а также основные состояния на этих алгебрах) при переходе к термодинамическому пределу порождают предельные состояния (температурные или основные) на квазилокальной алгебре $\mathfrak{A}$, инвариантные относительно предельной гайзенберговой динамики в $\mathfrak{A}$. Предельное гильбертово пространство и шредингеровская динамика в нем строятся затем с помощью известной конструкции Гельфанда—Наймарка—Сигала (ГНС-конструкция), которую мы опишем в §2.1.

Перейдем теперь к описанию квазилокальной алгебры $\mathfrak{A}$. Введем эту алгебру для случая непрерывных квантовых систем, состоящих из одинаковых неразличимых частиц, скажем, бозонов. Заметим, что, как легко следует из определения (20.2), фоковское пространство $\mathcal{F}_\Lambda^{\mathrm{sym}}$ при $\Lambda = \Lambda_1 \bigcup \Lambda_2$, $\Lambda_1 \bigcup \Lambda_2 = \emptyset$, допускает естественное разложение в тензорное произведение

$$\mathcal{F}_\Lambda^{\mathrm{sym}} = \mathcal{F}_{\Lambda_1}^{\mathrm{sym}} \otimes \mathcal{F}_{\Lambda_2}^{\mathrm{sym}}. \tag{8}$$

Отсюда вытекает, что для $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ алгебра $\mathfrak{A}_{\Lambda_1} = \mathfrak{B}(\mathcal{F}_{\Lambda_1}^{\mathrm{sym}})$ гомеоморфно и изометрично вкладывается в алгебру $\mathfrak{A}_{\Lambda_2} = \mathfrak{B}(\mathcal{F}_{\Lambda_2}^{\mathrm{sym}})$:

$$\mathfrak{A}_{\Lambda_1} \to \mathfrak{A}_{\Lambda_1} \otimes \mathbf{1}_{\Lambda_2 \setminus \Lambda_1} \subset \mathfrak{A}_{\Lambda_2}, \tag{9}$$

где $\mathbf{1}_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}$—единичный оператор в пространстве $\mathcal{F}_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}^{sym}$ (сравни с формулой (27.2), задающей аналогичное выражение для случая решетчатых квантовых систем).

Таким образом, можно рассмотреть индуктивный предел $\mathfrak{A} = \bigcup \mathfrak{A}_\Lambda$ алгебр $\mathfrak{A}_\Lambda, \Lambda \subset R^\nu$, снабженный нормой $\|\cdot\|$. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется алгеброй *локальных наблюдаемых*, а ее пополнение $\bar{\mathfrak{A}}$ по норме $\|\cdot\|$—алгеброй *квазилокальных наблюдаемых*. Поскольку все алгебры $\mathfrak{A}_\Lambda$ являются C^*-алгебрами (см. ниже § 2.1) относительно операции сопряжения, такова же и предельная алгебра $\bar{\mathfrak{A}}$. Пусть далее для всех алгебр $\mathfrak{A}_\Lambda$ определены группы изометрических автоморфизмов: $\alpha_t^\Lambda : \mathfrak{A}_\Lambda \to \mathfrak{A}_\Lambda$ и пусть для каждого локального элемента $A \in \mathfrak{A}$ существует предел

$$\lim_{\Lambda \uparrow R^\nu} \alpha_t^\Lambda A = \alpha_t A \in \bar{\mathfrak{A}}. \tag{10}$$

Поскольку отображение $\alpha_t : \mathfrak{A} \to \bar{\mathfrak{A}}$ сохраняет норму, оно продолжается до изометрического автоморфизма

$$\alpha_t : \bar{\mathfrak{A}} \to \bar{\mathfrak{A}} \tag{11}$$

и совокупность таких автоморфизмов образует однопараметрическую группу—предельную динамику квазилокальной алгебры.

Точно таким же способом вводятся квазилокальная алгебра и динамика в ней для системы ферми-частиц, а также для решетчатых квантовых систем.

Как уже говорилось, гиббсовские (и основные) состояния на квазилокальной алгебре $\bar{\mathfrak{A}}$, предельные для гиббсовских состояний на допредельных алгебрах $\mathfrak{A}_\Lambda$, инвариантны относительно предельной динамики α_t на $\bar{\mathfrak{A}}$.

Исследование предельной динамики α_t вместе с гиббсовскими (и основными) состояниями на $\bar{\mathfrak{A}}$ и является главной целью нашей книги. Для этого, как уже говорилось, применяется либо так называемый эвклидов подход, либо непосредственный анализ рядов, представляющий динамику в алгебре $\mathfrak{A}$ (ряды Дайсона— Швингера). Оба эти подхода, которые мы вкратце опишем в следующих параграфах, опираются на метод кластерных разложений (см. [26]).

4. Предельные стохастические динамики. Стохастические динамики для бесконечных систем гораздо разнообразнее по своим свойствам, чем конечные динамики, и требуют по сравнению с последними более тонких средств для своего исследования. Часто их изучают (и даже строят) с помощью предельного перехода от конечных стохастических динамик. Правда, марковские цепи с локальным взаимодействием и условно-независимыми переходными распределениями (пример в конце предыдущего параграфа) определяются в бесконечном объеме непосредственно так же, как и в конечном, но если рассмотреть более общий случай таких цепей—без предположения об условной независимости, то их построение уже проводится с помощью термодинамического предельного перехода. Соответствующие примеры мы рассмотрим в § 6.1.

§ 4. Разложение гайзенберговой динамики в ряд

В предыдущих параграфах мы кратко обрисовали сюжеты, к которым относится эта книга. Теперь мы вкратце рассмотрим используемые в ней методы. Их собственно два— прямое разложение динамики в ряд и исследование этих рядов (этому и посвящен данный параграф) и так называемый эвклидов подход, который мы обсудим в следующем параграфе.

Пусть в некоторой банаховой алгебре с инволюцией $\mathfrak{A}$ действует однопараметрическая группа внутренних $*$-автоморфизмов

$$\alpha_t A = \exp\{itH\}A\exp\{itH\} \equiv F_A(t), \qquad (1)$$

где H—самосопряженный элемент $\mathfrak{A}$. Очевидно, что семейство элементов $F_A(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dF_A}{dt} = i[H, F_A(t)] \equiv i(HF_A - F_AH) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{H}F_A, \qquad (2)$$

$$F_A(0) = A,$$

где

$$\mathcal{H} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} : F \to i[H, F], \ \ F \in \mathfrak{A} \qquad (3)$$

—линейный ограниченный оператор в $\mathfrak{A}$ с нормой $\| \mathcal{H} \| \leq$ $\leq 2 \| H \|$. Решение уравнения (2) можно представить в виде

$$F_A(t) = \exp\{t\mathcal{H}\}A = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathcal{H}^n A =$$

$$= A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \underbrace{[H, [H, \ldots, [H, A]}_{n \text{ раз}} \ldots]], \qquad (4)$$

причем ряд сходится по норме алгебры $\mathfrak{A}$.

В приложениях более удобным оказывается другой ряд. Пусть $H = H_0 + V$, где H_0 и V—самосопряженные элементы $\mathfrak{A}$. Тогда

$$F_A(t) = \alpha_t^0(A) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int\limits_{0<t_1<t_2<\ldots<t_n<t} \cdots \int dt_1 \ldots dt_n \times$$

$$\times [\underbrace{\alpha_{t_1}^0(V), [\alpha_{t_2}^0(V), \ldots, [\alpha_{t_n}^0(V), \alpha_t^0(A)}_{n \text{ раз}} \ldots]], \qquad (5)$$

где $\alpha_t^0(B) = \exp\{itH_0\}B\exp\{-itH_0\}$—группа автоморфизмов, порожденная элементом $H_0 \in \mathfrak{A}$.

Для доказательства (5) обозначим

$$B_t = \alpha_{-t}^0(F_A(t)) = \exp\{-itH_0\}F_A(t)\exp\{itH_0\}. \qquad (6)$$

Отсюда

$$\frac{dB_t}{dt} = i[V_t, B_t], \qquad (7)$$

где

$$V_t = \alpha_t^0(V) = \exp\{itH_0\}V\exp\{-itH_0\},$$

и, следовательно,

$$B_t = B_0 + i\int^t [V_s, B_s]ds =$$

$$= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int\limits_{0<s_n<s_{n-1}<\ldots<s_1<t} \cdots \int ds_1 \ldots ds_n \times$$

$$\times [V_{s_1}, [V_{s_2}, \ldots, [V_{s_n}, B_0] \ldots]]. \qquad (8)$$

Применяя к последней формуле автоморфизм α_t^0 и делая замену $s_i = t - t_i, i = 1, \ldots, n$, получаем (5), поскольку $B_0 = A$.

Заметим, что наши формулы применимы и в случае любой банаховой алгебры Ли с умножением $[\cdot,\cdot]$. При этом под $\alpha_t^0(B)$ следует понимать решение уравнения

$$\frac{dB_t}{dt} = i[H_0, B_t], \quad B_{t=0} = B. \qquad (9)$$

В частности, при изучении классических систем используют в качестве алгебры $\mathfrak{A}$ алгебру Ли гладких функций на симметрическом многообразии, в которой умножение $[\cdot,\cdot]$ задается скобками Пуассона; в локальных координатах $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots$ $\ldots, p_n)$ эта операция имеет вид

$$i[H, F] \equiv \{H, F\} = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i} \right).$$

Приведенные в формулах (4), (5) ряды для разложения динамики формально применимы и к случаю группы $*$-автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной каким-нибудь симметрическим дифференцированием в алгебре $\mathfrak{A}$. Напомним, что так называют любой оператор δ, определенный на всюду плотной $*$-подалгебре $D_\delta : \delta : D_\delta \to \mathfrak{A}$ и такой, что

1) $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B), A, B \in D_\delta$,

2) $\delta(A^*) = (\delta(A))^*$.

В частности, введенный выше оператор $\mathcal{H}$ является симметрическим дифференцированием.

Действие группы α_t^δ $*$-автоморфизмов в $\mathfrak{A}$, соответствующей дифференцированию δ:

$$A \to \alpha_t^\delta(A) \equiv F_A(t)$$

определяется как решение уравнения

$$\frac{dF_A(t)}{dt} = \delta(F_A(t)), \quad F_A(t=0) = A$$

(подробнее см. в книге [7]).

Формальные ряды для автоморфизма α_t^δ применимы иногда и в случае, когда дифференцирование δ в $\mathfrak{A}$ имеет более общий вид, чем $[H,\cdot], H \in \mathfrak{A}$. В этом случае их, возможно, надо рассматривать на каком-нибудь всюду плотном подмножестве элементов из $\mathfrak{A}$, а их сходимость понимать в каком-нибудь слабом смысле.

§ 5. Эвклидов подход

Задача спектрального анализа операторов шредингеровской динамики $U_t = \exp\{itH\}$ равносильна такой же задаче для оператора H либо для полугруппы операторов $\exp\{-tH\}$. Эта полу- группа во многих случаях допускает очень наглядное вероятностное представление, известное под названием "формулы Фейнмана—Каца". Такое представление позволяет применить кластерные разложения для изучения спектра оператора $\exp\{-tH\}$; этому посвящена глава 3. Здесь мы опишем само это вероятностное представление $\exp\{-tH\}$ для очень простых примеров. Более общие случаи осуждаются в главе 3.

1. Старая формула Фейнмана-Каца. Общая схема вывода формулы Фейнмана—Каца такова. Пусть (S, ν)— некоторое пространство с вероятностной мерой ν и самосопряженный оператор H, действующий в пространстве $L_2(S, \nu)$, имеет вид

$$H = H_0 + \hat{V},$$

где $\hat{V}$— оператор умножения на ограниченную функцию $V(x)$, $x \in S$, а H_0— самосопряженный оператор, для которого полугруппа $\exp\{-tH_0\}$ оказывается стохастической полугруппой. Более точно: пусть действие $\exp\{-tH_0\}$ представляется в виде

$$(\exp\{-tH_0\}f)(x) = \int\limits_S P_t(x, y) f(y) d\nu(y),$$

$$x \in S, \ f \in L_2(S, d\nu), \qquad (1)$$

где $P_t(x, y)$—плотность (относительно меры ν) переходной вероятности (перейти из x в y) за время t некоторого марковского процесса $(\xi_t, t > 0)$ со значениями в множестве S. Обозначим $Q_t(x, y)$ ядро оператора $\exp\{-tH_0 + \hat{V}\}$

$$(\exp\{-tH_0+\hat{V}\}f)(x)=\int_S Q_t(x,y)f(y)d\nu(y). \qquad (2)$$

Формула Фейнмана—Каца выражает $Q_t(x,y)$в виде некоторого среднего по процессу $\{\xi_t,\ t>0\}$.

Ограничимся далее для простоты лишь случаем конечного множества S. Заметим, что требование стохастичности полугруппы $\exp\{-tH_0\}$ приводит к следующим условиям относительно матрицы

$$H_0=\{h^0_{x,y}\}_{x,y\in S}:$$

$$h^0_{x,y}\le 0 \text{ при } x\ne y,\ \sum_{y\in S}h^0_{x,y}=0 \text{ для всех } x. \qquad (3)$$

Воспользуемся далее формулой Троттера (см. [36]):

$$\exp\{-t(H_0+\hat{V})\}=\lim\nolimits_{n\to\infty}(\exp\{-\tfrac{t}{n}H_0\}\exp\{-\tfrac{t}{n}\hat{V}\})^n \qquad (4)$$

и обозначим $\{Q_t^{(n)}(x,y)\}_{x,y\in S}$ матрицу оператора $(\exp\{-\frac{t}{n}H_0\}\times$ $\times\exp\{-\frac{t}{n}\hat{V}\})^n$. Очевидно, что (при $x=x_0, y=x_n$):

$$Q_t^{(n)}(x,y)=\underbrace{\int\int}_{(n-1)\text{ раз}}\exp\left\{-\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}V(x_i)\right\}P_{t/n}(x_0,x_1)\dots$$

$$\dots P_{t/n}(x_{n-1},x_n)d\nu(x_1)\dots d\nu(x_{n-1})=$$

$$=\left\langle\exp\left\{-\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}V(x_i)\right\}\right\rangle^{(n)}_{t,x,y}. \qquad (5)$$

Среднее $\langle\ \rangle^n_{t,x,y}$ имеет следующий смысл. Обозначим $x_k=\xi^x_{tk/n}$, $k=0,1,\dots,n$, марковскую цепь, начинающуюся в точке $x: x_0=x$, с дискретным временем $0,t/n,\dots,tk/n,\dots,t$ и переходными вероятностями $P_{t/n}(x,y)d\nu$. Тогда усреднение $\langle\ \rangle^n_{t,x,y}$ означает среднее по условной (ненормированной!) мере на множестве $\Omega^{(n)}_{t,x,y}$ тех траекторий $x_0,x_1,\dots,x_n$ нашей цепи, у которых $x_n=y$.

В пределе $n\to\infty$ в силу (5) получаем следующее представление для матрицы $Q_t(x,y)$ оператора $\exp\{-t(H+\hat{V})\}$ (*формула Фейнмана—Каца*):

$$Q_t(x,y)=\left\langle\exp\left\{-\int_0^t V(\xi_\tau)d\tau\right\}\right\rangle_{t,x,y}, \qquad (6)$$

где усреднение $\langle\ \rangle_{t,x,y}$происходит по условной (по-прежнему ненормированной!) мере на множестве $\Omega_{t,x,y}$ тех траекторий $\{x(\tau),0<\tau<t\}$ марковского процесса $\{\xi^x_\tau,0<\tau<t\}$, начинающегося в точке x ($\xi^x_0\equiv x$), которые в момент времени $\tau=t$ попадают в $y: x(t)=y$.

Из (6) вытекает следующее представление для действия оператора $\exp\{-t(H_0+\hat{V})\}$:

$$(\exp\{-t(H_0+\hat{V})\}f)(x)=\int_S f(y)d\nu(y)\left\langle\exp\left\{-\int_0^t V(\xi_\tau)d\tau\right\}\right\rangle_{t,x,y}=$$

$$=\left\langle\exp\left\{-\int_0^t V(\xi_\tau)d\tau\right\}f(\xi_t)\right\rangle_{t,x}, \qquad (7)$$

где $\langle\ \rangle_{t,x}$—среднее по всем траекториям марковского процесса $\{\xi^x_\tau,0<\tau<t\}$. Аналогично этому матричные элементы оператора $\exp\{-t(H_0+\hat{V})\}$ равны

$$(\exp\{-t(H_0+V)\}f,g)=$$

$$=\int_S \bar{g}(x)\left\langle\exp\left\{-\int_0^t V(\xi_\tau)d\tau\right\}f(\xi_t)\right\rangle_{t,x}d\nu(x). \qquad (8)$$

2. Перенормированная формула Фейнмана—Каца—Нельсона. В формуле (6) при изменении x,y,t меняется множество $\Omega_{x,y,t}$, по которому происходит усреднение. В новой формуле усреднение проводится по траекториям одного и того стационарного марковского процесса. А именно, предположим, что введенный выше марковский процесс ξ_t с плотностью переходных вероятностей $P_t(x,y)$ (из x в y за время t) (и с инфинитезимальным оператором H_0) является стационарным марковским процессом, определенным для всех $t\in R^1$, а мера ν на S—его инвариантным распределением.

Тогда из формулы (8) находим, что

$$(1,\exp\{-2t(H_0+V)\}1)=\left\langle \exp\left\{-\int\limits_{-t}^{t} V(\xi_\tau)d\tau\right\}\right\rangle_0 \overset{\text{def}}{=} Z_{2T}, \tag{9}$$

где $(\cdot,\cdot)$—скалярное произведение в $L_2(S,\nu)$, а среднее $\langle\ \rangle_0$ берется по распределению μ_0 стационарного процесса $\{\xi_t, t\in R^1\}$. Определим новую меру μ_T равенством

$$\frac{d\mu_T}{d\mu_0}=Z_{2T}^{-1}\exp\left\{-\int\limits_{-T}^{T}V(\xi_\tau)d\tau\right\}. \tag{10}$$

Тогда для любых функций F,G, заданных на множестве S и любого момента $t_0 : 0\le t_0<T$ среднее

$$\begin{aligned}
\langle F(\xi_0)G(\xi_{t_0})\rangle_{\mu_T} &\overset{\text{def}}{=} Z_{2T}^{-1}\left\langle F(\xi_0)G(\xi_{t_0})\exp\left\{-\int\limits_{-T}^{T}V(\xi_\tau)d\tau\right\}\right\rangle_0 = \\
&= Z_{2T}^{-1}\int\left\langle\exp\left\{-\int\limits_{-T}^{0}V(\xi_\tau)d\tau\right\}\right\rangle_{x_{-T},x_0,T} F(x_0)\times \\
&\times\left\langle\exp\left\{-\int\limits_{-0}^{t_0}V(\xi_\tau)d\tau\right\}\right\rangle_{x_0,x_{t_0},t_0} G(x_{t_0})\times \\
&\times\left\langle\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{T}V(\xi_\tau)d\tau\right\}\right\rangle_{x_{t_0},x_T,T-t_0} d\nu(x_{-T})d\nu(x_0)d\nu(x_{t_0})d\nu(x_T)= \\
&= Z_{2T}^{-1}(1,\exp\{-T(H_0+\hat V)\}\hat F\exp\{-t_0(H_0+\hat V)\}\hat G\times \\
&\times\exp\{-(T-t_0)(H_0+\hat V)\}1)= \\
&= Z_{2T}^{-1}(\exp\{-T(H_0+\hat V)\}1,\hat F\exp\{-t_0(H_0+\hat V)\}\hat G\times \\
&\times\exp\{-(T-t_0)(H_0+\hat V)\}1),
\end{aligned} \tag{11}$$

где $\hat F$ и $\hat G$ обозначены операторы умножения на функцию $F(x)$ и $G(x)$ соответственно, а $(\cdot,\cdot)$—скалярное произведение в $L_2(S,\nu)$. Обозначим $\Omega_0(x)$ нормированный собственный вектор оператора H_0+V с наименьшим простым и изолированным собственным значением λ_0. Тогда очевидно, что при $T\to\infty$ верна асимптотика

$$\exp\{-T(H_0+\hat V)\}1=\exp\{-\lambda_0T\}(\Omega_0(1,\Omega_0)+o(1)), \tag{12}$$

а выражение в (11) имеет асимптотический вид

$$\begin{aligned}
&(\exp\{-T(H_0+\hat V)\}1,\hat F\exp\{-t_0(H_0+\hat V)\}\hat G\exp\{-(T-t_0)(H_0+\hat V)\}1)= \\
&\qquad=\exp\{-\lambda_0(2T-t_0)\}\times \\
&\qquad\times[(\Omega_0,\hat F\exp\{-t_0(H_0+\hat V)\}\hat G\,\Omega_0)\mid(1,\Omega_0)\mid^2+o(1)].
\end{aligned} \tag{13}$$

С другой стороны, при $F=G=1$ получаем, что

$$\begin{aligned}
Z_{2T}&=\exp\{-2\lambda_0T\}((\Omega_0,\Omega_0)\mid(1,\Omega_0)\mid^2+o(1))= \\
&=\exp\{-2\lambda_0T\}(\mid(1,\Omega_0)\mid^2+o(1)).
\end{aligned} \tag{14}$$

И, таким образом, существует предел

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\langle F(\xi_0)G(\xi_{t_0})\rangle_{\mu_T}=\langle F(\xi_0)G(\xi_{t_0})\rangle_\mu= \\
&\qquad=(\hat F\Omega_0,\exp\{-t_0(H_0+\hat V-\lambda_0E)\}\hat G\,\Omega_0),
\end{aligned} \tag{15}$$

где $\langle\ \rangle_\mu$—среднее по предельной гиббсовской мере

$$\mu=\lim_T\mu_T. \tag{16}$$

Второе равенство в (15) называется *перенормированной формулой Фейнмана—Каца— Нельсона*.

При условии, что $\Omega_0(x)>0$ при всех x, из полученных формул вытекает, что мера μ является распределением стационарного марковского процесса $\{\eta_t,-\infty<t<\infty\}$ с инвариантной мерой $\hat\nu$, определяемой формулой

$$d\hat\nu=\Omega_0^2(x)d\nu \tag{17}$$

и плотностью переходных вероятностей $\hat P_t(x,y)$ (относительно инвариантной меры $\hat\nu$)

$$\hat P_t(x,y)=\Omega_0^{-1}(x)\exp\{\lambda_0t\}Q_t(x,y)\Omega_0^{-1}(y),$$

где $Q_t(x,y)$—ядро оператора $\exp\{-t(H_0+\hat V)\}$ (см. (2)). Ядро $\hat P_t(x,y)$ задает полугруппу

$$(\mathcal{J}_tf)(x)=\int\hat P_t(x,y)f(y)d\hat\nu(y),\ \ t>0, \tag{18}$$

в пространстве $L_2(S,\hat{\nu})$ с производящим оператором $\hat{H}$: $\mathcal{J}_t = \exp\{-t\hat{H}\}$. Из формулы (17) следует, что отображение

$$U : L_2(S,\hat{\nu}) \to L_2(S,\nu) : f \to \Omega_0 f \qquad (19)$$

является унитарным. Тогда из формулы (15), переписанной в виде

$$(F, \exp\{-t\hat{H}\}G)_{L_2(S,\hat{\nu})} = (UF, \exp\{-t(H_0 + \hat{V} - \lambda_0 E)\}UG)_{L_2(S,\nu)},$$

получаем, что

$$\hat{H} = U^{-1}(H_0 + \hat{V} - \lambda_0 E)U,$$

т. е. операторы $\hat{H}$ и $(H_0+\hat{V}-\lambda_0 E)$ унитарно-эквивалентны. Таким образом, спектральный анализ оператора $H_0+\hat{V}$ сводится к спектральному анализу для $\hat{H}$.

Заметим, что формула Фейнмана—Каца верна в довольно общей ситуации, когда мера ν на S является произвольной σ-конечной мерой. Для справедливости перенормированной формулы Неймана—Каца—Нельсона требуется, как мы видели, чтобы мера ν была инвариантной вероятностной мерой для стационарного процесса ξ_t, а также существовало бы основное состояние Ω_0 у оператора $H_0 + \hat{V}$ с изолированным простым собственным значением

$$\lambda_0 = \inf \sigma(H_0 + \hat{V}).$$

Применение эвклидова подхода к изучению более сложных систем (скажем, квантовой теории поля) будет описано в § 5.2. Здесь мы рассмотрим некоторые простые примеры, используемые в дальнейшем.

I. Рассмотрим сначала гамильтониан линейного квантового осциллятора

$$Hf = -\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} f, \;\; f \in L_2(R^1, dx), \qquad (20)$$

действующий в $L_2(R^1, dx)$. Известно, что основным состоянием этого оператора является собственный вектор

$$\operatorname{const} \exp\left\{-\frac{\omega x^2}{2}\right\} \qquad (21)$$

с собственным значением $\omega/2$.

Введем теперь гауссово распределение с плотностью

$$p(x) = \sqrt{\omega/\pi}\exp\{-\omega x^2\} \qquad (22)$$

и совершим унитарное отображение

$$U : L_2(R^1, dx) \to L_2(R^1, pdx), \;\; f \to (p(x))^{-1/2} f.$$

Легко подсчитать, что оператор $\tilde{H} = H - \frac{E\omega}{2}$ перейдет при этом отображении в самосопряженный оператор в $L_2(R^1, pdx)$

$$\tilde{H}f = UHU^{-1}f = -\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2} + \omega x \frac{df}{dx}. \qquad (23)$$

Этот оператор является инфинитезимальным оператором марковского стационарного гауссова процесса $\{\xi_t,\ t \in R^1\}$ со средним нуль, ковариацией

$$\langle \xi_{t_1}, \xi_{t_2}\rangle = \frac{1}{2\omega}\exp\{-\omega \mid t_1 - t_2 \mid\} \qquad (24)$$

и плотностью стационарного распределения, равной (22) (процесс Орнштейна—Уленбека).

II. Рассмотрим теперь систему из n взаимодействующих квантовых гармонических одномерных осцилляторов с гамильтонианом

$$Hf = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}(\sum a_{ij}x_i x_j)f, \qquad (25)$$

действующим в $L_2(R^n, d^n x)$. Квадратичная форма $\sum a_{ij}x_i x_j$ с матрицей $A = \{a_{ij}\}$ предполагается строго положительной.

Снова можно показать, что оператор $H - \lambda_0 E$ (λ_0— наименьшее собственное значение H) унитарно эквивалентен инфинитезимальному оператору $\tilde{H}$, марковского гауссова стационарного процесса $\xi_t = \{\xi_t^{(i)}, i = 1,\ldots,n, t \in R^1\}$ со средним нуль и матрицей ковариаций

$$\{\langle \xi_{t_1}^{(i)}\xi_{t_2}^{(j)}\rangle\} = \frac{1}{2}A^{-1/2}\exp\{-A^{-1/2} \mid t_1 - t_2 \mid\} \qquad (26)$$

(многомерный процесс Орнштейна—Уленбека). Плотность инвариантной меры этого процесса равна

$$p(x) = \frac{(Det A)^{1/4}}{\pi^{1/2}}\exp\{-A^{1/2}x, x\}, \qquad (27)$$

где $(\cdot,\cdot)$—скалярное произведение в R^n.

Оператор $\tilde{H}$ действует в пространстве $L_2(R^n, p(x)d^n x)$ по формуле

$$\tilde{H} f = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \left(A^{1/2}x, \frac{\partial}{\partial x}\right) f, \tag{28}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

III. В случае системы ангармонических осцилляторов с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}\left(\sum a_{ij}x_i x_j\right) f + V(x_1, \dots, x_n) f, \tag{29}$$

где $V(x_1, \dots, x_n)$—ограниченная снизу функция от переменных $x_1, \dots, x_n$, оператор $H - \lambda_0 E$ (λ_0—наименьшее собственное значение H) унитарно эквивалентен инфинитезимальному оператору процеса $\xi_t = \{\xi_t^{(i)}, i = 1, \dots, n, t \in R^n\}$, распределение μ которого получается как предельная гиббсовская перестройка (см. (10) и (16)) гауссовой меры μ_0 (распределения процесса Орнштейна— Уленбека) с помощью "взаимодействия"

$$\int_{-T}^{T} V(x(\tau))d\tau.$$

Замечание. Весь предыдущий анализ можно получить с помощью чисто формального эвристического приема, которым обычно пользуются физики и который позволяет быстрее достичь окончательного ответа. Функционал действия для классического одномерного линейного осциллятора имеет вид

$$S(x(\tau)) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [\dot{x}^2(\tau) - \omega^2 x^2(\tau)]d\tau, \tag{30}$$

где $x(\tau)$—гладкая траектория, стремящаяся на бесконечности к нулю. Переходя формально к мнимому времени $\tau \to i\tau$, мы получим, что действие примет вид

$$S(x(\tau)) = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [\dot{x}^2(\tau) + \omega^2 x^2(\tau)]d\tau =$$

$$= -iS_{\text{эвкл}}(x(\tau)) = -\frac{i}{2}(Bx, x), \tag{31}$$

где $(\cdot,\cdot)$—скалярное произведение в $L_2(R^2, dx)$, а B—самосопряженный оператор

$$Bx = -\frac{d^2x}{d\tau^2} + \omega^2 x. \tag{32}$$

Нетрудно подсчитать, что ядро оператора B^{-1} равно

$$B^{-1}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\omega}\exp\{-\omega \mid \tau - \sigma \mid\}, \tag{33}$$

т. е. совпадает с ковариационной функцией (24) процесса Орнштейна—Уленбека. Таким образом, на эвристическом уровне рассуждений функционал

$$\text{const}\exp\{-S_{\text{эвкл}}(x(\tau))\} = \text{const}\exp\left\{-\frac{1}{2}(Bx, x)\right\} \tag{34}$$

по формальной аналогии со случаем конечномерного гауссова распределения можно понимать как "плотность распределения" значений процесса $\{\xi_t, t \in R^1\}$ относительно "меры $\prod_{\tau} dx(\tau)$". Эти же соображения применимы и к случаю многомерного процесса Орнштейна—Уленбека, для которого эвклидово действие $S_{\text{эвкл}}^{\text{гарм}}$ имеет вид

$$S_{\text{эвкл}}^{\text{гарм}}(x(\tau)) = \frac{1}{2}(Bx, x), \tag{35}$$

где $x(\tau) = \{x_i(\tau), i = 1, \dots, n\}$, а оператор B равен

$$Bx = -\frac{d^2x}{d\tau^2} + Ax, \tag{36}$$

а $A = \{a_{ij}\}$—матрица квадратичной формы в (25).

В случае системы ангармонических осцилляторов эвклидово действие

$$S_{\text{эвкл}}^{\text{ангарм}} = S_{\text{эвкл}}^{\text{гарм}} + \int_{-\infty}^{\infty} V(x(\tau))d\tau, \tag{37}$$

где $V(x_1, \dots, x_n)$—функция, входящая в выражение (29). Рассматривая функционал $\exp\{-S_{\text{эвкл}}^{\text{ангарм}}\}$ как "плотность" распределения μ марковского процесса, соответствующего ангармоническим осцилляторам, относительно "меры $\prod_\tau dx(\tau)$" и учитывая, что $\exp\{-S^{\text{гарм}}_{\text{эвкл}}\}$ образует "плотность" для процесса Орнштейна—Уленбека, получим формально, что

$$d\mu = \text{const}\exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} V(x(\tau))d\tau\right\} d\mu_0, \tag{38}$$

где μ_0—распределение процесса Орнштейна-Уленбека. Эта эвристическая формула уже нуждается лишь в небольшой поправке—замене $\int_{-\infty}^{\infty} V(x(\tau))d\tau$ интегралом $\int_{-T}^{T} V(x(\tau))d\tau$ с последующим предельным переходом $T \to \infty$, чтобы стать точной формулой.

Описанный здесь формальный прием позволяет сразу перейти к окончательным формулам (10) и (16), используя лишь вид (эвклидова) действия для соответствующей классической системы.

§6. Корпускулярная картина (картина квазичастиц и теория рассеяния для бесконечных квантовых систем)

В этом заключительном параграфе мы кратко охарактеризуем основную программу и цели той области математической физики, которой посвящена наша книга.

Для квантовой системы, состоящей из n одинаковых свободных (т. е. невзаимодействующих) частиц, гильбертово пространство $\mathcal{H}_n$ ее состояний представляется в виде тензорной степени (симметризованной или антисимметризованной в случае неразличимых частиц) одночастичного пространства $\mathcal{H}_1 = \mathfrak{f}$, описывающего состояния отдельной частицы

$$\mathcal{H}_n = \mathfrak{f}^{\otimes n} \;(\text{ или } \mathcal{H}_n = \mathfrak{f}_a^{\otimes n}, a = \text{sym}, \text{asym}), \tag{1}$$

а оператор энергии $\mathcal{H}_n$ этой суммы является тензорной суммой

$$H_n = H_1 + \cdots + H_n \tag{2}$$

операторов $H_k = \underbrace{\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes h}_{k\text{—е место}}\otimes\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}$, где h —оператор энергии отдельной частицы, действующий в $\mathfrak{f}$.

В случае, когда рассматривается система из произвольного конечного числа одинаковых частиц, пространство ее состояний $\mathcal{H}$, а также оператор энергии H представляются как прямые суммы

$$\mathcal{H} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n \quad (\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^1) \tag{3}$$

и

$$H = \oplus_{n=0}^{\infty}H_n \quad (H_0 = 0) \tag{4}$$

n-частичных пространств $\mathcal{H}_n$ и соответственно операторов H_n.

В случае, когда отдельная частица обладает некоторой группой симметрии G, т. е. в пространстве $\mathfrak{f}$ действует унитарное представление $\{g \to u_g, g \in G\}$ этой группы, коммутирующее с оператором h, тензорная степень этого представления порождает унитарное представление группы $\{u_g^{(n)}, g \in G\}$ в $\mathcal{H}_n$, а прямая сумма представлений $u_g^{(n)}$—полное представление $\{u_g, g \in G\}$ в $\mathcal{H}$, коммутирующее с оператором H. Оказывается, что многие пространственно-однородные бесконечные физические системы, описываемые векторами гильбертова пространства $\hat{\mathcal{H}}$, действующим в нем оператором энергии $\hat{H}$ и представлением $\{\hat{U}_x, x \in R^\nu\}$ группы пространственных сдвигов R^ν (или ее подгруппы Z^ν), также действующим в $\mathcal{H}$, можно рассматривать как систему невзаимодействующих частиц ("квазичастиц" или "элементарных возбуждений"). Точно это означает, что найдутся одночастичное гильбертово пространство $\mathfrak{f}$ и одночастичный оператор h энергии в $\mathfrak{f}$ и представление группы $R^\nu : x \to u_x, x \in R^\nu$ в $\mathfrak{f}$ такие, что тройка $(\mathcal{H}, \hat{H}, \{\hat{U}_x\})$ унитарно-эквивалентна пространству $\mathcal{H}$, оператору H и представлению $\{u_x, x \in R^\nu\}$ в $\mathcal{H}$, построенным по одночастичной тройке $(\mathfrak{f}, h, \{U_x\})$ с помощью формул (1)–(4).

В общем случае такое представление заведомо неверно: во-первых, из-за того, что возможны "квазичастицы" разных типов, а во-вторых, из-за так называемых связанных состояний, т. е. комплексов (кластеров) квазичастиц, движущихся как единое целое. Формально эти комплексы можно считать новыми квазичастицами. Таким образом, мы можем рассмотреть обобщение описанной выше конструкции на случай нескольких сортов частиц. Пусть задан конечный набор троек $\{\mathfrak{f}_i, h_i, \{u_x^{(i)}\}\}$, $i = 1, \dots, s$, каждая из которых описывает свою "квазичастицу". Образуем далее тройки

$$\mathcal{H}^{(i)} = \otimes_{n=0}^{\infty} \mathfrak{f}_i^{\otimes n},$$

$$H^{(i)} = \otimes_{n=0}^{\infty} \underbrace{(h^{(i)} + \cdots + h^{(i)})}_{n-\text{кратная тензорная сумма } h^{(i)}}$$

$$u_x^{(i)} = \otimes_{n=0}^{\infty} (u_x^{(i)})^{\otimes n}, \ x \in R^{\nu},$$

описывающих "газ" из квазичастиц одного и того же сорта и, наконец, полное пространство, полный гамильтониан и полное представление

$$\mathcal{H} = \otimes_{i=1}^{s} \mathcal{H}^{(i)},$$

$$H = \underbrace{(H^{(1)} + \cdots + H^{(s)})}_{\text{тензорная сумма}},$$

$$u_x = \otimes_{i=1}^{s} (u_x^{(i)}), \ x \in R^{\nu}.$$

Правдоподобна гипотеза, что любая пространственно однородная система представляет собой такую смесь "газов" из нескольких сортов квазичастиц в указанном выше смысле. В настоящее время эта гипотеза установлена лишь для очень небольшого класса моделей. Отметим, что главное средство для проверки такой гипотезы доставляет теория рассеяния. Обычно гамильтониан системы $\hat{H}$ имеет вид

$$\hat{H} = H_0 + V,$$

где оператор H_0 описывает свободную систему невзаимодействующих частиц, а возмущение V в некотором смысле мало. Тогда во многих случаях существуют волновые операторы (операторы Меллера)

$$W_{\pm} = s - \lim_{t \to \pm} e^{-iH_0 t} e^{iHt},$$

$$W_{\pm}^{*} = s - \lim_{t \to \pm} e^{-iHt} e^{iH_0 t}$$

($s - \lim$ означает сильный предел операторов, см. [36]). Отсюда следует, что операторы $\hat{H}$ и H_0 унитарно-эквивалентны и эта эквивалентность достигается с помощью любого из операторов $W_{\pm}$ (или $W_{\pm}^{*}$).

В более общем случае, когда оператор $\hat{H}$ не унитарно-эквивалентен H_0 из-за наличия связанных состояний, следует построить с помощью этих связанных состояний большее пространство $\hat{\mathcal{H}}$ и гамильтониан $\overline{H}_0$, которые описывали бы "газы" как исходных свободных частиц, так и связанных состояний (в том смысле, как говорилось выше). Доказательство унитарной эквивалентности гамильтониана $\overline{H}_0$—эта задача обычно называется проблемой об *асимптотической полноте* $\overline{H}$—снова сводится к построению волновых операторов, действующих уже в разных пространствах (см. [36]).

Подводя итог всему, что говорилось в этой вводной части, можно сказать, что исследование бесконечной системы складывается из следующих последовательных шагов:

1) построения динамики бесконечной системы (либо с помощью эвклидова подхода, либо непосредственным построением предельной гайзенберговой динамики);

2) нахождения одночастичных подпространств (включая "связанные состояния") для гамильтониана предельной динамики;

3) построения волновых операторов и доказательства асимптотической полноты.

Полностью эта программа, как уже говорилось, осуществлена для очень небольшого числа моделей, но отдельные ее части выполнены для широкого класса примеров, которые и составляют содержание нашей книги.

ГЛАВА 1

ПОСТРОЕНИЕ НЕРАВНОВЕСНОЙ ДИНАМИКИ

Неравновесная динамика—не очень удачное, но устоявшееся название для эволюции какой-нибудь системы "самой по себе", определенной для всех ее начальных состояний (или достаточно обширного их подмножества) и никак непосредственно не связанной с "равновесными распределениями" на множестве этих состояний.

Мы разбираем здесь три типа таких динамик: 1) динамику бесконечного (неидеального) классического газа; 2) гайзенбергову динамику в C^*-алгебрах, связанных с бесконечными квантовыми системами; 3) случайную динамику для полей на бесконечной решетке. Попутно здесь приводятся некоторые сведения учебного характера (C^*-алгебры, пространства Фока, формализм вторичного квантования и т. д.).

§ 1. Динамика бесконечного одномерного классического газа взаимодействующих твердых стержней

В предыдущей главе мы упомянули о динамике бесконечной системы взаимодействующих частиц в пространстве R^{ν}. Здесь мы более подробно опишем эту динамику для одномерного газа частиц с "твердой сердцевиной" (система "твердых стержней").

В одномерном случае состояние такой системы задается бесконечной последовательностью пар $\{q_i, v_i\}$, занумерованных так, что

$$\ldots < q_{-1} < q_0 < q_1 < \ldots, \tag{1}$$

причем для определенности нумерации полагаем, что

$$q_0 \geq 0, \;\; q_{-1} < 0 \tag{2}$$

(напомним, что q_i—положение центра i-го стержня, а v_i— его скорость). Кроме того, выполнены условия

$$\delta \leq q_{i+1} - q_i, \;\; i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3}$$

Отметим, что условие (2) мы будем предполагать выполненным лишь для начальных конфигураций, так как при дальнейшей эволюции частиц оно, вообще говоря, нарушается. Обозначим Ω пространство всех состояний бесконечной системы.

Формально динамика в Ω, как мы уже говорили, задается бесконечной системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = v_i, \;\; m\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j \neq i} F(q_i - q_j), \tag{4}$$

где $F(\xi) = -\partial U / \partial \xi$, а $U(\xi) = U(-\xi)$—потенциал взаимодействия, определенный для всех $\xi \geq \delta$. Мы предположим, что

1) потенциал $U(\xi)$ финитен:

$$U(\xi) = 0 \text{ при } \mid \xi \mid > R, \tag{5}$$

где $R > \delta$—радиус взаимодействия,

2) функция $U(\xi)$ на отрезке $\delta \leq \xi \leq R$ непрерывно дифференцируема.

Уравнения (4), как мы уже обсуждали в § 2.0, следует дополнить условием "упругого отражения" при столкновении конечного числа стержней. Для построения динамики с помощью системы уравнений (4), как уже объяснялось в § 3.0, следует выделить подмножество $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ таких начальных условий

$$\omega^0 = \{(q_i, v_i), \;\; i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

при которых решение системы корректно определено при всех значениях $0 \leq t < \infty$ и это решение

$$\omega^t = \{(q_i^t, v_i^t)\} \in \tilde{\Omega}.$$

Введем теперь множество состояний $M(C_1, C_2) \subset \Omega$, где $C_1 > 0, C_2 > 0$—произвольные константы, определяемые следующими условиями: для каждого $\omega^0 = \{(q_i^0, v_i^0)\} \in \tilde{\Omega}$ найдется такое $\bar{k} = \bar{k}(\omega^0)$, что для любого $k > \bar{k}(\omega^0)$ выполнено:

$$1) \max_{|i| < 2^k} \mid v_i^0 \mid < C_1 \sqrt{k}, \tag{6}$$

2) найдутся такие номера i_k^- и i_k^+

$$2^k \le i_k^+ < 2^{k+1}, \ -2^{k+1} < i_k^- \le -2^k,$$

что

$$| q_{i^\pm_{k+1}} - q_{i^\pm_k} |> C_2 k. \qquad (7)$$

Покажем, что для любого $\omega^0 \in M(C_1,C_2)$ корректно определено решение ω^t системы (4) при всех $t : 0 \le t < \infty$. Пусть $T > 0$ и $\bar{\bar{k}}(\omega_0) > \bar{k}(\omega_0)$—некоторое целое число, которое мы укажем ниже. Разобьем все частицы в состоянии ω^0 на конечные группы η_s^0 подряд идущих частиц (кластеры) следующим образом:

Нулевой кластер η_0^0 составляют все частицы с номерами

$$i^-_{\bar{\bar{k}}} \le i < i^+_{\bar{\bar{k}}}.$$

Кластер η_s^0 с номером $s > 0$ составляют частицы с номерами

$$i^+_{\bar{\bar{k}}+s-1} \le i < i^+_{\bar{\bar{k}}+s},$$

а в кластер η_s^0 с номером $s < 0$ входят частицы

$$i^-_{\bar{\bar{k}}+|s|} \le i < i^-_{\bar{\bar{k}}+|s|-1}.$$

В силу условия (7) промежуток между s-м и $(s+1)$-м (или $(s-1)$-м) кластером не меньше, чем

$$C_2(| s | + \bar{\bar{k}}). \qquad (8)$$

Определим далее решение системы уравнений (4) с начальным условием $\omega^0 \in M(C_1,C_2)$ на отрезке $t \in [0,T]$ следующим образом. Пусть каждый кластер $\eta_s^0 \subset \omega^0$, входящий в ω^0, движется в течение промежутка времени $[0,T]$, подчиняясь лишь конечной системе уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = v_i, \ m\frac{dv_i}{dt} = \sum_j F(q_i - q_j),$$

$$\{q_i, v_i\} \in \eta_s^t, \ \eta_s^{t=0} = \eta_s \qquad (9)$$

(вместе с условиями упругого отражения) и полностью игнорируя другие кластеры. При таком движении apriori частицы из разных кластеров могли бы попасть в зону взаимодействия

и тогда бы совокупное движение всех кластеров не подчинялось бы системе (4). Однако такого случиться не может.

Лемма 1. *При достаточно большом $\bar{\bar{k}} > \bar{k}(\omega_0)$ при описанном выше движении кластеров расстояние между ними остается большим, чем R.*

Доказательство. Начальная скорость любой частицы из s-го кластера не превосходит

$$C_1\sqrt{\bar{\bar{k}} + | s | + 1}.$$

Сила, действующая на любую частицу в силу условий 1) и 2) относительно потенциала, не превосходит по абсолютной величине некоторой константы $D = D(U,\delta)$, и, таким образом, скорость частицы из s-го кластера на всем промежутке времени $[0,T]$ не превосходит

$$C_1\sqrt{\bar{\bar{k}} + | s | + 1} + DT$$

(при обмене скоростями в момент столкновения стержней максимальная скорость частиц из кластера не меняется). Таким образом, частицы из соседних кластеров η_s^0 и η_{s+1}^0 могут пройти навстречу друг другу расстояние, не большее

$$(C_1\sqrt{\bar{\bar{k}} + | s | + 1} + DT)T + (C_1\sqrt{\bar{\bar{k}} + s + 2} + DT)T.$$

Однако при достаточно большом $\bar{\bar{k}}$ и для всех s

$$(C_1\sqrt{\bar{\bar{k}} + | s | + 1} + DT)T + (C_1\sqrt{\bar{\bar{k}} + | s | + 2} + DT)T <$$

$$< C_2(\bar{\bar{k}} + | s |) - R,$$

что в силу (8) и означает утверждение леммы.

Таким образом, определенное нами движение всех частиц на промежутке $(0,T)$ с начальным условием $\omega^0 \in M(C_1,C_2)$ удовлетворяет бесконечной системе уравнений. Поскольку T произвольно, мы определим решение ω^t для всех $0 \le t < \infty$. Однако мы не построили еще нужное нам множество $\tilde{\Omega}$, поскольку множество $M(C_1,C_2)$, вообще говоря, не инвариантно относительно построенного движения. Обозначим $M^t(C_1,C_2) \subset \Omega$ образ множества $M(C_1,C_2)$ за время движения t. Очевидно, что множество

$$\tilde{\Omega}(C_1, C_2) = \bigcap_{t \geq 0} M^t(C_1, C_2) \subset M(C_1, C_2) \tag{10}$$

уже инвариантно относительно определенной выше динамики.

Множество $\tilde{\Omega}(C_1, C_2)$ не имеет явного описания, но при надлежащим образом выбранных константах C_1 и C_2 оно достаточно обширно. А именно, обозначим $\mu_{\beta,\mu}$ предельное гиббсовское распределение на пространстве Ω, определяемом с помощью конечных гамильтонианов

$$H_{\Lambda,N} = \sum \frac{mv_i^2}{2} + \sum_{\substack{i \neq j \\ q_i \in \Lambda}} U(q_i - q_j)$$

($\Lambda \subset R^1$—конечный отрезок, N—целое число) и параметров β и μ, задающих большой канонический ансамбль Гиббса (см. § 2.0 и § 3.0).

Лемма 2. *При достаточно большом $C_1 : C_1 > \bar{C}_1(\beta, \mu)$ и достаточно малом $C_2 : C_2 < C_2(\beta, \mu)$ множество $\tilde{\Omega}(C_1, C_2)$ имеет полную гиббсовскую меру*

$$\mu_{\beta,\mu}(\tilde{\Omega}(C_1, C_2)) = 1. \tag{11}$$

Доказательство этой леммы см. в [39].

Итак, окончательный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3. 1) *Для начальных условий $\omega^0 \in \tilde{\Omega}(C_1, C_2)$ определена динамика $T_t : \tilde{\Omega}(C_1, C_2) \to \tilde{\Omega}(C_1, C_2) : \omega^0 \to \omega^t$. Эта динамика является кластерной в том смысле, что для любого фиксированного $t_0 < 0$ начальное состояние ω^0 можно разбить на кластеры $\{\eta_s^0 = \eta_s^0(t_0), s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, которые в течение времени $0 < t < t_0$ движутся автономно, не взаимодействуя друг с другом.*

2) *При достаточно малом C_2 и достаточно большом C_1 множество $\tilde{\Omega}(C_1, C_2)$ обладает полной гиббсовской мерой $\mu_{\beta,\mu}$ и эта мера на $\tilde{\Omega}(C_1, C_2)$ инвариантна относительно динамики*

$$\mu_{\beta,\mu}(T_t A) = \mu_{\beta,\mu}(A), \ A \subset \tilde{\Omega}(C_1, C_2). \tag{12}$$

Последнее утверждение (12) также доказано в [39]. Чтобы дать читателю представление о характере используемых здесь рассуждений, мы докажем более простое утверждение, чем лемма 2.

Лемма 4. ***При достаточно большом C_1 и достаточно малом C_2 множество $M(C_1, C_2)$ имеет полную гиббсовскую меру***

$$\mu_{\beta,\mu}(M(C_1, C_2)) = 1.$$

Доказательство. Обозначим $\hat{N}_k \subset \Omega$ множество тех состояний $\omega^0 \in \Omega$, для которых

$$\max_{|i| < 2^k} | v_i^0 | > C_1 \sqrt{k}, \tag{13}$$

а через $\bar{N}_k \subset \Omega$—множество тех состояний, для которых нарушено условие 2) при данном k:

$$q_{i+1} - q_i < C_2 k$$

для всех i на промежутках $[-2^{k+1}, -2^k]$ и $[2^k, 2^{k+1}]$. Мы покажем, что

$$\sum_k \mu_{\beta,\mu}(\hat{N}_k) < \infty \text{ и } \sum_k \mu_{\beta,\mu}(\bar{N}_k) < \infty \tag{14}$$

при надлежащем выборе C_1 и C_2. Из (14) в силу известной леммы Бореля—Кантелли (см. [11]) и следует утверждение леммы. Для оценки $\mu_{\beta,\mu}$ фиксируем все положения частиц $X = \{q_i\}$ и рассмотрим условное распределение $\mu_{\beta,\mu}(\cdot \mid X)$ скоростей. Это распределение в силу (7.2) является произведением одинаковых гауссовых распределений с плотностями

$$\text{const} \exp\left\{-\frac{\beta m v_i^2}{2}\right\}. \tag{15}$$

Тогда

$$\mu_{\beta,\mu}(\hat{N}_k \mid X) = \mu_{\beta,\mu}(\max_{|i|<2^k} | v_i^0 | > C_1\sqrt{k} \mid X) <$$

$$< \sum_{|i|<2^k} \mu_{\beta,\mu}(| v_i^0 | > C_1\sqrt{k} \mid X) <$$

$$< (2^{k+1} + 1)\text{const} \int\limits_{|v|>C_1\sqrt{k}} \exp\left\{-\frac{\beta m v^2}{2}\right\} dv <$$

$$< (2^{k+1} + 1)\text{const} \exp\{-\beta m C_1^2 k\} < \text{const} \exp\{-\alpha k\}, \tag{16}$$

где $\alpha = \beta m C_1^2 - \ln 2 > 0$ при достаточно большом C_1. Мы воспользовались простой оценкой гауссова интеграла при достаточно больших A

$$\int\limits_{|x|>A} e^{-cx^2}\,dx < \mathrm{const}\exp\{-cA^2\}.$$

Из оценки (16) следует аналогичная оценка и для безусловной вероятности $\mu_{\beta,\mu}(\bar{N}_k)$, а значит, и сходимость первого из рядов в (14). Для доказательства сходимости второго ряда в (14) мы можем перейти к гиббсовскому распределению $\tilde{\mu}_{\beta,\mu}$ в пространстве конфигураций $\{q_i\}$ частиц, получающемуся из $\mu_{\beta,\mu}$ усреднением по всем значениям скоростей. При этом

$$\tilde{\mu}_{\beta,\mu}(\bar{N}_k) = \mu_{\beta,\mu}(\bar{N}_k). \tag{17}$$

Далее фиксируем все положения $\{\bar{q}_i\}$ частиц с номерами $i < n$ и рассмотрим плотность $p(q_{n+1} \mid \bar{q}_n, \bar{q}_{n-1}, \ldots)$ условного распределения для положения q_{n+1} следующей $(n+1)$-й частицы. Эта плотность при условии, что $q_{n+1} - \bar{q}_n > R$ равна (см. [43])

$$p(q_{n+1} \mid \bar{q}_n, \bar{q}_{n-1}, \ldots) = \mathrm{const}\exp\{-\alpha(q_{n+1} - \bar{q}_n)\}, \tag{18}$$

где предэкспоненциальный множитель зависит от конфигурации $\bar{q}_n, \bar{q}_{n-1}, \ldots$, а показатель зависит лишь от параметров (β, μ) гиббсовского распределения: $\alpha = \alpha(\beta, \mu)$.

Рассмотрим условную вероятность события

$$\bar{N}'_k = \{q_{i+1} - q_i < C_2 k,\ i = -2^{k+1}, \ldots, -2^k\}$$

при услови, что фиксированы положения $\{\bar{q}_j\}$ частиц с номерами $j < -2^{k+1}$. Эту условную вероятность можно представить в виде

$$\tilde{\mu}_{\beta,\mu}(\bar{N'}_k \mid \bar{q}_j,\ j < -2^{k+1}) =$$

$$= \int\limits_{|q_{i+1}-q_i|<C_2 k} \prod_{i=-2^{k+1}}^{i=-2^k} p(q_{i+1} \mid q_i, q_{i-1}, \ldots, \bar{q}_j, \ldots) \prod dq_i. \tag{19}$$

В силу (18) при достаточно больших k

$$\int\limits_{|q_{i+1}-q_i|>C_2 k} p(q_{i+1} \mid q_i, q_{i-1}, \ldots)\,dq_{i+1} < \mathrm{const}\exp\{-C_2\alpha k\}$$

и, следовательно, интеграл (19) не превосходит

$$(1 - \exp\{-C_2\alpha k\})^{2^k} < \exp\{-2^k \exp\{-C_2\alpha k\}\} < \exp\{-2^{k/2}\}.$$

При $C_2\alpha < \ln 2/2$. Аналогичная оценка верна и для безусловной вероятности множества $\bar{N}'_k$, а также для вероятности множества

$$\bar{N}''_k = \{q_{i+1} - q_i < C_2 k,\ i = 2^k, \ldots, 2^{k+1}\}.$$

Поскольку множество $\bar{N}_k = \bar{N}'_k \bigcap \bar{N}''_k$ из полученных оценок вытекает сходимость второго ряда в (14). Лемма 4 доказана.

Существуют и другие более явные способы описания множества начальных состояний $\tilde{\Omega}$, для которых определено решение системы (4) так, что соответствующая динамика оставляет это множество инвариантным. Мы приведем такое описание из работы [50]. А именно, для каждой частицы $\{q_i, v_i\}$ из начального состояния ω^0 рассмотрим плотность энергии частиц из ω^0, попавших в c-окрестность точки q_i,

$$\frac{1}{2c}\left[\sum_{j:|q_j-q_i|<c} \frac{mv_j^2}{2} + \sum_{j,j':|q_j-q_i|<c,|q_{j'}-q_i|<c} U(q_j - q_{j'})\right] = e_i(c).$$

Введем множество $\tilde{\Omega}$ начальных состояний ω^0 таких, что

$$\sup_i \sup_{c>B+|q_i|} e_i(c) < \infty,$$

где $B = B(U)$—некоторая фиксированная константа.

Теорема 5. 1) *Для любого начального состояния* $\omega^0 \in \tilde{\Omega}$ *определено решение* ω^t *системы* (4) *такое, что* $\omega^t \in \tilde{\Omega}$ *при всех* t *(и такое решение единственно).*

2) *Для любого распределения вероятностей* ν *на* Ω, *обладающего достаточно хорошими свойствами эргодичности относительно трансляций вдоль прямой (в частности, для распределения Гиббса* $\mu_{\beta,\mu}$, *подробнее см. в* [50]) *множество* $\tilde{\Omega}$ *обладает полной* ν*-мерой*

$$\nu(\tilde{\Omega}) = 1.$$

3) *Распределение Гиббса на* $\tilde{\Omega}$ *инвариантно относительно построенной в* $\tilde{\Omega}$ *динамики.*

Доказательство этой теоремы см. в [50].

Легко проверить, что $\tilde{\Omega}(C_1, C_2) \subseteq \tilde{\Omega}$ и для элементов $\omega^0 \in \tilde{\Omega}(C_1, C_2)$, указанная в теореме 5 динамика совпадает с построенной выше кластерной динамикой в $\tilde{\Omega}(C_1, C_2)$.

§ 2. Краткие сведения о C^*-алгебрах

В случае квантовых систем при построении и исследовании гайзенберговой динамики, т. е. временной эволюции "наблюдаемых" (операторов), удобно задавать эту динамику в некоторой подходящей алгебре "наблюдаемых". Чаще всего эта алгебра оказывается C^*-алгеброй. Такие алгебры по своим свойствам подобны алгебре непрерывных функций на пространстве состояний классической бесконечной системы. Здесь мы кратко изложим ряд общих фактов, касающихся C^*-алгебр; более полные сведения о них можно найти в монографиях [7, 13].

Отметим сразу же, что C^*-алгебры большей частью применяются при изучении квантовых спиновых систем или же фермионных систем. Для исследования бозонных систем эти алгебры оказываются малопригодными.

Инволюцией банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ называется отображение $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} : A \to A^*$ этой алгебры в себя, такое, что

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^* = \bar{\lambda}_1 A_1^* + \bar{\lambda}_2 A_2^*,$$
$$(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^* \text{ и } (A^*)^* = A. \qquad (1)$$

Определение 1. Банахова алгебра $\mathfrak{A}$ с инволюцией $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, для которой выполнено условие

$$\| A \|^2 = \| AA^* \|, \ A \in \mathfrak{A}, \qquad (2)$$

называется C^*-алгеброй.

В качестве примера C^*-алгебры может служить алгебра $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, снабженная обычной операторной нормой; инволюция в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ определяется как переход к сопряженному оператору. Равенство (2) вытекает из следующих выкладок: в силу самосопряженности и положительности оператора A^*A его норма $\| A^*A \|$ равна

$$\| A^*A \| = \sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} (A^*Ax, x) = \sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=\alpha} (Ax, Ax) =$$

$$= \sup_{x \in \mathcal{H}, \|x\|=1} \| Ax \|^2 = \| A \|^2 . \qquad (3)$$

Заметим, что всякая подалгебра $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, замкнутая относительно нормы $\| \cdot \|$ и инвариантная относительно инволюции, снова является C^*-алгеброй.

Будем называть *морфизмом* (или *$*$-гомоморфизмом*) C^*-алгебры $\mathfrak{A}_1$ в C^*-алгебру $\mathfrak{A}_2$ любой гомоморфизм π, сохраняющий инволюцию:

$$(\pi(A))^* = \pi(A^*). \qquad (4)$$

Утверждение 1. *Любой морфизм $\pi : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ C^*-алгебры $\mathfrak{A}_1$ в C^*-алгебру $\mathfrak{A}_2$ сохраняет норму*

$$\| \pi(A) \|_2 = \| A \|_1, \ A \in \mathfrak{A}_1. \qquad (5)$$

Доказательство см. в [7].

Утверждение 2. *Пусть $\mathcal{J} \subset \mathfrak{A}$ двухсторонний замкнутый идеал C^*-алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathcal{J}$ инвариантен относительно инволюции и фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\mathcal{J}$ (в которой естественно определена инволюция) является C^*-алгеброй.* (см. [13]).

Утверждение 3. *Пусть π—морфизм C^*-алгебры $\mathfrak{A}_1$ в C^*-алгебру $\mathfrak{A}_2$. Тогда ядро* $\mathrm{Ker}\,\pi = \{A \in \mathfrak{A}_1 : \pi(A) = 0\}$ *является замкнутым двухсторонним идеалом $\mathfrak{A}_1$, а образ* $\mathrm{Im}\,\pi = \{B \in \mathfrak{A}_2 : B = \pi(A)$ *при некотором* $A \in \mathfrak{A}_1\}$ *образует замкнутую C^*-подалгебру $\mathfrak{A}_2$, изоморфную алгебре $\mathfrak{A}_1/\mathrm{Ker}\pi$* (см. [13]).

Поскольку все сепарабельные гильбертовы пространства $\mathcal{H}$ изоморфны между собой, все алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ также изоморфны друг другу. Оказывается алгебра $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$—в некотором смысле максимальная C^*-алгебра; более точно справедливо

Утверждение 4. *Любая C^*-алгебра изоморфна некоторой C^*-подалгебре алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$* (см. [13]).

Элемент $A \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$—алгебра с инволюцией, называется *эрмитовым* (иначе, еще самосопряженным или вещественным), если $A^* = A$; элемент A называется *проектором*, если A эрмитов и $A^2 = A$; наконец, A называется унитарным элементом (в случае, когда в алгбре $\mathfrak{A}$ есть единица $\mathbf{1}$), если $A^*A = AA^* = \mathbf{1}$.

Утверждение 5. *Любая коммутативная C^*-алгебра* **с 1** *изоморфна C^*-алгебре всех непрерывных комплексно-значных функций, определенных на некотором компакте X (инволюция: $f^* = \bar{f} f$, где черта означает комплексное сопряжение). Лю-*

бая коммутативная C^*-алгебра изоморфна C^*-алгебре всех непрерывных функций, определенных на некотором локально-компактном пространстве X и стремящихся к нулю на бесконечности (см. [7]).

Утверждение 6. *Если C^*-алгебра $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ является подалгеброй C^*-алгебры $\mathfrak{B}$ и элемент $A \in \mathfrak{A}$ обратим в $\mathfrak{B}$, то $A^{-1} \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Очевидно, что $A^* \in \mathfrak{A}$ и $AA^* \in \mathfrak{A}$ также обратимые элементы $\mathfrak{B}$, т. е. существует элемент $T \in \mathfrak{B}$ такой, что $AA^*T = TAA^* = \mathbf{1}$. Рассмотрим наименьшую замкнутую подалгебру $\mathfrak{A}_0$, порожденную элементами AA^*, T и $\mathbf{1}$ (т. е. замыкание в $\mathfrak{B}$ всех полиномов от этих элементов). Эта алгебра является коммутативной C^*-алгеброй, и при ее представлении в виде алгебры непрерывных функций на компакте X элементу AA^* соответствует функция $f(x), x \in X$, отделенная от нуля, а элементу T—функция $1/f(x)$. Поскольку $1/f(x)$ входит в подалгебру функций, порожденную функцией $f(x)$ и $\mathbf{1}$ (теорема Вейерштрасса), алгебра $\mathfrak{A}_0$ совпадает с алгеброй, порожденной элементом AA^* и $\mathbf{1}$, т. е. $T \in \mathfrak{A}$. Отсюда $A^{-1} = A^*T \in \mathfrak{A}$.

Спектром SpA элемента $A \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$—алгебра с $\mathbf{1}$ называется множество Sp$A = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon$ элемент $A - \lambda\mathbf{1}$ необратим в $\mathfrak{A}\}$.

Утверждение 7. *Спектр любого эрмитова элемента $A \in \mathfrak{A}$ веществен.*

Доказательство легко вытекает из утверждений 4 и 5.

Утверждение—определение 8. *Эрмитов элемент A C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ называется положительным, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

1. $\mathrm{Sp} \subset [0, \infty)$.
2. $A = B^*B$ *для некоторого* $B \in \mathfrak{A}$.
3. $A = B^2$ *для некоторого эрмитова элемента* $B \in \mathfrak{A}$.
4. *Для некоторого точного морфизма* $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *(т. е. такого, что* $\mathrm{Ker}\pi = 0$*) выполнено* $(\pi(A)x, x) \geq 0$ *для всех* $x \in \mathcal{H}$.
5. *Предыдущее свойство выполняется для любого точного морфизма* $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Доказательство см. в [13].

Определение. *Состоянием* $\langle\ \rangle$ на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с $\mathbf{1}$ называется линейный функционал на этой алгебре, принимающий неотрицательные значения на положительных элементах $\mathfrak{A}$ и такой, что $\langle\mathbf{1}\rangle = 1$.

Для всякого состояния $\langle\ \rangle$ на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ выполнено равенство

$$\langle A^* \rangle = \langle \bar{A} \rangle, \quad A \in \mathfrak{A}. \tag{6}$$

Действительно, любой эрмитов элемент $A \in \mathfrak{A}$ в силу условия 1) утверждения 7, утверждения 4 и спектральной теоремы представим в виде разности положительных элементов $A = C - B$, $C \geq 0, B \geq 0$, и, таким образом, состояние $\langle\ \rangle$ на эрмитовых элементах принимает вещественные значения. Далее, любой элемент $A \in \mathfrak{A}$ можно представить в виде $A = B_1 + iB_2$, где B_1, B_2—эрмитовы. Отсюда и следует (6).

Утверждение 9. *Состояние является непрерывным линейным функционалом на $\mathfrak{A}$ с нормой, равной 1. Более общее: всякий положительный линейный функционал $\langle\ \rangle$ на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ (т. е. принимающей неотрицательные значения на положительных элементах) непрерывен и его норма равна $\langle\mathbf{1}\rangle$. Для того чтобы непрерывный линейный функционал на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с $\mathbf{1}$ такой, что $\langle\mathbf{1}\rangle = 1$, был состоянием, необходимо и достаточно, чтобы его норма равнялась единице* (см. [13]).

Слабая $*$-топология в пространстве $\mathfrak{A}^*$, сопряженном к $\mathfrak{A}$, порождается базисом открытых множеств вида

$$G_A^{a,b} = \{f \in \mathfrak{A}^* : b < f(A) < a\}.$$

Очевидно, что сходимость в $\mathfrak{A}^*$, порождаемая $*$-топологией (слабая $*$-сходимость), совпадает с поточечной сходимостью функционалов.

Утверждение 10. *Множество всех состояний $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathfrak{A})$ на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ является выпуклым слабо-$*$-компактным подмножеством $\mathfrak{A}^*$* (см. [13]).

Крайние точки множества $\mathcal{P}$ называются *чистыми* состояниями. Напомним, что точка $x \in \mathcal{P}$ выпуклого множества $\mathcal{P}$ является его крайней точкой, если ее нельзя представить в виде $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, где $x_1, x_2 \in \mathcal{P}$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Утверждение—определение 11. *Морфизм $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ называется неприводимым, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

1. *Всякий элемент $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, коммутирующий с любым элементом $\pi(A)$, $A \in \mathfrak{A}$, имеет вид $C = \lambda\mathbf{1}$, λ—число.*

2. *В пространстве $\mathcal{H}$ нет нетривиального подпространства, инвариантного относительно всех операторов $\pi(A)$, $A \in \mathfrak{A}$.*

3. *Замыкание множества $\pi(\mathfrak{A})$ в слабой топологии алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ совпадает с $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$.*

4. *Любой вектор $x \in \mathcal{H}$ является циклическим для $\pi(\mathfrak{A})$, т. е. множество $\pi(\mathfrak{A})x$ всюду плотно в $\mathcal{H}$* (см. [13]).

Морфизм $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, для которого существует хотя бы один циклический вектор $x \in \mathcal{H}$, называется *циклическим*.

ГНС-конструкция (представление Гельфанда–Наймарка–Сигала). Эта конструкция любому состоянию $\langle\cdot\rangle = \rho(\cdot)$ на C^*-алгебре с $\mathbf{1}$ каноническим образом сопоставляет гильбертово пространство $\mathcal{H}_\rho$ вместе с морфизмом $\pi_\rho : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\rho)$, который оказывается очень удобным при изучении свойств ρ. Пространство $\mathcal{H}_\rho$ строится следующим образом. Введем эрмитову неотрицательную форму на $\mathfrak{A}$:

$$(A, B) = \langle B^*A\rangle. \tag{7}$$

Множество $\mathcal{N} = \{A : (A, A) = 0\}$ образует замкнутый левый идеал в $\mathfrak{A}$. Это легко выводится из двух неравенств

$$| (A, B) |^2 \leq (A, A)(B, B) \tag{8}$$

(неравенство Шварца) и неравенства

$$| \langle B^*AB\rangle | < \| A \| \langle B^*B\rangle, \tag{9}$$

являющегося следствием положительности линейного функционала $f(A) = \langle B^*AB\rangle$ и утверждения 8. Таким образом, фактор-пространство $\mathfrak{A}/\mathcal{N}$ является предгильбертовым пространством со скалярным произведением

$$([A], [B]) = (A, B), \tag{10}$$

где $[A]$ обозначен класс смежности $\mathfrak{A}/\mathcal{N}$, содержащий элемент A.

Обозначим $\mathcal{H}_{\text{ГНС}} \equiv \mathcal{H}_\rho$ пополнение $\mathfrak{A}/\mathcal{N}$ по скалярному произведению (10). ГНС-морфизм π_ρ алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_\rho)$ задается следующей формулой. Для каждого $A \in \mathfrak{A}$ определим на всюду плотном линейном пространстве $\mathfrak{A}/\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_{\text{ГНС}}$ оператор

$$\pi_\rho(A)[B] = [AB] \in \mathfrak{A}/\mathcal{N}. \tag{11}$$

Определение (11) корректно в силу того, что $\mathcal{N}$ является левым идеалом $\mathfrak{A}$. Из неравенства (9) вытекает, что $\pi_\rho(A)$—ограниченный оператор в $\mathfrak{A}/\mathcal{N}$ и его норма в $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_\rho)$

$$\| \pi_\rho(A) \| \leq \| A \|. \tag{12}$$

Таким образом, $\pi_\rho(A)$ продолжается по непрерывности на все пространство $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$ с сохранением неравенства (12).

Утверждение 12. ***Состояние ρ является чистым в том и только в том случае, когда морфизм π_ρ неприводим*** (см. в [13]).

Рассмотрим следующий пример ГНС-конструкции, которым мы часто будем пользоваться в дальнейшем. Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$—некоторое гильбертово пространство и состояние на $\mathfrak{A}$ вводится формулой

$$\langle A\rangle = (A\Phi_0, \Phi_0),$$

где Φ_0—единичный вектор из $\mathcal{H}$. Тогда пространство $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$ унитарно-эквивалентно пространству $\mathcal{H}$, причем $[E]$ совпадает с Φ_0. Действительно, идеал $\mathcal{N}$ состоит из тех элементов $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, для которых выполнено

$$\Phi_0 \in \text{Ker} A.$$

Далее для любого $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ класс $[A] \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})/\mathcal{N}$ состоит из тех операторов $A' \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, для которых

$$A'\Phi_0 = A\Phi_0.$$

Таким образом, сопоставляя каждому классу $[A]$ вектор $A\Phi_0$, мы и получим требуемое отображение $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$ в пространство $\mathcal{H}$. Легко при этом проверить, что $\pi(A) = A, A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Упомянем один специальный класс C^*-алгебр—алгебры фон Неймана. Так называют подалгебру $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}(\mathcal{H})$, инвариантную относительно сопряжения и замкнутую в слабой топологии алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. При переходе к алгебрам фон Неймана в некотором смысле исчезают топологические сложности строения C^*-алгебр. Так, например, если X—компакт с конечной мерой μ, то слабое замыкание C^*-алгебры операторов в $\mathfrak{B}(L_2(X, \mu))$, действующих как умножение на непрерывные функции $f(x)$ на X, образует алгебру фон Неймана операторов умножения на существенно ограниченные функции $f \in L_\infty(X,\mu)$ с нормой $\| f \| = \mathrm{esssup}_{x\in X} \mid f(x) \mid$.

§ 3. Пространства Фока и операторы вторичного квантования

Пространство Фока—это гильбертово пространство с дополнительной структурой тензорной алгебры.

Пусть задано сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$. Если не оговорено противное, далее оно везде считается комплексным со скалярным произведением, антилинейным по второму аргументу.

Мы определим *симметрическое* (бозонное) пространство Фока $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ над $\mathcal{H}$ и *антисимметрическое* (фермионное) пространство Фока $\mathcal{F}_a = \mathcal{F}_a(\mathcal{H})$. Удобно сначала ввести более общее пространство

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{H}) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}, \tag{1}$$

где $\mathcal{F}^{(0)} = \mathbb{C}$ (пространство констант), $\mathcal{F}^{(n)} = \mathcal{F}^{(n)}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^{\otimes n} = \underbrace{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\ldots\otimes\mathcal{H}}_{n\ \text{раз}}$ ($\otimes$ означает тензорное произведение гильбертовых пространств [36]). Пространство $\mathcal{F}$ в (1) означает прямую сумму гильбертовых пространств, т. е. пространство последовательностей

$$F = (f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots), \ f_n \in \mathcal{F}^{(n)}, \tag{2}$$

с конечной нормой

$$(F, F) = \| F \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|^2 . \tag{3}$$

Заметим, что если $\mathcal{H} = L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$, то $\mathcal{F}^{(n)}$ есть пространство квадратично-интегрируемых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n$, по мере μ^n на Ω^n.

В $\mathcal{F}^{(n)}$ естественным образом действует симметрическая группа S_n, переставляющая множители в тензорных произведениях $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n$, $\varphi_i \in \mathcal{H}$.

Подпространство симметрических (инвариантных относительно всех перестановок) элементов обозначим $\mathcal{F}_s^{(n)}$, а антисимметрических (умножающихся на знак перестановки) обозначим $\mathcal{F}_a^{(n)}$.

Определение 1.

$$\mathcal{F}_s = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_s^{(n)}, \ \ \mathcal{F}_a = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_a^{(n)}.$$

В упомянутом выше случае, когда $\mathcal{H}$ есть пространство функций, $\mathcal{F}_s^{(n)}(\mathcal{F}_a^{(n)})$ состоит из симметрических (антисимметрических) функций. Пространства $\mathcal{F}_s^{(n)}$ и $\mathcal{F}_a^{(n)}$ будем называть *n-частичными* пространствами.

Функтор вторичного квантования. Если задан ограниченный оператор $U, \| U \| \leq 1$, в $\mathcal{H}$, то обозначим $\Gamma(U)$ оператор в $\mathcal{F}$, действующий в каждой компоненте $\mathcal{F}^{(n)}$ на элементы вида $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n$ по формуле

$$\Gamma(U)(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n) = (U\varphi_1) \otimes \ldots \otimes (U\varphi_n) \tag{4}$$

и продолженный далее по линейности и непрерывности на все $\mathcal{F}$. Заметим, что $\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{F}_a$ инвариантны относительно $\Gamma(U)$ и сужение $\Gamma(U)$ на эти пространства будет обозначаться тем же знаком. Если U унитарен, то и $\Gamma(U)$ унитарен в $\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{F}_a$.

Пусть H—самосопряженный оператор с областью определения $D \subset \mathcal{H}$. Обозначим $d\Gamma(H)$ оператор в $\mathcal{F}$, действующий на векторы вида $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n$, $\varphi_i \in D$, по формуле

$$d\Gamma(H)(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n) = H\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \ldots \otimes \varphi_n +$$

$$+ \varphi_1 \otimes H\varphi_2 \otimes \varphi_3 \otimes \ldots \otimes \varphi_n + \cdots + \varphi_1 \otimes \ldots \otimes H\varphi_n \tag{5}$$

и продолженный по линейности на линейную оболочку таких векторов. Формула (5) получается формальным дифференцированием $\Gamma(e^{itH})$ в точке $t = 0$. Оператор $d\Gamma(H)$ также можно считать действующим в $\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{F}_a$, где его замыкание самосопряжено.

Операторы рождения-уничтожения. Для любого $\varphi \in \mathcal{H}$ определим операторы рождения $a^*(\varphi)$ и уничтожения $a(\varphi)$ в $\mathcal{F}(\mathcal{H})$

$$a(\varphi)\Omega = 0, \ \ a^*(\varphi)\Omega = (0, \varphi, 0, \ldots),$$

где $\Omega = (1, 0, 0, \ldots)$—"вакуум" в пространстве Фока

$$a(\varphi)(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n) = \sqrt{n}(\varphi_1, \varphi)(\varphi_2 \otimes \ldots \otimes \varphi_n),$$

$$a^*(\varphi)(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n) = \sqrt{n+1}(\varphi \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n). \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что

$$(a(\varphi))^* = a^*(\varphi).$$

По линейности эти операторы продолжаются до операторов с всюду плотной областью определения $\mathcal{F}_0(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}$, состоящей из финитных последовательностей (2), т. е. таких, в которых все $f_n = 0$, начиная с некоторого n_0. Обозначим $\mathcal{F}_0(\mathcal{H}) = \mathcal{F}_0$.

Определим линейные операторы в $\mathcal{F}$ формулами

$$P_\pm(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (\pm)^\pi \varphi_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes \varphi_{\pi(n)}.$$

Они являются ортогональными проекторами на $\mathcal{F}_s^{(n)}$ и $\mathcal{F}_a^{(n)}$ соответственно.

Определение 2. Положим

$$a_\pm(\varphi) = P_\pm a(\varphi), \;\; a^*_\pm(\varphi) = P_\pm a^*(\varphi) \qquad (7)$$

на $\mathcal{F}_{s,0}$ и $\mathcal{F}_{a,0}$ соответственно. Далее эти операторы будут часто обозначаться без индексов ±, если ясно о каком из пространств $\mathcal{F}_s$ или $\mathcal{F}_a$ идет речь. В случае, когда фоковское пространство состоит из последовательностей симметрических (антисимметрических) функций

$$\Phi = (f_0, f_1(x_1), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n), \ldots),$$

операторы рождения и уничтожения действуют по формулам

$$(a(\varphi)\Phi)_n(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{n+1} \int\limits_\Omega f_{n+1}(\xi, x_1, \ldots, x_n) \bar{\varphi}(\xi) d\mu(\xi), \qquad (7^a)$$

$$(a^*(\varphi)\Phi)_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\pm)^{i-1} \varphi(x_i) f_{n-1}(x_1, \ldots, \check{x}_i, \ldots, x_n),$$

где знак ˇ означает, что соответствующая переменная опущена.

Замечание 1. Если норму (3) заменить нормой

$$\| F \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \| f_n \|^2,$$

то операторы a^* и a будут иметь вид (7^a), но без множителей $1/\sqrt{n}$ и $\sqrt{n+1}$, которые трудно запомнить.

В случае бозонного пространства имеют место канонические коммутационные соотношения (ККС)

$$[a(f), a(g)] = 0 = [a^*(f), a^*(g)],$$

$$[a(g), a^*(f)] = (f, g)\mathbf{1}, \qquad (8)$$

а в случае фермионного—канонические антикоммутационные соотношения (КАС)

$$\{a(f), a(g)\} = 0 = \{a^*(f), a^*(g)\} \stackrel{\text{def}}{=} a^*(f)a^*(g) + a^*(g)a^*(f),$$

$$\{a^*(f), a(g)\} = (f, g)\mathbf{1}. \qquad (9)$$

В действительности даже проще *определить* операторы рождения—уничтожения посредством ККС (или КАС) и их действием на вакуум Ω. А именно, действие оператора $a(\varphi)$ на вектор

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} a^*_\pm(\varphi_1) \ldots a^*_\pm(\varphi_n)\Omega = (0, \ldots, 0, P_\pm(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n), 0, \ldots) \quad (9^a)$$

в силу коммутационных (или антикоммутационных) соотношений приводит к вектору

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum (\pm)^k (\varphi_k, \varphi) \frac{1}{(n-1)!)^{1/2}} a^*_\pm(\varphi_1) \ldots \check{a}^*_\pm(\varphi_k) \ldots a^*_\pm(\varphi_n)\Omega,$$

что совпадает с определением (6) и (7^a).

Нетрудно убедиться, что на $\mathcal{F}_a$

$$\| a(f) \| = \| a^*(f) \| = \| f \| . \qquad (10)$$

В то же время отображение

$$a(f) : \mathcal{F}_s^{(n)} \to \mathcal{F}_s^{(n-1)}, \;\; a^*(f) : \mathcal{F}_s^{(n-1)} \to \mathcal{F}_s^{(n)}$$

имеет норму

$$\| a(f) \|_{n,n-1} = \| a^*(f) \|_{n-1,n} = \sqrt{n} \, \| f \| . \qquad (11)$$

Отсюда следует, что совокупность финитных последовательностей образует плотное множество аналитических векторов для $a^\#(f), a^\# = a$ или a^*, т. е. для всех $F \in \mathcal{F}_{s,0}$ и для всех $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}\|a^{\#}(f)F\|<\infty. \qquad (12)$$

Это верно и для операторов

$$\Phi(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}[a^*(f)+a(f)],$$

$$\Pi(f)=\frac{i}{\sqrt{2}}[a^*(f)-a(f)] \qquad (13)$$

Операторы $\Phi(f)$ и $\Pi(f)$, определенные на $\mathcal{F}_{s,0}$, в существенном самосопряжены (в силу известного критерия Нельсона [36]) и удовлетворяют следующим соотношениям коммутации:

$$[\Phi(f),\Phi(g)]=0=[\Pi(f),\Pi(g)],$$

$$[\Phi(f),\Pi(g)]=i(g,f). \qquad (14)$$

Их замыкания самосопряжены и определяют унитарные операторы Вейля в пространстве $\mathcal{F}_s$

$$U(f)=\exp\{i\Phi(f)\},\quad V(f)=\exp\{i\Pi(f)\}, \qquad (15)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$U(f)U(g)=U(f+g)=U(g)U(f),$$

$$V(f)V(g)=V(f+g)=V(g)V(f), \qquad (16)$$

$$\exp\{i(\Phi(f)+\Pi(g))\}=U(f)V(g)\exp\left\{\frac{i}{2}(f,g)\right\}=$$

$$=V(g)U(f)\exp\left\{-\frac{i}{2}(f,g)\right\}. \qquad (16^а)$$

Действительно, рассмотрим семейство операторов

$$\Pi_t(g)\equiv U(tf)\Pi(g)U^{-1}(tf)=$$

$$=\exp\{it\Phi(f)\}\Pi(g)\exp\{-t\Phi(f)\}.$$

Тогда

$$\frac{d\Pi}{dt}=-(f,g)\mathbf{1},$$

т. е.

$$\Pi_t(g)=\Pi(g)-(f,g)\mathbf{1}t. \qquad (16^б)$$

Поэтому

$$U(tf)V(g)U^{-1}(tf)=\exp\{i\Pi_t(g)\}=\exp\{-it(f,g)\}V(g).$$

Отсюда при $t=1$ следует второе равенство в ($16^а$).

Первое равенство ($16^а$) следует при $t=1$ из равенства

$$\exp\{it(\Phi(f)+\Pi(g))\}=U(tf)V(tg)\exp\left\{\frac{it^2}{2}(f,g)\right\},$$

которое в свою очередь следует из равенства производных обеих его частей по t (с учетом ($16^б$) при $t=0$; (16) очевидно.

Замкнутая по норме подалгебра $W\subset\mathfrak{B}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}))$ операторов, порожденная операторами $\{\Pi(g),\Phi(g),g\in\mathcal{H}\}$ называется *алгеброй Вейля*.

Операторы, сохраняющие число частиц. Так называются операторы, действующие в $\mathcal{F}_s$ (или $\mathcal{F}_a$), для которых $\mathcal{F}_s^{(n)}$ (или $\mathcal{F}_a^{(n)}$) инвариантны.

Простейшим из них является "оператор числа частиц"

$$d\Gamma(\mathbf{1})(F)=nF,\ \text{если}\ F\in\mathcal{F}^{(n)}. \qquad (17)$$

Часто приходится выражать некоторые из таких операторов через операторы рождения—уничтожения. Заметим сначала, что мономы вида

$$a^*(\varphi_1)\dots a^*(\varphi_n)a(g_1)\dots a(g_m) \qquad (18)$$

сохраняют число частиц, если $n=m$.

Рассмотрим три важных оператора в $\mathcal{F}_s$ (или $\mathcal{F}_a$) в случае, когда $\mathcal{H}=L_2(R^\nu,dx)$. Введем для такого $\mathcal{H}$ "операторозначные обобщенные функции" $a^*(x),a(x)$, $x\in R^\nu$, определяемые из равенств

$$a(f)=\int\bar{f}(x)a(x)dx,\quad a^*(f)=\int f(x)a^*(x)dx \qquad (19)$$

и удовлетворяющие соотношениям коммутации (в случае $\mathcal{F}_s$)

$$[a(x),a^*(y)]=\delta(x-y)\mathbf{1},$$

$$[a(x),a(y)]=[a^*(x),a^*(y)]=0 \qquad (20)$$

(и аналогичным соотношениям антикоммутации в случае $\mathcal{F}_a$).

С помощью этих символов векторы и операторы в $\mathcal{F}_s$ или $\mathcal{F}_a$ удобно записывать в следующем виде:

1) если $f(x_1,\dots,x_n)$—гладкая симметричная (или антисимметричная) функция, то положим

$$F=\{0,\dots,0,f(x_1,\dots,x_n),\dots\}= \tag{21}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n!}}\int f(z_1,\dots,z_n)a^*(z_1)\dots a^*(z_n)dz_1\dots dz_n\Omega\in\mathcal{F}^{(n)}_{s(a)}$$

(сравни с (9^a));

2) некоторым обобщенным функциям K от $n+m$ переменных можно сопоставить оператор

$$A=\int\limits_{R^{(n+m)\nu}} K(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)a^*(x_1)\dots a^*(x_n)\times$$

$$\times a(y_1)\dots a(y_m)dx_1\dots dx_n dy_1\dots dy_m, \tag{22}$$

действующий на векторы вида (21) по следующему правилу. Каждый из множителей $a(y_i)$ в (22) перетаскивается в выражении AF с использованием правил коммутации (20) вправо от всех $a^*(z_1)\dots a^*(z_n)$; далее используется правило $a(y_i)\Omega=0$. После этого возникает линейная комбинация выражений вида (21), которые для некоторого класса ядер K будут содержать только гладкие функции f.

Примеры. 1. Пусть h есть оператор в $\mathcal{H}=L_2(R^\nu,dx)$ умножения на гладкую функцию $h(x)$. Тогда

$$d\Gamma(h)=\int\limits_{R^\nu} h(x)a^*(x)a(x)dx\overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{R^\nu} h(x)\delta(x-y)a^*(x)a(y)dxdy. \tag{23}$$

2. Пусть $h\varphi=-\Delta\varphi$, $\varphi\in\mathcal{H}$, Δ—оператор Лапласа. Тогда

$$d\Gamma(h)=\int(-\Delta a^*)(x)a(x)dx\overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=}\int(-\Delta\delta)(x-y)a^*(x)a(y)dxdy. \tag{24}$$

3. Рассмотрим выражение

$$\int V(x,y)a^*(x)a^*(y)a(y)a(x)dxdy\overset{\text{def}}{=} \tag{25}$$

$$\overset{\text{def}}{=}\int V(x,y)\delta(x-x_1)\delta(y-y_1)a^*(x)a^*(y)a(y_1)a(x_1)dxdydx_1dy_1,$$

где $V(x,y)$—симметрическая функция (потенциал парного взаимодействия). Этот оператор, согласно нашему правилу, в каждом подпространстве $\mathcal{F}^{(n)}, n\geq 2$ действует как оператор умножения на функцию

$$2\sum_{1<i<j<n}V(x_i,x_j).$$

Гауссово представление $\mathcal{F}_s$. Пусть $\mathcal{H}$—гильбертово пространство с ортонормированным базисом $f_1,f_2,\dots$ и пусть $\xi_i=\xi(f_i)$ независимые гауссовы величины со средним нуль $\langle\xi_i\rangle=0$ и дисперсией, равной единице, заданные на некотором вероятностном пространстве (Ω,Σ,μ). Можно считать Σ наименьшей σ-алгеброй, относительно которой измеримы все ξ_i. Если

$$f=\sum_i c_i f_i\in\mathcal{H},$$

то положим

$$\xi(f)\overset{\text{def}}{=}\sum_i c_i\xi(f_i), \tag{26}$$

где ряд сходится в среднем квадратичном.

Определим изоморфизм

$$L_2(\Omega,\Sigma,\mu)\to\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) \tag{27}$$

посредством сопоставления

$$:\xi^{l_1}(f_1)\dots\xi^{l_k}(f_k):\leftrightarrow(a^*(f_1))^{l_1}\dots(a^*(f_k))^{l_k}\Omega, \tag{28}$$

если $f_1,\dots,f_k$—различные элементы базиса (виковское упорядочение : : определено в [26]).

Можно проверить, что

$$a^*(f)(:\xi(f_1)\dots\xi(f_k):)=:\xi(f)\xi(f_1)\dots\xi(f_k):$$

$$a(f)(:\xi^l(f):)=l:\xi^{l-1}(f): \tag{29}$$

Осцилляторное представление для $\mathcal{F}_s$. Если отождествим пространство $L_2(R^1, dx)$ и $L_2(R^1, 1/\sqrt{2\pi}e^{-y^2/2}dy)$ посредством отображения

$$f(x) \leftrightarrow f(x)(2\pi)^{-1/4}e^{-x^2/4} \tag{30}$$

и воспользуемся отождествлением (28)

$$L_2\left(R^1, \frac{1}{2\pi}e^{-y^2/2}dy\right) \leftrightarrow \mathcal{F}_s(\mathbb{C}) \tag{31}$$

то получим отождествление

$$L_2(R^1, dx) \leftrightarrow \mathcal{F}_s(\mathbb{C}). \tag{32}$$

Вакуум в $L_2(R^1, dx)$ есть $(2\pi)^{-1/4}e^{-x^2/4}$—собственная функция с наименьшим собственным значением оператора энергии (гамильтониана) гармонического осциллятора

$$H_0 = \frac{1}{2}a^*a = \frac{1}{2}\left(-2\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} - 1\right), \tag{33}$$

где

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\frac{d}{dx}\right), \quad a^* = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\frac{d}{dx}\right). \tag{34}$$

Аналогичное отождествление пространства $L_2(R^N, d^Nx)$ с пространством $\mathcal{F}(\mathbb{C}^N)$ может быть получено как тензорная степень отображения (32).

Гауссово (грассманово) представление для $\mathcal{F}_a$. Это представление аналогично гауссову представлению для $\mathcal{F}_s$. Пусть $G(\mathcal{H})$—грассманова алгебра с **1** над гильбертовым пространством $\mathcal{H}$, т. е. грассманова алгебра с образующими $\{\psi(e_i), i = 1, \dots\}$, где $\{e_i\}$—ортонормированный базис в $\mathcal{H}$ и

$$\{\psi(e_i), \psi(e_j)\} = \psi(e_i)\psi(e_j) + \psi(e_j)\psi(e_i) = 0. \tag{35}$$

Каждому моному

$$\psi(e_{i_1})\dots\psi(e_{i_k}), \ i_1 < i_2 < \dots < i_k, \tag{35^a}$$

сопоставим элемент

$$a^*(e_{i_1})\dots a^*(e_{i_k})\Omega. \tag{36}$$

Это отображение продолжается до изоморфизма

$$\overline{G(\mathcal{H})} \leftrightarrow \mathcal{F}_a(\mathcal{H}),$$

где $\overline{G(\mathcal{H})}$—пополнение $G(\mathcal{H})$ в норме, порождаемой включением $G(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ с помощью (36). Обозначим для любого $f = \sum c_ie_i \in \mathcal{H}$ элемент

$$\psi(f) = \sum c_i\psi(e_i) \in \overline{G(\mathcal{H})}.$$

Легко проверить, что оператор $a^*(f)$ действует в $\overline{G(\mathcal{H})}$ как умножение слева на $\psi(f)$, а $a(f)$—как левое дифференцирование $\dfrac{\partial}{\partial\psi(f)}$ (см. [5]). Оно определяется следующим образом. В случае $f = e_{i_0}$

$$\frac{\partial}{\partial\psi(e_{i_0})}\psi(e_{i_1})\dots\psi(e_{i_k}) =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ при } i_0 \neq i_s \text{ ни при каком } s = 1, \dots, k, \\ (-1)^{s-1}\psi(e_{i_1})\dots\check{\psi}(e_{i_s})\dots\psi(e_{i_k}) \text{ при } i_0 = i_s. \end{cases} \tag{37}$$

Для произвольного $f = \sum c_ie_i$

$$\frac{\partial}{\partial\psi(f)} = \sum_i c_i\frac{\partial}{\partial\psi(e_i)}. \tag{38}$$

Голоморфное представление для $\mathcal{F}_s$. Пусть $\mathcal{H} = l_2(\mathcal{N}) = \mathbb{C}^N$, $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, и R^N—гильбертово пространство голоморфных функций $f(z_1, \dots, z_N)$ на $\mathbb{C}^N$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{\pi^N}\int f\bar{g}\exp\{-\sum_{k=1}^{N} |\, z_k\,|^2\}\prod dx_kdy_k, \tag{39}$$

$$z_k = x_k + iy_k.$$

Мы определим отождествление

$$R_N \leftrightarrow \mathcal{F}_s(l_2(\mathcal{N})) \tag{40}$$

формулой

$$z_1^{k_1}\dots z_N^{k_N} \leftrightarrow (a_1^*)^{k_1}\dots(a_N^*)^{k_N}\Omega. \tag{41}$$

При этом операторы a_k^* являются операторами умножения на z_k, а $a_kf = \dfrac{\partial}{\partial z_k}f$.

Голоморфное представление для $\mathcal{F}_a$. Введем, в отличие от алгебры G, грассманову алгебру $G_2(l_2(\mathcal{N}))$ над $l_2(\mathcal{N})$

с удвоенным количеством антикоммутирующих образующих $\psi_1,\dots,\psi_n,\bar\psi_1,\dots,\bar\psi_n$. Алгебру $G_1(l_2(\mathcal{N}))\subset G_2(l_2(\mathcal{N}))$ полиномов от образующих $\{\psi_i, i=1,\dots,N\}$ назовем алгеброй голоморфных функций и введем в ней скалярное произведение по формуле

$$(f,g)=\int f\bar g\prod_{i=1}^{N}\exp\{-\overline{\psi}_i\psi_i\}\prod_{i=1}^{N}d\bar\psi_i d\psi_i, \qquad (42)$$

где $\int\dots\prod_{i=1}^{N}d\overline{\psi}_i d\psi_i$—интеграл Березина по алгебре $G_2(l_2(\mathcal{N}))$ (см. [5], а также §5), а $\overline{g}$ получается из g с помощью антилинейной инволюции θ в $G_2(l_2(\mathcal{N}))$, действующей на образующие по формуле

$$\theta\psi_i=\overline{\psi}_i,\ \ \theta\overline{\psi}_i=\psi_i \qquad (43)$$

и продолжающейся на всю алгебру $G_2(l_2(\mathcal{N}))$ по правилу

$$\theta(AB)=\theta(B)\theta(A).$$

Нетрудно показать, что базис (35^a) является ортонормированным базисом в $G_2(l_2(\mathcal{N}))$. Отображение $G_1(l_2(\mathcal{N}))$ в $\mathcal{F}_a(l_2(\mathcal{N}))$ имеет по-прежнему вид (36) и операторы $a(f)$ и $a^*(f)$ действуют в $G_1(l_2(\mathcal{N}))$, как и прежде.

Свободные динамики в фоковских пространствах. Пусть в одночастичном пространстве $\mathcal{H}$ определен самосопряженный оператор h. Тогда мы можем определить операторы $\Gamma(e^{ith})$ как в пространстве $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, так и в пространстве $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$. При этом операторы

$$\Gamma(e^{ith})=\exp\{itd\Gamma(h)\}$$

образуют унитарную группу преобразований пространства $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ или $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$, т. е. шредингеровскую динамику в этих пространствах, называемую обычно *свободной динамикой* (порожденной h). Соответствующую гайзенбергову динамику

$$\tau_t(A)=\exp\{itd\Gamma(h)\}A\exp\{-itd\Gamma(h)\}$$

называют также *свободной динамикой в алгебрах* $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}))$ или $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_a(\mathcal{H}))$.

§ 4. Алгебра КАС и свободная динамика в ней. Динамика системы взаимодействующих ферми частиц. Аналог теоремы Робинсона

1. Алгебра КАС (канонических антикоммутационных соотношений).

Определение 1. C^*-алгебра $\mathfrak{A}(\mathcal{H})\subset\mathfrak{B}(\mathcal{F}_a(\mathcal{H}))$, порожденная всеми операторами $a(f), f\in\mathcal{H}$, действующими в антисимметрическом фоковском пространстве $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$, называется алгеброй *канонических антикоммутационных соотношений* над пространством $\mathcal{H}$ (или кратко алгеброй КАС).

Всякое упорядоченное семейство подпространств $\mathcal{H}_\Lambda\subset\mathcal{H}$, помеченных элементами Λ некоторого упорядоченного множества так, что $\mathcal{H}_{\Lambda_1}\subset\mathcal{H}_{\Lambda_2}$ при $\Lambda_1<\Lambda_2$, и порождающее все $\mathcal{H}$ (т. е. такое, что $\bigcup\mathcal{H}_\Lambda=\mathcal{H}$), задает представление алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ в виде

$$\mathfrak{A}(\mathcal{H})=\bigcup_{\Lambda}\mathfrak{A}(\mathcal{H}_\Lambda), \qquad (1)$$

где $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_\Lambda)\subset\mathfrak{A}(\mathcal{H})$—подалгебра $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, порожденная операторами $\{a(f),a^*(f),f\in\mathcal{H}_\Lambda\}$. Поскольку алгбера $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_{\Lambda_1})$ гомоморфно и изометрически вложена в алгебру $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_{\Lambda_2})$ при $\Lambda_1<\Lambda_2$, представление (1) задает квазилокальную структуру на $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ (см. § 3.0). При этом алгебры $\mathfrak{A}_\Lambda\equiv\mathfrak{A}(\mathcal{H}_\Lambda)$ называются алгебрами *локальных* элементов. В частности, при $\mathcal{H}=L_2(R^\nu,dx)$ или $\mathcal{H}=l_2(Z^\nu)$ в качестве множества индексов Λ выбирают совокупность ограниченных подмножеств R^ν (или Z^ν), упорядоченных по включению; при этом $\mathcal{H}_\Lambda=L_2(\Lambda,dx)$ (или $\mathcal{H}_\Lambda=l_2(\Lambda)$). Заметим, что алгебра $\mathfrak{A}_\Lambda$ является супералгеброй: замыкание полиномов от $a^\#(f)$, образованных мономами $\prod a^\#(f)$ с четным числом множителей составляет четное пространство, а замыкание полиномов из нечетных мономов—нечетное подпространство. Далее, при $\Lambda\bigcap\Lambda'\neq 0$ ($\Lambda\subset R^\nu$ или $\Lambda\subset Z^\nu$) алгебра $\mathfrak{A}_{\Lambda\bigcup\Lambda'}=\mathfrak{A}_\Lambda\otimes\mathfrak{A}_{\Lambda'}$, где тензорное произведение $\otimes$ понимается в смысле супералгебр (см. [23]). В частности, указанное выше вложение $\mathfrak{A}_{\Lambda_1}\to\mathfrak{A}_{\Lambda_2}$ таково, что $A\in\mathfrak{A}_{\Lambda_1}$ переходит в $A\otimes\mathbf{1}_{\Lambda_2\setminus\Lambda_1}\in\mathfrak{A}_{\Lambda_2}$.

В случае, когда $\dim\mathcal{H}=n<\infty$, алгебру $\mathfrak{A}_{\mathcal{H}}$ можно представить в виде

$$\mathfrak{A}(\mathcal{H}) = \mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_n. \qquad (2)$$

Здесь $\mathfrak{A}_i$—алгебра, порожденная операторами $a(e_i), a^*(e_i)$, где $\{e_1, \ldots, e_n\}$—ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Поскольку каждая алгебра $\mathfrak{A}_i$ изоморфна алгебре матриц 2-го порядка, из представления (2) видно, что $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ изоморфна алгебре $\mathfrak{M}_{2^n}$ матриц 2-го порядка, т. е. совпадает с алгеброй $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_a(\mathcal{H}))$. Это неверно для бесконечномерного $\mathcal{H}$: в этом случае алгебра $\mathfrak{A}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{F}_a(\mathcal{H}))$ не содержит ни одного компактного оператора (см. [7]).

2. Свободная динамика в алгебре КАС. Пусть h—самосопряженный оператор, действующий в одночастичном подпространстве $\mathcal{H}$ и τ_t—порожденная им свободная динамика в алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_a(\mathcal{H}))$ (см. § 3).

Лемма 1. *Алгебра КАС $\mathfrak{A}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{F}_a(\mathcal{H}))$ инвариантна относительно динамики τ_t.*

Доказательство. Верна формула

$$\tau_t a^{\#}(f) = a^{\#}(e^{-ith}f), \qquad (3)$$

из которой уже и следует утверждение леммы. Для доказательства формулы (3) выберем ортонормированный базис $\{f_i\}$ в $\mathcal{H}$, принадлежащий области определения D_h оператора h, и обозначим $c_{ij} = (hf_i, f_j)$— матричные элементы h в этом базисе. Тогда оператор $d\Gamma(h)$ равен

$$H = d\Gamma(h) = \sum c_{ij} a^*(f_i) a(f_j), \qquad (4)$$

что можно проверить непосредственной выкладкой (ряд (4) сходится в сильной топологии $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_a(\mathcal{H}))$). Далее, если обозначить $a_t(f) = \tau_t a(f)$, то получим, что

$$\frac{da_t(f_k)}{dt} = \tau_t(i[H, a_t(f)]) = \tau_t(i \sum_j c_{kj} a_t(f_j)) = \tau_t(a_t(-ihf_k)). \quad (5)$$

Из начального условия $a_0(f_k) = a(f_k)$ получаем, что

$$a_t(f_k) = a(e^{-ith} f_k). \qquad (6)$$

По линейности из формулы (6) вытекает (3).

В случае пространства $\mathcal{H} = L_2(R^\nu, dx)$ или $\mathcal{H} = l_2(Z^\nu)$ мы будем рассматривать трансляционно-инвариантные одночастичные гамильтонианы, т. е. гамильтонианы коммутирующие

с группой U_x сдвигов $(U_x f)(y) = f(y - x), x \in R^\nu$ (или $x \in Z^\nu$). Такой оператор h в $L_2(R^\nu, dx)$ задается на множестве $S(R^\nu) \subset L_2(R^\nu, dx)$ формулой

$$(hf)(x) = \int_{R^\nu} \hat{h}(x - y) f(y) dy, \ x \in R^\nu, \qquad (7)$$

где $\hat{h}$—некоторая обобщенная функция, такая, что оператор (7) на $S(R^\nu)$ существенно самосопряжен. В случае пространства $l_2(Z^\nu)$ трансляционно-инвариантный одночастичный гамильтониан имеет вид

$$(hf)(x) = \sum_{Z^\nu} \hat{h}(x - y) f(y). \qquad (8)$$

После перехода к преобразованию Фурье

$$f(x) \to \tilde{f}(k) = \int_{R^\nu} \exp\{itk\} f(x) dx, \ k \in R^\nu,$$

или

$$\tilde{f}(k) = \sum_{Z^\nu} \exp\{itk\} f(x), \ k \in T^\nu,$$

(здесь T^ν—ν-мерный тор) операторы (7) и (8) перейдут в операторы умножения на функцию

$$(h\tilde{f})(k) = \tilde{h}(k) f(k), k \in R^\nu (\text{ или } k \in T^\nu), \qquad (9)$$

где $\tilde{h}$—преобразование Фурье функции $\hat{h}$. Функция $\tilde{h}(k)$ обычно предполагается достаточно гладкой функцией k.

В случае непрерывного пространства R^ν наиболее интересные примеры связаны с гамильтонианами, задаваемыми функциями $\tilde{h}(k) = k^2$ или $\tilde{h}(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$, $m \neq 0$.

3. Построение динамики для системы взаимодействующих ферми-частиц в R^ν (аналог теоремы Робинсона). Рассмотрим одночастичный гамильтониан

$$hf = \frac{1}{2} \Delta f, \qquad (10)$$

где Δ—оператор Лапласа в $L_2(R^\nu, dx)$. Соответствующая ему группа $\exp\{ith\}$ задается формулой

$$(e^{ith} f)(x) = \frac{1}{(-2\pi it)^{1/2}} \int_{R^\nu} \exp\left\{ i \frac{(x - y)^2}{2t} \right\} f(y) dy. \qquad (11)$$

Обозначим

$$H_0 = d\Gamma(h) = \frac{1}{2}\int\limits_{R^\nu\times R^\nu} (\Delta\delta)(x-y)a^*(x)a(y)dxdy. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь ограниченные операторы в $\mathcal{F}_a(L_2(R^\nu, dx))$, имеющие вид

$$V = \sum_{s=1}^{M} V_s, \tag{13}$$

где V_s—моном:

$$V_s = a^*(f_1^{(s)})\dots a^*(f_{m_s}^{(s)})a(g_1^{(s)})\dots a(g_{l_s}^{(s)}), \tag{14}$$

где $f_i^{(s)}, g_j^{(s)} (i = 1,\dots,m_s, j = 1,\dots,l_s)$—функции из $S(R^\nu)$.

Наши построения применимы и к более общему случаю операторов вида

$$V_s = \int\int K_s(x_1,\dots,x_{m_s},y_1,\dots,y_{l_s})a^*(x_1)\dots a^*(x_{m_s})\times$$
$$\times a(y_1)\dots a(y_{l_s})dx_1\dots dx_{m_s}dy_1\dots dy_{l_s}, \tag{15}$$

где $K_s(x_1,\dots,x_{m_s},y_1,\dots,y_{l_s}) \in S(R^{\nu(m_s+l_s)})$ антисимметричны в отдельности по переменным $x_1,\dots,x_{m_s}$ и $y_1,\dots,y_{l_s}$.

Мы предполагаем, что вместе с каждым слагаемым V_s в (13) входит и сопряженное к нему слагаемое V_s^*, так что оператор V самосопряжен:

$$V^* = V. \tag{16}$$

Таким образом, оператор

$$H = H_0 + \lambda V,$$

заданный на области определения $D_{H_0} \subset \mathcal{F}_a$ оператора H_0 при любом вещественном λ, существенно самосопряжен (критерий Като; см. [36]).

Операторы вида (13), (14) (или (15)) назовем вполне гладкими операторами. Однако эти операторы уже не трансляционно-инвариантны, т. е. не коммутируют с группой трансляций

$$U_x = \Gamma(U_x),\ x \in R^\nu, \tag{17}$$

действующих в $\mathcal{F}_a$.

Тем не менее, мы можем по оператору V построить уже трансляционно-инвариантный оператор W в $\mathcal{F}_a$, “усреднив” V по всем его “сдвигам”. Более точно, рассмотрим для каждого $x \in R^\nu$ оператор

$$V_x = U_x V U_x^{-1} = \sum_s V_s(x),\ \ V_s(x) = U_x V_s U_x^{-1}, \tag{18}$$

и введем оператор

$$W = \int\limits_{R^\nu} V_x dx = \sum_{s=1}^{M} W_s, \tag{19}$$

где каждый оператор W_s имеет вид (15) с ядрами

$$\mathcal{K}_s(x_1,\dots,x_{m_s},y_1,\dots,y_{l_s}) =$$
$$= \int K_s(x_1+x,\dots,x_{m_s}+x,y_1+x,\dots,y_{l_s}+x)dx \tag{20}$$

такими, что

$$\mathcal{K}_s(x_1+x_0,\dots,x_{m_s}+x_0,y_1+x_0,\dots,y_{l_s}+x_0) =$$
$$= \mathcal{K}_s(x_1,\dots,x_{m_s},y_1,\dots,y_{l_s}). \tag{21}$$

Оператор W уже трансляционно-инвариантен, но, вообще говоря, неограничен. Мы предположим, что для всех s

$$l_s > 0 \tag{22}$$

(и, следовательно, в силу условия самосопряженности (16) $m_s > 0$). В этом случае $V\Omega = 0$ и этим же свойством обладает W.

Отсюда следует, что W определен на множестве $\mathcal{F}_{a,0}(S(R^\nu))$ всех финитных последовательностей

$$\{f_0, f_1, \dots, f_n, 0, \dots\} \in \mathcal{F}_a,\ \ n = 0,1,2,\dots, \tag{23}$$

компоненты которых $f_k \in S(R^{\nu k})$, $k \leq n$, и симметричен на этой области.

Теорема 2. *Последовательности* (23) *на множестве* $\mathcal{F}_{a,0}(S(R^\nu))$ *являются аналитическими векторами для оператора*

$$H = H_0 + \lambda W \tag{24}$$

и, следовательно, при любом вещественном λ этот оператор в существенном самосопряжен на $\mathcal{F}_{a,0}(S(R^\nu))$ (критерий Нельсона, см. [36]).

Доказательство полностью аналогично доказательству следующей ниже теоремы 3.

Таким образом, в случае, когда выполнено условие (22), определена динамика $U_t = \exp\{itH\}$ в пространстве $\mathcal{F}_a$, а также соответствующая гайзенбергова динамика

$$\tau_t(A) = U_t A U_t^{-1}, \quad A \in \mathfrak{B}(\mathcal{F}_a). \tag{25}$$

В случае, когда условие (22) нарушено, оператор W, а тем самым и оператор H, могут не иметь всюду плотной области определения. Так, например, будет в случае, когда

$$V = \int\limits_{R^\nu} f(y)a^*(y)dy + \int\limits_{R^\nu} \bar{f}(y)a(y)dy, \quad f \in S(R^\nu).$$

Соответствующий усредненный оператор

$$W = c\int\limits_{R^\nu} a^*(y)dy + \bar{c}\int\limits_{R^\nu} a(y)dy \tag{26}$$

не может быть задан ни на одном векторе из $\mathcal{F}_a$.

Таким образом, в этом случае мы не можем соотнести с формальным выражением (26) никакой (шредингеровской) динамики в $\mathcal{F}_a$. Однако, мы свяжем с этим выражением определенным образом построенную гайзенбергову динамику в алгебре КАС $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{F}_a)$. Для любого куба $\Lambda \subset R^\nu$ положим

$$H_\Lambda = H_0 + \lambda W_\Lambda, \tag{27}$$

где

$$W_\Lambda = \int\limits_\Lambda V_x dx. \tag{28}$$

В этом случае W_Λ—ограниченный оператор и оператор H_Λ, определенный на области $D_H \subset \mathcal{F}_a$, самосопряжен.

Введем группу автоморфизмов $\alpha_t^\Lambda(\cdot)$ (гайзенбергову динамику) алгебры $\mathfrak{A}$ по формуле

$$\alpha_t^\Lambda(A) = \exp\{itH_\Lambda\}A\exp\{-itH_\Lambda\}, \quad A \in \mathfrak{A}. \tag{29}$$

Воспользовавшись формулой (5.4.0), мы можем переписать $\alpha_t^\Lambda(A)$ в виде ряда

$$\alpha_t^\Lambda(A) = \tau_t(A) + \sum (i\lambda)^n \iint\limits_{0 < t_1 < \ldots < t_n < t} [\tau_{t_1}(W_\Lambda),$$

$$[\tau_{t_2}(W_\Lambda), [\ldots[\tau_{t_n}(W_\Lambda), \tau_t(A)]\ldots]]]dt_1 \ldots dt_n, \tag{30}$$

где через τ_t обозначена свободная гайзенбергова динамика (3) в алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_a)$:

$$\tau_t(A) = \exp\{itH_0\}A\exp\{-itH_0\}. \tag{31}$$

Норма каждого слагаемого ряда (30) допускает оценку

$$(2\lambda)^n \parallel W_\Lambda \parallel^n \parallel A \parallel t^n/n! \leq (2\lambda)^n \parallel V \parallel^n | \Lambda |^n \parallel A \parallel t^n/n! \tag{32}$$

и, следовательно, этот ряд сходится по норме.

Теорема 3. *Пусть оператор H_0 имеет вид* (12), *а оператор V представляется в виде суммы* (13), *где в каждом слагаемом $m_s + l_s$—четно, а ядра $K_s \in S(R^{\nu(m_s+l_s)})$ финитны. Тогда для всех t и всех локальных элементов $A \in \mathfrak{A}^0$ алгебры КАС ($\mathfrak{A}^0$— подалгебра таких элементов) существует предел*

$$\lim_{\Lambda\uparrow R^\nu} \alpha_t^\Lambda(A) = \alpha_t(A)\,. \tag{33}$$

в смысле сходимости по норме. Отображение $A \to \alpha_t(A), A \in \in \mathfrak{A}^0$, продолжается по непрерывности до группы $*$-автоморфизмов алгебры КАС $\mathfrak{A}$ (за которым мы сохраним то же обозначение α_t).

При этом для достаточно малых $| t |$ элемент $\alpha_t(A), A \in \mathfrak{A}^0$, представляется в виде ряда, сходящегося по норме:

$$\alpha_t(A) = \tau_t(A) + \sum_{n=1}^{\infty} (i\lambda)^n \iint\limits_{0<t_1<\ldots<t_n<t} dt_1 \ldots dt_n \times$$

$$\times \iint\limits_{R^{\nu n}} dx_1 \ldots dx_n [V_{x_1,t_1}[\ldots[V_{x_n,t_n}, \tau_{t_n}(A)]\ldots]], \tag{34}$$

где обозначено

$$V_{x,t} = \tau_t(V_x). \tag{35}$$

Доказательство. Начнем с доказательства последнего утверждения теоремы, а именно, покажем, что ряд (35) сходится относительно операторной нормы. Разобьем пространство R^ν на единичные кубы $\{B_y, y \in Z^\nu\}$, где y—центр куба B_y. В каждом пространстве $L_2(B_y)$ выберем ортонормированный базис $\{\varphi_i^y, i = 1, 2, \ldots\}$ и, продолжив каждую функцию φ_i^y нулем вне куба B_y, получим ортонормированный базис $\{\varphi_i^y, y \in Z^\nu, i = 1, 2, \ldots\}$ во всем пространстве $L_2(R^\nu)$. Пусть $\Gamma = \{\gamma_y, y \in Z^\nu\}$— финитный мультииндекс, где при каждом $y \in Z^\nu$ через γ_y обозначено конечное подмножество натурального ряда, причем только конечное число подмножеств $\gamma_y \neq \emptyset$. Обозначим $\mathrm{supp}\Gamma = \{y : \gamma_y \neq \emptyset\}$ и для каждой пары $\Gamma, \tilde\Gamma$ обозначим $\mathcal{A}_{\Gamma,\tilde\Gamma}$ моном

$$\mathcal{A}_{\Gamma,\tilde\Gamma} = \prod_{y\in\mathrm{supp}\Gamma} \prod_{i\in\gamma_y} a^*(\varphi_i^y) \prod_{\tilde y\in\mathrm{supp}\tilde\Gamma} \prod_{\tilde i\in\tilde\gamma_{\tilde y}} a(\varphi_{\tilde i}^{\tilde y}), \tag{36}$$

причем в первом произведении $\prod\limits_{i\in\gamma_y} a^*(\varphi_i^y)$ множители расположены в порядке возрастания индексов $i \in \gamma_y$, а во втором произведении $\prod\limits_{y\in\mathrm{supp}\Gamma}$ —в порядке лексикографического возрастания точек в $\mathrm{supp}\Gamma$, аналогичный порядок принят и для произведения $a(\varphi_{\tilde i}^{\tilde y})$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть задан локальный элемент*

$$\mathcal{A} = \int K(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_{\tilde l}) a^*(x_1) \ldots a^*(x_l) \times$$

$$\times a(y_1) \ldots a(y_{\tilde l}) dx_1 \ldots dx_l dy_1 \ldots dy_l, \tag{37}$$

где K—бесконечно-дифференцируемая финитная функция, носитель которой содержится в множестве $G^{l+\tilde l} \subset R^{\nu(l+\tilde l)}$, $G \subset \subset R^\nu$— ограниченная область.

Тогда верно следующее разложение:

$$\tau_t(A) = \sum_{\Gamma,\tilde\Gamma} C_t^{(K)}(\Gamma, \tilde\Gamma) \mathcal{A}_{\Gamma,\tilde\Gamma},$$

$$|\, \Gamma \,| = \sum_y |\, \gamma_y \,| = l, \tag{38}$$

$$|\, \tilde\Gamma \,| = \sum_{\tilde y} |\, \tilde\gamma_{\tilde y} \,| = \tilde l,$$

а коэффициенты $C_t^{(K)}(\Gamma, \tilde\Gamma)$ удовлетворяют оценке

$$|\, C_t^{(K)}(\Gamma, \tilde\Gamma) \,| < \prod_{y\in\mathrm{supp}\Gamma} \frac{1}{[|\, \gamma_y \,| (d(y, G) + 1)^{\nu+1}]^{|\gamma_y|}} \times$$

$$\prod_{\tilde y\in\mathrm{supp}\tilde\Gamma} \frac{1}{[|\, \tilde\gamma_{\tilde y} \,| (d(\tilde y, G) + 1)^{\nu+1}]^{|\tilde\gamma_{\tilde Y}|}} (t^{\nu/2+1})^{l+\tilde l} R^{l+\tilde l}, \tag{39}$$

где $R = R(K)$—некоторая константа, зависящая от ядра K; а $d(y, G)$— расстояние точки y до множества G.

Доказательство этой леммы мы дадим ниже, а сейчас, опираясь на нее, проведем доказательство теоремы. Нам будет удобно ввести операторы

$$\tilde V_{z,s} = \int_{B_z} V_s(x) dx, \tag{40}$$

где $V_s(x) = U_x V_s U_x^{-1}$—одно из слагаемых суммы (13). Поскольку $V_{z,s}$ также имеет вид (37), $\tau_t(\tilde V_{z,s})$ допускает разложение, аналогичное (38) с оценкой коэффициентов— $C_t^{z,s}(\Gamma, \tilde\Gamma)$ аналогичное оценке (39), в которой, однако, величину $d(y, G)$ можно заменить расстоянием $|\, z - y \,|$.

В введенных обозначениях n-й член ряда (34) можно записать в виде

$$\int\int\ldots\int_{0<t_1<\ldots<t_n<t} \sum_{(z_1,s_1,\Gamma_1,\tilde\Gamma_1),\ldots,(z_n,s_n,\Gamma_n,\tilde\Gamma_n)} \prod C_{t_1}^{z_1,s_1}(\Gamma_1, \tilde\Gamma_1) \ldots$$

$$\ldots C_{t_n}^{z_n,s_n}(\Gamma_n, \tilde\Gamma_n) C_t^{(K)}(\Gamma, \tilde\Gamma)[\mathcal{A}_{\Gamma_1,\tilde\Gamma_1}, [\ldots[\mathcal{A}_{\Gamma_n,\tilde\Gamma_n}, \mathcal{A}_{\Gamma,\tilde\Gamma}]]]. \tag{41}$$

В силу того, что каждый моном $\mathcal{A}_{\Gamma_i,\tilde\Gamma_i}$ содержит четное число операторов $a^\#$, n-кратный коммутатор в (41) отличен от нуля, если только выполнены условия: при каждом i

$$(\mathrm{supp}\,\Gamma_i \bigcup \mathrm{supp}\,\tilde\Gamma_i) \bigcap [\bigcup_{j=i+1}^{n} (\mathrm{supp}\,\Gamma_j \bigcup \mathrm{supp}\,\tilde\Gamma_j) \bigcup$$

$$\bigcup(\operatorname{supp}\Gamma\bigcup\operatorname{supp}\tilde{\Gamma})]\neq\emptyset. \tag{42}$$

При этом норма этого коммутатора не превосходит 2^n. Суммируя затем при фиксированных $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ по $(z_1, s_1, \Gamma_1, \tilde{\Gamma}_1)$, затем по $(z_2, s_2, \Gamma_2, \tilde{\Gamma}_2)$ и т. д. и, наконец, по $\Gamma, \tilde{\Gamma}$, получим в силу (39) и (41), а также условия $|\ \Gamma_i\ | \leq \max\limits_{s=1,\dots,M} m_s$, $|\ \tilde{\Gamma}_i\ | \leq \max\limits_{s=1,\dots,M} \tilde{m}_s$, что сумма в (41) не превосходит

$$t^{(\nu/2+1)(L+\tilde{L})n}\frac{(n+l+\tilde{l})!}{(l+\tilde{l})!}R_1^n R(K), \tag{43}$$

где $L = \min\limits_{s=1,\dots,M} m_s$, $\tilde{L} = \min\limits_{1,\dots,M} l_s$, а $R_1 = R_1(V)$.

Интегрируя затем по $t_1, \dots, t_n$, получим окончательно, что норма n-го члена ряда оценивается выражением

$$t^{[(\nu/2+1)(L+\tilde{L})+1]n}\frac{(n+l+\tilde{l})!}{n!(l+\tilde{l})!}R_1^n R(K). \tag{44}$$

Отсюда следует, что при $|\ t\ |< t_0 = t_0(V)$ ряд (34) сходится. Наши оценки показывают также, что ряд для $\alpha_t^{\Lambda}(A)$, аналогичный ряду (34), в котором интегрирование в n-м члене по $R^{\nu n}$ заменено интегралом по Λ^n, почленно сходится (по норме) к ряду (34).

Итак, мы показали, что при малых t для любого локального $A \in \mathfrak{A}$ выполняется (33). Поскольку $\|\ \alpha_t^{(\Lambda)}(A)\ \| = \|\ A\ \|$, такое же соотношение выполнено и для предельного отображения $\alpha_t(A)$. Так как локальная алгебра $\mathfrak{A}^0$ всюду плотна в алгебре $\mathfrak{A}$, отображение $\alpha_t(A)$ продолжается до $*$-автоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$. При этом для всех $A \in \mathfrak{A}$ и $|\ t\ |< t_0$

$$\alpha_t^{(\Lambda)}(A)\to\alpha_t(A), \Lambda\uparrow R^{\nu} \tag{45}$$

(сходимость по норме).

Далее, поскольку

$$\alpha_{t_1}^{\Lambda}(\alpha_{t_1}^{\Lambda}(A)) = \alpha_{t_1+t_2}^{\Lambda}(A) \tag{46}$$

при $|\ t_1\ |, |\ t_1\ |< t_0$, существует предел (при $\Lambda \uparrow R^{\nu}$) левой части, с помощью которого определяются автоморфизмы α_t при $|\ t\ |< 2t_0$. Продолжая таким образом дальше, мы определим группу: $\alpha_{t_1}\alpha_{t_2} = \alpha_{t_1+t_2}$. Аналогичным образом доказывается соотношение (33). Теорема доказана.

Доказательство леммы 4. Заметим, что для $\mathcal{A}$ вида (37)

$$\tau_t(\mathcal{A}) = \int\limits_{(R^{\nu})^{l+\tilde{l}}} \tilde{K}(x_1,\dots,x_l,y_1,\dots,y_{\tilde{l}})a^*(x_1)\dots a^*(x_l)\times$$

$$\times a(y_1)\dots a(y_{\tilde{l}})dx_1\dots dx_l dy_1\dots dy_{\tilde{l}},$$

где

$$\tilde{K}(x_1,\dots,x_l,y_1,\dots,y_{\tilde{l}}) = \int\prod_{i=1}^{l}g_t(x_i-\xi_i)\prod_{j=1}^{\tilde{l}}\bar{g}_t(y_j-\eta_j)\times$$

$$\times K(\xi_1,\dots,\xi_l,\eta_1,\dots,\eta_{\tilde{l}})d\xi_1\dots d\xi_l d\eta_1\dots d\eta_{\tilde{l}}, \tag{47}$$

а $g_t(x-y)$—ядро оператора $\exp\{ith\}$ в $L_2(R^{\nu})$ (см. [36]). Далее, коэффициенты $C_t^{(K)}(\Gamma,\tilde{\Gamma})$ разложения (38) равны

$$C_t^{(K)}(\Gamma,\tilde{\Gamma}) = \int\tilde{K}(x_1,\dots,x_l,y_1,\dots,y_{\tilde{l}})\varphi_{\Gamma}(x_1,\dots,x_l)\times$$

$$\times\varphi_{\tilde{\Gamma}}(y_1,\dots,y_{\tilde{l}})dx_1\dots dx_l dy_1\dots dy_{\tilde{l}}, \tag{48}$$

где $\varphi_{\Gamma}(x_1,\dots,x_l)$—функция, получающаяся антисимметризацией функции $\varphi_{i_1,1}^{y_1}(x_1)\dots\varphi_{i_1,k_1}^{y_1}(x_{k_1})\varphi_{i_2,1}^{y_2}(x_{k_1+1})\dots\varphi_{i_2,k_2}^{y_2}(x_{k_1+k_2})\dots$, где $\{y_1 < y_2 < \dots < y_n\} = \operatorname{supp}\Gamma$, а $\{i_{s,1} < i_{s,2} < \dots < i_{s,k_s}\} = \gamma_s$. Таким образом, оценка (39) получается из следующей оценки для функции $\tilde{K}$:

$$|\ \tilde{K}(x_1,\dots,x_l,y_1,\dots,y_{\tilde{l}})\ |< C(K)\prod_i\frac{1}{(d(x_i,G)+1)^{\nu+1}}\times$$

$$\times\prod_j\frac{1}{(d(y_j,G)+1)^{\nu+1}}t^{(\nu/2+1)(l+\tilde{l})} \tag{49}$$

с помощью известного неравенства $a_1\cdots a_n < \left(\dfrac{a_1+\dots+a_n}{n}\right)^n$. Достаточно доказать оценку (49) для функции одного переменного. Пусть

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\nu/2}}\int\exp\left\{\frac{i(x-\xi)^2}{2t}\right\}f(\xi)d\xi,$$

где $f(\xi)$—финитная бесконечно дифференцируемая функция с носителем в G. Покажем, что

$$| \bar{f}(x) |< \frac{ct^{\nu/2+1}}{(d(x,G)+1)^{\nu+1}}, \tag{50}$$

где $c = c(f)$—константа, зависящая лишь от функции f. Пусть $d(x,G) > 1$. Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпало с точкой $y_0 \in \partial G$, ближайшей к точке x, а отрицательная полуось x_1 прошла через точку x. Обозначим координату точки x через $-\xi, \xi = d(x, y_0)$. Тогда получим, что

$$\bar{f}(-\xi) = \frac{1}{(2\pi t)^{\nu/2}} \int\limits_0^\infty dy_1 \int\limits_{-\infty}^\infty \dots \int\limits_{-\infty}^\infty dy_2 \dots dy_\nu \exp\left\{\frac{i(y_1+\xi)^2}{2t}\right\} \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{\nu} \exp\left\{\frac{iy_j^2}{2t}\right\} f(y_1, y_2, \dots, y_\nu) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i t)^{\nu/2}} t \int\limits_0^\infty dy_1 \int\limits_{-\infty}^\infty \dots \int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left\{\frac{i(y_1+\xi)^2}{2t}\right\} \frac{i(y_1+\xi)}{t} \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{\nu} \exp\left\{\frac{iy_j^2}{2t}\right\} \frac{f(y_1, y_2, \dots, y_\nu)}{\imath(y_1+\xi)} dy_2 \dots dy_\nu =$$

$$= \frac{-t}{(2\pi t)^{\nu/2}} \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \dots \int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left\{\frac{i(y+s)^2}{2t}\right\} \prod_{j=2}^{\nu} \exp\left\{\frac{iy_j^2}{2t}\right\} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{f(y_1, y_2, \dots, y_\nu)}{i(y_1+\xi)} dy_1 \dots dy_\nu,$$

где в последнем равенстве мы проинтегрировали по частям по переменной y_1. Продолжая эту процедуру n раз мы получаем, что

$$\bar{f}(-\xi) = \frac{(-t)^n}{(2\pi t)^{\nu/2}} \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \dots \int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left\{\frac{i(y_1+\xi)^2}{2t}\right\} \prod_{j=2}^{\nu} \exp\left\{\frac{iy_j^2}{2t}\right\} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=0}^{n} C_{k,n} \frac{f_{y_1}^{(n-k)}(y_1, \dots, y_\nu)}{(y_1+\xi)^{n+k}}\right] dy_1 \dots dy_\nu,$$

где $C_{k,n}$—некоторые абсолютные коэффициенты. Из последнего выражения находим, что при любом n

$$| \tilde{f}(\xi) |< \frac{t^{n-\nu/2}}{\xi^n} c_n(f).$$

Полагая теперь $n = \nu + 1$, мы и получаем (50).

Замечание. Теорема о существовании гайзенберговой динамики для случая решетчатых квантовых систем была впервые установлена Робинсоном (см. [37]). Наши построения во многом аналогичны построениям Робинсона.

§ 5. Линейная динамика для ферми- и бозе-систем

1. Линейная динамика на алгебре КАС. Пусть X—счетное множество; рассмотрим фоковское пространство $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H} = l_2(X)$, и квадратичную форму операторов рождения и уничтожения

$$H = \frac{1}{2} \sum_{x_1,x_2} b_{x_1,x_2} a^*(f_{x_1}) a^*(f_{x_2}) + \frac{1}{2} \sum_{x_1,x_2} b^*_{x_1,x_2} a(f_{x_1}) a(f_{x_2}) +$$

$$+ \sum_{x_1,x_2} c_{x_1,x_2} a^*(f_{x_1}) a(f_{x_2}), \tag{1}$$

где $\{f_x, x \in X\}$—некоторый ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}$,

$$b_{x_1,x_2} = -b_{x_2,x_1}, \quad \mathrm{c}_{x_1,x_2} = \bar{\mathrm{c}}_{x_2,x_1}, \quad b^*_{x_1,x_2} = \bar{b}_{x_2,x_1},$$

причем матрицы $B = \{b_{x_1,x_2}\}, B^* = \{b^*_{x_1,x_2}\}, C = \{\mathrm{c}_{x_1,x_2}\}$ задают ограниченные операторы в пространстве $l_2(X)$ $(C^* = C)$.

При $B = 0$ выражение (1) является самосопряженным оператором в $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ и порождаемая им динамика

$$\tau_t(A) = \exp\{itH\} A \exp\{-itH\}$$

в алгебре КАС $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ является свободной динамикой с одночастичным оператором h, матрица которого в базисе $\{f_x, x \in X\}$ равна C.

Как мы уже отмечали, выражение (1) при $B \neq 0$, вообще говоря, может не задавать никакого оператора в пространстве

$\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ со всюду плотной областью определения. Однако мы можем связать с H гайзенбергову динамику в алгебре КАС, аналогично тому, как вводилась динамика α_t в предыдущем параграфе. Пусть $\Lambda \subset X$—конечное подмножество X и пусть

$$H_\Lambda = \frac{1}{2}\sum_{x_1,x_2\in\Lambda} b_{x_1,x_2} a^*(x_1)a^*(x_2) + \frac{1}{2}\sum_{x_1,x_2\in\Lambda} b^*_{x_1,x_2} a(x_1)a(x_2) +$$

$$+\sum_{x_1,x_2\in\Lambda} c_{x_1,x_2} a^*(x_1)a(x_2), \tag{2}$$

где $a^\#_x = a^\#(f_x)$. Очевидно, что H_Λ—ограниченный самосопряженный оператор в $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ и тем самым определена динамика

$$\tau^\Lambda_t(A) = \exp\{itH_\Lambda\}A\exp\{-itH_\Lambda\}. \tag{3}$$

Как мы увидим ниже, алгебра КАС $\mathfrak{A}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{F}_a(\mathcal{H}))$ инвариантна относительно этой динамики.

Лемма 1. *Для любого элемента $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ существует предел (в смысле сходимости по операторной норме)*

$$\tau_t(A) = \lim_{\Lambda\uparrow X} \tau^\Lambda_t(A),\ t \in R^1, \tag{4}$$

и предельные отображения $\tau_t : \mathfrak{A}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{A}(\mathcal{H})$, $t \in R^1$.

Доказательство. Рассмотрим действие динамики τ^Λ_t на образующие $\{a^\#_x, x \in X\}$ алгебры КАС. Обозначим $a^\#_{\Lambda,x}(t) = \tau^\Lambda_t(a^\#_x)$. Очевидно, что

$$a^\#_{\Lambda,x}(t) = a^\#_x \text{ при } x \notin \Lambda. \tag{5}$$

Кроме того, операторы $a^\#_{\Lambda,x}(t)$ удовлетворяют при любом $t \in R^1$ соотношениям антикоммутации и в выражениях для оператора H_Λ образующие $a^\#_x$ могут быть заменены операторами $a^\#_{\Lambda,x}(t)$ при любом фиксированном t. Отсюда

$$\frac{da_{\Lambda,x}(t)}{dt} = i[H_\Lambda, a_{\Lambda,x}(t)] = -i\sum_{x'\in\Lambda} c_{x,x'}a_{\Lambda,x'}(t) - i\sum_{x'\in\Lambda} b_{x,x'}a^\#_{\Lambda,x}(t),$$

$$\frac{da^*_{\Lambda,x}(t)}{dt} = i[H_\Lambda, a^*_{\Lambda,x}(t)] = i\sum_{x'\in\Lambda} c_{x,x'}a^*_{\Lambda,x'}(t) - i\sum_{x'\in\Lambda} b^*_{x,x'}a_{\Lambda,x'}(t), \tag{6}$$

Таким образом, мы получили линейную систему дифференциальных уравнений относительно операторов $\{a^\#_{\Lambda,x}(t), x \in \Lambda\}$, решение которой может быть записано в виде

$$a_{\Lambda,x}(t) = \sum_{x'\in\Lambda} g^\Lambda_{x,x'}(t)a_{x'} + \sum_{x'\in\Lambda} h^\Lambda_{x,x'}(t)a^*_x,\ x \in \Lambda,$$

$$a^*_{\Lambda,x}(t) = \sum_{x'\in\Lambda} \bar{g}^\Lambda_{x,x'}(t)a^*_{x'} + \sum_{x'\in\Lambda} \bar{h}^\Lambda_{x,x'}(t)a_{x'},$$

где блочная матрица

$$\begin{pmatrix} G_\Lambda(t) & H_\Lambda(t) \\ \overline{H}_\Lambda(t) & \overline{G}_\Lambda(t) \end{pmatrix} = \exp\left\{-it\begin{pmatrix} C_\Lambda & B_\Lambda \\ B^*_\Lambda & -C_\Lambda \end{pmatrix}\right\}, \tag{7}$$

$$G_\Lambda(t) = \{g^\Lambda_{x,x'}(t), x, x' \in \Lambda\},\ \ H_\Lambda(t) = \{h^\Lambda_{x,x'}(t), x, x' \in \Lambda\},$$

$C_\Lambda = \{c_{x,x'},\ x, x' \in \Lambda\}$ и аналогичный смысл имеют обозначения B_Λ и B^*_Λ. Поскольку матрица (7) при $\Lambda \uparrow X$ сильно сходится к оператору

$$\begin{pmatrix} G(t) & H(t) \\ \overline{H}(t) & \overline{G}(t) \end{pmatrix} = \exp\left\{-it\begin{pmatrix} C & B \\ B^* & -C \end{pmatrix}\right\}, \tag{8}$$

действующему в пространстве $l_2(X) \oplus l_2(X)$, из (6) и (8) получаем, что предел $\tau^\Lambda_t(a^\#_X)$ по норме в $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ существует и равен

$$\tau_t(a_x) = \lim_{\Lambda\uparrow X} \tau^\Lambda_t(a_x) = \sum_{x'\in X} g_{x,x'}(t)a_{x'} + \sum_{x'\in X} h_{x,x'}(t)a^*_{x'}, \tag{9}$$

$$\tau_t(a^*_x) = \lim_{\Lambda\uparrow X} \tau^\Lambda_t(a^*_x) = \sum_{x'\in X} \bar{g}_{x,x'}(t)a^*_{x'} + \sum_{x'\in X} \bar{h}_{x,x'}(t)a_{x'},$$

где $\{g_{x,x'}(t)\}$ и $\{h_{x,x'}(t)\}$—элементы матриц $G(t)$ и $H(t)$ соответственно.

Из доказанного вытекает, что существует предел (4) для любого элемента $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$, а также и то, что τ_t является динамикой в $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$. Лемма доказана.

2. Линейная динамика в алгебре Вейля. Напомним, что алгеброй Вейля называется C^*-алгебра $\eta(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}))$, ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{F}_s$, порожденная операторами Вейля $\{U(f), V(f), f \in \mathcal{H}\}$ (см. §3). Рассмотрим снова квадратичную форму относительно операторов рождения и уничтожения $a^{\#}(f), f \in \mathcal{H}$, где $\mathcal{H} = l_2(X)$, которую мы запишем для удобства с помощью операторов

$$\pi(f) = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^*(f) - a(f)),$$

$$\Phi(f) = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^*(f) + a(f))$$

(см.(13.3)):

$$H = \frac{1}{2}\sum_{x_1,x_2} a_{x_1,x_2}\pi_{x_1}\pi_{x_2} + \frac{1}{2}\sum_{x_1,x_2} b_{x_1,x_2}\Phi_{x_1}\Phi_{x_2} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{x_1,x_2} c_{x_1,x_2}(\Phi_{x_1}\pi_{x_2} + \pi_{x_1}\Phi_{x_2}), \qquad (10)$$

где $\pi_x = \pi_{f_x}, \Phi_x = \Phi(f_x)$, а $\{f_x, x \in X\}$—ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, помеченный элементами счетного множества X, $A = \{a_{x_1,x_2}\}, B = \{b_{x_1,x_2}\}$ и $C = \{c_{x_1,x_2}\}$— симметрические вещественные матрицы, задающие ограниченные самосопряженные операторы в $l_2(X)$, причем выполнены условия

$$A > 0,\ B > 0 \text{ и } C^2 < A^{1/2}BA^{1/2}. \qquad (11)$$

Выражение (10), вообще говоря, может не определять никакого самосопряженного оператора в $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$. Для построения с его помощью динамики в алгебре Вейля рассмотрим, как и в случае ферми-систем, оператор

$$H_\Lambda = \frac{1}{2}\sum_{x_1,x_2\in\Lambda} a_{x_1,x_2}\pi_{x_1}\pi_{x_2} + \frac{1}{2}\sum_{x_1,x_2\in\Lambda} b_{x_1,x_2}\Phi_{x_1}\Phi_{x_2} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{x_1,x_2\in\Lambda} c_{x_1,x_2}(\Phi_{x_1}\pi_{x_2} + \pi_{x_1}\Phi_{x_2}), \qquad (12)$$

где $\Lambda \subset X$—конечное подмножество.

Лемма 2. *При выполнении условия* (11) *оператор* H_Λ *в* $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ *самосопряжен.*

Доказательство. Легко проверить, что при выполнении условия (11) выражение H_Λ с помощью канонических линейных преобразований вида

$$\hat{\pi}_X^\Lambda = \sum_{x'\in\Lambda} U_{x,x'}^\Lambda \pi_{x'},\ \ \hat{\Phi}_X^\Lambda = \sum_{x'\in\Lambda} V_{x,x'}^\Lambda \Phi_{x'},\ x \in \Lambda, \qquad (13)$$

где матрицы $U^\Lambda = \{U_{x_1,x_2}^\Lambda, x_1, x_2 \in \Lambda\}, V^\Lambda = \{V_{x_1,x_2}^\Lambda, x_1, x_2 \in \Lambda\}$ удовлетворяют условию

$$V^\Lambda = ((U^\Lambda)^{\text{тр}})^{-1},$$

может быть приведено к следующей форме:

$$H_\Lambda = \omega\sum_{x\in\Lambda}[(\hat{\pi}_x^\Lambda)^2 + (\hat{\Phi}_x^\Lambda)^2 + \mu_x(\hat{\pi}_x^\Lambda\hat{\Phi}_x^\Lambda + \hat{\Phi}_x^\Lambda\hat{\pi}_x^\Lambda)], \qquad (14)$$

где $\omega > 0$, а $\mid \mu_x \mid< 1$ при всех $x \in \Lambda$. При этом операторы $\{\hat{\pi}_x^\Lambda, \hat{\pi}_x^\Lambda\}$ по-прежнему удовлетворяют коммутационным соотношениям (14.3)

$$[\hat{\pi}_x^\Lambda, \hat{\pi}_{x'}^\Lambda] = [\hat{\Phi}_x^\Lambda, \hat{\Phi}_{x'}^\Lambda] = 0, [\hat{\pi}_x^\Lambda,\ \hat{\Phi}_{x'}^\Lambda] = -i\delta_{x,x'}. \qquad (15)$$

Известно (см. [46]), что все представления конечной системы операторов $\{\hat{\pi}_x^\Lambda, \hat{\Phi}_x^\Lambda, x \in \Lambda\}$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (15), унитарно эквивалентны. Одно из таких представлений задается в пространстве $L_2(R^{|\Lambda|}, d^{|\Lambda|}x)$, если положить

$$\pi_x f = i\frac{df}{dq_x},\quad \Phi_x f = q_x f,$$

$$f = f\{q_x, x \in \Lambda\} \in L_2(R^{|\Lambda|}, d^{|\Lambda|}x),$$

и, таким образом, оператор H_Λ принимает вид

$$H_\Lambda f = \omega\sum_{x\in\Lambda}\left[-\frac{\partial^2 f}{\partial q_x^2} + q_x^2 f + \mu_x\left(q_x\frac{\partial f}{\partial q_x} + \frac{\partial}{\partial q_x}q_x f\right)\right] = \omega\sum_{x\in\Lambda} H_x.$$

Самосопряженность и полуограниченность каждого слагаемого H_x при $\mid \mu_x \mid< 1$ легко следует из так называемой КЛМН-теоремы (модификация известной теоремы Като—Релиха, см. [36]). Лемма доказана.

Следовательно, определена динамика

$$\tau_t^\Lambda(A) = \exp\{itH_\Lambda\}A\exp\{-itH_\Lambda\}$$

на подалгебре $\mathfrak{A}_\Lambda = \mathfrak{B}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_\Lambda)) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}))$, где $\mathcal{H}_\Lambda \subset \mathcal{H}$—подпространство, натянутое на векторы $\{f_x, x \in \Lambda\}$.

Лемма 3. *Для каждого локального элемента A алгебры Вейля (т. е. такого, что $A \in \mathfrak{A}_{\Lambda_0}$ при некотором конечном $\Lambda_0 \subset X$) существует сильный предел при каждом $t \in R^1$*

$$\lim_{\Lambda \uparrow X} \tau_t^{\Lambda}(A) = \tau_t(A).$$

Отображения $A \to \tau_t(A)$, $t \in K_1$, продолжаются на всю алгебру Вейля и задают на ней динамику.

Доказательство. Рассмотрим операторы

$$\pi_x^{\Lambda}(t) = \tau_t^{\Lambda}(\pi_x), \;\; \Phi_x^{\Lambda}(t) = \tau_t^{\Lambda}(\Phi_x), \;\; x \in \Lambda.$$

Рассуждая так же, как и в случае ферми-систем, и используя коммутационные соотношения (15), получаем дифференциальные уравнения для операторов $\pi_x^{\Lambda}(t)$ и $\Phi_x^{\Lambda}(t)$

$$\frac{d\pi_x^{\Lambda}(t)}{dt} = -\sum_{x' \in \Lambda} b_{x,x'} \Phi_{x'}^{\Lambda}(t) - \sum_{x' \in \Lambda} c_{x,x'} \pi_{x'}^{\Lambda}(t),$$

$$\frac{d\Phi_x^{\Lambda}(t)}{dt} = \sum_{x' \in \Lambda} a_{x,x'} \pi_{x'}^{\Lambda}(t) + \sum_{x' \in \Lambda} c_{x,x'} \Phi_{x'}^{\Lambda}(t), x \in \Lambda.$$

Решение этих уравнений представляется в виде

$$\pi_x^{\Lambda}(t) = \sum_{x' \in \Lambda} g_{x,x'}^{\Lambda}(t) \pi_{x'}^{\Lambda} + \sum_{x' \in \Lambda} h_{x,x'}^{\Lambda}(t) \Phi_{x'}^{\Lambda},$$

$$\Phi_x^{\Lambda}(t) = \sum_{x' \in \Lambda} d_{x,x'}^{\Lambda}(t) \pi_{x'}^{\Lambda} + \sum_{x' \in \Lambda} k_{x,x'}^{\Lambda}(t) \Phi_{x'}^{\Lambda},$$

где блочная матрица

$$\begin{pmatrix} G_{\Lambda} & H_{\Lambda} \\ D_{\Lambda} & K_{\Lambda} \end{pmatrix} = \exp\left\{ it \begin{pmatrix} -B_{\Lambda} & -C_{\Lambda} \\ C_{\Lambda} & A_{\Lambda} \end{pmatrix} \right\},$$

$G_{\Lambda}(t) = \{g_{x,x'}^{\Lambda}(t)\}, H_{\Lambda}(t) = \{h_{x,x'}^{\Lambda}(t)\}$ и т. д. , а A_{Λ}, B_{Λ}, C_{Λ} определены, как и в случае ферми-систем. При $\Lambda \uparrow X$ матрица $\begin{pmatrix} G_{\Lambda} & H_{\Lambda} \\ D_{\Lambda} & K_{\Lambda} \end{pmatrix}$ сильно сходится к матрице $\exp\left\{ it \begin{pmatrix} -B & -C \\ C & A \end{pmatrix} \right\} \equiv$ $\equiv \begin{pmatrix} G & H \\ D & K \end{pmatrix}$ и, таким образом, операторы $\Phi_x^{\Lambda}(t)$ и $\pi_x^{\Lambda}(t)$ сильно сходятся на элементах $\mathcal{F}_{s,0}$ к операторам $\Phi_x(t)$ и $\pi_x(t)$:

$$\Phi_x(t) = \sum_{x'} g_{x,x'}(t) \pi_{x'} + \sum_{x'} h_{x,x'}(t) \Phi_{x'} = \pi(f_x(t)) + \Phi(\tilde{f}_x(t)),$$

где $f_x(t) = \sum_{x'} g_{x,x'}(t) f_{x'}$, $\tilde{f}(t) = \sum_{x'} h_{x,x'}(t) f_{x'}$ и аналогично выражается $\pi_x(t)$. Отсюда следует (см. [36]), что операторы $\exp\{i\Phi_x^{\Lambda}(t)\}$ и $\exp\{i\pi_x^{\Lambda}(t)\}$ сильно сходятся к операторам

$$\exp\{i\Phi_x(t)\} = \exp\{\pi(f(t)) + \Phi(\tilde{f}(t))\} = V(f(t))U(\tilde{f}(t)) \exp\{i(f, \tilde{f})\},$$

принадлежащим к алгебре Вейля. То обстоятельство, что τ_t задает динамику на алгебре Вейля следует из того, что матрицы $\begin{pmatrix} G(t) & H(t) \\ D(t) & K(t) \end{pmatrix}$ образуют непрерывную группу в $l_2(X) \oplus$ $\oplus l_2(X)$ (см. [36]). Лемма доказана.

Заметим, что свободная динамика в алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}))$, задаваемая гамильтонианом

$$H = \sum h_{x_1,x_2} a^*(f_{x_1}) a(f_{x_2}) = d\Gamma(h),$$

где $h_{x_1,x_2} = (hf_{x_1}, f_{x_2})$, совпадает с линейной динамикой, порожденной выражением

$$\overline{H} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{x_1,x_2} h_{x_1,x_2} \pi_{x_1} \pi_{x_2} + \sum_{x_1,x_2} h_{x_1,x_2} \Phi_{x_1} \Phi_{x_2}\Big).$$

(Это видно из того, что при любом конечном $\Lambda \subset X$ операторы H_{Λ} и $\overline{H}_{\Lambda}$ отличаются лишь на константу.) Отсюда и из доказанной выше леммы заключаем, что алгебра Вейля $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}))$ инвариантна относительно свободной динамики в $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}))$.

§ 6. Случайная динамика (стохастические уравнения Ланжевена)

Большой класс систем со случайной динамикой—это марковские процессы с локальным взаимодействием, которые мы рассмотрим в следующем параграфе. Здесь же мы разберем близкую к ним по смыслу случайную динамику, описываемую бесконечной системой стохастических дифференциальных уравнений. Разбираемый здесь пример интересен еще и тем, что связан с физической концепцией так называемого “стохастического квантования” (см. обзор [29]). С точки зрения конструкции гиббсовских полей на бесконечной решетке

Z^ν смысл приводимых здесь построений состоит в следующем: для определенного класса гиббсовских перестроек μ гауссова поля на решетке Z^ν можно явно указать такую бесконечную систему стохастических дифференциальных уравнений, что μ служит инвариантным распределением марковского процесса, задаваемого решением этой системы, и для большего класса начальных распределений ν_0 их эволюция со временем ν_t сходится при $t \to \infty$ к гиббсовскому распределению μ.

1. Система стохастических дифференциальных уравнений (уравнения Ланжевена). Основным предметом нашего изучения будет служить бесконечная система уравнений вида

$$d\xi_x(t) = F_x(\{\xi_y(t), y \in Z^\nu\})dt + dW_x(t),\ x \in Z^\nu, \tag{1}$$

с начальными условиями $\xi_x(0) = \xi_x^0$. Здесь $\{\xi_x(t), x \in Z^\nu\}$— подлежащая определению система случайных процессов, помеченных точками $x \in Z^\nu$ и определенных для всех моментов времени $t \geq 0$, $\{\xi_x^0, x \in Z^\nu\} \subset R^{Z^\nu}$ — некоторая фиксированная конфигурация на Z^ν, $\{W_x(t), x \in Z^\nu\}$— набор независимых винеровских случайных процессов, выходящих из нуля: $W_x(0) = 0, x \in Z^\nu$, и определенных на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ). Наконец, $\{F_x(\{\xi_y, y \in Z^\nu\}), x \in Z^\nu\}$ система функций, определенных на множестве R^{Z^ν} всех конфигураций $\{\xi_y, y \in Z^\nu\} \in R^{Z^\nu}$. Фактически в рассматриваемом нами случае каждая функция F_x, как мы увидим, зависит от значений конфигураций $\{\xi_y\}$ в некоторой конечной фиксированной окрестности точки x

$$F_x = F_x(\{\xi_y, y : \mid x - y \mid < d\}).$$

Наглядный смысл системы уравнений (1) состоит в том, что приращение $d\xi_x$ процесса ξ_x за промежуток времени $(t, t + dt)$ складывается из "детерминированной" части $F_x dt$ (зависящей от значений всех процессов $\{\xi_y, y \in Z^\nu\}$ в момент времени t) и случайного приращения винеровского процесса dW_x. Для такого наглядного истолкования система уравнений (1) очень удобна, но для формального определения ее переписывают в интегральной форме

$$\xi_x(t) = \xi_x^0 + \int\limits_0^t F_x(\{\xi_y(t), y \in Z^\nu\})d\tau + W_x(t). \tag{2}$$

В рассматриваемом здесь примере функции F_x имеют следующий вид. Пусть U^0 квадратичная форма

$$U^0 = a_0 \sum_{x \in Z^\nu} \xi_x^2 + \sum_{\substack{x \neq y \\ x,y \in Z^\nu}} a_{x-y} \xi_x \xi_y, \tag{3}$$

где функция $a = \{a_u, u \in Z^\nu\}$ удовлетворяет условиям:

1) a финитна, т. е. $a_u = 0$ при $\mid u \mid > d$,

2) a четна: $a_u = a_{-u}$,

3) $a_0 > \sum\limits_{u \neq 0} \mid a_u \mid$.

Последнее условие обеспечивает положительную определенность формы U^0. Пусть $P(\cdot)$—четный полином, степени не меньшей 4^x со старшим коэффициентом, равным 1 (и такой, что $P(0) = 0$). Рассмотрим формальный гамильтониан

$$U = U^0 + \varepsilon \sum_{x \in Z^\nu} P(\xi_x), \tag{4}$$

где $\varepsilon > 0$, и положим

$$F_x = -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial \xi_x} = -a_0 \xi_x - \sum_{y \neq x} a_{y-x} \xi_y - \frac{\varepsilon}{2} P'(\xi_x). \tag{5}$$

Прежде, чем изучать бесконечную систему (2) (или (1)), рассмотрим ее "пространственное урезание", т. е. конечную систему уравнений

$$\xi_x^\Lambda(t) = \xi_x^0 + \int\limits_0^t F_x^\Lambda(\{\xi_y^\Lambda(\tau), y \in \Lambda\})d\tau + W_x(t),\ x \in \Lambda, \tag{6}$$

или в дифференциальной форме

$$d\xi_x^\Lambda = F_x^\Lambda(\{\xi_y^\Lambda, y \in \Lambda\})dt + dW_x(t),\ x \in \Lambda,$$

$$\xi_x^\Lambda(0) = \xi_x^0,\ x \in \Lambda, \tag{7}$$

где

$$F_x^\Lambda = -\frac{1}{2}\frac{\partial U_\Lambda}{\partial \xi_x} = -a_0 \xi_x - \sum_{\substack{y \in \Lambda \\ y \neq x}} a_{y-x} \xi_y - \frac{\varepsilon}{2} P'(\xi_x),\ x \in \Lambda,$$

а

$$U_\Lambda = \sum_{x,y\in\Lambda} a_{x-y}\xi_x\xi_y + \varepsilon \sum_{x\in\Lambda} P(\xi_x). \tag{8}$$

Мы воспользуемся следующей теоремой существования и единственности для системы (6). Обозначим через $\Sigma_t^\Lambda \subset \Sigma$ σ-подалгебру алгебры Σ, порожденную значениями $\{W_x(\tau), 0 < \tau < t\}$ винеровских процессов $\{W_x, x \in \Lambda\}$.

Теорема 1. *Существует единственный многомерный случайный процесс $\xi^\Lambda(t) = \{\xi_x^\Lambda(t), x \in \Lambda\}, t \in [0,\infty)$, определенный на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) при почти всех $\omega \in \Omega$, удовлетворяющий системе (6). Этот процесс является марковским процессом, и при любом $t \in [0,\infty)$ значения $\{\xi_x^\Lambda(t)\}$ этого процесса измеримы относительно σ-алгебры Σ_t^Λ. Для почти всех $\omega \in \Omega$ его траектории $\xi_x^\Lambda(t;\omega)$ непрерывны по t.*

Доказательство этой теоремы можно найти в различных учебниках по теории случайных процессов (см., например, [8]), и мы не будем его здесь приводить.

Отметим, что для существования решения при всех t очень важен вид функций F_x, в частности условие $\varepsilon > 0$. Это легко понять, если рассмотреть “детерминированное” дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\xi}{dt} = -a\xi + \xi^3,$$

у которого при достаточно больших начальных условиях ξ^0 все решения $\xi(t)$ уходят на бесконечность за конечное положительное время t. Дополнительная диффузия за счет броуновского смещения уже не может исправить этот эффект. Далее заметим, что марковость процесса $\{\xi_x^\Lambda\}$ (а также его измеримость относительно Σ_Λ^t) ясны из нашего наглядного истолкования системы уравнений (1), если учесть, что винеровский многомерный процесс $W^\Lambda(t) = \{W_x(t), x \in \Lambda\}$ является марковским.

Решение бесконечной системы стохастических уравнений (2) мы получим как предел при $\Lambda \uparrow Z^\nu$ решений для конечных систем (6) при условии, однако, что начальные условия $\{\xi_x^0, x \in Z^\nu\}$ не очень быстро растут на бесконечности. А именно, пусть $\mathcal{H} = l_2(Z^\nu, e^{-|x|}) \subset R^{Z^\nu}$ — множество конфигураций

$\xi = \{\xi_x, x \in Z^\nu\}$ таких, что

$$\| \xi \|^2 \equiv \sum_{x\in Z^\nu} | \xi_x |^2 e^{-|x|} < \infty,$$

где

$$| x | = \sum_{i=1}^{\nu} | x_i |, \;\; x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in Z^\nu.$$

Теорема 2. *Пусть начальные условия $\xi^0 = \{\xi_x^0, x \in Z^\nu\} \in \mathcal{H}$. Тогда существует бесконечномерный случайный процесс $\xi(t) = \{\xi_x(t), x \in Z^\nu\}, t \in [0,\infty)$, удовлетворяющий системе уравнений (2), у которого для любого $x \in Z^\nu$ траектории $\xi_x(t) = \xi_x(t;\omega)$ для почти всех ω непрерывны и конфигурация $\{\xi_x(t;\omega)\} \in \in \mathcal{H}$ при любом t для почти всех ω. Случайный процесс $\xi(t)$ является марковским процессом, и его значения $\{\xi_x(t;\omega)\}$ при любом t измеримы относительно σ-алгебры Σ^t, порожденной значениями винеровских процессов $\{W_x(\tau), x \in Z^\nu, 0 < \tau \le t\}$.*

Доказательство. Пусть U—гладкая функция на пространстве R^Λ и $\xi^\Lambda(t) = \{\xi_x^\Lambda(t), x \in \Lambda\}$—решение системы (6). Рассмотрим процесс $\eta(t) = U(\xi^\Lambda(t))$. Оказывается, что дифференциал $d\eta$ этого процесса имеет вид (формула Ито)

$$d\eta = \sum_x U'_{\xi_x}(\xi^\Lambda(t))d\xi_x^\Lambda + \frac{1}{2}\sum_x U''_{\xi_x\xi_x}(\xi^\Lambda(t))dt =$$

$$= \sum_x (U'_{\xi_x}F_x + \frac{1}{2}U''_{\xi_x\xi_x})dt + \sum_x U'_{\xi_x}dW_x. \tag{9}$$

Дополнительное слагаемое $1/2\sum U''_{\xi_x,\xi_x}(\xi^\Lambda(t))dt$ появляется из-за того, что $(d\xi_x^\Lambda)^2 = F_x^2dt^2 + 2F_xdtdW + (dW_x)^2$ имеет тот же порядок малости, что и $(dW_x)^2 \sim dt$ (подробный вывод формулы (9) и следующей формулы (9^a) см. в [11]). Таким образом, приращение процесса $\eta(t)$ за конечное время равно

$$U(\xi^\Lambda(t_1)) - U(\xi^\Lambda(t_2)) = \tag{9^a}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_x (U'_{\xi_x}F_x + \frac{1}{2}U''_{\xi_x\xi_x} \right) dt + \sum_x \int_0^t U'_{\xi_x}dW_x.$$

Следует теперь пояснить, как понимаются интегралы $\int U'_{\xi_x}(\xi^\Lambda)dW_x$— так называемые *стохастические интегралы*

Ито. Пусть $\eta(t) = \eta(t;\omega)$ — случайный процесс, определенный на пространстве (Ω, Σ, μ), такой что его значение $\eta(t,\omega)$ при любом t измеримо относительно σ-алгебры Σ^t и для почти всех $\omega \in \Omega$ интеграл $\int\limits_0^t \eta^2(\tau,\omega)d\tau < \infty$. Тогда стохастическим интегралом $\int\limits_0^t \eta(\tau)dW_x(\tau)$ называют предел по вероятности следующих интегральных сумм:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\eta(t_k)(W_x(t_{k+1}) - W_x(t_k)), \qquad (10)$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$—произвольное разбиение отрезка (доказательство существования предела $\int\limits_0^t \eta(\tau)dW_x(\tau)$ можно найти, например, в [11]). Непосредственно из определения стохастического интеграла вытекает, что его среднее

$$\left\langle \int\limits_0^t \eta(\tau)dW_x(\tau) \right\rangle = 0. \qquad (11)$$

Действительно, это верно для любой интегральной суммы (10), поскольку в каждом ее слагаемом величины $\eta(t_k)$ и $W_x(t_{k+1}) - W_x(t_k)$ независимы и $\langle W_x(t_{k+1}) - W_x(t_k)\rangle = 0$. Рассмотрим теперь функцию

$$U(\xi^\Lambda(t)) = \| \xi^\Lambda(t) \|^2_{\mathcal{H}} = \sum_{x\in\Lambda}(\xi^\Lambda_x(t))^2 e^{-|x|}. \qquad (12)$$

Лемма 3. *Для любого конечного $\Lambda \subset Z^\nu$ и для $U(\xi^\Lambda(t))$ верна оценка*

$$\left\langle \sum_{x\in\Lambda}(\xi^\Lambda_x(t))^2 e^{-|x|} \right\rangle \le \left(\sum_{x\in\Lambda}(\xi^0_x)^2 e^{-|x|} + D_1 \right) e^{Rt} + D_2 \qquad (13)$$

при всех $t > 0$, где константы $R > 0$, $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ не зависят от Λ.

Доказательство. Применяя формулу Ито к функции вида (12) и усредняя затем полученное равенство по мере μ, получаем в силу (11), что

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{x\in\Lambda}(\xi^\Lambda_x(t))^2 e^{-|x|} \right\rangle &= \sum_{x\in\Lambda}(\xi^0_x)^2 e^{-|x|} - \\ &-2\int\limits_0^t \left[\sum_{x,y\in\Lambda} a_{x-y}\langle \xi^\Lambda_x(\tau)\xi^\Lambda_y(\tau)\rangle e^{-|x|} \right] d\tau - \\ &-\varepsilon\int\limits_0^t \sum_{x\in\Lambda} e^{-|x|}\langle \xi^\Lambda_x(\tau) P'(\xi^\Lambda_x(\tau))\rangle + t\sum_{x\in\Lambda} e^{-|x|}.\end{aligned}$$

Заметим, что для всех $\xi \in R^1$ полином $\xi P'(\xi)$ ограничен снизу

$$\xi P'(\xi) > -c, \quad c > 0.$$

Далее следует воспользоваться неравенством

$$| \xi^\Lambda_x \xi^\Lambda_y | < \frac{1}{2}((\xi^\Lambda_x)^2 + (\xi^\Lambda_y)^2).$$

В результате мы получим, что

$$\begin{aligned}&\left\langle \sum_{x\in\Lambda}(\xi^\Lambda_x(t))^2 e^{-|x|} \right\rangle < \\ &< \sum_{x\in\Lambda}(\xi^0_x)^2 e^{-|x|} + R\int\limits_0^t \left\langle \sum_{x\in\Lambda}(\xi^\Lambda_x(\tau))^2 e^{-|x|} \right\rangle d\tau + Bt, \qquad (14)\end{aligned}$$

где $R = \sum\limits_{u\in Z^\nu} | a_u | e^{-|u|}$, а $B = (c\varepsilon + 1)\sum\limits_{x\in Z^\nu} e^{-|x|}$. Обозначим $s(t) = \left\langle \sum\limits_{x\in\Lambda}(\xi^\Lambda_x(t))^2 e^{-|x|} \right\rangle$ и рассмотрим решение уравнения

$$\tilde{s}(t) = R\int\limits_0^t \tilde{s}(\tau)d\tau + Bt + s(0).$$

Очевидно, что в силу (14) $s(t) \le \tilde{s}(t)$. С другой стороны, $\tilde{s}(t)$ является решением уравнения $\tilde{s}' = R\tilde{s}(t) + B$, $\tilde{s}(0) = s(0)$. Решив это уравнение, мы и получим оценку (13).

Лемма 4. *Пусть Λ_1 и Λ_2—конечные подмножества Z^ν (причем $0 \in \Lambda_1 \subset \Lambda_2$) и $\xi^{\Lambda_1}(t)$ и $\xi^{\Lambda_2}(t)$—соответствующие решения урезанных уравнений. Тогда выполнены оценки*

1. $$\sum_{x\in\Lambda_1} \langle (\xi_x^{\Lambda_1}(t) - \xi_x^{\Lambda_2}(t))^2 \rangle e^{-2|x|} <$$

$$< e^{-\rho(0,\partial\Lambda_1)} M(\| \xi^0 \|_{\mathcal{H}}^2 + \tilde{D}) e^{R^2 t}, \qquad (15)$$

где $M, \tilde{D}, R_2$—константы, не зависящие от Λ_1 и Λ_2, а $\rho(0, \partial\Lambda_1)$—расстояние точки $0 \in Z^\nu$ до множества $\partial\Lambda_1$

2. $$\left\langle \max_{0\le\tau\le t} \sum_{x\in\Lambda_1} (\xi_x^{\Lambda_1}(\tau) - \xi_x^{\Lambda_2}(\tau)) e^{-2|x|} \right\rangle <$$

$$< e^{-\rho(0,\partial\Lambda_1)} \tilde{M}(\| \xi^0 \|_{\mathcal{H}}^2 + \overline{D}) e^{\bar{R}t}, \qquad (15^a)$$

где $\tilde{M}, \overline{D}$ и $\overline{R}$—константы, не зависящие от Λ_1 и Λ_2.

Доказательство. Заметим, что

$$d\left(\sum_{x\in\Lambda_1} (\xi_x^{\Lambda_1}(t) - \xi_x^{\Lambda_2}(t))\right)^2 e^{-2|x|} =$$

$$= 2\sum_{x\in\Lambda_1} e^{-2|x|} (\xi_x^{\Lambda_1}(t) - \xi_x^{\Lambda_2}(t))(d\xi_x^{\Lambda_1}(t) - d\xi_x^{\Lambda_2}(t)) =$$

$$= 2\sum_{x\in\Lambda_1} e^{-2|x|} (\xi_x^{\Lambda_1}(t) - \xi_x^{\Lambda_2}(t))(F_x^{\Lambda_1}(\xi^{\Lambda_1}) - F_x^{\Lambda_2}(\xi^{\Lambda_2}))dt =$$

$$= -2\sum_{x\in\Lambda_1} e^{-2|x|} (\xi_x^{\Lambda_1}(t) - \xi_x^{\Lambda_2}(t)) \left[\sum_{y\in\Lambda_1} a_{x-y} (\xi_y^{\Lambda_1}(t) - \xi_y^{\Lambda_2}(t)) - \right.$$

$$\left. - \sum_{y\in\Lambda_2\setminus\Lambda_1} a_{x-y} \xi_y^{\Lambda_2}\right] - \varepsilon \sum_{x\in\Lambda_1} e^{-2|x|} (\xi_x^{\Lambda_1}(t) - \xi_x^{\Lambda_2}(t))(P'(\xi_x^{\Lambda_1}) - P'(\xi_x^{\Lambda_2})).$$

Таким образом,

$$\sum_{x\in\Lambda_1} (\xi_x^{\Lambda_1}(t) - \xi_x^{\Lambda_2}(t))^2 e^{-2|x|} < R_1 \int_0^t \left(\sum_{x\in\Lambda_1} (\xi_x^{\Lambda_1}(\tau) - \xi_x^{\Lambda_2}(\tau))^2 e^{-2|x|}\right) d\tau +$$

$$+ D_1 e^{-\rho(0,\partial\Lambda_1)} \int_0^t \left(\sum_{y\in\Lambda_2} (\xi_y^{\Lambda_2}(\tau) e^{-2|y|}\right) d\tau, \qquad (16)$$

где мы воспользовались оценкой

$$(\xi - \eta)(P'(\xi) - P'(\eta)) > -K(\xi - \eta)^2,$$

здесь $K \ge 0$—некоторая константа.

Усредняя неравенство (16) по ω и применяя теперь оценку (13) предыдущей леммы, а также рассуждения, использованные при ее доказательстве, получаем (15).

Заметим, что неравенство (16) остается верным, если левую часть заменить выражением

$$\max_{0<s<t} \sum_{x\in\Lambda_1} (\xi_x^{\Lambda_1}(s) - \xi_x^{\Lambda_2}(s)) e^{-2|x|}.$$

Отсюда после усреднения с учетом (15) и (13) получаем (15^a).

Выберем теперь последовательность кубов $\Lambda_N \subset Z^\nu$ со сторонами $L_N = N$ и центрами в точке 0 и покажем, что для любой фиксированной точки $x_0 \in Z^\nu$ траектории $\xi_{x_0}^{\Lambda_N}(t;\omega) = \xi_{x_0}^N(t;\omega)$ процессов $\xi_{x_0}^{\Lambda_N}(t)$ для почти всех ω сходятся равномерно на любом конечном интервале $[0,1]$ времени. Для простоты положим $x_0 = 0$ и для каждого N рассмотрим множество

$$E_N = \left\{\max_{0<s<T} \mid \xi_0^N(s;\omega) - \xi_0^{N+1}(s;\omega) \mid > e^{-N/3}\right\}.$$

В силу оценки (15^a) и неравенства Чебышева находим, что

$$\mu(E_N) < K(T)\frac{e^{-N}}{\varepsilon_N^2} < K(T)e^{-N/3}.$$

Поскольку ряд $\sum_N \mu(E_N) < \infty$, в силу теоремы Бореля—Контелли [1] найдется такое множество $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ полной меры, что для любого $\omega \in \tilde{\Omega}$, начиная с некоторого $N_0 = N_0(\omega)$,

$$\max_{0<s<T} \mid \xi_0^N(s;\omega) - \xi_0^{N+1}(s;\omega) \mid < e^{-N/3}.$$

Таким образом, последовательность функций $\xi_0^N(t;\omega), \omega \in \tilde{\Omega}$, равномерно сходится на любом конечном промежутке времени. Предельные функции $\xi_0^\infty(t;\omega)$ и являются траекториями процесса $\xi_0(t)$. Аналогичным образом доказывается существование предельного процесса $\xi_x^\infty(t)$ для любой точки $x \in Z^\nu$.

Остальные утверждения теоремы выводятся теперь просто. В частности, из леммы 3 следует, что $\{\xi_x^\infty(t,\omega)\} \subset \mathcal{H}$ при каждом t для почти всех ω.

2. Редуцированная динамика мер. Обозначим для любой конфигурации $\xi^0 = \{\xi_x^0\} \in \mathcal{H}$ и любого $t \geq 0$ через $P_t(\cdot \mid \xi^0)$ распределение в R^{Z^ν} для значений бесконечномерного случайного вектора $\xi(t) = \{\xi_x(t,\omega), x \in Z^\nu\}$, где $\xi(t) = \xi^\infty(t)$, построенное в предыдущем пункте решение системы уравнений (2) с начальными условиями $\xi^0 = \{\xi_x^0\}$. В силу доказанного выше распределение $P_t(\cdot \mid \xi^0)$ сосредоточено на множестве $\mathcal{H} \subset R^{Z^\nu}$, т. е.

$$P_t(\mathcal{H} \mid \xi^0) = 1. \tag{17}$$

Обозначим $\mathfrak{M}$ класс вероятностных распределений ν в R^{Z^ν}, сосредоточенных на $\mathcal{H}$, и введем в $\mathfrak{A}$ семейство преобразований

$$(V_t\nu)(A) = \int\limits_{\mathcal{H}} P_t(A \mid \xi^0)d\nu(\xi^0), \;\; A \subseteq \mathcal{H}. \tag{18}$$

Как следует из марковости процесса $\{\xi^\infty(t)\}$, преобразования V_t образуют полугруппу

$$V_{t_1+t_2} = V_{t_1}V_{t_2}. \tag{19}$$

Одновременно с этим рассмотрим для каждого конечного $\Lambda \subset Z^\nu$ полугруппу V_t^Λ преобразований вероятностных мер на R^Λ

$$(V_t^\Lambda\nu)(\cdot) = \int\limits_{R^\Lambda} P_t^\Lambda(\cdot \mid \xi_\Lambda^0)d\nu(\xi_\Lambda^0), \tag{20}$$

где $P_t^\Lambda(\cdot \mid \xi_\Lambda^0)$—распределение значений процесса $\xi^\Lambda(t)$—решения системы (6), начинающегося в точке $\xi_\Lambda^0 \in R^\Lambda$ в момент $t = 0$. Оказывается, что если начальная мера $\nu = \nu_0$ на R^Λ обладает плотностью $p^0(\xi^\Lambda)$ относительно лебеговой меры $d^\Lambda\xi$ в R^Λ, то это свойство наследуют все меры $\nu_t = V_t\nu_0$ и их плотности $p_t(\xi^\Lambda)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (уравнению Чепмена—Колмогорова)

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{x\in\Lambda}\frac{\partial^2 p_t}{\partial \xi_x} - \sum_{x\in\Lambda}\frac{\partial}{\partial \xi_x}(F_x^\Lambda p_t) \tag{21}$$

(с начальным условием $p\,|_{t=0}= p_0$), где F_x^Λ — коэффициенты в уравнении (6).

Заметим, что распределение $\nu_{\text{равн}}^\Lambda$ с плотностью

$$p_{\text{равн}}(\xi^\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda}\exp\{-U_\Lambda(\xi^\Lambda)\}, \tag{22}$$

где U_Λ—урезанный гамильтониан (8), а Z_Λ—нормирующий множитель:

$$Z_\Lambda = \int\limits_{R^\Lambda} \exp\{-U_\Lambda(\xi^\Lambda)\}d^\Lambda\xi,$$

как непосредственно следует из подстановки (22) в правую часть уравнения (21), является стационарной точкой полугруппы V_t^Λ:

$$V_t^\Lambda\nu_{\text{равн}}^\Lambda = \nu_{\text{равн}}^\Lambda \tag{22^a}$$

при всех t.

При $\varepsilon = 0$ мера $\nu_{\text{равн}}^\Lambda$ совпадает с гауссовой мерой $\nu_{\text{гаусс}}^\Lambda$ с плотностью

$$p_{\text{гаусс}}^\Lambda(\xi) = \frac{1}{Z_\Lambda^{\text{гаусс}}}\exp\{-\sum_{x,y\in\Lambda} a_{x-y}\xi_x\xi_y\}. \tag{23}$$

Из (8), (22) и (23) видно, что при $\varepsilon > 0$ мера $\nu_{\text{равн}}^\Lambda$ является гиббсовской перестройкой меры $\nu_{\text{гаусс}}^\Lambda$ с помощью взаимодействия $\varepsilon\sum\limits_{x\in\Lambda} P(\xi_x)$

$$\frac{d\nu_{\text{равн}}^\Lambda}{d\nu_{\text{гаусс}}^\Lambda} = \frac{1}{\tilde{Z}_\Lambda}\exp\left\{-\varepsilon\sum_{x\in\Lambda}P(\xi_x)\right\}, \tag{24}$$

где

$$\tilde{Z}_\Lambda = \left\langle \exp\left\{-\varepsilon\sum_{x\in\Lambda}P(\xi_x)\right\}\right\rangle_{\nu_{\text{гаусс}}^\Lambda}.$$

Как доказано в книге [26], при наших предположениях относительно функции $\{a_u, u \in Z^\nu\}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует термодинамический предел мер $\nu_{\text{равн}}^\Lambda$

$$\nu_{\text{равн}} = \lim_{\Lambda\uparrow Z^\nu}\nu_{\text{равн}}^\Lambda \tag{24^a}$$

Т е о р е м а 5. *Мера $\nu_{\text{равн}}$ сосредоточена на $\mathcal{H}$ и является стационарной мерой полугруппы V_t.*

Доказательство этой теоремы получается одновременно с доказательством следующей теоремы. Пусть Q—произвольный полином четной степени со старшим коэффициентом 1. Обозначим ν_Q^Λ гиббсовскую перестройку гауссовой меры $\nu^\Lambda_{\text{гаусс}}$ с помощью действия $\varepsilon\sum\limits_{x\in\Lambda} Q(\xi_x)$:

$$\frac{d\nu_Q^\Lambda}{d\nu^\Lambda_{\text{гаусс}}} = \frac{1}{Z_{\Lambda,Q}}\exp\left\{-\varepsilon\sum_{x\in\Lambda} Q(\xi_x)\right\} \tag{25}$$

($Z_{\Lambda,Q}$—нормирующий множитель). Как уже говорилось, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует предельная мера

$$\nu_Q = \lim_{\Lambda\uparrow Z^\nu} \nu_Q^\Lambda.$$

Теорема 6. *Мера ν_Q сосредоточена на $\mathcal{H}$ и при достаточно малом ε ее эволюция $\nu_Q^t = V_t\nu_Q$ со временем сходится к $\nu_{\text{равн}}$ при $t\to\infty$. Более точно, для любой фиксированной локальной функции F_A ее среднее*

$$\langle F_A\rangle_{\nu_Q^t} \to \langle F_A\rangle_{\nu_{\text{равн}}} \text{ при } t\to\infty \tag{26}$$

причем сходимость происходит с экспоненциальной скоростью.

Напомним, что локальной функцией F_A, где $A\subset Z^\nu$—конечное множество, от конфигураций поля $\xi = \{\xi_x, x\in Z^\nu\}$ называют функцию, зависящую лишь от значений конфигураций ξ на множестве A.

Мы дадим здесь краткий набросок доказательства этой теоремы.

Рассмотрим сначала случай $\varepsilon = 0$. В этом случае при любом Λ, как легко проверить, распределение $\mu^0_\Lambda(\cdot\mid\xi^0_\Lambda)$ для значений поля $\{\xi^\Lambda_x(t)\}$ на $\Lambda\times R^1$, порождаемого решением уравнений (6) при $\varepsilon = 0$, является гауссовым при любых начальных условиях ξ^Λ_0. Рассмотрим теперь поле $\{\tilde\xi_x(t)\}$ на $\Lambda\times R^1$ со случайными начальными условиями ξ^Λ_0, распределенными по закону $\nu^\Lambda_{\text{гаусс}}$. Распределение поля $\{\tilde\xi_x(t)\}$ равно

$$\int \mu^0_\Lambda(\cdot\mid\xi_0)d\nu^\Lambda_{\text{гаусс}}(\xi_0) = \mu^\Lambda_0 \tag{27}$$

и является гауссовым распределением. Его среднее $\langle\tilde\xi_x(t)\rangle = 0$

при всех $x\in\Lambda$ и $t>0$, а ковариация

$$\langle\tilde\xi_x(t)\tilde\xi_y(t)\rangle = C^\Lambda_{t,s}(x,y),$$

как можно убедиться с помощью явного вычисления, удовлетворяет оценке

$$\mid C^\Lambda_{t,s}(x,y)\mid < B\exp\{-\gamma\mid t-s\mid -\gamma\mid x-y\mid\}, \tag{28}$$

где $B>0$ и $\gamma>0$—абсолютные константы (не зависящие от Λ).

При $\varepsilon>0$ рассмотрим аналогичную меру μ

$$\mu^\Lambda_{\varepsilon,Q}(\cdot) = \int\limits_{R^\Lambda} \mu^\Lambda_\varepsilon(\cdot\mid\xi^\Lambda_0)d\nu^\Lambda_Q(\xi_0),$$

являющуюся распределением для поля $\{\bar\xi^\Lambda_x(t)\}$ на $\Lambda\times R^1$, образованного решением уравнения (6) при $\varepsilon>0$ и случайными начальными условиями $\{\xi^\Lambda_0\}$, распределенными по закону ν^Λ_Q. Для любого $T>0$ обозначим $\mu_0^{\Lambda,T}$ и $\mu_\varepsilon^{\Lambda,T}$ распределения для сужений полей $\{\tilde\xi^\Lambda_x(t)\}$ и $\{\bar\xi^\Lambda_x(t)\}$ на множество $\Lambda\times[0,T]\subset\Lambda\times R^1$ (порожденные распределениями μ^Λ_0 и μ^Λ_ε соответственно). Оказывается, что распределение $\mu_\varepsilon^{\Lambda,T}$ абсолютно непрерывно относительно распределения $\mu_0^{\Lambda,T}$ и плотность $\dfrac{d\mu_\varepsilon^{\Lambda,T}}{d\mu_0^{\Lambda,T}}$ для почти всех конфигураций $\xi^{\Lambda,T} = \{\xi^\Lambda_x(t), x\in\Lambda, t\in[0,T]\}$ равна

$$\frac{d\mu_\varepsilon^{\Lambda,T}}{d\mu_0^{\Lambda,T}}(\xi^{\Lambda,T}) = \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2}\sum_x\int\limits_0^T P'(\xi_x^{\Lambda,T}(\tau))dW_x(\tau)-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon^2}{8}\sum_{x\in\Lambda}\int\limits_0^T[P'(\xi_x^{\Lambda,T}(\tau))]^2d\tau\right\}\frac{d\nu^\Lambda_Q}{d\nu^\Lambda_{\text{гаусс}}}(\xi^{\Lambda,T}(0)) \tag{29}$$

(формула Гирсанова, см. [11]).

Воспользовавшись далее формулой Ито для приращения

$$\frac{\varepsilon}{2}\sum_{x\in\Lambda}P(\xi_x^{\Lambda,T}(T)) - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{x\in\Lambda}P(\xi_x^{\Lambda,T}(0)) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\sum_{x\in\Lambda}\int\limits_0^T P'(\xi_x^{\Lambda,T}(\tau))F_x(\xi^{\Lambda,T}(\tau))d\tau+$$

$$+\frac{\varepsilon}{4}\sum_{x\in\Lambda}\int\limits_0^T P''(\xi_x^{\Lambda,T}(\tau))d\tau+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^T\sum_{x\in\Lambda}P'(\xi_x^{\Lambda,T}(\tau))dW_x(\tau),$$

а также формулой (26) для $\dfrac{d\nu_Q^\Lambda}{d\nu_{\text{гаусс}}^\Lambda}$, перепишем (29) в виде

$$\frac{d\mu_\varepsilon^{\Lambda,T}}{d\mu_0^{\Lambda,T}}=\frac{1}{\tilde{Z}_\Lambda}\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{x\in\Lambda}[P(\xi_x^{\Lambda,T}(T))-P(\xi_x^{\Lambda,T}(0))]+\right.$$

$$+\frac{\varepsilon}{4}\sum_{x\in\Lambda}\int\limits_0^T P''(\xi_x^{\Lambda,T}(\tau))d\tau-\frac{\varepsilon}{2}\sum_{x,y}\int\limits_0^T P'(\xi_x^{\Lambda,T}(\tau))\times$$

$$\left.\times a_{x-y}\xi_y^{\Lambda,T}(\tau)d\tau-\frac{3}{8}\varepsilon^2\sum_{x\in\Lambda}\int\limits_0^T[P'(\xi_x^{\Lambda,T}(\tau))]^2d\tau-\varepsilon\sum_{x\in\Lambda}Q(\xi_x^{\Lambda,T}(0))\right\}.$$

Таким образом, мера $\mu_\varepsilon^{\Lambda,T}$ является гиббсовской перестройкой меры $\mu_0^{\Lambda,T}$. При малых ε, опираясь на оценку (28) для ковариации гауссовой меры $\mu_0^{\Lambda,T}$, можно получить кластерное разложение для меры $\mu_\varepsilon^{\Lambda,T}$, аналогичное упомянутому выше кластерному разложению для меры ν_Q^Λ, приведенному в [26]. С помощью этого кластерного разложения можно показать, что существует предел

$$\mu_\varepsilon=\mu_\varepsilon^{Z^\nu,R}=\lim_{\substack{\Lambda\uparrow Z^\nu\\ T\to\infty}}\mu_\varepsilon^{\Lambda,T}\tag{30}$$

и предельная мера μ_ε также допускает кластерное разложение. Предельная мера μ_ε является распределением для поля $\{\xi_x^\infty(t)\}$, образованного решениями бесконечной системы уравнений (1) со случайными начальными условиями, распределенными по закону ν_Q. Отсюда следует, что для любого t_0 распределение $\mu_\varepsilon^{t_0}$ значений поля $\{\xi_x^\infty(t)\}$ в фиксированный момент времени $t=t_0$ совпадает с $V_{t_0}\nu_0$:

$$\mu_\varepsilon^{t_0}=V_{t_0}\nu_Q.$$

Далее, с помощью кластерного разложения для распределения μ_ε можно показать, что поле $\{\bar{\xi}_x(t)\}$ обладает экспоненциальным убыванием зависимости. Отсюда, в частности, следует, что для любой локальной функции F_A среднее $\langle F_A(\xi^\infty(t_0))\rangle_{\mu_\varepsilon}=\langle F_A(\xi)\rangle_{\mu_\varepsilon^{t_0}}$ сходится к пределу $\langle F_A(\xi)\rangle_{\bar{\nu}}$ с экспоненциальной скоростью, и предельная мера $\bar{\nu}$ (не зависящая от распределения начальных условий ν_0) совпадает со стационарной мерой полугруппы V_t. Полагая далее $Q=P$, мы видим, что в силу (22^a) все маргинальные распределения $\mu_\varepsilon^{\Lambda,T,t_0}$ для распределения $\mu_\varepsilon^{\Lambda,T}$ совпадают с $\nu_{\text{равн}}^\Lambda$. Отсюда с помощью предельных переходов (24) и (30) получаем, что $\bar{\nu}=\nu_{\text{равн}}$, т. е. утверждение теоремы 6.

§7. Маргинально-замкнутые марковские цепи с локальным взаимодействием

Марковские процессы (или цепи—в случае дискретного времени) с локальным взаимодействием составляют обширный класс случайных полей, часто появляющихся в приложениях и одновременно сравнительно простых для исследования.

1. Основные определения. Рассмотрим случайное поле $\xi=\{\xi(x,t),\ (x,t)\in Z^\nu\times Z_+^1\}$ на полурешетке $Z_+^{\nu+1}=Z^\nu\times Z_+^1$ (Z_+^1—решетка положительного "времени") со значениями в некотором конечном или счетном множестве S. Конфигурацию $\{\xi(x,t)\}$ этого поля будем представлять себе как последовательность конфигураций $\xi_t=\{\xi_t(x)=\xi(x,t),x\in Z^\nu\}$ поля на решетке Z^ν в фиксированные моменты времени. Мы скажем, что поле образует марковскую цепь, если для любого $t>0$ условное распределение конфигурации ξ_{t+1} при условии, что фиксированы конфигурации $\xi_0=\bar{\xi}_0,\dots,\xi_t=\bar{\xi}_t$ во все предыдущие моменты времени, зависит лишь от последней конфигурации $\bar{\xi}_t$:

$$\Pr(\xi_{t+1}\in A\mid\bar{\xi}_t,\bar{\xi}_{t-1},\dots,\bar{\xi}_0)=\Pr(\xi_{t+1}\in A\mid\xi_t=\bar{\xi}).\tag{1}$$

Здесь $A\subset\Omega\,\bar{=}\,S^{Z^\nu}$—произвольное множество конфигураций поля на решетке Z^ν.

Мы скажем, что марковская цепь является цепью с локальным взаимодействием, если для любого конечного множества $X\in Z^\nu$ и любого набора значений $S_X=\{s_x,x\in X\}$ условная вероятность

$$\Pr(\xi_{t+1}\,|_X=S_X\mid\xi_t=\bar{\xi})=A_X^t(S_X,\bar{\xi}\,|_{Q+X})\tag{2}$$

зависит лишь от значений конфигурации $\bar{\xi}$ в Q-окрестности $Q+$

$+X = \bigcup\limits_{x\in X}(Q+x)$ множества X. Здесь $Q \subset Z^\nu$ — некоторое фиксированное конечное множество—“окрестность” точки $0 \in Z^\nu$, а $Q+x$ — ее сдвиг на вектор $x \in Z^\nu$, $\xi_{t+1}\,|_X$ обозначено сужение конфигурации на множество X (аналогичный смысл имеет обозначение $\bar{\xi}\,|_{Q+X}$) , а $A^t_X(S_X, S'_{X+Q})$—некоторая функция от пары конфигураций (S_X, S'_{X+Q}). В дальнейшем мы будем предполагать, что $A_X(\cdot,\cdot)$ не зависит от t (однородность переходных вероятностей по времени). Наконец, мы скажем, что марковская цепь условно-независима, если значения конфигурации ξ_{t+1} при условии, что фиксирована конфигурация $\xi_t = \bar{\xi}$, независимы

$$\Pr(\xi_{t+1}\,|_X = S_X \mid \xi_t = \bar{\xi}) = \prod_{x\in X} p_x(s_x \mid \bar{\xi}\,|_{Q+x}), \tag{3}$$

где

$$p_x(s \mid S_{Q+x}) \equiv A_{\{x\}}(s; S_{Q+x}),\ \ s \in S, \tag{4}$$

—некоторое семейство вероятностных распределений на пространстве S, зависящих от конфигураций S_{Q+x} на множестве $Q+x$. Мы предположим также, что это семейство “однородно” по “пространству Z^ν”. Это означает, что

$$A_{\{x\}}(s; S_{Q+x}) = A_0(s; S^x_Q) \equiv p(s \mid S^x_Q)$$

где S^x_Q—конфигурация на Q, получающаяся сдвигом на $-x$ из конфигурации S_{Q+x}. Говорят, что цепь условно-линейна, если условные вероятности

$$p(s \mid S_Q) = p(\xi_{t+1}(0) = s \mid \xi_t\,|_Q = S_Q) = \sum_{y\in Q} a_y(s, S_Q(y)), \tag{5}$$

где $\{a_y(s,s')\}$ набор функций от пар $\{s,s'\}$.

2. Уравнения ББКИ и маргинальная замкнутость. Определение (2) можно переписать в виде

$$\Pr(\xi_{t+1}\,|_X = S_X \mid \xi_t = \bar{\xi}) = A_X(S_X, S'_{X+Q}) \prod_{z\in X+Q} \delta_{\bar{\xi}(z),s'_{X+Q}(z)}, \tag{6}$$

где $\delta_{s,s'}$—символ Кронекера. Отсюда для безусловных вероятностей (называемых иногда *корреляционными функциями)*

$$P_X(S_X, t+1) = \Pr(\xi_{t+1}\,|_X = S_X) \tag*{(6^a),}$$

усредняя (6) по значениям ξ_t, находим, что

$$P_X(S_X, t+1) = \sum_{S'_{Q+X}} A_X(S_X, S'_{X+Q}) \left\langle \prod \delta_{\bar{\xi}(z),s'(z)} \right\rangle =$$

$$= \sum A_X(S_X, S'_{X+Q}) P_{X+Q}(S'_{X+Q}, t)$$

где $\langle\ \rangle$—усреднение по значениям ξ_t. Цепочка уравнений

$$P_X(S_X, t+1) = \sum_{S'_{Q+X}} A_X(S_X, S'_{X+Q}) P_{X+Q}(S'_{X+Q}, t), \tag{7}$$

выражающая конечномерные распределения цепи в момент времени $t+1$ через ее конечномерные распределения в момент t, по своей структуре напоминает известную цепочку уравнений для эволюции системы корреляционных функций в классической статистической физике (цепочка ББГКИ: Боголюбова, Борна, Грина, Кирквуда, Ивона [35]). Заметим, что цепочка (7) позволяет выразить вероятности $P_X(\cdot, t+1)$ лишь через вероятности $P_Y(\cdot, t)$, где $\mid Y \mid > \mid X \mid$, что делает ее трудной для исследования. В некоторых случаях, однако, используя условия согласованности для корреляционных функций

$$P_X(S_X, t) = \sum_{S'_Y} P_{X\bigcup Y}(S_{X\bigcup Y}, t),$$

где $Y \subset Z^\nu$—произвольное множество, не пересекающееся с X, а $S_X, S'_Y = S_{X\bigcup Y}$—конфигурация на $X\bigcup Y$, такая, что $S_{X\bigcup Y}\,|_X = S_X$, $S_{X\bigcup Y}\,|_Y = S'_Y$, можно преобразовать правую часть (7) так, чтобы в нее входили лишь вероятности $P_Y(\cdot, t)$, где $\mid Y \mid \le \mid X \mid$.

Определение 1. Говорят, что марковская цепь с локальным взаимодействием *маргинально-замкнута*, если для любого начального распределения P_0 (т. е. распределения вероятностей для значений конфигурации ξ_0 в нулевой момент времени) вероятности $P_X(S_X, t+1)$ при любых $t \ge 0, X \subset Z^\nu$ и S_X допускают представление

$$P_X(S_X, t+1) = \sum_Y \sum_{S_Y} A_{X,Y}(S_X, S_Y) P_Y(S_Y, t), \tag{8}$$

где суммирование $\sum_Y$ берется по всем непустым $Y \subset X\bigcup Q$

таким, что $| Y |\leq| X |$, а $\{A_{X,Y}(S_X, S_Y), X \subset Z^\nu, Y \subset X \bigcup Q\}$ — система функций от пар конфигураций (S_X, S_Y), определяемых только по условным вероятностям (2) (т. е. не зависящих от начального распределения P_0).

Замечание. Иногда марковскую цепь с маргинально-замкнутыми условными распределениями также называют маргинально-замкнутой.

Лемма 1. *Пусть марковская цепь условно-независима. Тогда она маргинально-замкнута в том и только в том случае, когда она условно-линейна* (см. формулу (5)).

Доказательство. 1. Достаточность. Пусть условные вероятности условно-линейны. Тогда из (5) и (6) вытекает, что

$$P_X(S_X \mid \xi_t = \bar{\xi}) = \prod_{x\in X}\left(\sum_{y\in Q}\sum_{s'} a_y(s_x, s')\delta_{s',\bar{\xi}(x+y)}\right). \qquad (9)$$

Раскрывая скобки и замечая, что

$$\delta^2_{s,\bar{\xi}(z)} = \delta_{s,\bar{\xi}(x)},$$

мы приведем правую часть (9) к виду

$$\sum_{Y}\sum_{S'_Y}\hat{A}(S_X, S'_Y)\prod_{z\in Y}\delta_{s'(z),\bar{\xi}(z)},$$

где суммирование происходит по всем $Y \subset X + Q$ и $| Y |\leq| X |$. Усредняя затем это выражение по значениям конфигурации $\bar{\xi}$, мы получим (8).

2. Необходимость. Пусть $X = \{0\}$—одноточечное множество, совпадающее с нулем, $0 \in Z^\nu$ и $t = 0$. Тогда

$$\Pr(\xi_1(0) = s) \equiv P_{\{0\}}(s, 1) = \sum_{S_Q} A_{\{0\}}(s, S_Q)P_Q(S_Q, 0). \qquad (10)$$

В силу маргинальной замкнутости правая часть (10) может быть переписана в виде

$$\sum_{y\in Q}\sum_{s'}\hat{A}_{\{0\},\{y\}}(s, s')p_{\{y\}}(s', 0).$$

Для любой фиксированной конфигурации $\bar{S}_Q$ на Q рассмотрим начальное распределние p_0 такое, что

$$\Pr(\xi_0 \mid_Q= \bar{S}_Q) = 1.$$

В этом случае $P_Q(\bar{S}_Q, 0) = 1$ и $p_{\{y\}}(s', 0) = \delta_{s',\bar{s}_Q(y)}$. Отсюда получаем, что

$$\Pr(\xi_1(0) = s \mid \xi_0 \mid_Q= \bar{S}_Q) \equiv A_{\{0\}}(s, \bar{S}_Q) = \sum_{y\in Q}\hat{A}_{\{0\},\{y\}}(s, \bar{s}_Q(y)).$$

Полагая теперь

$$a_y(s, s') = \hat{A}_{\{0\},\{y\}}(s, s'),$$

придем к утверждению леммы.

Очевидно, что в случае условно-линейной цепи для функций $\{a_y(s, s'), y \in Q\}$ выполнены условия: для любой конфигурации $S'_Q = \{s'_Q(y), y \in Q\}$

а) $$\sum_{y\in Q} a_y(s, s'_Q(y)) \geq 0,$$

б) $$\sum_{s}\sum_{y} a_y(s, s'_Q(y)) = 1. \qquad (11)$$

Определим для любого $y \in Q$ и $s \in S$ величины

$$\sum_{s\in S} a_y(s, s') = q_y(s'). \qquad (11^a)$$

Как следует из (11), для любого набора значений $S'_Q = \{s'(y), y \in \in Q\}$,

$$\sum_{y\in Q} q_y(s'(y)) = 1.$$

Таким образом, $q_y(s')$ не зависит от $s' : q_y(s') \equiv q_y$

$$\sum_{y\in Q} q_y = 1.$$

Заметим, что, если вместо функций $a_y(s, s')$ мы рассмотрим функции

$$\tilde{a}_y(s, s') = a_y(s, s') + c_y(s), \qquad (12)$$

где $\{c_y(s),\ y \in Q\}$—набор функций на S такой, что для любого $s \in S$

$$\sum_{y\in Q} c_y(s) = 0, \qquad (13)$$

условные вероятности (9) останутся прежними.

Лемма 2. *Можно выбрать набор функций* $\{c_y(s)\}$, *удовлетворяющих условию* (13), *так, чтобы преобразованная система функций* $\tilde{a}_y(s,s')$ *в* (12) *оказалась положительной:*

$$\tilde{a}_y(s,s') \geq 0.$$

Доказательство. Фиксируем $s = s_0$, и пусть для каждого $y \in Q$

$$d_y(s_0) = d_y = \min_{s' \in S} a_y(s,s'). \tag{14}$$

Заметим, что в силу а)

$$\sum_{y \in Q} d_y = \sum_y{}^{+} d_y + \sum_y{}^{-} d_y \geq 0,$$

где $\sum^{\pm}$ означают суммы по тем y, для которых $d_y > 0$ (или, наоборот, $d_y < 0$).

Положим теперь

$$c_y(s^0) = c_y = \begin{cases} \mid d_y \mid, & \text{если } d_y \leq 0, \\ \frac{\sum^{-} d_y}{\sum^{+} d_y} d_y, & \text{если } d_y > 0. \end{cases}$$

Из этого определения следует, что выполнено условие (13). Кроме того, из (14) вытекает, что для любого $y \in Q : c_y + d_y \geq 0$. Таким образом, $a_y(s_0, s) + c_y(s_0) > 0$ при всех y, s_0, s. Лемма доказана.

В дальнейшем мы всегда будем считать, что

$$a_y(s,s') \geq 0.$$

3. Эргодическое поведение условно-линейных цепей. Ниже мы изучим инвариантные меры и асимптотическое поведение при больших значениях времени t условно-независимых и маргинально-замкнутых цепей.

В частности, мы покажем, что это поведение полностью определяется поведением одноточечной корреляционной функцией, т. е. набором вероятностей $\{P_{\{x\}}(s_{\{x\}},t), x \in Z^{\nu}\}$. При этом вероятности $P_X(S_X,t)$, введенные выше (см. (6^{a})), обычно называют *n-точечными корреляционными функциями*, если $\mid X \mid = n$.

Из (3) следует, что

$$P_{\{x\}}(s,t+1) = \sum_{s',y} a_y(s,s') P_{\{x+y\}}(s',t). \tag{15}$$

Если предположить, что начальное распределение P_0 инвариантно относительно трансляций решетки Z^{ν}, то этим же свойством будет обладать распределение P_t для конфигураций в любой момент времени и, в частности, одноточечная корреляционная функция $P_{\{x\}}(s,t)$ не зависит от x:

$$P_{\{x\}}(s,t) = P(s,t).$$

Отсюда и из (15) находим, что

$$P(s,t+1) = \sum_{s'} (\sum_y a_y(s,s')) P(s',t) = \sum_{s'} b(s,s') P(s',t), \tag{16}$$

где $b(s,s') = \sum_y a_y(s,s')$. Поскольку $b(s,s') \geq 0$ и $\sum_s b(s,s') = 1$, матрицу $B = \{b(s,s')\}$ можно рассматривать как матрицу переходных вероятностей ($b(s,s')$—вероятность перейти из s' в s) однородной марковской цепи с множеством состояний S. Мы обозначим эту цепь L [1]; оказывается, что асимптотическое поведение нашей исходной цепи $\{\xi_{x,t}\}$ со значениями в S однозначно определяется свойствами марковской цепи L.

Напомним теперь некоторые понятия, связанные с (однородными) марковскими цепями с конечным или счетным множеством состояний. Для любых двух состояний $s_1, s_2 \in S$ обозначим $B^n = \{b^{(n)}_{s_1,s_2}\}$ матрицу переходных вероятностей за n шагов: $b^{(n)}_{s_1,s_2}$—вероятность того, что, выйдя из состояния s_1, цепь через n шагов окажется в состоянии s_2; $f^{(n)}_{s_1,s_2}$ обозначим вероятность того, что это событие— попасть из s_1 в s_2—случится впервые на n-м шагу. Сумма $f^{\infty}_{s_1,s_2} = \sum_n f^{(n)}_{s_1,s_2}$ есть вероятность когда-нибудь попасть в s_2, выйдя из s_1. В частности, $f^{\infty}_s = f^{\infty}_{s,s}$ есть вероятность возвращения в состояние s. Говорят, что состояние s возвратно, если $f^{\infty}_s = 1$, и невозвратно, если $f^{\infty}_s < 1$. Легко проверить, что состояние s невозвратно в том и только в том случае, когда

---

[1] Под L мы подразумеваем здесь семейство марковских цепей с одной и той же матрицей переходных вероятностей, отличающихся лишь начальными распределениями.

$$\sum_n b_{s,s}^{(n)} < \infty \tag{17}$$

(при этом автоматически сходится ряд $\sum\limits_n b_{s_1,s_2}^{(n)} < \infty$ для любой пары s_1, s_2). Сумму $\mu_s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n f_{s,s}^{(n)}$ называют *средним временем возвращения*. Возвратное состояние s такое, что $\mu_s = \infty$ называют *нулевым возвратным состоянием.*

Для того, чтобы состояние s было нулевым возвратным, необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_n b_{s,s}^{(n)} = \infty$, но

$$b_{s,s}^{(n)} \to 0, \ \ n \to \infty. \tag{18}$$

Состояние s называют *периодическим* с периодом T, если $b_{s,s}^{(n)} = 0$ при всех n, не кратных T, и $b_{s,s}^{(Tk)} > 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$

Возвратные, ненулевые апериодические состояния (т. е. не являющиеся периодическими) называют *эргодическими* состояниями. Для эргодических состояний верна асимптотика $b_{s_1,s_2}^{(n)} = \mu_{s_1}^{-1} f_{s_2,s_1}^{\infty} + \mathrm{o}(1), n \to \infty$, и, в частности, $b_{s,s}^{(n)} = \mu_s^{-1} + \mathrm{o}(1)$, $n \to \infty$. В случае ненулевого возвратного периодического состояния с периодом T $b_{s,s}^{(kT)} \to T\mu_s^{-1}, k \to \infty$. Говорят, что состояние s_2 *достижимо из состояния* s_1, если $f_{s_1,s_2}^{\infty} = 1$. Марковская цепь называется *неприводимой*, если любое ее состояние достижимо из любого другого состояния. Оказывается, что все состояния неприводимой марковской цепи имеют одинаковый тип: либо они все невозвратны, либо все являются нулевыми возвратными, либо периодическими (с одинаковым периодом), либо, наконец, эргодическими.

В случае же произвольной марковской цепи все возвратные состояния единственным образом разбиваются на классы, каждый из которых образует неприводимую марковскую цепь. У неприводимой марковской цепи с эргодическими состояниями (такую цепь называют эргодической) существует единственное стационарное (т. е. не меняющееся со временем) распределение вероятностей для ее состояний $\pi(s) = \mu_s^{-1}$.

Более подробно обо всех этих фактах можно прочесть, например, в книге [45].

После этих общих напоминаний вернемся к исследованию

корреляционных функций.

Теорема 3. *Пусть все состояния марковской цепи L являются невозвратными или нулевыми возвратными. Тогда для любого трансляционно-инвариантного начального распределения P_0 исходной цепи $\{\xi_{x,t}\}$ для всех корреляционных функций выполняется*

$$\lim_{t\to\infty} P_X(S_X, t) = 0.$$

Доказательство. Из (16) следует, что

$$P(s, t) = \sum_{s'} b_{s,s'}^{t} P(s', 0),$$

где $P(s', 0)$—одноточечная корреляционная функция начального распределения. Из (17) или (18) следует, что $P(s, t) \to 0$ при $t \to \infty$ для любого s. Далее с помощью оценки $P_X(S_X, t) \leq P_{\{x\}}(S_X(x), t)$, где $x \in X$—произвольная точка X, а $S_X(x)$—значение конфигурации S_X в точке x, мы приходим к утверждению теоремы.

Для исследования других случаев нам понадобится следующее представление для корреляционных функций $P_X(S_X, t)$. Многократно итерируя равенство

$$P_X(S_X, t) = \sum_{S_{X+Q}} P(S_X \mid S_{X+Q}) P_{X+Q}(S_{X+Q}, t-1),$$

получим, что

$$P_X(S_X, t) = \sum_{S_{X+Q}^{(1)}, S_{X+Q+Q}^{(2)}, \ldots, S_{X+Q+Q+\cdots+Q}} P(S_X \mid S_{X+Q}^{(1)}) \times \tag{19}$$

$$\times P(S_{X+Q}^{(1)} \mid S_{X+Q+Q}^{(2)}) \ldots\ldots P(S_{X+(t-1)Q}^{(t-1)} \mid S_{X+tQ}^{(t)}) P_{X+tQ}(S_{X+tQ}^{t}, 0),$$

где

$$X + kQ = X + \underbrace{Q + \cdots + Q}_{k\,\text{раз}} =$$

$$= \{x + y_1 + y_2 + \cdots + y_k, x \in X, y_i \in Q, i = 1, \ldots, k\}.$$

Далее, подставляя в (19) выражение

$$P(S_{X+kQ}^{k} \mid S_{x+(k+1)Q}^{(k+1)}) = \prod_{z \subseteq X+Q} \sum_{y \in Q} a_y(s^{(k)}(z), s^{(k+1)}(z+y)),$$

получим, что

$$P_X(S_X,t)=\sum_{y_1,\dots,y_t}\ \sum_{S^{(1)}_{X+Q},S^{(2)}_{X+2Q},\dots,S^{(t)}_{X+tQ}} a_{y_1}(S_X(x),S^{(1)}_{X+Q}(x+y_1))\times$$

$$\times a_{y_2}(S^{(1)}_{X+Q}(x+y_1),S^{(2)}_{X+2Q}(x+y_1+y_2))\dots$$

$$\dots a_{y_t}(S^{(t-1)}_{X+(t-1)Q}(x+y_1+\dots+y_{t-1}),S^{(t)}_{X+tQ}(x+y_1+\dots+y_t))\times$$

$$\times P_0(S^{(t)}_{X+Qt},0).$$

Каждое слагаемое этой суммы можно описать с помощью следующего графа G, построенного на точках полурешетки $Z^\nu\times Z^1_1$.

1. На слое $Y_t=Z^\nu\times\{t\}$ множество вершин графа G совпадает с множеством X.

2. Из каждой вершины (x,t'), где $0<t'\le t$, выходит ровно одно ребро "вниз", т. е. ребро $\{(x,t'),(x',t'-1)\}$, причем $x-x'\in Q$.

3. В каждую вершину $(x,t'),0\le t'<t$, приходит по крайней мере одно ребро "сверху", т. е. ребро $\{(x',t'+1),(x,t')\}$, причем $x'-x\in Q$.

Совокупность таких графов обозначим $R(X,t)$. Назовем маркированным графом пару (G,S_G), где G—описанный выше граф, а S_G—конфигурация: $S_G=\{S_G(v),v\in G\},S_G(v)\in S$, определенная в его вершинах.

Вкладом каждого маркированного графа (G,S_G) назовем величину

$$P(G,S_G)=\prod_{(v,v')\in G} a_{x'-x}(S_G(v),S'_G(v')),\qquad(20)$$

где произведение берется по всем ребрам (v,v') графа G ($v=(x,t)$, $v'=(x',t')$, $t=t'+1$, $x'-x\in Q$).

Из формулы (19) получаем, что

$$P_X(S_X,t)=\sum_{\substack{G\in R(X,t)\\ S_G:S_G|_X=S_X}} P(G,S_G)\left\langle\prod_v \delta_{S(v),\xi_0(v)}\right\rangle,\qquad(21)$$

где произведение $\prod\limits_v$ берется по вершинам нулевого слоя $Y_0, v=(x,0)$, а усреднение $\langle\ \rangle$ берется по конфигурациям на нулевом слое.

Обозначим $R_c(X,t)\subseteq R(X,t)$ совокупность связных графов. Очевидно, что граф $G\in R(X,t)$ связен в том и только в том случае, когда он содержит ровно одну вершину на нулевом слое.

4. Двойственное блуждание и получающиеся с его помощью оценки. Свяжем с корреляционной функцией $P_X(S_X,t)$ следующее случайное блуждание нескольких частиц по решетке Z^ν, происходящее в "обращенном" времени $\tau=0,1,\dots,t$. В нулевой момент времени имеется n частиц, расположенных в точках множества $X\subset Y_t(|\ X\ |=n)$. Частица, находящаяся в точке $x\in X$, может независимо от других частиц за один такт времени перепрыгнуть в точку $x+y$ с вероятностью q_y независимо от поведения остальных частиц. В случае, когда две частицы (или более) перепрыгнут в одну и ту же точку, они "склеиваются", образуя новую частицу. Движение прежних и вновь образовавшихся частиц в следующий такт времени происходит по тому же правилу. Очевидно, что любая траектория движения этой системы частиц за время $\tau=t$ образует один из графов $G\in R(X,t)$. Пусть фиксирован граф G. Тогда, как легко следует из определения (11^a) вероятностей q_y (и их независимости от состояния s' в (11^a))

$$\sum_{S_G:S_G|_{Y_0}-\text{фиксировано}} P(G,S_G)=\prod_{\text{по ребрам}G} q_y,\qquad(22)$$

где суммирование в левой части происходит по всем конфигурациям на графе G с фиксированными (все равно какими) значениями в вершинах нулевого слоя, а произведение в правой части берется по ребрам $\{(x,t),(x',t+1)\}$ графа G, причем $y=x'-x$. Из формулы (22), в частности, следует оценка

$$\sum_{\substack{s_G:s_G|_{Y_0}-\text{фиксировано}\\ S_G|_{Y_1}-\text{фиксировано}}} P(G,S_G)\le\prod_{\text{по ребрам}G} q_y,\qquad(23)$$

где суммирование в левой части неравенства происходит по всем конфигурациям S_G с фиксированными значениями на слоях Y_0 и Y_1.

Случай размерностей $\nu = 1$ и 2.

Теорема 4. *Пусть $\nu = 1$ или $\nu = 2$ и марковская цепь L неприводима и все ее состояния эргодичны. Тогда при любом начальном распределении каждая корреляционная функция $P_X(S_X, t)$ сходится к пределу $P_X(S_X, \infty)$ при $t \to \infty$ и этот предел равен*

$$P_X(S_X, \infty) = \sum_{\tau=1}^{\infty} \sum_{G \in \bar{\mathcal{R}}_c(X,\tau)} \sum_s \pi(s) \sum_{S_G : S_G(x,0)=s; S_G|_{Y_\tau}=S_X} P(G, S_G). \quad (24)$$

Здесь $\pi(s)$—стационарное распределение цепи L, а $\bar{\mathcal{R}}_c(X,\tau)$—множество связных графов, таких, что число их вершин, лежащих на слоях $Y_{\tau'}, \tau' > 0$, больше единицы (т. е. они становятся связными лишь на последнем слое Y_0). Суммирование $\sum_{S_G}$ происходит по всем конфигурациям S_G на графе G, которые в последней точке на слое Y_0 принимают значение s, а их ограничение на слой Y_τ равно S_X. Величины $P_X(S_X, \infty)$ являются корреляционными функциями (единственного) стационарного распределения исходной цепи.

Доказательство. Рассмотрим лишь часть суммы (21), соответствующую несвязным графам G. Заметим, что для фиксированного множества X и фиксированного t величина

$$P_{\text{несвяз}}(X, t) = \sum_{G \in \mathcal{R}_{\text{несвяз}}(X,t)} \prod_{y - \text{ребро} G} q_y$$

есть в точности вероятность того, что, по крайней мере, начальные частицы, скажем, частицы в точках $x_1, x_2 \in X$, не склеются в течение всего движения за t шагов. Рассмотрим их разность $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Точку $z(t) \in Z^\nu$ можно рассматривать как координату блуждающей по решетке Z^ν частицы с вероятностями перехода

$$P_{z \to z'} = \sum_{y_1, y_2 : y_1 - y_2 = z' - z} q_{y_1} q_{y_2}. \quad (25)$$

Из этой формулы видно, что $z(t)$ образует симметрическое блуждание по решетке (т. е. $\Pr(z - z' = \xi) = \Pr(z - z' = -\xi)$).

Известно, что в случае размерностей $\nu = 1, 2$ при таком блуждании частица с вероятностью единица когда-нибудь попадет в начало координат (см. [40]). Поскольку число начальных пар (x_1, x_2) конечно (равно C_n^2), вероятность

$$P_{\text{несвяз}}(x, t) \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Несвязная часть суммы в (21) допускает оценку

$$\sum_{G \in \mathcal{R}_{\text{несвяз}}(X,t)} \sum_{S_G} P(G, S_G) \left\langle \prod_v \delta_{s(v), \xi_0(v)} \right\rangle < P_{\text{несвяз}}(X, t) \times \quad (26)$$

$$\times \sup_{v_1, \ldots, v_n} \sum_{s(v_1), \ldots, s(v_n)} P(\xi_0(x(v_1)) = s(v_1), \ldots, \xi_0(x(v_n)) = s(v_n)),$$

где верхняя грань берется по положению всех вершин на нулевом слое.

Если предположить, что начальное распределение P_0 таково, что его одночастичная корреляционная функция равна $\bar{P}(\xi_0(x) = s) = \pi(s)$, то ряд (24) мажорируется рядом $\sum_{\tau=1}^{\infty} \sum_s \pi(s) P_c(\tau)$, где $P_c(\tau)$—вероятность того, что все частицы склеиваются вместе ровно через τ шагов. Отсюда следует сходимость ряда (24). Кроме того, связная часть суммы (24) в этом случае сходится к $P_X(S_X, \infty)$. В общем случае для фиксированного t разность $\bar{P}_X(S_X, t) - P_X(S_X, \infty)$, где $\bar{P}_X(S_X, t)$—корреляционная функция для начального распределения $\bar{P}_0$, мажорируется величиной

$$\sum_\tau P_c(\tau) \sum_s | \pi(s) - p_{t-\tau}(s) |, \quad (27)$$

[illegible]$_{-\tau}(s)$ есть вероятность состояния s для марковской цепи L в момент $t - \tau$ для некоторого фиксированного начального распределения $p_0(s)$. Но в силу эргодичности цепи L (27) стремится у нулю. Теорема доказана.

Аналогичный результат верен и для случая, когда марковская цепь L разбивается на конечное число неприводимых эргодических классов.

В случае, когда марковская цепь L периодична с периодом $T_0 > 1$, корреляционные функции $P_X(S_X, T_0 t + T)$, где $0 \le T < T_0$, сходятся к пределу $P_X(S_X, \infty, T)$, определяемому формулой (24), в которой $\pi(s)$ следует заменить на $\pi_T(s)$, где $\pi_T(s) = \lim_{t \to \infty} p_{T_0 t + T}(s)$, а $p_{T_0 t + T}(s)$ — распределение марковской цепи L в момент T_0t+T, определяемое начальным распределением этой цепи. В случае, когда это начальное распределение совпадает на каждом периодическом классе с его стационарным распределением, поведение процесса оказывается в точности периодическим.

Случай больших размерностей $\nu \geq 3$. В этом случае несвязные графы G в формуле (24) дают конечный вклад в предельные корреляционные функции. Заметим, что среднее

$$\left\langle \prod_{v} \delta_{s(v),\xi_0(v)} \right\rangle$$

по начальному распределению, входящее в формулу (21), может быть, как обычно, представлено с помощью семиинвариантов

$$\left\langle \prod_{v} \delta_{s(v),\xi_0(v)} \right\rangle = \sum_{\alpha=(V_1,\ldots,V_k)} \prod_{i=1}^{k} \left\langle {\prod_{v\in V_i}}' \delta_{s(v),\xi_0(v)} \right\rangle, \qquad (28)$$

где сумма берется по всем разбиениям $\alpha = (V_1, \ldots, V_k)$ множества вершин графа G, лежащих на нулевом слое, а

$$\left\langle {\prod_{v\in V}}' \delta_{s(v),\xi_0(v)} \right\rangle \equiv \tilde{P}_0(V, S_V)$$

—семиинвариант набора величин $\{\delta_{s(v),\xi_0(v)}\}$, вычисленный по начальному распределению. С помощью разложения (28) мы получим, что

$$P_X(S_X,t) = \sum_{G,S_G} \sum_{\alpha=(V_1,\ldots,V_k)} P(G,S_G) \prod \tilde{P}_0(V_i, S_{V_i}) =$$

$$= \sum_{G,S_G} P(G,S_G) \left[\prod_{v_i} P_0(v_i, s_{v_i}) + \sum_{\alpha\neq 0} \prod_{i} \tilde{P}_0(V_i, S_{V_i}) \right]. \qquad (29)$$

Первое слагаемое в квадратной скобке в последней формуле соответствует разбиению $\alpha = 0$ множества начальных вершин G на одноточечные блоки, а второе слагаемое в скобке—сумме по остальным разбиениям.

Введем теперь важное предположение о начальном распределении P_0, которое предполагается трансляционно-инвариантным и таким, что

$$\sum_{V:0\in V} \sum_{S_V} \tilde{P}_0(V, S_V) < \infty \qquad (30)$$

при любом n.

Лемма 5. *При условии* (30)

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{G,S_G} P(G,S_G) \sum_{\alpha\neq 0} \prod_{i=1}^{k} \tilde{P}_0(V_i, S_i) = 0. \qquad (31)$$

Доказательство. Для каждого множества $V \subset Z^\nu$ фиксируем наименьшую (в смысле лексикографического упорядочения) точку $y \in Y$, и пусть $V^0 = V - y$ — сдвиг множества V на y. При этом наименьшая точка V_0 оказывается нулем. Для каждого графа G и для каждого разбиения $\alpha = (V_1, \ldots, V_k)$ множества начальных вершин графа G обозначим $\{V_1^0, \ldots, V_k^0\}$ соответствующий набор сдвинутых множеств. Далее в силу трансляционной инвариантности распределения P_0 сумму (31) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{V_1^0,\ldots,V_k^0} \prod \tilde{P}(V_i^0, S_i) \sum_{y_1,\ldots,y_k} \sum_{G,S_G} P(G,S_G), \qquad (32)$$

где сумма $\sum\limits_{V_1^0,\ldots,V_k^0}$ берется по наборам $(V_1^0, \ldots, V_k^0)$ множеств, среди которых имеется хотя бы одно не одноточечное множество, а сумма $\sum\limits_{y_1,\ldots,y_k}$ берется по наборам $(y_1, \ldots, y_k)$ таким, что множества $(V_1^0+y_1, \ldots, V_k^0+y_k)$ попарно не пересекаются, а $\sum\limits_{G,S_G}$—по графам (G, S_G) таким, что множество V их начальных вершин совпадает с $\dot{\bigcup}(V_i^0+y_i)$, а значения $S_G\,|_{V_i^0+y_i}$ со значениями S_i.

Рассмотрим теперь следующее событие $A = A(x_1, \ldots, x_n, V_1^0, \ldots, V_k^0, t)$: какая-нибудь пара частиц, находящихся в нулевой момент времени в точках x_i, x_j при блуждании в обращенном времени в момент t окажется в точках $\bar{x}_j, \bar{x}_i$, принадлежащих множеству $V_l + y_l$ при каком-нибудь $l = 1, \ldots, k$ и $y_l \in Z^\nu$. Очевидно, что

$$\sum_{y_1,\ldots,y_k} \sum_{G,S_G} P(G,S_G) < \Pr(A(x_1, \ldots, x_n, V_1^0, \ldots, V_k^0, t)). \qquad (33)$$

С другой стороны, $\pm\Pr(A(x_1, \ldots, x_n, V_1^0, \ldots, V_k^0, t)) \to 0$ при $t \to \to \infty$. Действительно, для фиксированной пары x_i, x_j рассмотрим разность $z_{ij} = x_i - x_j$. Тогда событие A означает, что $z_{ij}(t)$ принадлежит множеству точек вида $\{x - x', x, x' \in V_l^0, l = 1, \ldots, k\}$. Однако вероятность попадания $z_{ij}(t)$ в фиксированное ограниченное множество, как известно, стремится к нулю. Из оценки (33), предположения (30) и представления (32) следует утверждение леммы .

Таким образом, нам следует изучить

$$\sum_{G,S_G} P(G, S_G) \prod_v \tilde{P}_0(v, s(v)), \tag{34}$$

где произведение берется по всем начальным вершинам графа G.

Совокупность графов $R = R(X, t)$ является объединением подмножеств R^k графов G с ровно k связными компонентами. Рассмотрим сначала класс R^n. Любой граф $G \in R^n$ является объединением n непересекающихся путей $\Gamma_i = \{(x_{i,0}, 0), (x_{i,1}, 1), \ldots (x_{i,t}, t)\}, i = 1, \ldots, n$. В случае $n = 1$ мы получаем, что

$$\sum_{G,S_G} P(G, S_G)\langle\delta_{v,\xi(v)}\rangle = \sum_{s'} b^{(t)}(s(x_1), s')P(s', 0) = P_{x_1}(s(x_1), t), \tag{35}$$

где $b^{(t)}$—матрица переходных вероятностей за t шагов в марковской цепи L.

Для $n > 1$ мы включим класс $R^n(X, S_X, t)$ в более обширный класс $\tilde{R}^n(X, S_X, t)$, элементами которого являются наборы $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ маркированных путей с возможными пересечениями (т. е. через одну точку $x \in Z^\nu$ может проходить несколько путей Γ_i, имеющих различные маркировки в этой точке). Вклад от каждого такого набора равен

$$P(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n) = \prod_{i,l} a_{x_{i,l}-x_{i,l+1}}(s(x_{i,l+1}), s(x_{i,l})) \prod_i P(s(x_{i0}, 0), 0).$$

Обозначим $\tilde{R}^{n,t-\tau} \subset \tilde{R}^n$ совокупность всех наборов $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\} \subset \subset \tilde{\mathcal{R}}^n$, у которых пути Γ_i имеют последнее пересечение в момент $t - \tau - 1$, а в моменты $t - \tau, t - \tau + 1, \ldots, t$ никакие два пути Γ_i и Γ_j не пересекаются. Таким образом,

$$\sum_{G \in \mathcal{R}^{(n)}} P(G, S_G) \prod \tilde{P}_0(s(v), 0) =$$

$$= \prod P_{x_i}(s(x_i), t) - \sum_{\tau=0}^{t-2} \sum_{\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\} \in \tilde{\mathcal{R}}^{(n), t-\tau}} P(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n) =$$

$$= \prod P_{x_i}(s(x_i), t) - \sum_{\tau=0}^{t-2} \sum_{G_\tau, S_{G_\tau}} \sum_{\{y_i, s_i'\}} \prod a_{y_i}(s(x_{i,t-\tau}), t - \tau)p(s_i', t - \tau - 1),$$

где G_τ является произвольным графом из $\tilde{R}(X, S_X, t - \tau)$, а сумма $\sum_{\{y_i, s_i'\}}$ берется по всем наборам $\{y_i, s_i'\}$, где s_i' пробегает S, а наборы $(y_1, \ldots, y_n), y_n \in Q$, такие, что среди точек $x_{i,t-\tau} + y_i$ имеется по крайней мере две совпадающие.

Утверждается, что последняя сумма сходится при $t \to \infty$ к выражению

$$\prod_i \pi(s(x_i)) - \sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{(G,S_G) \in \mathcal{R}^n(S_X, X, \tau)} P(G, S_G) \times$$
$$\times \sum_{\{y_i, s_i'\}} \prod_i a_{y_i}(s_i(x_{i0}), s_i')\pi(s_i'), \tag{36}$$

где суммирование по $\{y_i, s_i'\}$ такое же, как и выше. Заметим, что в силу того, что мы суммируем по описанным выше наборам $\{y_1, \ldots, y_n\}$ в сумму $\sum_{(G,S_G)}$ входят только те графы G, у которых по крайней мере две начальные точки отстоят друг от друга на расстоянии не большем $\operatorname{diam} Q$. Таким образом, сумма $\sum_{\tau=0}^{\infty} \sum_{(G,S_G) \in \mathcal{R}^n(S_X, X, \tau)}$ мажорируется $n(n+1)/2$, умноженным на среднее число попаданий случайного блуждания, начинающегося в точке $x_i - x_j$, в множество Q перед тем, как оно придет в начало координат. Напомним, что среднее число попаданий случайного блуждания, начинающегося в точке x', в точку x, перед тем как попасть в начало координат—обозначим его $g_0(x, x')$—ограничено величиной $g_0(x, x)$ и, так как при $\nu \geq 3$

случайное блуждание невозвратно, $g_0(x,x) < \sum p^t(0,0) < \infty$ (см. [40]). Отсюда легко вытекает сходимость (35) к (36) при $t \to \infty$.

Вклад в $P_X(S_X,t)$ от графов из класса $\mathcal{R}^k(X,t)$, $k < n$, сходится при $t \to \infty$ к сумме

$$\sum_{\tau=1}^{\infty} \sum_{(G,S_G)\in\tilde{\mathcal{R}}^k(X,\tau)} P(G,S_G)\prod_i \pi(s_i(0))-$$

$$-\sum_{\tau_1=1}^{\infty}\sum_{\tau_2=0}^{\infty} \sum_{(G,S_G)\in\mathcal{R}^k(X,\tau_1,\tau_2)} P(G,S_G)\sum_{\{y_i,s_i'\}}\prod_i a_{y_i}(s_i(0)s_i')\pi(s_i'). \quad (37)$$

Здесь $\tilde{\mathcal{R}}^{(k)}(X,\tau) \subset \mathcal{R}^k(X,t)$ обозначен класс k-компонентных графов, которые на отрезке времени $[1,\tau)$ имеют более, чем k, компонент, а $\mathcal{R}^k(X,\tau_1,\tau_2) \subset \mathcal{R}^k(X,\tau_1+\tau_2)$ класс k-компонентных графов, у которых имеется ровно k путей в момент времени $\tau_2, \tau_2+1,\dots,\tau_2+\tau_1$, а до момента τ_2 число путей больше k.

На основании полученных подсчетов мы приходим к следующей теореме.

Теорема 6. *Предположим, что начальное трансляционно-инвариантное распределение P_0 удовлетворяет условию (30) и цепь L на S состоит из конечного числа классов существенно апериодических эргодических состояний. Тогда предел корреляционных функций $P_X(S_X,t)$ при $t \to \infty$ существует и задается формулами (36) и (37), в которых $\pi(s)$—инвариантная мера цепи L, к которой сходятся распределения $P(\bar{s},t)$ на S с начальным распределением $P(\bar{s},0) = P_0(S(x)=\bar{s})$. Эти пределы*

$$P_X(S_X) = \lim_{t\to\infty} P_X(S_X,t)$$

определяют трансляционно-инвариантное стационарное распределение цепи на S^{Z^ν}. Наоборот, для всякого такого распределения его корреляционные функции представляются формулами (36), (37) при надлежащем выборе инвариантной меры $\pi(s)$ цепи L. Среди всех таких стационарных распределений существует лишь одно, которое удовлетворяет условию (30).

ГЛАВА 2

ПОСТРОЕНИЕ РАВНОВЕСНОЙ ДИНАМИКИ

Равновесной динамикой называют динамику малых флуктуаций относительно положения “равновесия”. В случае классических систем это, главным образом, динамика мер, абсолютно непрерывных относительно какой-нибудь гиббсовской меры, или же динамика в гильбертовом пространстве функций на бесконечном фазовом пространстве, квадратично-суммируемых относительно этой гиббсовской меры. В случае квантовых систем—эта динамика в ГНС-представлении, построенном с помощью предельных гиббсовских состояний (КМШ-состояний или основных состояний) на подходящей алгебре наблюдаемых. В этой главе, в частности, подробно излагается эвклидов подход к исследованию такой динамики.

§ 1. Основные и температурные состояния

C^*-динамической системой называется пара $(\mathfrak{A}, \alpha_t)$, где $\mathfrak{A}$—C^*-алгебра, α_t—ее сильно непрерывная однопараметрическая группа автоморфизмов. Сильная непрерывность означает непрерывность по норме в $\mathfrak{A}$ кривой $\alpha_t(A)$ при каждом фиксированном $A \in \mathfrak{A}$.

Состояние $\langle\cdot\rangle$ на $\mathfrak{A}$ называется инвариантным (относительно α_t), если для всех $A \in \mathfrak{A}$ $\langle A\rangle = \langle\alpha_t(A)\rangle$. Среди инвариантных состояний мы будем рассматривать только следующие.

Определение 1. Состояние $\langle\cdot\rangle$ называется *β-равновесным* (относительно α_t), $0 \le \beta \le \infty$, если для всех $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ существует ограниченная аналитическая функция $F_{A_1,A_2}(z)$ в полосе $0 < \operatorname{Im} z < \beta$, непрерывная в замыкании этой полосы и такая, что для вещественных $z = t$

1. $F_{A_1,A_2}(t) = \langle A_1\alpha_t(A_2)\rangle$,
2. $F_{A_1,A_2}(t+i\beta) = \langle\alpha_t(A_2)A_1\rangle$ при условии, что $0 \le \beta < \infty$.

При $\beta = \infty$ такое состояние называется *основным*, при $\beta < < \infty$—*КМШ-состоянием* (состоянием Кубо—Мартина—Швингера) или *температурным состоянием* (с температурой β^{-1}).

Замечание 1. Требование ограниченности F является лишним при $\beta < \infty$ (см. [7]).

Заметим, что равновесное состояние при $\beta \neq 0$ инвариантно относительно динамики α_t. Действительно, при $\beta < \infty$ функцию $F_{E,A}(t) = \langle \alpha_t(A) \rangle$ можно периодически продолжить на всю плоскость и, следовательно, в силу ее ограниченности, она константа. Если $\beta = \infty$, то для $A = A^*$ функция $F_{E,A}(t) = \langle \alpha_t(A) \rangle$ вещественна на вещественной оси и по принципу симметрии может быть продолжена аналитически в нижнюю полуплоскость; следовательно, снова в силу ограниченности она константа. В случае произвольного A следует перейти к разложению $A = A_1 + iA_2$, где A_1, A_2—эрмитовы.

При $\beta = 0$ определение 1 означает, что состояние есть след (т. е. $\langle A_1 A_2 \rangle = \langle A_2 A_1 \rangle$ для всех $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$). Он инвариантен относительно любой динамики, задаваемой внутренними автоморфизмами

$$\alpha_t(A) = U_t A U_t^{-1}\ ,\ U_t \in \mathcal{A}, \tag{1}$$

$\{U_t\}$—группа элементов из $\mathfrak{A}$, а также относительно динамики, "приближаемой" такими автоморфизмами.

Основным объектом изучения в квантовой статистической физике являются временные корреляционные функции

$$\Gamma_{A_1,A_2,\dots,A_n}(t_1,\dots,t_n) = \langle \alpha_{t_1}(A_1)\alpha_{t_2}(A_2)\dots\alpha_{t_n}(A_n) \rangle, \tag{2}$$

где $\langle\cdot\rangle$—β-равновесное состояние. Их асимптотику на больших временах удобно изучать методами спектральной теории операторов. Для этого рассматривается ГНС-представление π C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ относительно инвариантного состояния $\langle\cdot\rangle$. Гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$, в котором действует это представление, называется *физическим* гильбертовым пространством $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ (для данного состояния $\langle\cdot\rangle$ и данной динамики α_t), а циклический вектор $\Omega = [E]$—*физическим* вакуумом. Преобразование $[A] \to [\alpha_t(A)]$ ($[A]$, напомним, образ элемента $A \in \mathfrak{A}$ при отображении $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ идеал "нулевых" элементов (см. § 2.1)) сохраняет норму $\|\cdot\|_{\text{физ}}$ в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ в силу инвариантности состояния $\langle\cdot\rangle$. Тем самым оно корректно определено на $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ и продолжается до сильно непрерывной унитарной группы U_t в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$. Сильная непрерывность U_t

вытекает из ее слабой непрерывности на плотном множестве $\pi(A)\Omega, A \in \mathfrak{A}$, а это свойство следует из условия КМШ. По теореме Стоуна [36] группу U_t можно представить в виде $U_t = \exp\{itH\}$, где $H = H_{\text{физ}}$—самосопряженный оператор, называемый (физическим) *гамильтонианом.* Напомним, что представление $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\text{физ}})$ определено формулой $\pi(A)[B] = [AB]$ (см. §2.1).

Лемма 1. *При всех* $A \in \mathfrak{A}$ *и* $t \in R^1$

$$\pi(\alpha_t(A)) = \exp\{itH_{\text{физ}}\}\pi(A)\exp\{-itH_{\text{физ}}\},$$

$$\exp\{itH_{\text{физ}}\}\Omega = \Omega. \tag{3}$$

Доказательство. По определению

$$U_t\pi(A)\Omega = \pi(\alpha_t(A))\Omega. \tag{4}$$

Отсюда и следует второе равенство в (3). Для любого $B \in \mathfrak{A}$

$$U_t\pi(A)[B] = U_t\pi(A)\pi(B)\Omega = U_t\pi(AB)\Omega =$$

$$= \pi(\alpha_t(AB))\Omega = \pi(\alpha_t(A)\alpha_t(B))\Omega =$$

$$= \pi(\alpha_t(A))\pi(\alpha_t(B))\Omega = \pi(\alpha_t(A))U_t\pi(B)\Omega =$$

$$= \pi(\alpha_t(A))U_t[B].$$

Таким образом, для любого $\xi \in \mathcal{H}_{\text{ГНС}}$

$$U_t\pi(A)\xi = \pi(\alpha_t(A))U_t\xi,$$

что и означает первое равенство в (3).

В терминах оператора $H_{\text{физ}}$ корреляционные функции представляются в виде

$$\Gamma_{A_1,A_2,\dots,A_n}(t_1,\dots,t_n) = \tag{5}$$

$$= (\Omega, \pi(A_1)\exp\{i(t_2-t_1)H_{\text{физ}}\}\pi(A_2)\dots\exp\{i(t_n-t_{n-1})H_{\text{физ}}\}\pi(A_n)\Omega),$$

если $t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1$.

Далее мы дадим удобные критерии равновесности состояния, с помощью которых в дальнейшем эти состояния и будем строить.

Лемма 2. *Инвариантное состояние является основным тогда и только тогда, когда* $H_{\text{физ}} \geq 0$.

Доказательство. Если $H_{\text{физ}} \geq 0$, то условие аналитичности и ограниченности $\langle A_1\alpha_t(A_2)\rangle = \Gamma_{A_1A_2}(0,t)$ в верхней полуплоскости следует из представления (5). Наоборот, если $E_{(-\infty,-\varepsilon)}\mathcal{H}_{\text{физ}} \neq 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$, где E_A—спектральное семейство проекторов для $H_{\text{физ}}$, то существует такое $A \in \mathfrak{A}$, что $E_{(-\infty,-\varepsilon)}[A] \neq 0$. Тогда функция $F_{A,E}(t) = (\Omega, \exp\{itH_{\text{физ}}\}A\Omega)$ не может быть продолжена до ограниченной функции в верхней полуплоскости.

Замечание 2. Из (3) следует, что $H_{\text{физ}}\Omega = 0$. Таким образом, если $\langle\cdot\rangle$—основное состояние, то нижняя грань спектра $H_{\text{физ}}$ является его собственным значением.

Замечание 3. Иногда мы будем рассматривать представление алгебры $\mathfrak{A}$ и ее динамики α_t в каком-нибудь гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, унитарно-эквивалентном ГНС-представлению, порожденному некоторым состоянием $\langle\cdot\rangle$, инвариантным относительно динамики α_t. Тогда это представление мы по-прежнему будем называть ГНС-представлением, а порождающий оператор группы U_t—гамильтонианом H (или $H_{\text{физ}}$).

Равновесные состояния на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Пусть $B = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ алгебра всех операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Лемма 3. *Любая динамика α_t в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ имеет вид*

$$\alpha_t(A) = \exp\{itQ\}A\exp\{-itQ\}, \tag{6$^{\text{а}}$}$$

где Q—самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ (вообще говоря, неограниченный).

Доказательство см. в [7].

Лемма 4. *Для любого ядерного оператора $\rho \geq 0$, $\mathrm{Tr}\rho = 1$, формула*

$$\langle A\rangle = \mathrm{Tr}\rho A, \quad A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \tag{6$^{\text{б}}$}$$

задает состояние на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и всякое состояние на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ однозначно представляется в виде (6$^{\text{б}}$).

Доказательство см. в [46].

Оператор обычно называют *матрицей плотности* состояния (6$^{\text{б}}$).

Обозначим $\mathfrak{M}_n$ алгебру матриц n-го порядка.

Лемма 5. *Всякий линейный функционал $\rho(A)$ на матричной алгебре $\mathfrak{M}_n$ со свойствами*

$$\rho(A_1A_2) = \rho(A_2A_1), \quad A_1A_2 \in \mathfrak{M}_n,$$

$$\rho(\mathbf{1}) = 1, \tag{7}$$

имеет вид

$$\langle A\rangle = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}A. \tag{8}$$

Доказательство. Из (7) следует, что величина $\langle A\rangle$ одинакова для всех подобных матриц

$$\langle SAS^{-1}\rangle = \langle A\rangle$$

и, следовательно, является функцией от коэффициентов характеристического многочлена A. В силу линейности $\langle A\rangle = c\mathrm{Tr}A$; условие нормировки приводит к (8).

Лемма 6. *Для того, чтобы динамика* (6$^{\text{а}}$) *в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ имела β-равновесное состояние ($0 < \beta < \infty$), необходимо и достаточно, чтобы оператор $e^{-\beta Q}$ был ядерным. При этом условии β-равновесное состояние единственно и его матрица плотности имеет вид*

$$\rho = (\mathrm{Tr}\, e^{-\beta Q})^{-1}\exp\{-\beta Q\}. \tag{8^a}$$

Доказательство. Докажем сначала достаточность условия леммы. То, что состояние (6) с матрицей плотности (8^a) является β-равновесным для динамики (6$^{\text{а}}$), проверяется непосредственной выкладкой. Единственность такого состояния мы докажем сначала для случая конечномерного $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, т. е. $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{M}_n$. В этом случае операторы $\exp\{izQ\}$ определены для всех комплексных z и функция $F_{A_1,A_2}(z)$ также определена для всех комплексных z равенством 1), причем условие 2) переписывается в форме

$$\langle A_1\alpha_{z+i\beta}(A_2)\rangle = \langle\alpha_z(A_2)A_1\rangle$$

для всех комплексных z. Полагая $z = 0$, получаем, что

$$\langle A_1e^{-\beta Q}A_2e^{\beta Q}\rangle = \langle A_2A_1\rangle.$$

Если положить $A_3 = e^{-\beta Q}A_2$, то

$$\langle A_1A_3e^{-\beta Q}\rangle = \langle e^{\beta Q}A_3A_1\rangle. \tag{9}$$

Введем линейный функционал

$$\rho(A) = \frac{1}{\langle e^{\beta Q}\rangle}\langle e^{\beta Q}A\rangle,$$

для которого в силу (9) выполнено

$$\rho(e^{-\beta Q}A_1A_3e^{\beta Q}) = \rho(A_3A_1). \tag{10}$$

Поскольку функционал ρ инвариантен относительно динамики $(\alpha_z,\ z \in \mathbb{C})$, из (10) получаем, что

$$\rho(A_1A_2) = \rho(A_2A_1) \text{ и } \rho(\mathbf{1}) = 1,$$

т. е.

$$\langle e^{\beta Q}A\rangle = \mathrm{cTr}A, \tag{11}$$

где c—константа. Из (11) окончательно получаем (8).

Переходя к случаю произвольного сепарабельного бесконечномерного пространства $\mathcal{H}$, заметим, что, поскольку $e^{-\beta Q}$—ядерный оператор, спектр оператора Q состоит из изолированных собственных значений конечной кратности, уходящих на $+\infty$, и, таким образом, для любого $\lambda < \infty$ пространство $\mathcal{H}_\lambda = E_\lambda\mathcal{H}$, где E_λ— спектральный проектор Q, конечномерно. Так как пространства $\mathcal{H}_\lambda$ приводят Q, то из предыдущих рассуждений легко вытекает, что оператор $\rho_\lambda = E_\lambda\rho$ в $\mathcal{H}_\lambda$ имеет вид $\rho_\lambda = \mathrm{const}\exp\{-\beta Q_\lambda\}$, где $Q_\lambda = E_\lambda Q$. Отсюда следует, что ρ имеет вид (8).

Для доказательства необходимости условия леммы покажем, что $\mathrm{Ker}\rho = \{0\}$. Пусть это не так, и $\mathcal{H}_0 = \mathrm{Ker}\rho \neq \{0\}$. Разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1,\ \ \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0^\perp$$

приводит к разложению любого оператора $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ в операторную матрицу

$$A \sim \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix},$$

где $A_{00} : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0, A_{01} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0$ и т. д. При этом матрица для ρ имеет вид

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 \end{pmatrix},$$

где ρ_1—часть ρ в $\mathcal{H}_1$, а матрица для e^{itQ}

$$e^{itQ} = \begin{pmatrix} e^{iQ_0t} & 0 \\ 0 & e^{iQ_1t} \end{pmatrix},$$

где Q_i—часть Q в инвариантном подпространстве $\mathcal{H}_i, i = 0, 1$ (напомним, что Q коммутирует с ρ). Вычисляя далее $\langle B\alpha_t(A)\rangle$ и $\langle\alpha_t(A)B\rangle$, находим, что

$$\langle\alpha_t(A)B\rangle = \mathrm{Tr}\rho_1(e^{iQ_1t}A_{10}e^{-iQ_0t}B_{01} + e^{itQ_1}A_{11}e^{-itQ_1}B_{11}),$$

$$\langle B\alpha_t(A)\rangle = \mathrm{Tr}\rho_1(B_{10}e^{iQ_0t}A_{01}e^{-iQ_1t} + B_{11}e^{itQ_1}A_{11}e^{-itQ_1}).$$

Выбирая теперь $A_{01} = 0$ и $B_{11} = 0$, а A_{10} и B_{10} так, чтобы функция от t

$$\mathrm{Tr}\rho_1(B_{10}e^{iQ_0t}A_{01}e^{-iQ_1t}) \neq 0$$

не равнялась тождественно нулю, мы придем к противоречию. Далее, рассуждая как и выше, мы получим, что $\rho = \mathrm{const}e^{-\beta Q}$ и, таким образом, $\mathrm{Tr}e^{-\beta Q} < \infty$. Лемма доказана.

Описание всех основных состояний для динамики ($6^а$) дает следующая лемма.

Лемма 7. *Для того, чтобы у динамики ($6^а$) существовало основное состояние, необходимо и достаточно, чтобы оператор Q был ограничен снизу и нижняя грань его спектра являлась собственным значением. При этих условиях основное состояние задается любой такой матрицей плотности ρ, для которой*

$$\mathrm{Ker}\,\rho \supseteq E_0^\perp,\ \ \mathrm{Im}\,\rho \subset E_0,$$

где E_0—собственное подпространство с собственным значением $\lambda_0 = \inf\sigma(Q)$ ($\sigma(Q)$—спектр Q).

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 6.

Замечание 4. В случае, когда динамика ($6^а$) обладает β-равновесным состоянием при каком-нибудь $\beta = \beta_0$, она обладает β-равновесными состояниями при всех $\beta > \beta_0$ и для нее выполнены условия леммы 7. При этом $\mathrm{dim}E_0 < \infty$ и состояния $\langle\ \rangle_\beta$ при $\beta \to \infty$ сходятся к основному состоянию с матрицей плотности

$$\rho = \frac{1}{\mathrm{dim}E_0}P_{E_0},$$

где P_{E_0}—оператор проектирования в $\mathcal{H}$ на подпространство E_0.

Пусть H—самосопряженный полуограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и обладающий основным собственным вектором Φ_0 (нормированным) с собственным значением λ_0 (т. е. $\lambda_0 = \inf \sigma(\mathcal{H})$). Рассмотрим состояние на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$

$$\langle A\rangle = (A\Phi_0, \Phi_0), \qquad (11^a)$$

которое в силу леммы 7 является основным относительно динамики

$$\tau_t(A) = \exp\{itH\}A\exp\{-itH\} \qquad (11^{\text{б}})$$

в алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Как мы уже знаем (см. § 2.1), построенное по состоянию (11^a) ГНС-пространство $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$ канонически изоморфно гильбертову пространству $\mathcal{H}$, и при этом изоморфизме элемент $[E] \in \mathcal{H}_{\text{ГНС}}$ переходит в Φ_0, а $\pi(A) = A$ для любого $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Лемма 8. *При указанном изоморфизме между $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$ и $\mathcal{H}$ оператор $H_{\text{физ}}$ в $\mathcal{H}$ совпадает с оператором $H - \lambda_0$.*

Доказательство. Как следует из формул (3) и ($11^{\text{б}}$), оператор $\exp\{itH_{\text{ГНС}}\}\exp\{-itH\}$ коммутирует с любым оператором $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и, следовательно, кратен единичному оператору, т. е. $\exp\{itH_{\text{ГНС}}\} = \alpha(t)\exp\{itH\}$, где $\alpha(t)$—некоторая функция от t. Применив это равенство к вектору Φ_0, получим в силу равенства $\exp\{itH_{\text{ГНС}}\} \times \Phi_0 = \Phi_0$, что $\alpha(t) = \exp\{i\lambda_0 t\}$, откуда и следует утверждение леммы.

Следствие. *Для свободных динамик τ_t в алгебрах $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_{a,s}(\mathcal{H}))$, построенных по одночастичному гамильтониану h, действующему в пространстве $\mathcal{H}$, операторы $H^{a,s}_{\text{ГНС}}$, порожденные состоянием*

$$\langle A\rangle = \langle A\Omega, \Omega\rangle, \quad A \in \mathfrak{B}(\mathcal{F}_{a,s}(\mathcal{H})),$$

где $\Omega \in \mathcal{F}_{a,s}(\mathcal{H})$—вакуумный вектор, и действующие в пространствах $\mathcal{F}_{a,s}(\mathcal{H})$, соответственно равны

$$H^{a,s}_{\text{ГНС}} = d\Gamma^{a,s}(h).$$

Термодинамический предел равновесных состояний. Пусть в C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ введена квазилокальная структура, т. е. $\mathfrak{A}$ представляется как замыкание индуктивного предела ($\mathfrak{A}_0 = \bigcup \mathfrak{A}_\Lambda$) "локальных" подалгебр $\mathfrak{A}_\Lambda$, помеченных элементами некоторого упорядоченного множества индексов $\{\Lambda\}$ так, что при $\Lambda_1 < \Lambda_2$ задано гомоморфное и изометрическое вложение $\mathfrak{A}_{\Lambda_1} \to \mathfrak{A}_{\Lambda_2}$. Тогда динамика α_t и ее равновесные состояния на алгебре $\mathfrak{A}$ строятся часто с помощью термодинамического предела динамик $\alpha_\Lambda(t)$ и их равновесных состояний $\langle\ \rangle_\Lambda$, определенных на локальных алгебрах $\mathfrak{A}_\Lambda$. Более точно верна следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть на каждой локальной алгебре $\mathfrak{A}_\Lambda$ определены динамика $\alpha_t^\Lambda : \mathfrak{A}_\Lambda \to \mathfrak{A}_\Lambda$ и ее β-равновесное состояние $\langle\ \rangle_\beta$ ($0 < \beta \leq \infty$). Пусть, кроме того, для любого локального элемента существуют пределы*

$$\lim_{\Lambda\uparrow} \langle A\rangle_\Lambda = \langle A\rangle \qquad (12)$$

и

$$\lim_{\Lambda\uparrow} \alpha_t^\Lambda(A) = \alpha_t(A), \qquad (13)$$

причем сходимость в (13) понимается в смысле сходимости по норме для всех t на некотором интервале $|\, t \,| < t_0$, где t_0 не зависит от A, и равномерна по t на этом интервале. Тогда отображения $\alpha_t(A)$ можно продолжить (по непрерывности) на всю алгебру $\mathfrak{A}$, а также продолжить на все значения $t \in R^1$ (с помощью группового правила $\alpha_{t_1+t_2} = \alpha_{t_1}\alpha_{t_2}$) так, чтобы отображение α_t задавало динамику на алгебре $\mathfrak{A}$. При этом состояние (12) (продолженное на всю алгебру $\mathfrak{A}$) является β-равновесным для динамики α_t.

Доказательство леммы несложно, и мы его опускаем.

Замечание 5. В случае, когда квазилокальная алгебра $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$—некоторое гильбертово пространство, и сходимость в (13) понимается в сильной операторной топологии в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ (т. е. $\alpha_t(A)X \to \alpha_t(A)X$ по норме $\mathcal{H}$ для любого $X \in \mathcal{H}$), причем известно, что предельное отображение $\alpha_t(A), A \in \mathfrak{A}$, является динамикой в $\mathfrak{A}$, предельное состояние $\langle\ \rangle$ на $\mathfrak{A}$ также является β-равновесным для этой динамики.

Лемма 10. *Пусть, как и в лемме 9, на каждой локальной алгебре $\mathfrak{A}_\Lambda \subset \mathfrak{A}$ определены динамика α_t^Λ и ее β-равновесное состояние $\langle\ \rangle_\Lambda$ так, что выполнены условия (12) и (13). Пусть, кроме того, заданы ГНС-представления π_Λ алгебр $\mathfrak{A}_\Lambda$ и U_t^Λ динамик α_t^Λ, действующие в одном и том же гильбертовом про-*

странстве $\mathcal{H}$ *так, что существуют пределы (по операторной норме в* $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$*)*

$$\lim_{\Lambda\uparrow}\pi_\Lambda(A)=\pi(A),\ A\in\mathfrak{A}, \tag{14}$$

для любого локального элемента $A\in\mathfrak{A}$ *и*

$$\lim_{\Lambda\uparrow}U_t^\Lambda=U_t \text{ для всех } t. \tag{15}$$

Тогда $\pi(A)$ *задает ГНС-представление алгебры* $\mathfrak{A}$, *порожденное предельным равновесным состоянием* (12), *а группа* U_t*—ГНС-представление динамики* (13) (*порожденное состоянием* (12)).

Доказательство этой леммы мы опускаем.

Замечание. Как и в предыдущей лемме, вместо сходимости по норме можно рассматривать в (14) и (15) сильную сходимость. Тогда, если известно, что π является представлением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, а U_t образуют унитарную группу операторов в $\mathcal{H}$, можно утверждать, что π и U_t образуют ГНС-представление алгебры $\mathfrak{A}$ и динамики α_t относительно состояния (12).

§ 2. Основное состояние для бесконечной системы гармонических осцилляторов

Здесь мы изучим простой пример системы, для которой основное состояние вычисляется явно.

Пусть задана квадратичная форма

$$H=\sum_{x\in X}\pi_x^2+\frac{1}{4}\sum_{x_1,x_2\in X}a_{x_1,x_2}\Phi_{x_1}\Phi_{x_2}, \tag{1}$$

где $\pi_x=\pi(f_x),\Phi_x=\Phi(f_x)$—самосопряженные операторы в фоковском пространстве $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, полученные из операторов рождения и уничтожения $a_x^*=a^*(f_x), a_x=a(f_x)$ по формулам (13.3.1), $\{f_x, x\subset X\}$—ортонормированный базис в $\mathcal{H}$ (X—счетное множество), а $A=\{a_{x_1,x_2}, x_1,x_2\in X\}$ — симметрическая положительная матрица. Как мы видели в § 5.1, эта форма определяет динамику τ_t в алгебре Вейля $\mathfrak{A}(\mathcal{H})\subset\mathfrak{B}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}))$, которая является пределом конечномерных динамик τ_t^Λ при $\Lambda\uparrow X$, $\Lambda\subset X$—конечное подмножество X,

$$\tau_t^\Lambda(A)=\exp\{itH_\Lambda\}A\exp\{-itH_\Lambda\}, \tag{2}$$

где

$$H_\Lambda=\sum_{x\in\Lambda}\pi_x^2+\frac{1}{4}\sum_{x_1,x_2\in\Lambda}a_{x_1,x_2}\Phi_{x_1}\Phi_{x_2}. \tag{3}$$

Как мы увидим ниже, у оператора H_Λ существует основной вектор Φ_0^Λ, который определяет на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_\Lambda))$ основное состояние относительно динамики (2):

$$\langle A\rangle_\Lambda=(A\Phi_0^\Lambda,\Phi_0^\Lambda). \tag{4}$$

Лемма 1. *Для любого локального элемента* D *алгебры Вейля* $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ *существует предел*

$$\lim_{\Lambda\uparrow X}\langle D\rangle_\Lambda=\langle D\rangle, \tag{5}$$

задающий состояние на $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$. *Это состояние является основным для динамики* τ_t.

Доказательство. Введем представление операторов $\{\pi_x,\Phi_x,x\in\Lambda\}$ в пространстве $L_2(R^\Lambda,d^{|\Lambda|}x)$

$$\pi_xf=i\frac{df}{dq_x},\ \Phi_xf=q_xf,$$

$$f\{q_x,x\in\Lambda\}\in L_2(R^\Lambda,d^{|\Lambda|}x).$$

При этом оператор H примет вид

$$H_\Lambda f=-\sum_{x\in\Lambda}\frac{d^2f}{dq_x^2}+\frac{1}{4}\left(\sum_{x_1,x_2\in\Lambda}a_{x_1,x_2}q_{x_1}q_{x_2}\right)f.$$

Заметим, что с помощью ортогональной замены переменных

$$q_x=\sum_{x'\in\Lambda}U^\Lambda_{x,x'}q'_{x'},\ \ x\in\Lambda, \tag{6}$$

оператор H_Λ приводится к сумме операторов

$$H_\Lambda f=-\sum_x\frac{d^2f}{d{q'}_x^2}+\frac{1}{4}\left(\sum_x\lambda_x^\Lambda({q'}_x)^2\right)f, \tag{6^a}$$

где $\lambda_x^\Lambda>0$—собственные значения матрицы $A^\Lambda=\{a_{x,x'}, x,x'\in\Lambda\}$.

Основным вектором для такого оператора является вектор

$$\Phi_0=\text{const}\exp\{-\frac{1}{4}\sum\lambda_x^{1/2}(q'_x)^2\}. \tag{7}$$

Возвращаясь снова к переменным q_x, получаем, что

$$\Phi_0 = \text{const} \exp\{-\frac{1}{4} \sum_{x,x' \in \Lambda} b^{\Lambda}_{x,x'} q_x q_{x'}\}, \qquad (7^a)$$

где $B^{\Lambda} = \{b^{\Lambda}_{x,x'}\} = (A^{\Lambda})^{1/2}$.

Далее, в силу перестановочных соотношений (14.3.1) любой моном из алгебры Вейля можно записать в виде

$$D = U_{x_1} \ldots U_{x_k} V_{x'_1} \ldots V_{x'_{k'}} =$$

$$= \exp\left\{ i \sum_{y \in Y} n_y \Phi_y \right\} \exp\left\{ i \sum_{y' \in Y'} s_{y'} \pi_{y'} \right\}, \qquad (8)$$

где $\{y_i\} = Y$—множество различных точек в наборе $\{x_1, \ldots, x_k\}$, а n_y—кратность, с которой y входит в этот набор; аналогичный смысл имеют обозначения Y' и $\{s_{y'}\}$. Мы далее предположим, что множество Λ содержит Y и Y', и для удобства вычислений запишем D в виде

$$D = \exp\left\{ i \sum_{y \in \Lambda} n_y \Phi_y \right\} \exp\left\{ i \sum_{y' \in \Lambda} s_{y'} \pi_{y'} \right\},$$

полагая $n_y = 0$ для тех $y \in \Lambda$, которые не входят в Y (аналогичное соглашение для $s_{y'}$). При введенной выше реализации Φ_y и π_y в $L_2(R^{\Lambda}, d^{|\Lambda|}x)$ операторы $\exp\{i \sum n_y \Phi_y\}$ и $\exp\{i \sum s_{y'} \pi_{y'}\}$ действуют по формулам

$$\exp\{i \sum n_y \Phi_y\} f = \prod_{y \in \Lambda} \exp\{i q_y n_y\} f,$$

$$\exp\{i \sum s_{y'} \pi_{y'}\} f = f\{q_y - s_y, y \in \Lambda\}.$$

Таким образом,

$$(D\Phi^{\Lambda}_0, \Phi^{\Lambda}_0) = \text{const} \int_{R^{\Lambda}} \exp\left\{ i \sum_{x \in \Lambda} i q_x n_x \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{4} \sum_{x_1,x_2} b^{\Lambda}_{x_1,x_2} (q_{x_1} - s_{x_1})(q_{x_2} - s_{x_2}) \right\} \times$$

$$\exp\left\{ -\frac{1}{4} \sum_{x_1,x_2} b^{\Lambda}_{x_1,x_2} q_{x_1} q_{x_2} \right\} \prod_{x \in \Lambda} dq_x.$$

Несложный подсчет этого интеграла приводит к окончательной формуле

$$\langle D \rangle_{\Lambda} = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{y_1,y_2 \in Y} c^{\Lambda}_{y_1,y_2} n_{y_1} n_{y_2} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{8} \sum_{y_1,y_2 \in Y'} b^{\Lambda}_{y_1,y_2} s_{y_1} s_{y_2} + \frac{i}{2} \sum_{y \in Y \bigcap Y'} n_y s_y \right\}, \qquad (9)$$

где $\{c^{\Lambda}_{y_1,y_2}\} = C^{\Lambda} = (B^{\Lambda})^{-1} = (A^{\Lambda})^{-1/2}$.

Отсюда видно, что предел $\lim\limits_{\Lambda \uparrow X} \langle\ \rangle_{\Lambda}$ существует и равен выражению (9), в котором матрицы C^{Λ} и B^{Λ} заменены соответственно матрицами $C = A^{-1/2}$ и $B = A^{1/2}$. Лемма доказана.

Оператор H_{Λ}, записанный в виде (6ª), после замены $q''_x = (\lambda^{\Lambda}_x)^{1/4} q'_x$, можно переписать в виде

$$H_{\Lambda} = \sum \lambda^{1/2}_x (a^{\Lambda}_x)^* a^{\Lambda}_x + \text{const},$$

где $a^{\Lambda}_x f = \frac{1}{\sqrt{2}} q''{}_x f + \frac{df}{dq''{}_x}$, $(a^{\Lambda}_x)^* f = \frac{1}{\sqrt{2}} q''_x f - \frac{df}{dq'_x}$.

Переходя теперь к операторам $\bar{a}^{\Lambda}_x = \sum_{x'} \bar{U}^{\Lambda}_{x,x'} a^{\Lambda}_{x'}$ и $(\bar{a}^{\Lambda}_x)^* = \sum_{x'} \bar{U}^{\Lambda}_{x,x'} (a^{\Lambda}_{x'})^*$, где $\bar{U}^{\Lambda} = \{\bar{U}^{\Lambda}_{x,x'}\}$—ортогональная матрица, обратная к матрице U_{Λ}, входящей в формулу (6), получим окончательно, что

$$H_{\Lambda} = \sum_{x',x} b^{\Lambda}_{x,x'} (\bar{a}^{\Lambda}_x)^* \bar{a}^{\Lambda}_{x'} + \text{const}.$$

Отсюда и из следствия леммы 8 §1 вытекает, что оператор $H^{\Lambda}_{\text{ГНС}}$ для динамики (2), построенный по основному состоянию (4), совпадает с оператором

$$\overline{H}_{\Lambda} = \sum_{x',x \in \Lambda} b^{\Lambda}_{x,x'} a_x a_{x'},$$

действующим в пространстве $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$.

Воспользовавшись далее леммой 10 § 1, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2. *Пусть τ_t—предельная динамика на алгебре Вейля $W(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}))$, построенная по выражению* (1) *и пусть $\langle\ \rangle$—предельное состояние на $W(\mathcal{H})$ (см.* (5)), *основное для этой динамики. Тогда ГНС-представление этой динамики относительно состояния $\langle\ \rangle$ задается в пространстве $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ и совпадает со свободной динамикой, гамильтониан которой имеет вид*

$$H = \sum_{x',x \in X} b_{x,x'} a_x^* a_x,$$

а матрица $B = \{b_{x,x'}\} = A^{1/2}$.

§ 3. Свободное квазисостояние

Напомним, что квазисостоянием на алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей **1** называют линейный функционал $\langle\ \rangle$ на $\mathfrak{A}$ такой, что $\langle \mathbf{1} \rangle = 1$. Четное квазисостояние на супералгебре КАС $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ (т. е. такое, что $\langle A \rangle = 0$ для всех нечетных элементов $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$) называется *гауссовым*, если

$$\langle a^{\#}(f_1) \dots a^{\#}(f_{2k}) \rangle = \sum (-1)^{|\pi|} \prod \langle a^{\#}(f_{i_s}) a^{\#}(f_{j_s}) \rangle, \qquad (1)$$

$$a^{\#}(f) = a^*(f) \text{ или } a^{\#}(f) = a(f),$$

где сумма берется по всем разбиениям множества индексов $(1, \dots, 2k)$ на k пар $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)$, причем $i_s < j_s$, а $|\ \pi\ |$—четность перестановки $\pi = (i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k)$ (см. [26]).

Квазисостояние на алгебре КАС называется *калибровочно-инвариантным*, если оно отлично от нуля лишь на мономах, содержащих одинаковое число операторов рождения и операторов уничтожения. В частности, гауссово квазисостояние калибровочно-инвариантно в том и только том случае, когда

$$\langle a(f) a(g) \rangle = \langle a^*(f) a^*(g) \rangle = 0 \qquad (2)$$

для всех пар $f, g \in \mathcal{H}$.

Гауссово калибровочно-инвариантное квазисостояние на алгебре КАС называют *свободным квазисостоянием*. Очевидно, что оно определяется значениями на мономах $a^*(f)a(g)$

$$\langle a^*(f) a(g) \rangle = (Bf, g), \qquad (3)$$

где B—некоторый ограниченный оператор в $\mathcal{H}$. Из (3) вытекает, что

$$\langle a(g) a^*(f) \rangle = ((E - B)f, g). \qquad (4)$$

Лемма 1. *Свободное квазисостояние, задаваемое оператором B, является состоянием в том и только в том случае, когда B самосопряжен и*

$$0 \le B \le E. \qquad (5)$$

Доказательство. Необходимость этих условий следует из равенства

$$\langle a^*(f) a(g) \rangle = \overline{\langle a^*(g) a(f) \rangle}$$

и положительности значений:

$$\langle a^*(f) a(f) \rangle \ge 0, \ \langle a(f) a^*(f) \rangle \ge 0.$$

В случае одномерного пространства $\mathcal{H} = \mathbb{C}^1$ в алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ всякий положительный четный элемент, отличный от константы, имеет вид

$$caa^* + ba^*a, \ c \ge 0, \ b \ge 0,$$

а условие (5) означает положительность квазисостояния на этих элементах. Пусть, далее, $\mathcal{H}$ имеет произвольную размерность, а B—конечномерный самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию (5). Все пространство $\mathcal{H}$ мы можем разложить в прямую ортогональную сумму

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_0,$$

где $\mathcal{H}_0 = \mathrm{Ker} B$, а $\mathcal{H}_i$—одномерные подпространства, натянутые на собственные векторы оператора B, с собственными значениями $\lambda_i : 0 < \lambda_i \le 1$. При этом алгебра КАС представляется в виде тензорного произведения супералгебр (см. [23])

$$\mathfrak{A}(\mathcal{H}) = \mathfrak{A}(\mathcal{H}_1) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}(\mathcal{H}_s) \otimes \mathfrak{A}(\mathcal{H}_0),$$

а квазисостояние $\langle\ \rangle$ является тензорным произведением квазисостояний на $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_i), i = 0, 1, \dots, s$, причем квазисостояние $\langle\ \rangle_0$ на $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_0)$ отлично от нуля только на $\mathbf{1} \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}_0)$ и тем самым является состоянием, а квазисостояния на $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_i), i = 1, \dots, s,$

являются состояниями по доказанному выше. Тензорное произведение состояний снова является состоянием (это верно для четных состояний при тензорном перемножении супералгебр). Таким образом, $\langle\ \rangle$—состояние. Произвольный самосопряженный оператор B, удовлетворяющий условию (5), следует приблизить в слабой топологии вырожденными операторами B_n, по-прежнему удовлетворяющими (5). При этом квазисостояние $\langle\ \rangle$, соответствующее оператору B, приближается состояниями $\langle\ \rangle_{B_n}$, следовательно, само является состоянием.

Лемма 2. *Пусть на алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ определена свободная динамика τ_t, порожденная одночастичным гамильтонианом h, действующим в $\mathcal{H}$. Тогда свободное квазисостояние $\langle\ \rangle_B$, задаваемое оператором B, инвариантно относительно этой динамики в том и только том случае, когда h коммутирует с B.*

Доказательство следует из формул (6.4.1) и (3).

Мономы Вика на алгебре КАС. Пусть на алгебре КАС $\mathfrak{A}(\overline{\mathcal{H}})$ определено гауссово квазисостояние (не обязательно калибровочно-инвариантное). Тогда, подобно тому как это делается для функций от гауссовой системы случайных величин (см. [26]), мы можем ввести в алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ операцию виковского упорядочения $:\ :$. На мономах $a^\#(f_1)\dots a^\#(f_n) \equiv a^\#_T$, где $T = \{f_1, \dots, f_n\}$— упорядоченный набор элементов $f_i \in \mathcal{H}$, операция $:\ :$ определяется с помощью индуктивной формулы

$$: a^\#_T := \sum : a^\#_{T'} : \langle a^\#_{T\backslash T'}\rangle(-1)^{\pi(T,T')}, \tag{6}$$

где суммирование происходит по всем подмножествам $T' \subseteq T$, в которых сохраняется прежний порядок, $T\backslash T'$—дополнительное к T' подмножество в T, а $\pi(T, T')$—четность перестановки $T \to (T\backslash T', T')$. По линейности операция $:\ :$ продолжается на все элементы алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$.

Свойства виковской операции.

I. Прямая формула и формула обращения

$$: a^\#_T := \sum a^\#_{T'}\langle a^\#_{T\backslash T'}\rangle(-1)^{\pi(T,T')+\frac{|T-T'|}{2}}, \tag{7}$$

$$a^\#_T = \sum_{\substack{T'\subseteq T\\ |T\backslash T'|-\text{четно}}} : a^\#_{T'}\langle a^\#_{T\backslash T'}\rangle(-1)^{\pi(T,T')}.$$

(Заметим, что $\langle a^\#_{T\backslash T'}\rangle \neq 0$ лишь в случае, когда $| T - T' |$ четно).

II. Для двух элементов $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$

$$(: A_1 A_2 :)^* =: A_2^* A_1^* : \tag{8}$$

III. Для двух упорядоченных наборов

$$T = (f_1, \dots, f_n),\ S = (g_1, \dots, g_m),$$

$$\langle : a^\#_T : : a^\#_S : \rangle = \begin{cases} 0, | T | \neq | S |, \\ \sum\limits_{\pi} (-1)^{|\pi|}\langle a^\#(f_1)a^\#_{g_{\pi(1)}}\rangle \dots \langle a^\#(f_n)a^\#_{g_{\pi(n)}}\rangle, \end{cases} \tag{9}$$

где суммирование берется по всем подстановкам $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$, а $| \pi |$—четность этой подстановки.

Многие другие свойства виковского упорядочения для гауссовой системы случайных величин (см. [26]) также переносятся на случай алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ с учетом правила знаков.

Виковское упорядочение можно ввести также и в случае гауссового квазисостояния на алгебре Грассмана (см. [26]) с помощью формул (6)–(9) (алгебру Грассмана можно также рассматривать как подалгебру алгебры КАС, порожденную одними операторами рождения).

Заметим, что, если свободное квазисостояние $\langle\ \rangle_B$ инвариантно относительно свободной динамики τ_t в алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, порождаемой одночастичным гамильтонианом h, то τ_t действует на виковские мономы $: a^\#(f_1)\dots a^\#(f_n) :$ по формуле

$$\tau_t(: a^\#(f_1)\dots a^\#(f_n) :) =: a^\#(e^{ith}f_1)\dots a^\#(e^{ith}f_n) : . \tag{9^a}$$

Это непосредственно следует из формулы (6.4.1) для действия свободной динамики на мономы $a^\#_T$ и формулы (7).

Вычислим теперь ГНС-представление алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, порожденное свободным состоянием $\langle\ \rangle_B$, инвариантным относительно свободной динамики; мы ограничимся случаем, когда собственные векторы $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ оператора B образуют базис в $\mathcal{H}$.

Для любых двух конечных подмножеств векторов базиса

$$T = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}),\ i_1 < i_2 < \dots < i_k,$$

$$S = (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_m}),\ j_1 < j_2 < \dots < j_m,$$

введем виковские мономы

$$:a_T^{\#}a_S:, \tag{10}$$

где

$$a_T^* = a^*(e_{i_1})\dots a^*(e_{i_k}),$$

$$a_S = a(e_{j_1})\dots a(e_{j_m}).$$

Лемма 3. *Относительно скалярного произведения*

$$(A,C) = \langle C^*A\rangle_B,\ \ A,C\in\mathfrak{A}(\mathcal{H}),$$

мономы (10) *с различными парами* (T,S) *и* (T',S') *ортогональны, а квадрат нормы монома* (10) *равен*

$$(:a_T^{\#}a_S:, :a_T^{\#}a_S:) = \prod_{s=1}^{k}(1-\lambda_{i_s})\prod_{p=1}^{m}\lambda_{j_p}, \tag{11}$$

где λ_i*—собственное значение* B*, соответствующее собственному вектору* e_i.

Доказательство получается непосредственным применением свойств II и III.

Из (11) видно, что мономы $:a_T^{\#}a_S:$ имеют ненулевую норму в том и только том случае, если среди набора T нет собственных векторов B с единичным собственным значением и в наборе S нет собственных векторов B с собственным значением 0. Таким образом, пространство $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$ натянуто на мономы $:a_T^{\#}a_S:$, где наборы T состоят из собственных векторов B, принадлежащих пространству

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}\ominus\operatorname{Ker}(E-B), \tag{12}$$

а наборы S—из собственных векторов B, содержащихся в пространстве

$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}\ominus\operatorname{Ker}B. \tag{13}$$

Из этого видно, то представление ГНС можно реализовать в тензорном произведении фоковских пространств (тензорное произведение рассматривается в смысле суперпространств, см. [23])

$$\mathcal{F}_a(\mathcal{H}_1)\otimes\mathcal{F}_a(\mathcal{H}_2^*) = \mathcal{F}_a(\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2^*), \tag{13^a}$$

если каждому нормированному моному

$$:a_T^{\#}a_S:\subset\mathcal{H}_{\text{ГНС}},\ T=(e_{i_1},\dots,e_{i_k}),\ S=(e_{j_1},\dots,e_{j_m})$$

сопоставить вектор

$$b_1^*(e_{i_1}^{(1)})\dots b_1^*(e_{i_k}^{(1)})\Omega_1\otimes b_2^*(e_{j_1}^{(2)})\dots b_2^*(e_{j_m}^{(2)})\Omega_2 =$$

$$= \hat b^*(e_{i_1}^{(1)})\dots\hat b^*(e_{i_k}^{(1)})\hat b(e_{j_1}^{(2)})\dots\hat b(e_{j_m}^{(2)})\hat\Omega.$$

Здесь $\mathcal{H}_2^*$ обозначает гильбертово пространство, получающееся из $\mathcal{H}_2$ изменением скалярного произведения:

$$(f,g)_{\mathcal{H}_2^*} = \overline{(f,g)}_{\mathcal{H}_2} = (g,f)_{\mathcal{H}_2}, \tag{13^б}$$

а $\Omega_1,\Omega_2,\ \hat\Omega=\Omega_1\otimes\Omega_2$— вакуумные векторы в фоковских пространствах $\mathcal{F}_a(\mathcal{H}_1),\mathcal{F}_a(\mathcal{H}_2^*)$ и $\mathcal{F}_a(\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2^*)$ соответственно, $\{b_1^*(f),\ f\in\mathcal{H}_1\}$, $\{b_2^*(f), f\in\mathcal{H}_2^*\}$ и $\{\hat b^*(f), f\in\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2^*\}$—обычные операторы рождения, действующие в этих пространствах, а $e_i^{(1)}$ и $e_j^{(2)}$ векторы из базиса $\{e_i\}$ в $\mathcal{H}$, рассматриваемые соответсвенно как элементы пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2^*$ (и, тем самым, как элементы $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2^*$).

Пусть, далее, в алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ задана свободная динамика τ_t, порожденная одночастичным гамильтонианом h, коммутирующим с оператором B (и, таким образом, свободное состояние $\langle\ \rangle_B$ инвариантно относительно τ_t). Мы можем считать, что собственные векторы $\{e_i\}$ оператора B, введенные выше,—собственные и для h. Тогда мономы $:a_T^*a_S:$ в силу (9^a) являются собственными векторами для автоморфизмов τ_t

$$\tau_t(:a_T^*a_S:) = \prod_{p=1}^{k}\exp\{-it\lambda_p\}\prod_{s=1}^{m}\exp\{it\lambda_s\}:a_T^*a_S:, \tag{14}$$

где $T=(e_{i_1},\dots,e_{i_k}), S=(e_{j_1},\dots,e_{j_m})$, а λ_i—собственное значение h, соответствующее вектору e_i. Из (14) следует, что моном $:a_T^*a_S:$ является собственным вектором для $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$ с собственным значением $\sum\limits_{p=1}^{k}\lambda_{i_p}-\sum\limits_{s=1}^{m}\lambda_{j_s}$.

При переходе к представлению в пространстве $\mathcal{F}_a(\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2^*)$, описанному выше, оператор $H_{\text{ГНС}}$ совпадает, таким образом, с оператором

$$H_{\text{ГНС}} = \sum_{e_i^{(1)}\in\mathcal{H}_1}\lambda_i\hat b^*(e_i^{(1)})\hat b(e_i^{(1)})+$$

$$+\sum_{e_j^{(2)}\in\mathcal{H}_2^*}(-\lambda_j)\hat{b}^*(e_j^{(2)})\hat{b}(e_j^{(2)})=d\Gamma(\hat{h}),\qquad(15)$$

где $\hat{h}=h_1\oplus(-h_2)$, а h_1,h_2—части оператора h в инвариантных подпространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ соответственно.

Все полученные здесь результаты для случая оператора B с точечным спектром остаются верными и в общем случае, т. е. верна следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть на алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ определено свободное состояние $\langle\ \rangle_B$, задаваемое оператором B и инвариантное относительно динамики τ_t, порожденной гамильтонианом h, коммутирующим с B. Тогда ГНС-представление алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, порожденное состоянием $\langle\ \rangle_B$, можно задать в фоковском пространстве $\mathcal{F}_a(\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2^*)$, где пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2^*$ определены формулами* (12), (13) *и* ($13^б$) *так, что оператор $H_{\text{ГНС}}$, соответствующий динамике τ_t, имеет вид* (15).

Равновесные состояния для свободной динамики. Пусть задана свободная динамика τ_t в алгебре КАС $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, определяемая одночастичным гамильтонианом h.

Лемма 5. *Для каждого β, $0<\beta<\infty$, существует единственное β-равновесное состояние относительно свободной динамики τ_t. Оно свободно и задается оператором*

$$B=(E+e^{\beta h})^{-1}.\qquad(16)$$

Доказательство. Покажем, что свободное состояние $\langle\ \rangle_\beta$ с оператором B (16) является β-равновесным. Пусть $A_1=a^*(f)$, $A_2=a(g)$. Тогда

$$F_{A_1,A_2}(t)=\langle a^*(f)a(e^{ith}g)\rangle=(e^{-ith}(E+e^{\beta h})^{-1}f,g).$$

Эта функция продолжается в полосу $0<\operatorname{Im}z\le\beta$ и при $z=t+$ $+i\beta$ равна

$$F_{A_1,A_2}(t+i\beta)=(e^{-ith}e^{\beta h}(E+e^{\beta h})^{-1}f,g).\qquad(17)$$

С другой стороны, из (4.3) получаем

$$\langle\tau_t(A_2)A_1\rangle=(e^{-ith}(E-(E+e^{\beta h})^{-1})f,g).$$

что и совпадает с (17). Аналогичным образом КМШ-условие (2) проверяется для случая, когда $A_1=a(g)$, $A_2=a^*(f)$. В общем случае, когда $A_1=:a_T^{\#}:$, $A_2=:a_S^{\#}:$, где $T=(f_1,\dots,f_k)$, $S=$ $=(g_1,\dots,g_s)$, а упорядочение : : совершается относительно состояния $\langle\ \rangle_B$, функция $F_{A_1,A_2}(t)=\langle A_1\tau_t(A_2)\rangle_B$ представляется в виде суммы произведений функций $\langle a^{\#}(f_k)a^{\#}(e^{ith}g_j)\rangle_B$, каждая из которых продолжается по переменному t в полосу $0<\operatorname{Im}z\le\beta$ и при $z=t+i\beta$ совпадает с функцией $\langle a^{\#}(e^{ith}g_j)\times$ $\times a^{\#}(f_k)\rangle_B$. С другой стороны, при четном $k+s$ функция $\langle\tau_t(A_2)A_1\rangle$ представляется точно такой же суммой произведений фунций $\langle a^{\#}(e^{ith}g_j)a^{\#}(f_k)\rangle_B$. Таким образом, свободное состояние, определяемое оператором B вида (16), является β-равновесным. Доказательство единственности такого состояния мы проведем для случая оператора h, у которого собственные векторы $\{e_i\}$ образуют базис в $\mathcal{H}$. Прежде всего покажем, что β-равновесное состояние на мономах $a_T^*a_S$ равно нулю: $\langle a_T^*a_S\rangle=0$, если наборы $T=(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$, $S=(e_{j_1},\dots,e_{j_m})$ различны. Действительно, в этом случае найдется вектор, скажем $e_{j_l}\in S$, отличный от всех векторов из T, или, наоборот, в T найдется вектор, отличный от всех векторов из S. Рассмотрим первый случай и положим $A_1=a_T^*a_{S\setminus\{e_{j_l}\}}$, $A_2=a(e_{j_l})$. Тогда

$$F_{A_1,A_2}(t)=\exp\{-it\lambda_{j_l}\}\langle a_T^*a_S\rangle,$$

$$\langle\tau_t(A_2)A_1\rangle=-\exp\{-it\lambda_{j_l}\}\langle a_T^*a_S\rangle$$

и, следовательно, равенство 2) возможно лишь при

$$\langle a_T^*a_S\rangle=0.$$

Аналогично разбирается второй случай. Итак, $T=S$. Теперь, снова полагая $A_1=a_T^*a_{T\setminus\{e_{i_k}\}}$, $A_2=a(e_{i_k})$, получаем, что

$$F_{A_1,A_2}(t+i\beta)=\exp\{-it\lambda_{i_k}+\lambda_{i_k}\beta\}\langle a_T^*a_T\rangle.$$

С другой стороны,

$$\langle\tau_t(A_1)A_2\rangle=-\exp\{-it\lambda_{i_k}\}\langle a_T^*a_T\rangle+\exp\{-it\lambda_{i_k}\}(-1)^{k-1}\langle a_{T\setminus\{e_{i_k}\}}^*a_{T\setminus e_{i_k}}\rangle.$$

Отсюда в силу условия КМШ 2)

$$\langle a_T^*a_T\rangle=\frac{(-1)^{k-1}}{\exp\{\lambda_{i_k}\beta\}+1}\langle a_{T\setminus\{e_{i_k}\}}^*a_{T\setminus\{e_{i_k}\}}\rangle.$$

Продолжая таким образом, дальше получим, что

$$\langle a_T^*a_T\rangle=(-1)^{|\pi|}\prod_{s=1}^{k}\frac{1}{\exp\{\lambda_{i_s}\beta\}+1},$$

где $|\pi|$—четность перестановки $\pi = (1, k+1, 2, k+2, \dots$ $\dots, 2k-1, k, 2k)$, т. е. на всех мономах $a^*_T a_S$ состояние $\langle\ \rangle$ совпадает со свободным состоянием, задаваемым оператором (16). Доказательство единственности β-равновесного состояния для динамики τ_t с произвольным оператором h см. в книге [49]. Поскольку у оператора (16)

$$\mathrm{Ker}B = \{0\},\ \mathrm{Ker}(E-B) = \{0\},$$

пространства $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ и, таким образом, пространство ГНС, порожденное β-равновесным состоянием для динамики τ_t, совпадает с пространством $\mathcal{F}_a(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}^*)$, где $\mathcal{H}^*$ получается из $\mathcal{H}$ изменением скалярного произведения ($13^{б}$), а оператор $H_{\text{ГНС}}$ имеет вид

$$H_{\text{ГНС}} = d\Gamma(h\oplus(-h)).$$

Лемма 6. *Для того, чтобы свободное состояние $\langle\ \rangle_B$ было основным для свободной динамики τ_t, порожденной h, необходимо и достаточно, чтобы*

$$B = E_{(-\infty,0)} + B_0 E_{\{0\}}, \qquad (18)$$

B_0—самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{H}_0 = E_{\{0\}}\mathcal{H}$ такой, что $0 < B_0 < 1$, а $\{E_\Delta, \Delta\subset R^1\}$— спектральное семейство проекторов для оператора h.

Доказательство. Рассмотрим $A_1 = a^*(f)$ и $A_2 = a(g)$. Тогда функция $F_{A_1,A_2}(t) = \langle A_1\tau_t(A_2)\rangle$ имеет вид

$$F_{A_1,A_2}(t) = \langle e^{-it\lambda}Bf, g\rangle = \int e^{-ith}d\rho_{Bf,g}(\lambda), \qquad (19)$$

где $\rho_{Bf,g}(\lambda) = (E_\lambda Bf, g)$—спектральная мера. Функция (19) может быть продолжена до ограниченной аналитической функции в верхней полуплоскости в том и только том случае, если

$$\mathrm{supp}\rho_{Bf,g}(\lambda)\in(-\infty, 0].$$

Отсюда следует, что

$$B = E_{(-\infty,0]}B', \qquad (20)$$

где B'—некоторый самосопряженный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}_{(-\infty,0]} = E_{(-\infty,0]}\mathcal{H}$ и коммутирующий с h. Выбрав теперь $A_1 = a(g), A_2 = a^*(f)$, получим, что

$$F_{A_1,A_2}(t) = \int e^{it\lambda}d\rho_{(E-B)f,g}(\lambda) \qquad (21)$$

и для продолжимости функций $F_{A_1,A_2}(t)$ в верхнюю полуплоскость при всех f и g необходимо и достаточно, чтобы

$$E - B = E_{[0,\infty)}B'', \qquad (22)$$

где B''—самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_{[0,\infty)}$, коммутирующий с h. Из (20) и (22) легко следует (18). Для любых виковских мономов $A_1 =: a^*_T a_S :$ и $A_2 =: a^*_{T'}a_{S'} :$ вида (10) функция $F_{A_1,A_2}(t)$ представляется суммой произведений вида $\langle a^*(f)a(e^{ith}g)\rangle$ и $\langle a(g)a^*(e^{ith}f)\rangle$ и каждый множитель по доказанному продолжается аналитически в верхнюю полуплоскость и, следовательно, функция $F_{A_1,A_2}(t)$ также обладает этим свойством. Лемма доказана.

Снова получаем, что ГНС-представление для свободной динамики в основном состоянии (18) задается в пространстве

$$\mathcal{F}_a(\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2^*),$$

где $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_+\oplus\mathcal{H}_{\{0\}}\ominus\mathrm{Ker}(E-B_0)$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_-\oplus\mathcal{H}_{\{0\}}\ominus\mathrm{Ker}B_0$, а $\mathcal{H}_+ = E_{(0,\infty)}\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_- = E_{(-\infty,0)}\mathcal{H}, \mathcal{H}_{\{0\}} = \mathrm{Ker}\,h$. При этом оператор ГНС имеет вид

$$d\Gamma(h_+\oplus(-h_-)),$$

где $h_\pm = h|_{\mathcal{H}_\pm}$.

Пусть в $\mathcal{H}$ задан одночастичный оператор—положительный гамильтониан h с дискретным спектром

$$0 = \lambda_1\le\lambda_2\le\dots\le\lambda_n\le\dots,$$

пронумерованным в порядке возрастания, причем $\lambda_n\to\infty$ при $h\to\infty$. Обозначим $\{\varphi_n\}$ соответствующую ортонормированную систему собственных функций. Пусть

$$h_\mu = h+\mu E,$$

где μ вещественно, однопараметрическое семейство гамильтонианов. Спектр оператора $d\Gamma(h_\mu)$ в $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ состоит из собственных значений вида

$$(\lambda_{i_1}+\mu)+\dots+(\lambda_{i_k}+\mu),$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$—наборы целых чисел, а соответствующие собственные векторы равны

$$\Phi_{\{i_1,\ldots,i_k\}} = a^*(\varphi_{i_1})\ldots a^*(\varphi_{i_k})\Omega.$$

Очевидно, что при $\mu > 0$ наименьшим собственным значением $d\Gamma(h_\mu)$ является нуль с собственным вектором $\Omega = \Phi_{\min}$. В случае $\mu \leq 0$ можно указать такое целое r, что

$$\lambda_r \leq -\mu < \lambda_{r+1}.$$

Тогда очевидно, что наименьшее собственное значение $d\Gamma(h_\mu)$ равно $(\lambda_0 + \mu) + \cdots + (\lambda_r + \mu)$ и соответствующий собственный вектор

$$\Phi_{\min} = a^*(\varphi_0)\ldots a^*(\varphi_r)\Omega. \tag{23}$$

Лемма 7. *Состояние $\langle A\rangle_{\min} = \langle A\Phi_{\min}, \Phi_{\min}\rangle$ является свободным и основным для динамики τ_t^μ, порожденной h_μ.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\mu \geq 0$. Калибровочная инвариантность состояния $\langle\ \rangle_{\min}$ следует из равенства

$$(a(f_1)\ldots a(f_n)a^*(g_1)\ldots a^*(g_m)\Omega, \Omega) =$$

$$= (a^*(g_1)\ldots a^*(g_m)\Omega, a^*(f_n)\ldots a^*(f_1)\Omega) = 0 \text{ при } n \neq m.$$

Гауссовость вытекает из равенства

$$(a(f_1)\ldots a(f_n)a^*(g_1)\ldots a^*(g_n)\Omega, \Omega) =$$

$$= \sum(-1)^{k-1}(f_n g_k)(a(f_1)\ldots a(f_{n-1})a^*(g_1)\ldots a^*(\check{g}_k)\ldots a^*(g_m)\Omega, \Omega),$$

получающегося последовательным перетягиванием $a(f_n)$ вправо от всех $a^*(g_k)$. Продолжая эту процедуру дальше, мы получим разложение вида (1). В случае $\mu < 0$ рассмотрим следующий $*$-автоморфизм γ алгебры КАС (каноническое преобразование), который на образующих $a^{\#}(f)$ действует по формулам

$$\gamma(a(f)) \equiv \tilde{a}(f) = a^*(f^*), \tag{24^а}$$

$$\gamma(a^*(f)) \equiv \tilde{a}^*(f) = a(f^*),$$

где $f^* = \sum_{k=0}^{r} \bar{c}_k\varphi_k$, если $f = \sum_{k=0}^{r} c_k\varphi_k \in E^\mu_{(-\infty,0]}\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mu$ и $\{E^\mu_\Delta\}$ - спектральное семейство оператора h_μ, и

$$\gamma(a(f)) \equiv \tilde{a}(f) = a(f), \tag{24^б}$$

$$\gamma(a^*(f)) \equiv \tilde{a}^*(f) = a^*(f),\ f \in \mathcal{H}_\mu^\perp = \overline{\mathcal{H}}_\mu.$$

Заметим, что для новой системы образующих $(\tilde{a}^*(f), \tilde{a}(f))$, удовлетворяющих условию антикоммутации, вектор $\Phi_{\min}$ (23) является вакуумным

$$\tilde{a}(f)\Phi_{\min} = 0,\ f \in \mathcal{H},$$

а представление этой системы в пространстве $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ унитарно-эквивалентно обычному фоковскому представлению операторов рождения и уничтожения $\{b^*(f), b(f)\}$ в пространстве $\mathcal{F}_a(\tilde{\mathcal{H}})$, где $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_\mu^* \oplus \overline{\mathcal{H}}_\mu$, а $\mathcal{H}_\mu^*$ отличается от $\mathcal{H}_\mu$ заменой скалярного произведения (13^б). Таким образом, доказательство того, что $(A\Phi_{\min}, \Phi_{\min})$ является свободным, следует из предыдущих рассуждений. Соответствующий оператор B имеет вид $B = E^\mu_{(-\infty,0]}$ и, таким образом, в силу леммы 6 состояние $\langle\ \rangle_{\min}$—основное для динамики τ_t^μ.

Пространство $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$, порожденное этим состоянием, совпадает с фоковским пространством $\mathcal{F}_a(\tilde{\mathcal{H}})$, а оператор H^μ для динамики τ_t^μ имеет вид

$$\sum_k \mid \lambda_k + \mu \mid b_k^* b_k = d\Gamma(\mid h + \mu \mid).$$

Заметим, что оператор $d\Gamma(h + \mu) = \sum_k(\lambda_k + \mu)a_k^* a_k$, будучи записан с помощью операторов $\tilde{a}_k^*, \tilde{a}_k$, имеет вид

$$\sum_k \mid \lambda_k + \mu \mid \tilde{a}_k^* a_k + (\sum_{i=0}^{r}(\lambda_i + \mu))E,$$

т. е. с точностью до вычитания константы унитарно-эквивалентен оператору $H^\mu_{\text{ГНС}}$. В случае, когда оператор h имеет уже произвольный спектр, новая система операторов $\tilde{a}^*(f), \tilde{a}(f)$, полученных с помощью канонического преобразования (24^а), (24^б), может оказаться, вообще говоря, не унитарно—эквивалентной обычной системе фоковских операторов и тем самым оператор $d\Gamma(h + \mu) + sE$ не унитарно-эквивалентен оператору $H^\mu_{\text{ГНС}}$ ни для какой константы s.

§ 4. Фоковское представление для динамик свободных систем

Мы покажем здесь на примерах, что для некоторых свободных систем оператор $H_{\text{ГНС}}$, определяемый их динамикой и равновесным состоянием, унитарно-эквивалентен гамильтониану вида $d\Gamma(h)$ в надлежаще выбранном фоковском пространстве $\mathcal{F}_{a,s}(\mathcal{H})(h$—одночастичный оператор в $\mathcal{H})$.

1. Классический идеальный газ. Напомним, что пространством состояний для бесконечного идеального газа служит совокупность Ω всех локально-конечных (неупорядоченных) наборов $X = \{(q_i, v_i)\}, (q_i, v_i) \in R^\nu \times R^\nu$, т. е. таких наборов, что в любой ограниченной области $G \subset R^\nu \times R^\nu$ содержится лишь конечное число элементов $\{q_i, v_i\} \in X$. Гиббсовское распределение $\mu_0 = \mu_0^{\rho,\beta}$ идеального газа совпадает с распределением пуассоновского поля в $R^\nu \times R^\nu$, задаваемого мерой

$$d\lambda = \rho(\frac{\beta}{2\pi})^{\nu/2} \exp\{-\frac{\beta v^2}{2}\}dqdv. \qquad (1)$$

Это поле можно описать так:

1) число $n_B(X)$ элементов (q, v) из конфигурации X, попавших в некоторое ограниченное множество $B \subset R^\nu \times R^\nu$, распределено по пуассоновскому закону

$$\Pr(n_B(X) = n) = \frac{(\lambda(B))^n}{n!}e^{-\lambda(B)}, \qquad (2)$$

где $\lambda(B)$—мера множества B, определяемая формулой (1).

2) для двух непересекающихся множеств B_1, $B_2 \subset R^\nu$, $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$ величины $n_{B_1}(X)$ и $n_{B_2}(X)$ независимы.

Подробнее это распределение описано в [21]. Обозначим $\mathfrak{M}$ совокупность конечных наборов $X \in \Omega$. Разбиение

$$\mathfrak{M} = \bigcup \mathfrak{M}_n,$$

где $\mathfrak{M}_n$—совокупность наборов из n элементов, и представление пространства $\mathfrak{M}_n$ в виде фактор-пространства

$$\mathfrak{M}_n = (R^\nu \times R^\nu)^n / S_n$$

пространства $(R^\nu \times R^\nu)^n$ упорядоченных последовательностей $\{(q_1, v_1), \ldots, (q_n, v_n)\}$, факторизованного по группе S_n перестановок их элементов, позволяет ввести в каждом пространстве $\mathfrak{M}_n$ меру

$$dX = \frac{dq_1 dv_1 \ldots dq_n dv_n}{n!}, \qquad (3)$$

которую мы можем рассматривать сразу на всем пространстве $\mathfrak{M}$.

Замечание. Из определения (3) видно, что множество наборов $\{(q_1, v_1), \ldots, (q_n, v_n)\}$, у которых хотя бы два элемента совпадают, имеет меру нуль, т. е. совокупность $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ всех конечных подмножеств $X \subset R^\nu \times R^\nu$ (т. е. наборов с попарно-различными элементами) имеет полную меру. По той же причине совокупность $\Omega' \subset \Omega$ локально-конечных подмножеств $X \subset R^\nu \times R^\nu$ имеет полную μ_0 меру (подробнее см. в [21]).

Корреляционная функция $\rho_0(X) = \rho_{\mu_0}(X)$ на $\mathfrak{M}$ для введенного выше пуассоновского поля равна

$$\rho_0(X) = \rho^{N(X)} \prod_i \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\nu/2} \exp\left\{-\frac{\beta v_i^2}{2}\right\}, \qquad (4)$$

$$X = \{(q_i, v_i)\} \in \mathfrak{M},$$

где $N(X)$—число элементов X. Определение корреляционной функции ρ для любого точечного поля, т. е. любого распределения на Ω. приведено в [14]. Для нас важно следующее ее свойство. Пусть $\Phi(X)$, $X \in \mathfrak{M}$, некоторая финитная функция на пространстве $\mathfrak{M}$, т. е. такая, что

$$\varphi(X) \neq 0,\ X = \{(q_i, v_i)\}$$

лишь в случае, если $N(X) < N_0 = N_0(\varphi)$ и $X \subset G$, где $G = G(\varphi)$—некоторое ограниченное подмножество $R^\nu \times R^\nu$. Тогда для всех $\omega \in \Omega$ определен функционал

$$F_\varphi(\omega) = \sum_{X \subseteq \omega} \varphi(X). \qquad (5)$$

Функционал вида (5) обычно называют *сумматорным*. Оказывается, что для любого точечного поля в $R^\nu \times R^\nu$ с распределением вероятностей μ на Ω, у которого существует корреляционная функция $\rho_\mu(X)$, верна формула

$$\langle F_\varphi(\omega)\rangle_\mu = \int_{\mathfrak{M}} \varphi(X)\rho_\mu(X)dX. \qquad (6)$$

В случае, когда функция φ в (5) уже не финитна, но суммируема по $\mathfrak{M}$ относительно σ-конечной меры $\rho_\mu dX$, сумматорный функционал (5) определен для μ-почти всех ω и по-прежнему верна формула (6).

Введем теперь пространство $\mathcal{H} = L_2(R^\nu \times R^\nu, d\lambda)$ функций $f(q,v)$ на $R^\nu \times R^\nu$. Легко видеть, что симметризованная n-я тензорная степень

$$(\mathcal{H}^{\otimes n})^{\mathrm{sym}} = \mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{sym}}$$

(с скалярным произведением, отличающимся от обычного скалярного произведения в $\mathcal{H}^{(n)}_{\mathrm{sym}}$ множителем $1/n!$) совпадает с гильбертовым пространством $L_2(\mathfrak{M}_n, \rho_0(X)dX)$, где $\rho_0(X), X \in \in \mathfrak{M}_n$,— корреляционная функция (4). Таким образом, фоковское пространство $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ совпадает с $L_2(\mathfrak{M}, \rho_0 dX)$.

Сейчас мы введем следующее унитарное отображение пространства $L_2(\mathfrak{M}, \rho_0 dX)$ на пространство $L_2(\Omega, \mu_0)$. Для каждой финитной функции $f \in L_2(\mathfrak{M}, \rho_0 dX)$ определим другую финитную функцию

$$\varphi_f(X) = \int\limits_{\mathfrak{M}} f(X \bigcup \tilde{X})(-1)^{N(\tilde{X})}\rho_0(\tilde{X})d\tilde{X} \qquad (7)$$

и сумматорный функционал

$$F^f(\omega) \equiv F_{\varphi_f}(\omega) = \sum_{X \subseteq \omega} \varphi_f(X). \qquad (8)$$

Лемма 1. *Отображение $f \to F^f$ изометрично*

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} f(X)\bar{g}(X)\rho_0(X)dX = \langle F^f \bar{F}_g \rangle_{\mu_0} \qquad (9)$$

и, будучи продолжено на все пространство $L_2(\mathfrak{M}, \rho_0 dX)$, задает его унитарное отображение на все $L_2(\Omega, \mu_0)$.

Доказательство. Пусть $f \in L_2(\mathfrak{M}_n, \rho_0 dX)$. Покажем, что для любого финитного элемента $g \in L_2(\mathfrak{M}_m, \rho_0 dX), m \le n$, скалярное произведение

$$(F^f, F_g) = \langle F^f \bar{F}_g \rangle_{\mu_0},$$

где F_g определено формулой (5), равно

$$(F^f, F_g) = \begin{cases} \int\limits_{\mathfrak{M}_n} f(X)\bar{g}(X)\rho_0(X)dX, & m = n, \\ 0, & m < n. \end{cases} \qquad (10)$$

Действительно,

$$\langle F^f \bar{F}_g \rangle_{\mu_0} = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{X \in \omega} \varphi_f(X) \right) \left(\sum_{X' \in \omega} \bar{g}(X')d\mu_0(\omega) \right) =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{X \subset \omega} (\sum_{\substack{X_1, X_2, X_3 : X_1 \bigcap X_2 = X_2 \bigcap X_3 = X_1 \bigcap X_3 = \emptyset \\ X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3}} \varphi_f(X_1 \bigcup X_2) \times$$

$$\times \bar{g}(X_2 \bigcup X_3)) d\mu_0(\omega) =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{M}} (\sum_{\substack{X_1, X_2, X_3 : X_1 \bigcap X_2 = X_2 \bigcap X_3 = X_1 \bigcap X_3 = \emptyset \\ X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3}} \varphi_f(X_1 \bigcup X_2) \times$$

$$\times \bar{g}(X_2 \bigcup X_3)) \rho_0(X)dX =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_f(X_1 \bigcup X_2)\bar{g}(X_2 \bigcup X_3)\rho_0(X_1)\rho_0(X_2)\rho_0(X_3)dX_1 dX_2 dX_3. \qquad (11)$$

Последнее равенство в (11) основано на несложных комбинаторных подсчетах, а также на мультипликативной форме $\rho_0(X)$. Кроме того, во всех этих формулах X_1, X_2, X_3 можно считать конечными подмножествами $R^\nu \times R^\nu$ (см. замечание выше). Подставив теперь в последнее равенство φ_f в виде (7) и воспользовавшись легко проверяемым тождеством

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \left(\sum_{X' \subseteq X} \varphi(X') \right) h(X)dX = \int\limits_{\mathfrak{M}^2} \varphi(X_1)h(X_2 \bigcup X_1)dX_1 dX_2,$$

получим, что

$$\langle F^f \bar{F}_g \rangle_{\mu_0} = \int\limits_{\mathfrak{M}^3} (\sum_{\substack{\tilde{X} \subseteq X_1 \\ \rho_0(X_1)\rho_0(X_2)\rho_0(X_3)dX_1 dX_2 dX_3}} (-1)^{N(\tilde{X})}) \times$$

$$\times f(X_1 \bigcup X_2) g(X_2 \bigcup X_3).$$

Поскольку $\sum\limits_{\tilde{X}\subseteq X_1}(-1)^{N(\tilde{X})}=0$, если $X_1\neq\emptyset$, получаем окончательно, что

$$\langle F^f\bar{F}_g\rangle_{\mu_0}=\int\limits_{\mathfrak{M}^2}f(X_2)g(X_2\bigcup X_3)\rho_0(X_2)\rho_0(X_3)dX_2dX_3,$$

откуда и следует (10). Поскольку при $f\in L_2(\mathfrak{M}_n,\rho_0dX)$

$$\varphi_f=f+\tilde{f},$$

где $\tilde{f}\in\oplus_{k<n}L_2(\mathfrak{M}_k,\,\rho_0(X)dX)$, из (10) следует, что при $f\in$ $\in L_2(\mathfrak{M}_n,\rho_0(X)dX)$, $g\in L_2(\mathfrak{M}_m,\rho_0(X)dX)$

$$(F^f,F^g)=\delta_{m,n}\int\limits_{\mathfrak{M}_n}f(X)\bar{g}(X)\rho_0dX.$$

Отсюда же и вытекает утверждение об изометричности отображения (7). Заметим далее, что любая локальная функция $F_\Lambda(\omega)=F_\Lambda(X), X=\omega\bigcap\Lambda$, где $\Lambda\subset R^\nu\times R^\nu$—ограниченное множество, зависящая от той части конфигурации ω, которая попала в Λ, всегда может быть представлена в виде сумматорной функции (5), если положить

$$\varphi(X)=\sum_{X'\subseteq X}(-1)^{N(X\setminus X')}F_\Lambda(X'),$$

где $X\subset\Lambda$—конечная конфигурация в Λ. Таким образом, сумматорные функционалы (5) всюду плотны в $L_2(\Omega,\mu_0)$. С другой стороны, отображение $f\to\varphi_f$ (7) является взаимно однозначным отображением множества финитных ограниченных функций в себя. Действительно, обратное отображение задается формулой

$$f(X)=\int\limits_{\mathfrak{M}}\varphi_f(X\bigcup\tilde{X})\rho_0(\tilde{X})d\tilde{X}.$$

Таким образом, отображение $f\to F^f$ продолжается до унитарного отображения $L_2(\mathfrak{M},\rho_0dX)$ на $L_2(\Omega,\mu_0)$.

Замечания. 1. Обозначим $\mathcal{H}_n\subset L_2(\Omega,\mu_0)$ образ пространства $L_2(\mathfrak{M}_n,\rho_0dX)$ при отображении (8). Чтобы лучше представить себе структуру этих пространств, рассмотрим вид функционалов $F^f\in\mathcal{H}_n$ для $n=0,1,2$. Очевидно, что $\mathcal{H}_0$—пространство констант. Пространство $\mathcal{H}_1$ является замыканием функционалов вида

$$F(\omega)=\sum_{(q,v)\in\omega}f(q,v)+f_0,\qquad(11^a)$$

где

$$f_0=-\rho\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\nu/2}\int\limits_{R^\nu\times R^\nu}f(q,v)\exp\left\{-\frac{\beta v^2}{2}\right\}dqdv,$$

а f—финитная ограниченная функция на $R^\nu\times R^\nu$. Слагаемое f_0 в (11^a) обеспечивает ортогональность функционала (11^a) всем константам. Пространство $\mathcal{H}_2$ является замыканием сумматорных функционалов вида

$$F=\sum_{\{(q_1,v_1),(q_2,v_2)\}\subset\omega}f((q_1,v_1)(q_2,v_2))+\sum_{(q,v)\in\omega}f_1(q,v),\qquad(12)$$

где

$$f_1(q,v)=-\int\limits_{R^\nu\times R^\nu}f((q,v)(\tilde{q},\tilde{v}))\rho_0(\tilde{q},\tilde{v})d\tilde{q}d\tilde{v},$$

где $f((q_1,v_1)(q_2,v_2))$—симметричная финитная ограниченная функция на $R^\nu\times R^\nu$. Второе слагаемое в (12) обеспечивает ортогональность F к функционалам вида $\sum\limits_{(q,v)\in\omega}g(q,v)$ и константам.

2. Пусть $B\subset R^\nu$—ограниченное множество и функция $f\in L_2(\mathfrak{M}_n,\rho_0dX)$ имеет вид

$$f(X)=\prod_{i=1}^{n}\chi_B(q_i),\ X=\{(q_i,v_i)\}\in\mathfrak{M}_n$$

($\chi_B(\cdot)$—характеристическая функция множества B). Тогда несложная выкладка показывает, что

$$F^f(\omega)=P_n^{\rho|B|}(\kappa_B(\omega)),$$

где $\kappa_B(\omega)$—число частиц в конфигурации ω, попавших в множество B, а $P_n^\mu(\kappa)$—так называемый многочлен Шарье, $\kappa\geq 0$—целое число:

$$P_n^\mu(s)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{s^{(k)}}{k!(n-k)!}\mu^{n-k},$$

а

$$s^{(k)} = \begin{cases} s(s-1)\dots(s-k+1) = \dfrac{s!}{k!}, & k>0, \\ 1, & k=0. \end{cases}$$

Эти многочлены ортогональны относительно пуассоновского распределения на Z^1_+ с интенсивностью μ:

$$\sum_{s=0}^{\infty} P^{\mu}_n(s) P^{\mu}_m(s) \frac{\mu^s e^{-\mu}}{s!} = \frac{\delta_{m,n}}{n!}\mu^n.$$

Рассмотрим теперь динамику τ_t в пространстве Ω

$$\tau_t\omega = \omega_t = \{(q^t_i, v^t_i)\},\ \omega = \{(q_i \dots v_i)\},$$

$$q^t_i = q_i + v_i t,\ v^t_i = v_i. \tag{13}$$

Поскольку некоторые локально-конечные конфигурации с очень быстро растущими значениями скоростей на бесконечности могут за конечное время t под действием динамики (13) стать уже не локально-конечными (коллапс, см. § 1.1), для корректности нашего определения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *В пространстве Ω можно указать множество $\Omega' \subset \Omega$ полной меры μ_0 такое, что для любого $\omega \in \Omega'$ $\tau_t\omega \in \Omega'$ при всех $t \geq 0$.*

Доказательство этой леммы мы опускаем.

Замечание. Напомним, что аналогичное утверждение при $\nu = 1$, но в более сложном случае неидеального газа, нам уже встречалось в § 1.1.

Таким образом, мы можем рассматривать динамику в Ω'.

Лемма 3. *Пуассоновская мера $\mu_0 = \mu_0^{\rho,\beta}$ на Ω' при любых ρ и β инвариантна относительно динамики* (13).

Доказательство. Зададим преобразование функции $F(\omega)$ на Ω' по формуле

$$(U_t F)(\omega) = F(\tau_t^{-1}\omega).$$

Легко видеть, что для сумматорных функционалов F_f вида (5)

$$U_t F_f = F_{\tilde{U}_t f}, \tag{14}$$

где

$$(\tilde{U}_t f)(X) = f(\tau_t^{-1}X),\ X \in \mathfrak{M}. \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что при преобразовании $\tau_t : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ мера dX и корреляционная функция $\rho_0(X)$ не меняются; из формул (6) и (14) заключаем, что среднее $\langle U_t F_f\rangle_{\mu_0} = \langle F_f\rangle_{\mu_0}$. Это равенство остается справедливым для любой функции $F \in L_2(\mathfrak{M}, \rho_0(X)dX)$, откуда и следует утверждение леммы и, тем самым, унитарность группы $\{U_t, t \in R^1\}$ в $L_2(\Omega, \mu_0)$.

При введенном в лемме 1 соответствии между фоковским пространством $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) = L_2(\mathfrak{M}, \rho_0(X)dX)$ $(\mathcal{H} = L_2(R^\nu \times R^\nu, d\lambda))$ и $L_2(\Omega, \mu_0)$ динамика U_t в $L_2(\Omega, \mu_0)$ унитарно эквивалентна динамике $\tilde{U}_t L_2(\mathfrak{M}, \rho_0(X)dX)$. Последняя же динамика имеет вид

$$\tilde{U}_t = \Gamma(u_t),$$

где u_t—одночастичная динамика в $\mathcal{H}$:

$$(u_t f)(q, v) = f(q - vt, v).$$

Ее инфинитезимальный оператор h равен

$$(hf)(q, v) = iv\frac{\partial f}{\partial q}$$

и, тем самым, инфинитезимальный оператор H динамики $\tilde{U}_t$ равен

$$Hf = d\Gamma(h)f = \sum_k iv_k \frac{\partial f}{\partial v_k},\ f \in L_2(\mathfrak{M}, \rho_0 dX).$$

Заметим, что спектр оператора h является лебеговским и заполняет всю ось $(-\infty, \infty)$. Следовательно, спектр H—бесконечнократно лебеговский и также заполняет ось $(-\infty, \infty)$.

2. Стохастический газ. Сейчас мы рассмотрим стохастическую динамику, определенную на пространстве Ω всех локально-конечных наборов $\omega = \{q_i\}, q_i \in R^\nu$.

Для каждой фиксированной конфигурации $\omega \in \Omega$ рассмотрим набор независимых винеровских процессов $Y = \{y_{q_i}\}$, выходящих из точек конфигурации ω,

$$y_{q_i}(0) = q_i, i = 1, 2, \dots$$

Распределение процесса $Y(t)$ в пространстве $S_\omega = \otimes_{q_i \in \omega} S_{q_i}$ всех наборов траекторий $w^\omega_t = \{w_{q_i}(t)\}$, где S_{q_i}— пространство траекторий отдельного броуновского движения, начинающихся в q_i, является произведением винеровских мер $dW = \prod dW_{q_i}$, определенных на каждом пространстве S_{q_i}.

Лемма 4. *Для любой локально-конечной конфигурации ω почти все (относительно меры dW) наборы траекторий $w_t^\omega = \{w_{q_i}(t)\}$ таковы, что при любом $0 \le t_0 < \infty$ конфигурация*

$$\omega_{t_0} = \{w_{q_i}(t_0),\ q_i \in \omega\}$$

локально-конечна.

Таким образом, определена стохастическая динамика $\{\omega_t\}$ в пространстве Ω; $P_{\omega_0}^t(\cdot)$ мы обозначим переходную меру этой динамики:

$$P_{\omega_0}^t(A) = \Pr(\omega_t \in A \mid_{\omega_{t=0}} = \omega_0).$$

Тогда для любой вероятностной меры $\mu = \mu_0$ на Ω мы можем определить, как обычно, эволюцию мер $\{\mu_t, 0 \le t < \infty\}$, полагая

$$\mu_t(A) = \int\limits_\Omega P_\omega^t(A) d\mu_0(\omega). \tag{16}$$

Лемма 5. *Распределение μ_0^ρ пуассоновского поля в R^ν, порожденное мерой ρdx в R^ν, при любом $0 < \rho < \infty$ инвариантно относительно эволюции* (16).

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3. Его можно найти также в [16].

Таким образом, порождаемая нашей динамикой унитарная группа U_t в $L_2(\Omega, \mu_0^\rho)$ может быть с помощью отображения (8) перенесена в фоковское пространство $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H} = L_2(R^\nu, \rho dx)$, и совпадает там с группой $\Gamma(u_t)$, а $u_t = e^{it\Delta}$(Δ—оператор Лапласа)—группа, действующая в $L_2(R^\nu, \rho dx)$. Инфинитезимальный оператор группы U_t совпадает, таким образом, с $d\Gamma(\Delta)$.

Замечание. Аналогичная конструкция верна для любой динамики в Ω, порожденной независимыми динамиками отдельных частиц в конфигурации $\omega \in \Omega$. Пуассоновская мера μ_0^ρ инвариантна относительно любой такой динамики и соответствующая группа U_t в $\mathcal{F}_s(L_2(R^\nu, \rho dx))$ имеет вид $\Gamma(u_t)$, где u_t—одночастичная динамика в $L_2(R^\nu, \rho dx)$.

§ 5. Эвклидов подход

1. Краткий эскиз метода. Напомним, что во вводной главе (§ 5.0) мы изложили две основные идеи, лежащие в основе общего метода в математической физике, называемого "эвклидовым подходом":

1) переход к "мнимому времени", т. е. изучение полугруппы операторов $\exp\{-tH\}, t > 0$, вместо унитарной группы $\exp\{itH\}$, $-\infty < t < \infty$, где H—гамильтониан системы: изучая полугруппу $\exp\{-tH\}$ мы извлекаем определенную информацию о спектральных свойствах оператора H, которую затем и используем при исследовании группы $\exp\{itH\}$;

2) перенормированная формула Фейнмана—Каца—Нельсона: пусть оператор H действует в гильбертовом пространстве $L_2(X, d\nu_0)$ и имеет вид

$$H = H_0 + V, \tag{1}$$

где H_0—самосопряженный оператор в $L_2(X, d\nu_0)$, совпадающий с инфинитезимальным оператором для стохастической полугруппы $\mathcal{J}_t^0$ некоторого стационарного марковского процесса $\xi = \{\xi_t, t \in R^1\}$ со значениями в X и инвариантной мерой $d\nu_0$, а V—оператор умножения на вещественную функцию на X, причем оператор H имеет основной собственный вектор Φ_0 с собственным значением λ_0. Тогда можно построить новый стационарный марковский процесс $\eta = \{\eta_t, t \in R^1\}$ со значениями в X и с инвариантной мерой $d\nu =\mid \Phi(x_0) \mid^2 d\nu_0$ такой, что инфинитезимальный оператор $H^{\text{перенорм}}$ его стохастической полугруппы $\mathcal{J}_t$, действующий в $L_2(X, d\nu)$, оказывается унитарно эквивалентным оператору $H - \lambda_0 E$. Распределение вероятностей μ в пространстве $\Omega = X^{R^1}$ траекторий $\{x_t, t \in R^1\}$ процесса η получается как предельная гиббсовская перестройка распределения μ_0 для процесса ξ в Ω

$$\mu = \lim_{T \uparrow R^1} \mu_T, \tag{2}$$

где распределение μ_T(T—конечный отрезок оси R^1) определяется плотностью

$$\frac{d\mu_T}{d\mu_0} = \frac{1}{Z_T} \exp\left\{-\int\limits_T V(x(\tau))d\tau\right\}, \tag{3}$$

а Z_T—нормирующий множитель:

$$Z_T = \int_{\Omega} \exp\left\{-\int_T V(x(\tau))d\tau\right\} d\mu_0.$$

Основным вектором оператора $H^{\text{перенорм}}$ служит функция $\Phi_0 \equiv \equiv 1 \in L_2(X, d\nu)$ с нулевым собственным значением, а остальной спектр $H^{\text{перенорм}}$ описывает энергию “возбужденных состояний” системы.

Этот же метод применяется и в случае бесконечномерных квантовых систем (полей), с тем только отличием, что исходный гамильтониан H отсутствует, а определены гамильтонианы H_Λ вида (1) для конечных подсистем бесконечной системы (помеченных элементами Λ некоторого возрастающего упорядоченного множества), и описываемых гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}_\Lambda = L_2(X_\Lambda, d\nu_\Lambda^0)$, где $X_\Lambda \subset X$—подмножества некоторого множества X. Для каждого Λ мы строим описанным выше способом стационарный марковский процесс η_Λ со значениями в X_Λ и распределениями μ_Λ в пространстве $\Omega_\Lambda = X_\Lambda^{R^1}$, а затем переходим к пределу $\Lambda \uparrow$. При этом получается предельный стационарный марковский процесс $\eta = \{\eta_t, t \in R^1\}$ с пространством состояний X и распределением μ:

$$\mu = \lim_{\Lambda\uparrow} \mu_\Lambda$$

в $\Omega = X^{R^1}$. Инфинитезимальный оператор $H^{\text{перенорм}}$ стохастической полугруппы $\mathcal{J}_t$ этого процесса и объявляется гамильтонианом бесконечной системы (в ее “основном состоянии”).

При этом в тех (немногочисленных) случаях, когда для бесконечной системы можно построить динамику τ_t как предел при $\Lambda \uparrow$ локальных динамик:

$$\tau_t^\Lambda = \exp\{itH_\Lambda\} A \exp\{-itH_\Lambda\}, \quad A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\Lambda),$$

в некоторой подходящей квазилокальной алгебре $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{\Lambda} \mathfrak{A}_\Lambda$, где $\mathfrak{A}_\Lambda \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, и основное состояние $\langle A \rangle$ для этой динамики получается как предел при $\Lambda \uparrow$ основных состояний вида

$$\langle A \rangle_\Lambda = (A\Phi_0^\Lambda, \Phi_0^\Lambda)_{\mathcal{H}_\Lambda}, \quad A \in \mathfrak{A}_\Lambda, \tag{4}$$

где Φ_0^Λ—основной (нормированный) собственный вектор гамильтониана H_Λ, оператор $H^{\text{перенорм}}$ оказывается унитарно-эквивалентным оператору $H_{\text{ГНС}}$ для динамики τ_t в пространстве $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$, построенному по основному состоянию $\langle\ \rangle$.

Продемонстрируем эту общую схему на следующем простейшем примере. Пусть на решетке Z^ν задана бесконечная система взаимодействующих осцилляторов (эта система разбиралась в §2). Формальный гамильтониан для этой системы имеет вид (см. 1.2)

$$H = \sum_{x \in Z^\nu} p_x^2 + \frac{1}{4} \sum a_{x_1,x_2} q_{x_1} q_{x_2}, \tag{5}$$

где $\{p_x, q_x, x \in Z^\nu\}$—система операторов “импульса” и координаты, а $A = \{a_{x_1,x_2}, x_1, x_2 \in Z^\nu\}$ — бесконечная матрица, определяющая строго положительный оператор в $l_2(Z^\nu)$. Введение формального гамильтониана (5) означает, что для каждого конечного множества $\Lambda \subset Z^\nu$ следует выбрать гамильтониан

$$H_\Lambda f = \sum_{x\in\Lambda} p_x^2 f + \frac{1}{4}\left(\sum_{x_1,x_2\in\Lambda} a_{x_1,x_2} q_{x_1} q_{x_2}\right) f =$$

$$= -\sum_{x\in\Lambda} \frac{\partial^2 f}{\partial q_x^2} + \frac{1}{4}\left(\sum_{x_1,x_2\in\Lambda} a_{x_1,x_2} q_{x_1} q_{x_2}\right) f, \tag{6}$$

действующий в пространстве $L_2(R^\Lambda, d^{|\Lambda|}q)$. Как мы уже показали в §2, оператор $H_\Lambda - \lambda_0 E$ (λ_0— наименьшее собственное значение H_Λ) унитарно-эквивалентен оператору

$$H_\Lambda^{\text{перенорм}} = -\sum_{x\in\Lambda} \frac{\partial^2 f}{\partial q_x^2} + \sum_{x_1,x_2\in\Lambda} b_{x_1,x_2}^\Lambda q_{x_1} \frac{\partial f}{\partial q_{x_2}}, \tag{7}$$

действующему в пространстве $L_2(R^\Lambda, p(q)d^{|\Lambda|}q)$, где

$$p(q) = \text{const} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{x_1,x_2\in\Lambda} b_{x_1,x_2}^\Lambda q_{x_1} q_{x_2}\right\}, \tag{8}$$

а

$$B_\Lambda = \{b_{x_1,x_2}^\Lambda\} = A_\Lambda^{1/2}, \quad A_\Lambda = \{a_{x_1,x_2}, x_1, x_2 \in \Lambda\}.$$

При этом оператор $H_\Lambda^{\text{перенорм}}$ является инфинитезимальным оператором стохастической полугруппы стационарного гауссова марковского процесса $\xi_t^\Lambda = \{\xi_t^\Lambda(x), x \in \Lambda\}$ со средним $\langle \xi_t^\Lambda(x)\rangle = 0$ и матрицей ковариаций

$$\langle \xi_{t_1}^\Lambda(x_1), \xi_{t_2}^\Lambda(x_2)\rangle = (A_\Lambda^{1/2}\exp\{-A_\Lambda^{1/2}\mid t_1-t_2\mid\})_{x_1,x_2}. \tag{9}$$

Переходя теперь к пределу $\Lambda\uparrow Z^\nu$, мы получим бесконечномерный гауссов стационарный процесс $\xi_t = \{\xi_t, t\in Z^\nu\}$ со средним нуль и матрицей ковариаций, имеющий вид (9), где матрица A_Λ заменена матрицей A. Стохастическая полугруппа $\mathcal{J}_t$ этого процесса действует в пространстве $\mathcal{H}_{\text{физ}} = L_2(R^{Z^\nu}, d\nu_0)$ функционалов от ξ_t, зависящих от его значений $\{\xi_{t=0}(x)\}$ в момент времени $t=0$. Здесь ν_0—гауссова мера со средним нуль и матрицей ковариаций $A^{-1/2}$.

Переходя к новому марковскому стационарному процессу

$$\eta_t(x) = \sum_{x'\in Z^\nu} C_{x,x'}\xi_t(x'),$$

где матрица $C=\{C_{x_1,x_2}\} = A^{1/4}$, мы получим, что при каждом фиксированном $t=t_0$ случайные величины $\{\eta_{t_0}(x)\}$ независимы и имеют нормальное распределение $d\mu_0(x)$ с дисперсией 1. Ковариация этого процесса равна

$$\langle \eta_t(x)\eta_{t'}(x')\rangle = (\exp\{-A^{1/2}\mid t-t'\mid\})_{x,x'}. \tag{10}$$

Пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}} = L_2(R^{Z^\nu}, d\nu_0)$ совпадает с пространством $L_2(R^{Z^\nu}, d\hat\nu_0)$ функционалов от значений процесса $\{\eta_{t=0}(x)\}$ в момент времени $t=0$, а $d\nu_0$— произведение нормальных распределений $\prod\limits_{x\in Z^\nu} d\mu_0(x)$.

В пространстве $L_2(R^{Z^\nu}, d\hat\nu_0)$ можно выбрать ортонормированный базис

$$:\eta_{t=0}^{k_1}(x_1) :: \eta_{t=0}^{k_2}(x_2) :: \eta_{t=0}^{k_s}(x_s) := \Phi_{(x_1,k_1),\dots,(x_s,k_s)}, \tag{11}$$

позволяющий отождествить $L_2(R^{Z^\nu}, d\hat\nu_0)$ с фоковским пространством $\mathcal{F}_s(l_2(Z^\nu))$, как это объяснялось в § 3.1. Далее, несложный подсчет матричных элементов оператора $\mathcal{J}_t$ в базисе (11)

$$(\mathcal{J}_t\Phi_{(x_1,k_1),\dots,(x_s,k_s)}\Phi_{(x_1',k_1'),\dots,(x_s',k_s')}) \tag{12}$$

с использованием формулы (10) и известной диаграммной техники подсчета средних вида $\langle : \xi_{X_1} : \dots : \xi_{X_m} :\rangle$, где $\xi_{X_i} =$

$\prod\limits_{x\in X_i}\xi_x^{(i)}, \{\xi_x^{(i)}, x\in X_i\}$ — наборы гауссовских величин (см. подробнее в [26]), показывает, что при указанном отождествлении $L_2(R^{Z^\nu}, d\hat\nu_0)$ с $\mathcal{F}_s(l_2(Z^\nu))$ оператор $\mathcal{J}_t$ перейдет в оператор $\Gamma(\exp\{-tA^{1/2}\})$ в $\mathcal{F}_s(l_2(Z^\nu))$ и, таким образом, оператор $H^{\text{перенорм}}$ оказывается унитарно-эквивалентным оператору $d\Gamma(A^{1/2})$. С другой стороны, в § 2 мы показали, что для динамики τ_t в алгебре Вейля, построенной по формальному гамильтониану (5), оператор $H_{\text{ГНС}}$, найденный для основного состояния $\langle\ \rangle$ на этой алгебре

$$\langle A\rangle = \lim_{\Lambda\uparrow Z^\nu}(A\Phi_0^\Lambda, \Phi_0^\Lambda),$$

где Φ_0^Λ—нормированный собственный вектор гамильтониана (6), также унитарно-эквивалентен оператору $d\Gamma(A^{1/2})$, т. е. $H_{\text{ГНС}}$ унитарно эквивалентен $H^{\text{перенорм}}$.

В случае более сложного гамильтониана ангармонических осцилляторов с формальным гамильтонианом вида

$$\begin{aligned} H_{\text{ангарм}} = \sum_{x\in Z^\nu} p_x^2 + \sum_{x_1,x_2\in Z^\nu} a_{x_1,x_2}q_{x_1}q_{x_2} + \\ +\lambda\sum_{x\in Z^\nu}Q(q_x) = H_{\text{гарм}} + V, \end{aligned} \tag{13}$$

где $H_{\text{гарм}}$—формальный гамильтониан (5) гармонических осцилляторов, $V=\lambda\sum\limits_{x\in Z^\nu}Q(q_x)$, а $Q(\cdot)$—ограниченный снизу полиномом, можно также следовать описанной схеме. Однако технически удобнее при построении распределения μ предельного марковского процесса, соответствующего гамильтониану (13), совершать гиббсовскую перестройку уже построенной выше предельной гауссовой меры $\mu_0=\mu_{\text{гарм}}$ для системы гармонических осцилляторов, т. е. положить

$$\mu = \lim_{\substack{\Lambda\uparrow Z^\nu\\ T\uparrow R^1}}\mu_{\Lambda,T}, \tag{14}$$

где

$$\frac{d\mu_{\Lambda,T}}{d\mu_{\text{гарм}}} = \frac{1}{Z_{\Lambda,T}}\exp\left\{-\lambda\sum_{x\in\Lambda}\int_T Q(q_x(\tau))d\tau\right\}, \tag{15}$$

а $Z_{\Lambda,T}$—нормирующий множитель.

Заметим, что доказательство существования предела (14) требует уже тонких средств, развитых в статистической физике и квантовой теории поля (например, кластерные разложения или так называемые корреляционные неравенства и т. д.).

Наконец, можно воспользоваться замечанием, сделанным в конце § 5.0, и при построении предельной меры исходить не из формального гамильтониана H, а из так называемого формального эвклидова классического действия $S(\{q_x(\tau)\})$, которое для системы ангармонических осцилляторов имеет вид

$$S_{\text{эвкл}}(\{q_x(\tau)\}) = -i\int\left(\frac{1}{2}\sum_x \dot{q}_x^2 + \frac{1}{2}\sum_{x_1,x_2} a_{x_1,x_2}q_{x_1}q_{x_2}+\right.$$

$$\left.+\sum_x Q(q_x)\right)d\tau = i(S_{\text{эвкл}}^{\text{гарм}} + S_{\text{эвкл}}^{\text{ангарм}}). \tag{16}$$

Квадратичное относительно $\{q_x(\tau)\}$ слагаемое в (16) порождает гауссову меру μ_0 для гармонических осцилляторов, а ее гиббсовская перестройка с помощью $iS_{\text{эвкл}}^{\text{ангарм}}$ совпадает с перестройкой (14) и (15). Этот последний прием удобен тем, что позволяет избежать явного введения гамильтонианов H_Λ и чаще всего применяется при эвклидовом подходе к моделям эвклидовой квантовой теории поля, котороые будут описаны ниже.

В заключение этого пункта мы хотим подчеркнуть, что, как мы убедились на приведенных выше примерах, построение марковского поля и введение соответствующего гильбертова пространства $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ и стохастической полугруппы в нем (т. е. то, что обычно называют "эвклидовым объектом") есть один из очень удобных способов изучения бесконечных физических систем в основном состоянии, позволяющим избежать явного построения гайзенберговой динамики (в какой-либо подходящей C^*-алгебре). При этом сама эта динамика (точнее, ее ГНС-представление относительно основного состояния) задается в пространстве $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ по оператору $H^{\text{перенорм}}$—инфинитезимальному оператору полугруппы $\mathcal{J}_t$.

2. Эвклидовы квантовые поля (общие аксиомы). В случае моделей эвклидово квантового поля соответствующий "эвклидов объект"—при наличии фермионных полей—оказывается менее привычным, чем случайные вероятностные процессы, возникавшие в рассмотренных выше бозонных моделях. Поэтому мы начнем описание эвклидова подхода к моделям квантовых полей с изложения их общепринятой аксиоматики.

Полевая алгебра. *Бозонной* полевой алгеброй $\mathcal{E}_B^n = \mathcal{E}_B^n(R^{\nu+1}) = \mathcal{E}_B$ называют коммутативную топологическую алгебру с единицей $\mathbf{1}$ (и с метризуемой топологией), в которой выделена система образующих $\{\xi_\varphi, \varphi \in S^n(R^{\nu+1})\}$, помеченных элементами пространства $S^n(R^{\nu+1})$—бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих на бесконечности функций (см. [38]), определенных на пространстве $R^{\nu+1}$ со значениями в пространстве $\mathbb{C}^n$ (или R^n) так, что отображение

$$S^n(R^{\nu+1}) \to \mathcal{E}_B : \varphi \to \xi_\varphi$$

линейно и непрерывно. Таким образом, $\mathcal{E}_B$ состоит из пополнения коммутативной алгебры полиномов от элементов $\{\xi_\varphi\}$ из $\mathcal{E}_B$. *Фермионная* полевая алгебра $\mathcal{E}_F^m = \mathcal{E}_F^m(R^{\nu+1}) = \mathcal{E}_F$— это (топологическая) грассманова (супер) алгебра с единицей $\mathbf{1}$, в которой выделена система нечетных (антикоммутирующих) образующих $\{\psi_\varphi, \bar{\psi}_\varphi, \varphi \in S^m(R^{\nu+1})\}$, помеченных элементами $\varphi \in S^m(R^{\nu+1})$ так, что отображения $S^m(R^{\nu+1}) \to \mathcal{E}_F^m : \varphi \to \psi_\varphi$ и $\varphi \to \bar{\psi}_\varphi$ линейны и непрерывны. *Полная* полевая алгебра $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{n,m}(R^{\nu+1}) = \mathcal{E}_R^n(R^{\nu+1}) \otimes \mathcal{E}_F^m(R^{\nu+1})$— это тензорное произведение бозонной и фермионной алгебр.

Эвклидовым квантовым полем называют квазисостояние $\langle\ \rangle$, определенное либо на бозонной алгебре $\mathcal{E}_B^n$ (бозонное поле), либо на фермионной алгебре $\mathcal{E}_F^m$ (чисто фермионное поле), либо на полной алгебре $\mathcal{E}^{n,m}$.

Положительность по Нельсону и Симанзику. Предполагается, что бозонная часть поля $\langle\ \rangle$ на $\mathcal{E}_B^n$, т. е. сужение квазисостояния $\langle\ \rangle$ на бозонную подалгебру $\mathcal{E}_B^n$, реализуется как некоторое обобщенное случайное поле. Точнее это означает, что существует вероятностное пространство (Ω, Σ, μ)(Σ—некоторая σ-алгебра, μ—вероятностная мера, определенная на Σ) так, что алгебра $\mathcal{E}_B$ (топологически) изоморфна алгебре $\hat{L}_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) = \bigcap\limits_{1\le p<\infty} L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ и для любого элемента $F \in \mathcal{E}_B$

$$\langle F\rangle = \int\limits_\Omega \tilde{F}d\mu,$$

где $\tilde{F} \in \hat{L}_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$—образ F при вложении $\mathcal{E}_B \to \hat{L}_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$; а топология в алгебре $\hat{L}_\infty$ вводится бесконечным—по существу, счетным—набором норм $\| \ \|_{L_p}$. Из этих предположений следует, что функции Швингера (моментные функции бозонного поля $\langle \xi_{\varphi_1} \ldots \xi_{\varphi_n} \rangle$ непрерывны по каждому переменному $\varphi_i \in S^n(R^{\nu+1})$ в отдельности. В случае общего поля $\langle \ \rangle$ на полной полевой алгебре это свойство постулируется для полных функций Швингера

$$\langle \xi_{\varphi_1} \ldots \xi_{\varphi_k} \psi_{\varphi_{k+1}} \ldots \psi_{\varphi_{k+s}} \bar{\psi}_{\varphi_{k+s+1}} \ldots \bar{\psi}_{\varphi_{k+s+m}} \rangle.$$

Трансляционная инвариантность. Мы будем всегда предполагать, что поле $\langle \ \rangle$ трансляционно инвариантно. Это означает, что любой гомоморфизм алгебры $\mathcal{E}$ $U_s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, s \in R^{\nu+1}$, в себя, действующий на образующие по формуле

$$U_s \xi_\varphi = \xi_{\varphi(\cdot - s)}$$

(и аналогично для ψ_φ и $\bar{\psi}_\varphi$) сохраняет квазисостояние $\langle \ \rangle$

$$\langle U_s A \rangle = \langle A \rangle. \qquad (17)$$

Физическая положительность (положительность по Остервальдеру и Шрадеру). Введем инволюции:

i) в пространстве R^ν

$$\mathcal{V}x = (-x^0, x^1, \ldots, x^\nu), \quad x = (x^0, x^1, \ldots, x^\nu),$$

(координата x^0 называется обычно *временной* координатой, а отображение $\mathcal{V}$—отображением во времени);

ii) в пространстве функций

$$(\mathcal{V}_{\text{боз}}\varphi)(x) = \bar{\varphi}(\mathcal{V}x), \quad \varphi \in S^n(R^{\nu+1}),$$

$$(\mathcal{V}_{\text{ферм}}\varphi)(x) = \varepsilon\bar{\varphi}(\mathcal{V}x), \quad \varphi \in S^m(R^{\nu+1}), \qquad (17^a)$$

где $\bar{\varphi}$ означает вектор, у которого координаты комплексно сопряжены координатам φ, а ε—некотрая матрица порядка m, $\varepsilon^2 = E$;

iii) в алгебре $\mathcal{E}$ с действием на образующие

$$\Theta\xi_\varphi = \xi_{\mathcal{V}_{\text{боз}}\varphi}, \ \Theta\psi_\varphi = \bar{\psi}_{\mathcal{V}_{\text{ферм}}\varphi}, \ \Theta\bar{\psi}_\varphi = \psi_{\mathcal{V}_{\text{ферм}}\varphi}.$$

Далее инволюция Θ, заданная на образующих, продолжается до непрерывной антилинейной инволюции полевой алгебры $\mathcal{E}$ с помощью соотношений

$$\Theta(A_1 A_2) = \Theta(A_2)\Theta(A_1), \ A_1, A_2 \in \mathcal{E}. \qquad (17^{\text{б}})$$

Поле $\langle \ \rangle$ называется Θ-инвариантным, если для любого $A \in \mathcal{E}$

$$\langle \Theta A \rangle = \overline{\langle A \rangle}.$$

Очевидно, что для любого Θ-инвариантного поля $\langle \ \rangle$ билинейная форма

$$(A_1, A_2) = \langle \Theta A_1, A_2 \rangle \qquad (18)$$

эрмитова.

Обозначим $\mathcal{E}_+ \subset \mathcal{E}$ подалгебру $\mathcal{E}$ с единицей $\mathbf{1}$, порожденную образующими $\{\xi_\varphi, \psi_\varphi, \bar{\psi}_\varphi\}$ такими, что $\operatorname{supp}\varphi \subset R^\nu_+ = \{x : x^0 > 0\}$ (алгебра “будущего”). Θ-инвариантное поле называется OS-положительным, если эрмитова форма (1) неотрицательна на подалгебре $\mathcal{E}_+$, т. е.

$$(A, A) = \langle \Theta A A \rangle \geq 0$$

для всех $A \in \mathcal{E}_+$.

Физическое гильбертово пространство. Пусть $\langle \ \rangle$—скалярное OS-положительное поле. Введем в $\mathcal{E}_+$ скалярное произведение с помощью неотрицательной эрмитовой формы (18). Обозначим $I_0 \subset \mathcal{E}_+$ подпространство всех $A \in \mathcal{E}_+$, для которых

$$(A, A) = 0.$$

В фактор-пространстве $\mathcal{E}_+/I_0$ можно ввести скалярное произведение

$$([A_1], [A_2]) = (A_1, A_2),$$

где $[A] \in \mathcal{E}_+/I_0$ означает класс элемента $A \in \mathcal{E}_+$, и пополнение $\mathcal{E}_+/I_0$ по этому скалярному произведению называется *физическим* гильбертовым пространством $\mathcal{H}_{\text{физ}}$.

Трансфер-матрица. Рассмотрим преобразование

$$U_\tau : \mathcal{E}_+ \to \mathcal{E}_+ : A \to U_\tau A, \ \tau > 0,$$

где обозначено $U_\tau = U_{\{\tau, 0, \ldots, 0\}}$, а вектор $(\tau, 0, 0, \ldots, 0) \in R^{\nu+1}$ направлен в положительном направлении временной оси.

Лемма 1. *Для любого $A \in \mathcal{E}_+$ и $\tau > 0$ выполнено неравенство*

$$(U_\tau A, U_\tau A) \leq (A, A). \tag{19}$$

Доказательство см. в [38].

Из (19) следует, в частности, что $U_\tau I_0 \subset I_0$ и, следовательно, корректно определен оператор в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$

$$\mathcal{J}_\tau : \mathcal{H}_{\text{физ}} \to \mathcal{H}_{\text{физ}},$$

который на элементах $[A] \in \mathcal{E}_+/I_0$ действует по формуле

$$\mathcal{J}_\tau[A] = [U_\tau A]. \tag{19^a}$$

Лемма 2. *Семейство операторов $\{\mathcal{J}_\tau, \tau \geq 0\}$ образует сильно непрерывную сжимающую самосопряженную полугруппу операторов в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$.*

Доказательство. То обстоятельство, что $\mathcal{J}_\tau$ — полугруппа, очевидно; ее сильная непрерывность и сжимающее свойство следует из (19), а самосопряженность $\mathcal{J}_\tau$ вытекает из очевидного равенства

$$\Theta U_\tau = U_{-\tau}\Theta. \tag{20}$$

Полугруппа $\mathcal{J}_\tau$ называется обычно *трансфер-матрицей* поля (или точнее, *трансфер-матричной полугруппой*).

Из леммы 2 и известной теоремы Стоуна (см. [36]) следует, что

$$\mathcal{J}_\tau = \exp\{-\tau H\},$$

где H — неотрицательный самосопряженный оператор, действующий в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$. Очевидно, что $[\mathbf{1}] \equiv \Omega$, где $\mathbf{1} \in \mathcal{E}_+$ — единица алгебры $\mathcal{E}$, является основным вектором для H с нулевым собственным значением

$$H\Omega = 0.$$

Оператор $H = H_{\text{физ}}$ обычно называют (физическим) *гамильтонианом* поля, а вектор Ω — его *вакуумным* вектором.

Операторы импульса. Очевидно, что любой гомоморфизм $U_{(0,\bar{s})} \equiv U_{\bar{s}}$, где $\bar{s} \in R^\nu$ переводит алгебру $\mathcal{E}_+$ в себя и также в силу (17) и (20) пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ в себя и, таким образом, порождает сильно непрерывную унитарную группу $(U_{\bar{s}}, \bar{s} \in R^\nu)$ (группу пространственных трансляций) в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$, коммутирующую с полугруппой $\mathcal{J}_\tau$. В силу теоремы Стоуна:

$$U_{\bar{s}} = \exp\{i(s^1 P_1 + \cdots + s^\nu P_\nu)\}, \ \bar{s} = (s^1, \ldots, s^\nu),$$

где $P = (P_1, \ldots, P_\nu)$ — набор попарно коммутирующих между собой самосопряженных операторов, называемых *операторами импульса*. Все они коммутируют с гамильтонианом H и

$$P_k\Omega = 0, \ k = 1, \ldots, \nu.$$

Другие симметрии. В случае, когда в алгбре $\mathcal{E}$ действует группа G гомоморфизмов, соответствующих каким-либо симметриям поля (пространственным вращениям, так называемым "изотопическим вращениям" и т. д.), переводящим алгебру $\mathcal{E}$ в себя, сохраняющим квазисостояние $\langle\ \rangle$ и коммутирующим с временными сдвигами U_τ, в пространстве $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ возникает унитарное представление $g \to T_g$, $g \in G$, этой группы, коммутирующее с гамильтонианом поля $H_{\text{физ}}$.

3. Марковское поле (случай бозонного поля). Фактически часто используют другую эквивалентную конструкцию пространства $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ и полугруппы $\mathcal{J}_\tau$, основываясь на свойствах обратимой марковости и отражательной устойчивости бозонного поля. Мы предполагаем здесь, что выполнена аксиома Нельсона—Симанзика и эвклидово бозонное трансляционно-инвариантное поле реализовано как вероятностное распределение μ на некотором измеримом пространстве (Ω, Σ), а полевая алгебра $\mathcal{E}$ совпадает с алгеброй $\hat{L}_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) = \bigcap\limits_{1 \leq p < \infty} L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Для каждого t и $\varepsilon > 0$ определим σ-алгебру $\Sigma_t^\varepsilon \subset \Sigma$, порожденную случайными величинами $\{\xi_\varphi, \varphi \in S^n(R^{\nu+1})\}$, для которых носитель функции φ лежит в полосе

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \{x : \mid x^0 - t \mid < \varepsilon\}.$$

Обозначим $\Sigma_t = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \Sigma_t^\varepsilon$. Мы скажем, что бозонное поле $\langle\ \rangle$ обладает свойством *обратимой марковости*, если оно Θ-инвариантно и для любых $A_+ \in \mathcal{E}_+$ и $A_- \in \mathcal{E}_-$ (алгебра "прошлого" $\mathcal{E}_-$ определяется аналогично алгебре "будущего" $\mathcal{E}_+$) выполнено

$$M(A_+A_-/\Sigma_0) = M(A_+/\Sigma_0)M(A_-/\Sigma_0), \tag{20^a}$$

где $M(\cdot/\Sigma_0) \equiv \langle\cdot/\Sigma_0\rangle$ — условное математическое ожидание относительно σ-алгебры Σ_0 (см. [11]).

Мы скажем, что обратимое марковское поле является *отражательно-устойчивым*, если любой элемент $F \in \hat{L}_\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ преобразуется инволюцией Θ по формуле

$$\Theta F = \overline{F}.$$

Лемма 3. *Пусть бозонное поле $\langle\ \rangle$ является обратимо марковским и отражательно устойчивым. Тогда оно OS-положительно и пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$, построенное в предыдущем пункте, канонически изоморфно пространству $\mathcal{H}_{\text{физ}} = \hat{L}_\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu)$. Этот изоморфизм определен на элементах $[A] \in \in \mathcal{E}_+/I_0$, $A \in \mathcal{E}_+ = \hat{L}_\infty(\Omega, \Sigma_+, \mu)$ (σ-алгебра Σ_+ порождена величинами $\{\xi_\varphi, \operatorname{supp}\varphi \in R_+^{\nu+1}\}$) формулой*

$$[A] \to \langle A/\Sigma_0\rangle \in \hat{L}_\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu).$$

При указанном изоморфизме полугруппа $\mathcal{J}_t$ в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ переходит в унитарно-эквивалентную ей полугруппу $\tilde{\mathcal{J}}_\tau$, действующую в $L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ по формуле

$$\overline{\mathcal{J}}_\tau f = \langle U_\tau f/\Sigma_0\rangle = P_0 U_\tau f, \ f \in L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu),$$

где U_τ—унитарный оператор в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$, соответствующий "временному сдвигу" на τ, а P_0—проектор в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ на подпространство $L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$.

Доказательство. Для каждого элемента $A \in \mathcal{E}_+ = \hat{L}(\Omega, \Sigma_+, \mu)$ напишем разложение

$$A = A_0 + A', \tag{21}$$

где $A_0 = \langle A/\Sigma_0\rangle \in \hat{L}_\infty(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ и $\langle A'/\Sigma_0\rangle = 0$. Далее,

$$(A, A) = \langle\langle \Theta A A/\Sigma_0\rangle\rangle = \langle\langle \Theta A/\Sigma_0\rangle\langle A/\Sigma_0\rangle\rangle,$$

где мы воспользовались свойством марковости. Из разложения (21) и свойств отражательной устойчивости следует окончательно, что

$$(A, A) = (A_0, A_0) = \int\limits_\Omega |\, A_0\,|^2\, d\mu.$$

Остальные утверждения леммы доказываются аналогично.

Заметим, что пространственные трансляции в $R^{\nu+1}$ $x \to \to x + (0, \bar{s}), \bar{s} \in R^\nu$, порождают в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ группу унитарных операторов $\{U_{\bar{s}}, \bar{s} \in R^\nu\}$, коммутирующих с трансфер-матрицей $\mathcal{J}_\tau$.

Пример. Скалярное свободное нейтральное поле в $R^{\nu+1}$. В этом случае образующие ξ_φ помечены вещественными функциями $\varphi \in S(R^{\nu+1})$. Поле является гауссовым полем со средним нуль и ковариацией

$$\langle \xi_{\varphi_1}\xi_{\varphi_2}\rangle = c((-\Delta^{(\nu+1)} + m^2)^{-1}\varphi_1, \varphi_2) = c \int\limits_{R^{\nu+1}} \frac{\tilde{\varphi}_1(p)\overline{\tilde{\varphi}_2(p)}}{p^2 + m^2} dp, \tag{22}$$

где $c > 0, m \geq 0$ (в случае размерностей $\nu = 0, 1, m > 0$), $\Delta^{(\nu+1)}$— оператор Лапласа в $R^{\nu+1}, (\cdot,\cdot)$—скалярное произведение в $L_2(R^{\nu+1}, d\bar{x})$, а $\tilde{\varphi}(p)$—преобразование Фурье функции $\varphi \in S^{R^{\nu+1}}$. Введенное здесь поле называется *полем Нельсона* (см. [58]), в случае $\nu = 1$ оно еще называется полем (процессом) Орнштейна—Уленбека (см. выше §5.0)).

Формальное эвклидово действие поля (22) равно

$$S_{\text{эвкл}} = ic \int\limits_{R^{\nu+1}} L(\varphi) d^{\nu+1}x,$$

где функция Лагранжа

$$L(\varphi) = (\nabla\varphi(x))^2 + m\varphi^2(x). \tag{23}$$

Лемма 4. *Гауссово поле* (22) *является обратимо-марковским и отражательно-устойчивым; оно инвариантно относительно движений пространства $R^{\nu+1}$. Всякое скалярное нейтральное (т. е. вещественное) гауссово поле с указанными свойствами имеет вид* (22).

Мы не будем приводить здесь доказательство этой леммы (см. [32, 33]). Заметим еще, что марковость поля (22) связана с локальным характером функции Лагранжа этого поля (23).

Нетрудно подсчитать, что пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ этого поля изоморфно фоковскому пространству $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_{-1/2})$, где $\mathcal{H}_{-1/2} = \mathcal{H}_{-1/2}(R^\nu)$—соболевское пространство функций от $x \in R^\nu$, со скалярным произведением

$$((-\Delta^{(\nu)} + m^2)^{-1/2}\varphi_1, \varphi_2) = \int\limits_{R^\nu} \frac{\tilde{\varphi}_1(p)\overline{\tilde{\varphi}_2(p)}}{(p^2 + m^2)^{1/2}} dp,$$

где $-\Delta^{(\nu)}$—оператор Лапласа в R^ν. При этом трансфер-матрица $\mathcal{J}_\tau$ совпадет с оператором

$$\Gamma(\exp\{-(-\Delta^{(\nu)}+m^2)^{1/2}\tau\}),\ \tau>0$$

в $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_{-1/2})$.

Более сложные (негауссовские) бозонные скалярные марковские поля получаются перестройкой поля Нельсона с помощью самодействия вида

$$V=\int :P(\xi(x)):dx,$$

где P—четный ограниченный снизу полином степени не ниже четырех, $:\ :$ —виковское упорядочение, соотвествующее нельсоновскому гауссовому полю (22) (см. [26]). Такие перестройки в случае $\nu=1$ исследовались в многочисленных работах с помощью довольно трудной и изощренной техники, основанной, в частности, на кластерных разложениях (см. книги [12] и [38]).

4. Марковское фермионное поле.

А. Отступление. Вероятность на грассмановой алгебре. Нам понадобится развить небольшую теорию квазисостояний на грассмановой алгебре, формально напоминающую обычную теорию вероятностей.

Пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_N, N=\{1,\dots,n\}$—грассманова алгебра с $\mathbf{1}$ и конечным числом образующих $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Каждый элемент $\mathfrak{A}$ может быть единственным образом записан в виде

$$f=\sum_{T\subseteq N}C_T\alpha_T,\tag{24}$$

где суммирование идет по всем подмножествам N, а

$$\alpha_T=\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_k},\ T=\{i_1<i_2<\dots<i_k\}.$$

Заметим, что элемент f обратим (справа и слева) в том и только в том случае, когда его свободный коэффициент $C_\emptyset\neq 0$. Каждый обратимый элемент $f\in\mathfrak{A}$ можно записать единственным способом в виде

$$f=C_\emptyset\exp\{\hat f\},\tag{25}$$

где $\hat f\in\mathfrak{A}$—элемент, свободный коэффициент которого равен нулю. Обратно, всякий элемент вида (25) обратим и его обратный

$$f^{-1}=C_\emptyset^{-1}\exp\{-\hat f\}.$$

Заметим, что алгебра $\mathfrak{A}$ является тензорным произведением (в смысле супералегбр, см. [23])

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\otimes\dots\otimes\mathfrak{A}_n,$$

где $\mathfrak{A}_k, k=1,\dots,n$—двумерная грассманова алгебра с $\mathbf{1}$ и единственной образующей α_k.

Интеграл Березина. На алгебре $\mathfrak{A}$ определено некоторое стандартное квазисостояние $\langle\ \rangle_0$—интеграл Березина. Оно определяется как произведение квазисостояний $\langle\ \rangle_0^k$ на алгебрах $\mathfrak{A}_k$, $k=1,\dots,n$, равных

$$\langle\mathbf{1}\rangle_0^k=0,\ \ \langle\alpha_k\rangle_0^k=1.$$

Таким образом, для элемента f, записанного в виде (24),

$$\langle f\rangle_0=C_N,\tag{25^a}$$

где C_N—коэффициент при старшем мономе $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$. Стандартное обозначение квазисостояния $\langle\ \rangle_0$

$$\langle f\rangle_0\equiv\int_{\mathfrak{A}}f d\alpha_1\dots d\alpha_n\equiv\int_{\mathfrak{A}}f d\alpha_N.\tag{26}$$

Плотность квазисостояния.

Лемма 5. *Любое квазисостояние $\langle\ \rangle$ на алгебре $\mathfrak{A}$ единственным образом представимо в виде*

$$\langle f\rangle=\int_{\mathfrak{A}}fg d\alpha_N,\tag{27}$$

где $g\in\mathfrak{A}$—некоторый элемент, называемый плотностью квазисостояния.

Доказательство. Обозначим M_T момент

$$M_T=\langle\alpha_T\rangle$$

квазисостояния $\langle\ \rangle$. Тогда, если положить

$$g=\sum_{T\subseteq N}(-1)^{\pi(T)}M_{T'}\alpha_T,\tag{28}$$

где $T' = N\backslash T = (i'_1, \dots, i'_{n-k})$, $T = (i_1, \dots, i_k)$, а $\pi(T)$—четность перестановки

$$(i'_1, \dots, i'_{n-k}, i_1, \dots, i_k),$$

равенство (27) будет выполнено для всех $f \in \mathfrak{A}$. Единственность представления (27) очевидна.

Заметим, что из (28) видно, что для четного квазисостояния (т. е. равного нулю на всех нечетных элементах $f \in \mathfrak{A}$) и четного n плотность g является четным элементом $\mathfrak{A}$. Далее мы всегда будем предполагать, что $\langle\ \rangle$—четное квазисостояние и n четно, не оговаривая этого особо.

Квазисостояние $\langle\ \rangle$ на алгебре $\mathfrak{A}$ мы назовем *регулярным*, если его плотность g обратима, т. е. согласно (28) полный момент

$$M_N \neq 0. \tag{28^a}$$

Частичный интеграл Березина. Пусть $T \subset N$—подмножество с четным числом элементов и $\mathfrak{A}_T \subset \mathfrak{A}_N$—грассманова подалгебра $\mathfrak{A}_N$. Определим частичный интеграл Березина

$$\int\limits_{\mathfrak{A}_{N-T}} f d\alpha_{N\backslash T}$$

как линейное отображение $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_T$, которое на мономах α_S, $S \subseteq N$, равно

$$\int \alpha_S d\alpha_{N\backslash T} = \begin{cases} 0, & \text{если } N\backslash T \not\subseteq S, \\ (-1)^{\pi(S,T)}\alpha_{T\bigcap S}, & \text{если } N\backslash T \subseteq S, \end{cases}$$

где $\pi(S,T)$—четность перестановки, переставляющей все элементы $i_j \in T\bigcap S$ в множестве $S = \{i_1, \dots, i_k\}$ левее всех элементов из $N\backslash T \subseteq S$ (с сохранением прежнего порядка для элементов $T\bigcap S$ и $N\backslash T$ в отдельности). Легко проверить, что при этом для повторного интеграла Березина выполнено равенство

$$\int\limits_{\mathfrak{A}_T} \left(\int\limits_{\mathfrak{A}_{N-T}} f d\alpha_{N\backslash T} \right) d\alpha_T = \int\limits_{\mathfrak{A}} f d\alpha_N. \tag{29}$$

Обозначим для любого подмножества $T \subseteq N$ (с четным числом элементов) $\langle\ \rangle_T$ сужение квазисостояния на подалгебру $\mathfrak{A}_T$, а g_T—плотность квазисостояния $\langle\ \rangle_T$ на $\mathfrak{A}_T$. Из (29) легко получить, что

$$g_T = \int\limits_{\mathfrak{A}_{N\backslash T}} g d\alpha_{N\backslash T}.$$

При этом, как следует из (28^a), квазисостояние $\langle\ \rangle_T$ регулярно, если

$$M_T \neq 0.$$

Характеристический функционал. Пусть $\langle\ \rangle$— квазисостояние на алгебре $\mathfrak{A}$ с плотностью g_T и $F = \{f_1, \dots, f_s\}$—некоторый набор нечетных элементов $\mathfrak{A}$. Расширим алгебру $\mathfrak{A}$, введя дополнительные грассмановы образующие $\eta_1, \dots, \eta_s$. Частичный интеграл

$$\int\limits_{\mathfrak{A}} \exp\{f_1\eta_1 + f_2\eta_2 + \dots + f_s\eta_s\} g d\alpha_N = \psi_F \in \widehat{\mathfrak{A}}, \tag{$28^б$}$$

где $\widehat{\mathfrak{A}}$—грассманова алгебра с единицей и образующими $\eta_1, \dots, \eta_s$, называется *характеристическим функционалом* набора F.

Формулы для моментов. Определим на алгебре $\widehat{\mathfrak{A}}$ линейные операции $\partial f/\partial\eta_i$—левое дифференцирование и $\partial f/\partial\eta_i$—правое дифференцирование, $f \in \widehat{\mathfrak{A}}$. На мономах η_T они определяются формулой

$$\frac{\partial\eta_T}{\partial\eta_i} = \begin{cases} 0, & i \notin T, \\ (-1)^{\sigma_T^{\text{лев}}(i)}\eta_{T\backslash\{i\}}, & i \in T, \end{cases}$$

где $\sigma_T^{\text{лев}}(i)$—число множителей в η_T, предшествующих η_i. Аналогичной формулой определяется и правая производная $\eta_T\frac{\partial}{\partial\eta_i}$ с той лишь разницей, что $\sigma_T^{\text{лев}}(i)$ нужно заменить на $\sigma_T^{\text{пр}}(i)$—число множителей в η_T, следующих за η_i.

Лемма 6. *Верна следующая формула*

$$\langle f_{i_1} \dots f_{i_k} \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial\eta_{i_1}} \frac{\partial}{\partial\eta_{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial\eta_{i_k}} \psi_F \right)_{\eta=0} = \left(\frac{\partial}{\partial\eta_T} \psi_F \right)_{\eta=0}, \tag{30}$$

где $(h)_{\eta=0}$ *обозначает свободный коэффициент в разложении* (24) *для* $h \in \widehat{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. Заметим, что экспонента

$$\exp\left\{\sum_i f_i\eta_i\right\} = \prod_i(\mathbf{1} + f_i\eta_i) = \mathbf{1} + \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}} f_{i_1}f_{i_2}\dots f_{i_k}\eta_{i_k}\dots\eta_{i_1}.$$

Из этого разложения и вытекает (30).

Условное математическое ожидание. Пусть $\langle\ \rangle$— квазисостояние на $\mathfrak{A}$ и $T \subseteq N$—подмножество с четным числом элементов такое, что состояние $\langle\ \rangle_T$ на $\mathfrak{A}_T$ регулярно. Определим *условное математическое ожидание* $\langle f \mid \mathfrak{A}_T\rangle$ как линейное отображение $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_T$, задаваемое формулой

$$\langle f \mid \mathfrak{A}_T\rangle \equiv \langle f \mid T\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathfrak{A}_{N\setminus T}} fg\,d\alpha_{N\setminus T}(g_T)^{-1} =$$

$$= g_T^{-1}\int\limits_{\mathfrak{A}_{N\setminus T}} fg\,d\alpha_{N-T}, \qquad (31)$$

где, напомним, g_T—плотность квазисостояния $\langle\ \rangle_T$ (последнее равенство в (31) следует из четности элемента g_T^{-1}). Элемент алгебры

$$gg_T^{-1} \in \mathfrak{A} \qquad (32)$$

называют *условной плотностью* квазисостояния $\langle\ \rangle$ относительно алгебры $\mathfrak{A}_T$. Заметим, что определения (31) и (32) формально имеют тот же вид, что и для аналогичных понятий в классической теории вероятностей.

Нетрудно проверить, что условное математическое ожидание $\langle\cdot \mid T\rangle$ обладает следующими свойствами, также напоминающими свойства классического условного математического ожидания.

i) Пусть $T_1 \subset T_2 \subseteq N$—подмножества $\mathcal{N}$ с четным числом элементов и такие, что состояния $\langle\ \rangle_{T_1}$ и $\langle\ \rangle_{T_2}$ регулярны. Тогда

$$\langle\langle f \mid T_2\rangle \mid T_1\rangle = \langle f \mid T_1\rangle. \qquad (33)$$

Это равенство проверяется простой выкладкой, см. [52].

ii) Если $h \in \mathfrak{A}_T$, то

$$\langle hf \mid T\rangle = h\langle f \mid T\rangle,\ \langle fh \mid T\rangle = \langle f \mid T\rangle h. \qquad (33^a)$$

При этом

$$\langle \mathbf{1} \mid T\rangle = \mathbf{1}.$$

iii) Для любого $f \in \mathfrak{A}$

$$\langle\langle f \mid T\rangle\rangle = \langle f\rangle.$$

Последние два свойства ii) и iii) в классическом случае однозначно характеризуют условное математическое ожидание. В грассмановом случае справедливо следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть задано квазисостояние $\langle\ \rangle$ на $\mathfrak{A}$ и $T \subseteq N$ множество с четным числом элементов, такое, что квазисостояние $\langle\ \rangle_T$ регулярно. Тогда отображение $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_T$, обладающее свойствами ii) и iii), т. е.*

$$\pi(hf) = h\pi(f),\ \ \pi(fh) = \pi(f)h,\ \ h \in \mathfrak{A}_T,$$

$$\pi\mathbf{1} = \mathbf{1} \qquad (34)$$

и

$$\langle\pi(f)\rangle = \langle f\rangle, \qquad (35)$$

единственно и совпадает с условным математическим ожиданием $\langle\cdot \mid T\rangle$.

Доказательство. В силу (34)

$$\pi(a_R) = (-1)^{\pi(S,P)}a_P\pi(a_S) = (-1)^{\pi(S,P)}a_P\sum_L K_L^S a_L,$$

где $P = R\bigcap T$, $S = R\bigcap(T\setminus N) \subset R$, $\pi(S,P)$— перестановка, переставляющая множество P левее множества $S \subset R$, а K_L^S— коэффициенты в разложении элемента $\pi(a_S) \in \mathfrak{A}_T$. Далее, в силу (35)

$$\langle\pi(a_R)\rangle = (-1)^{\pi(R,P)}\sum Q_{P,L}K_L^S = M_{P\bigcup S}, \qquad (36)$$

где $Q_{P,L} = \langle a_Pa_L\rangle$, $L, P \subseteq T$.

Правую часть равенства (36) при фиксированном S и P, пробегающем все подмножества T, можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $\{K_L^S, L \subseteq T\}$ с матрицей $\{Q_{P,L}\}$. Нетрудно подсчитать, что

$$\mathrm{Det}\{Q_{P,L}\} = \pm(\langle a_T\rangle)^{2^{|T|}} \neq 0$$

(в силу регулярности $\langle\ \rangle_T$). Таким образом, коэффициенты K_L^S определяются единственным образом и, следовательно, π совпадает с $\langle\ \mid T\rangle$.

Условный характеристический функционал. Пусть $\langle\ |\ T\rangle$—условное математическое ожидание с плотностью $g(g_T)^{-1}$ и $F\{f_1,\dots,f_s\}$—некоторый набор нечетных элементов $\mathfrak{A}$. Снова расширим алгебру $\mathfrak{A}$ с помощью дополнительных образующих $\eta_1,\dots,\eta_s$ и рассмотрим частичный интеграл

$$\psi_F^{\text{усл}} = \int\limits_{\mathfrak{A}_{N-T}} \exp\{f_1\eta_1+\dots+f_s\eta_s\}d\alpha_{N\setminus T} \in \mathfrak{A}_T\otimes\widehat{\mathfrak{A}}_N,$$

где $\widehat{\mathfrak{A}}$—грассманова алгебра с **1** и образующими $\eta_1,\dots,\eta_s$, называемый *условным характеристическим функционалом*. Верна формула для условных моментов

$$\langle f_{i_1}\dots f_{i_k}\mid T\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial\eta_{i_k}}\cdots\frac{\partial}{\partial\eta_{i_1}}\psi_F^{\text{усл}}\right)_{\eta=0}, \tag{36^а}$$

где $(h)_{\eta=0}$ для $h\in\mathfrak{A}_T\otimes\widehat{\mathfrak{A}}$ обозначает ту часть разложения (24) для h, которая не содержит образующих η_i, $i=1,\dots,s$.

Независимость. Мы скажем, что два набора $F = \{f_1,\dots,f_s\}$ и $H=\{h_1,\dots,h_j\}$ независимы относительно квазисостояния $\langle\ \rangle$, если для любых $f\in\mathfrak{A}_F$ и $h\in\mathfrak{A}_H$ выполнено

$$\langle fh\rangle = \langle f\rangle\langle h\rangle,$$

где $\mathfrak{A}_F\subseteq\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_H\subseteq\mathfrak{A}$ — подалгебры с **1**, порожденные наборами F и H соответственно.

Пусть $\mathfrak{A}_T$—подалгебра $\mathfrak{A}$, где T—множество с четным числом элементов, для которой определено условное математическое ожидание $\langle\ |\ T\rangle$. Система $F=\{f_1,\dots,f_s\}$ независима от алгебры $\mathfrak{A}_T$ в том и только в том случае, когда для любого элемента $f\in\mathfrak{A}_F$ его условное математическое ожидание

$$\langle f\mid T\rangle = \langle f\rangle\mathbf{1}. \tag{36^б}$$

Отсюда легко следует также, что система F независима от алгебры $\mathfrak{A}_T$ в том и только в том случае, когда условный характеристический функционал

$$\psi_F^{\text{усл}}\in\widehat{\mathfrak{A}}, \tag{36^в}$$

т. е. в его разложении (24) не встречается образующих $\alpha_i\in\mathfrak{A}_T$.

Гауссовы калибровочно-инвариантные квазисостояния. Рассмотрим грассманову алгебру $\mathfrak{A}$

с $2n$ образующими (n произвольно), разбитыми на две группы $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\bar\alpha_{\bar1},\dots,\bar\alpha_{\bar n}$, причем принят следующий порядок индексов:

$$1<\bar1<\dots<n<\bar n$$

(в дальнейшем мы часто будем опускать черту над индексом k в обозначении $\bar\alpha_{\bar k}$ и писать $\bar\alpha_k$).

В § 3 мы определили гауссово калибровочно-инвариантное квазисостояние на алгебре КАС. Это определение дословно переносится и на случай грассмановой алгебры с образующими $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n$. Здесь мы приведем некоторые сведения о гауссовых калибровочно-инвариантных квазисостояниях и связанные с ними формулы. Каждое такое состояние задается своей матрицей ковариации $D=\{d_{ij}\}$, где

$$d_{ij}=\langle\alpha_i\bar\alpha_j\rangle.$$

Нам понадобится формула (*гауссов интеграл Березина*)

$$\int\exp\{\sum c_{ij}\alpha_i\bar\alpha_j\}d\bar\alpha_n d\alpha_n\dots d\bar\alpha_1 d\alpha_1=\det\{c_{ij}\}, \tag{37}$$

где $C=\{c_{ij}\}$—произвольная матрица. Эту формулу легко получить с помощью разложения экспоненты из выражения ($25^а$) для интеграла Березина.

Лемма 8. *Пусть $\langle\ \rangle$—гауссово калибровочно-инвариантное квазисостояние на алгебре $\mathfrak{A}$ с невырожденной матрицей ковариаций D. Тогда плотность этого квазисостояния равна*

$$g=(\det\{-C\})^{-1}\exp\{-\sum c_{ij}\alpha_i\bar\alpha_j\}, \tag{38}$$

где матрица $C=\{c_{ij}\}=D^{-1}$.

Доказательство. Заметим, что элемент (38) в силу (37) является плотностью некоторого состояния $\langle\ \rangle$. Мы покажем, что это состояние является гауссовым калибровочно-инвариантным квазисостоянием с матрицей ковариаций D. Рассмотрим для этого характеристический функционал системы образующих $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\bar\alpha_1,\dots,\bar\alpha_n$, который мы запишем в виде, несколько отличном от ($28^в$):

$$\psi=\langle\exp\{\sum_i(\alpha_i\eta_i+\bar\eta_i\bar\alpha_i)\}\rangle=$$

$$= \mathrm{Det}(-D)\int_{\mathfrak{A}} \exp\{\sum_{ij} c_{ij}\alpha_i\bar{\alpha}_j\} + \sum_i(\alpha_i\eta_i + \bar{\eta}_i\bar{\alpha}_i)\}d\alpha_N =$$

$$= \exp\{\sum_{ij} d_{ij}\bar{\eta}_i\eta_j\}. \tag{39}$$

Действительно, если ввести элементы

$$\beta_i = \alpha_i - \sum_j d_{ij}\bar{\eta}_j,\ \ \bar{\beta}_i = \bar{\alpha}_i - \sum_j d_{ij}\eta_j$$

и воспользоваться формулой замены переменных в интеграле Березина (см. [5]), то после несложных преобразований мы придем к формуле (39). При выбранном в (39) определении характеристического функционала формула для моментов $\langle\alpha_Q\rangle$, где $Q = T\bigcup\overline{T}, T = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_k\}, \overline{T} = \{\bar{j}_1 < \ldots < \bar{j}_s\}$, имеет вид

$$\langle\alpha_Q\rangle = \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_{\bar{j}_s}}\cdots\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_{\bar{j}_1}}\psi\frac{\partial}{\partial\eta_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\eta_{i_k}}. \tag{40}$$

Применяя эту формулу к ψ, мы придем к формуле (1.3) для моментов гауссова квазисостояния. Из (40) следует, что

$$\langle\alpha_i\alpha_j\rangle = \langle\bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_j\rangle = 0,\ \ \langle\alpha_i\bar{\alpha}_j\rangle = d_{ij}.$$

Лемма доказана.

Виковское упорядочение. В алгебре $\mathfrak{A}$, на которой задано гауссово (калибровочно-инвариантное) квазисостояние, можно ввести операцию : : (виковское упорядочение) дословно так же, как эта операция вводилась для свободного квазисостояния на алгебре КАС (см. (6.3)). Кроме того, виковские мономы в $\mathfrak{A}$: α_Q : могут быть определены с помощью виковской экспоненты:

$$:\exp\{(\sum_i \eta_i\alpha_i + \bar{\alpha}_i\bar{\eta}_i)\} := \exp\{(\sum_i \eta_i\alpha_i + \bar{\alpha}_i\bar{\eta}_i)\}\psi^{-1} =$$

$$= \exp\{(\sum_i \eta_i\alpha_i + \bar{\alpha}_i\bar{\eta}_i) - \sum_{ij} d_{ij}\bar{\eta}_i\eta_j\}.$$

А именно, верна формула

$$:\alpha_Q := (\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_{i_k}}\cdots\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_{i_1}}\times$$

$$\times :\exp\{(\sum_i \bar{\eta}_i\alpha_i + \bar{\alpha}_i\eta_i)\}: \frac{\partial}{\partial\eta_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\eta_{j_s}})_{\eta=0,\bar{\eta}=0},$$

$$Q = T\bigcup\overline{T},\ T = \{j_1,\ldots,j_s\}, \overline{T} = \{i_1,\ldots,i_k\}$$

(обозначение $(\ )_{\eta=0,\bar{\eta}=0}$ аналогично обозначению в (36^a)).

При вычислении моментов и семиинвариантов (см. [26]) виковских мономов можно использовать так называемую диаграммную технику, описанную в [26] (с правильным учетом знаков, связанных с порядком множителей). В частности, например, среднее

$$\langle:\alpha_{Q_1}::\alpha_{Q_2}:\rangle \tag{41}$$

равно сумме по всем таким “спариваниям” множителей из α_{Q_1} и α_{Q_2} (как и в общей формуле в [26]), в которых любой множитель из α_{Q_1} может быть “спарен” лишь с множителем из α_{Q_2}.

Отсюда следует, в частности, что среднее (41) отлично от нуля лишь для тех $Q_1 = T_1\bigcup\overline{T}_1$ и $Q_2 = T_2\bigcup\overline{T}_2$, для которых $\mid T_1 \mid=\mid \overline{T}_2 \mid$ и $\mid \overline{T}_1 \mid=\mid T_2 \mid$.

Условное математическое ожидание. Пусть $\mathfrak{A}_T \subset \mathfrak{A}$—подалгебра с образующими $\{\alpha_i, \bar{\alpha}_i, i \in T\}$. Очевидно, что сужение $\langle\ \rangle_T$ гауссова калибровочно-инвариантного квазисостояния на эту алгебру снова таково же и его матрица ковариаций $D_T = \{d_{ij}, i, j \in T\}$. Предположим, что D_T—невырожденная матрица. Тогда плотность квазисостояния $\langle\ \rangle_T$ на $\mathfrak{A}_T$ имеет вид (38) и, следовательно, в силу (25) квазисостояние $\langle\ \rangle_T$ регулярно и определено условное математическое ожидание $\langle\ \mid T\rangle$. Для вычисления $\langle\ \mid T\rangle$ оказывается удобным правило, формулируемое в следующей лемме. Матрицу D представим в блочном виде

$$D = \left\{\begin{array}{cc} D_{T,T} & D_{T,N\backslash T} \\ D_{N\backslash T,T} & D_{T\backslash N,T\backslash N}\end{array}\right\},$$

где $D_{T,T} = D_T, D_{T,N\backslash T} = \{d_{ij}, i \in T, j \in N\backslash T\}$ и т. д.

Лемма 9. А) *Верны следующие формулы:*

$$\langle\alpha_i \mid T\rangle = \sum_{j\in T} b_{ij}\alpha_j = \alpha_i^T,\ i \in N\backslash T,$$

$$\langle\bar{\alpha}_i \mid T\rangle = \sum_{j\in T} c_{ij}\alpha_j = \bar{\alpha}_i^T,\ i \in N\backslash T, \tag{41^a}$$

где матрицы $B = \{b_{ij}\}$ и $C = \{c_{ij}\}$ равны

$$B = D_{N\backslash T,T}(D_{T,T})^{-1},\ C = (D^{-1}_{T,T}D_{T,N\backslash T})^{\text{тр}}. \tag{42}$$

Б) *Набор элементов*

$$\beta_i = \alpha_i - \langle\alpha_i \mid T\rangle,\ \bar{\beta}_i = \bar{\alpha}_i - \langle\bar{\alpha}_i \mid T\rangle,\ i \in N\backslash T,$$

независим от алгебры $\mathfrak{A}_T$ (относительно квазисостояния $\langle\ \rangle$).

В) *Сужение $\langle\ \rangle_F$ квазисостояния $\langle\ \rangle$ на грассманову алгебру $\mathfrak{A}_F$ с **1**, порожденную набором образующих $F = \{\beta_i, \bar{\beta}_i, i \in N\backslash T\}$, является гауссовым калибровочно-инвариантным квазисостоянием и его матрица ковариаций $D_F = \{\langle\beta_i\bar{\beta}_j\rangle_F\}$ равна*

$$D_F = D_{N\backslash T,N\backslash T} - D_{N\backslash T,T}D^{-1}_{T,T}D_{T,N\backslash T}. \tag{43}$$

Доказательство этой леммы основано на явном вычислении условного характеристического функционала для набора $\{\alpha_i, \bar{\alpha}_i, i \in N\backslash T\}$

$$\psi^{\text{усл}} = \langle\exp\{\sum_i(\alpha_i\eta_i + \bar{\eta}_i\bar{\alpha}_i)\} \mid T\rangle,$$

для которого с помощью гауссовых квадратур находим, что

$$\psi^{\text{усл}} = \exp\{\sum_{i,j} d^F_{ij}\bar{\eta}_i\eta_j + \sum_{i,j}(b_{ij}\alpha_i\eta_j + c_{ij}\bar{\eta}_i\bar{\alpha}_j)\}, \tag{44}$$

где матрицы $D_F = \{d^F_{ij}\}, B = \{b_{ij}\}, C = \{c_{ij}\}$ определены формулами (43), (42). Отсюда сразу же с помощью формулы для условных моментов, аналогичной формуле (40), вытекает (41). Кроме того, для условного характеристического функционала системы $\{\beta_i, \bar{\beta}_i,\ i \in N\backslash T\}$ из (44) находим выражение

$$\exp\{\sum_{i,j} d^F_{ij}\bar{\eta}_i\eta_j\} \tag{45}$$

и, следовательно, с помощью замечания (36$^{\text{в}}$) получаем утверждение Б). Утверждение В) также получается из (45). Лемма доказана.

Легко показать, пользуясь явным выражением для виковских мономов и независимостью наборов $\{\beta_i, \bar{\beta}_i,\ i \in N\backslash T\}$ и $\{\alpha_j, \alpha_j, j \in T\}$, что виковский моном

$$:\beta_Q\alpha_S:=:\beta_Q::\alpha_S:.$$

Кроме того, с помощью (36^a) из предыдущей леммы получим, что

$$\langle:\beta_Q:\mid T\rangle = 0.$$

Таким образом, для любого монома α_Q

$$\langle:\alpha_Q:\mid T\rangle =: \alpha^T_Q:,$$

где α^T_Q—моном, получаемый из α_Q заменой всех множителей $\alpha_i, \bar{\alpha}_i$ на α^T_i и $\bar{\alpha}^T_i$ соответственно.

Б. Обратимые марковские фермионные поля. Вернемся снова к фермионному эвклидову полю, т. е. к квазисостоянию на полевой алгебре $\mathcal{E}_F$. Предыдущие построения "условных вероятностей" на конечной грассмановой алгебре послужат прототипом для определения условного математического ожидания в бесконечной грассмановой алгебре $\mathcal{E}_F$.

Как и в случае бозонного поля, рассмотрим ε-окрестность

$$Y^\varepsilon_t = \{x :\mid x_0 - t \mid < \varepsilon\}$$

временного слоя $Y_t = \{x : x_0 = t\}$ и грассманову алгебру $\mathcal{E}^\varepsilon_t$, порожденную образующими $\psi_\varphi, \bar{\psi}_\varphi$, для которых $\operatorname{supp}\varphi \subset Y^\varepsilon_t$. Обозначим

$$\mathcal{E}_t = \bigcup_{\varepsilon>0}\mathcal{E}^\varepsilon_t.$$

Очевидно, что

$$\Theta\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0.$$

Пусть на $\mathcal{E}_F$ определено Θ-инвариантное квазисостояние. Определим на $\mathcal{E}_0$ эрмитову билинейную форму

$$(F_1, F_2) = \lim_{\varepsilon\to+0}\langle U_{-\varepsilon}\Theta F_1 U_\varepsilon F_2\rangle,\ F_1, F_2 \in \mathcal{E}_0, \tag{46}$$

где U_ε—гоморфизм $\mathcal{E}_F$, порожденный сдвигом на ε вдоль "временной оси".

Определение. Квазисостояние $\langle\ \rangle$ на фермионной полевой алгебре $\mathcal{E}_F$ называется ***обратимо марковским***, если оно

1) Θ-инвариантно;

2) эрмитова форма (46) неотрицательна

$$(F, F) \geq 0,\ F \in \mathcal{E}_0;$$

3) для любого $t > 0$ определено условное математическое ожидание $\langle\ |\ \mathcal{E}_t\rangle$ как линейное непрерывное отображение $\mathcal{E}_F$ в подалгебру $\mathcal{E}_t$, обладающее свойствами ii) и iii) условного математического ожидания для конечной грассмановой алгебры (см. предыдущий пункт); при этом предполагается, что такое отображение единственно;

4) для любого t и любых двух элементов $F_+ \in \mathcal{E}_t^+$ и $F_- \in \mathcal{E}_t^-$ (алгебры $\mathcal{E}_t^\pm$ порождены образующими $\psi(\varphi), \bar\psi(\varphi)$ с носителями $\operatorname{supp}\varphi \in R_t^\pm = \{x_0 > t, (+),\ \text{или}\ x_0 < t, (-)\}$)

$$\langle F_+F_- \mid \mathcal{E}_t\rangle = \langle F_+ \mid \mathcal{E}_t\rangle\langle F_- \mid \mathcal{E}_t\rangle.$$

Заметим, что из 1) и 3) вытекает, что

$$\langle \Theta F \mid \mathcal{E}_0\rangle = \Theta\langle F \mid \varepsilon_0\rangle.$$

Лемма 10. *Пусть на алгебре $\mathcal{E}_F$ задано обратимое марковское трансляционно-инвариантное квазисостояние $\langle\ \rangle$. Тогда это квазисостояние OS-положительно и гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}} = \overline{\mathcal{E}_F^+}/I_0$ (см. п. 2 этого параграфа) канонически изоморфно гильбертову пространству $\overline{\mathcal{H}}_{\text{физ}}$, где*

$$\overline{\mathcal{H}}_{\text{физ}} = \overline{\mathcal{E}}_0/N_0,\ \ N_0 = \{F \in \mathcal{E}_0, (F,F) = 0\} \subset \mathcal{E}_0,$$

получающемуся пополнением фактор-пространства $\mathcal{E}_0/N_0$ по скалярному произведению

$$([F_1],[F_2]) \equiv (F_1,F_2),\ \ F_1, F_2 \in \mathcal{E}_0,$$

а $[F] = [F]_0 \in \mathcal{E}_0/N_0$—класс элемента $F \in \mathcal{E}_0$. На элементах $[G] = [G]_+ \in \mathcal{E}_F^+/I_0$, $G \in \mathcal{E}_+^F$ этот изоморфизм определяется формулой

$$[G]_+ \to [\langle G \mid \mathcal{E}_0\rangle]_0 \in \mathcal{E}_0/N_0.$$

При этом изоморфизме полугруппа $\mathcal{J}_\tau$ переходит в полугруппу $\overline{\mathcal{J}}_\tau$, действующую на элементы $[F_0] \in \mathcal{E}_0/N_0$ с помощью формулы

$$\mathcal{J}_\tau[F]_0 = [\langle U_\tau F \mid \mathcal{E}_0\rangle]_0,\ \ \tau > 0, \tag{46^a}$$

где U_τ—гомоморфизм алгебры $\mathcal{E}_F$, порожденной сдвигом вдоль временной оси на $\tau > 0$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3. Как и в бозонном случае, в пространстве $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ действует унитарная группа $\{U_{\bar s}, \bar s \in R^\nu\}$ пространственных трансляций, коммутирующая с $\mathcal{J}_t$.

Пример. Дираковское свободное поле в R^4. Так называется гауссово калибровочно-инвариантное поле $\langle\ \rangle$ на полевой алгебре $\mathcal{E}_F$ с образующими $\psi_\varphi, \bar\psi_\varphi$, где функции $\varphi(x), x \in R^4$, принимают значения в четырехмерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^4$. Ковариация этого поля равна

$$\langle\psi_{\varphi_1}\bar\psi_{\varphi_2}\rangle = \sum_{\alpha,\beta}\int_{R^4}\int_{R^4}\left(\sum_\mu \gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)^{-1}_{\alpha\beta}(x,x'),$$

$$\varphi_1^\alpha(x)\bar\varphi_2^\beta(x')d^4xd^4x' = \sum_{\alpha\beta}\int_{R^4}\left(\sum_\mu i\gamma_\mu p_\mu + m\right)^{-1}_{\alpha\beta}\tilde\varphi_1^\alpha(p)\overline{\tilde\varphi_2^\beta}(p)dp, \tag{47}$$

где $\{\varphi^\alpha(x), \alpha = 0,1,2,4\}$—координаты вектора $\varphi(x) \in \mathbb{C}^4$ в некотором базисе в $\mathbb{C}^4$, $\tilde\varphi$— преобразование Фурье функции $\varphi(x)$, $\{\gamma_\mu, \mu = 0,1,2,3\}$— четыре матрицы Дирака—самосопряженные матрицы, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\gamma_\mu\gamma_{\mu'} + \gamma_{\mu'}\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\mu'},\ \ \mu,\mu' = 0,1,2,3. \tag{47^a}$$

При этом будем считать, что базис в $\mathbb{C}^4$ выбран так, что матрица γ_0 диагональна:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Формальное эвклидово действие, соответствующее (47), имеет вид

$$\int\left[\sum_\alpha m\psi_\alpha(x)\bar\psi_\alpha(x) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\psi_\alpha(x)\gamma_\mu^{\alpha\beta}\frac{\partial\bar\psi_\beta(x)}{\partial x_\mu} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial\psi_\alpha(x)}{\partial x_\mu}\gamma_\mu^{\alpha\beta}\bar\psi_\beta(x)\right]d^4x.$$

В определении (17^a) инволюции Θ матрица ε выбирается равной $\bar\varepsilon = \gamma_0$. При этом поле оказывается Θ-инвариантным. Алгебра $\mathcal{E}_0$ порождена образующими

$$\psi_{\varphi(\bar x)\delta(x_0)} = \psi_\varphi,\ \ \bar\psi_{\varphi(\bar x)\delta(x_0)} = \bar\psi_\varphi,$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, а $\varphi \in S^4(R^3)$ — функция на R^3 со значениями в $\mathbb{C}^4$. Несложный подсчет показывает, что значение эрмитовой квадратичной формы (46) для образующей $\bar{\psi}_\varphi, \varphi \in S^4(R^3)$, равно

$$(\bar{\psi}_\varphi, \bar{\psi}_\varphi) = \frac{\pi}{2} \int\limits_{R^3} \left[\left(\frac{-i \sum_{\mu=1}^3 \gamma_\mu p_\mu + m}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right) \gamma_0 + E \right]_{\alpha,\beta} \tilde{\varphi}_\alpha(p) \overline{\tilde{\varphi}_\beta(p)} d^3p,$$

$$p = (p_1, p_2, p_3),$$

где $\tilde{\varphi}(p) = \{\tilde{\varphi}_\alpha(p), \alpha = 0, 1, 2, 3\}$—преобразование Фурье функции $\varphi \in S^4(R^3)$.

Аналогично этому

$$(\psi_\varphi, \psi_\varphi) = \frac{\pi}{2} \int\limits_{R^3} \left[E - \left(\frac{-i \sum\limits_{\mu=1}^{3} \gamma_\mu p_\mu + m}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right) \gamma_0 \right]_{\alpha,\beta} \tilde{\varphi}_\alpha(p) \varphi_\beta(p) d^3p.$$

Нетрудно проверить, что при каждом $p \in R^3$ матрицы

$$A_\pm(p) = \left[E \pm \left(\frac{-i \sum\limits_{\mu=1}^{3} \gamma_\mu p_\mu + m}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right) \gamma_0 \right]^{1/2}$$

самосопряжены, $A_\pm(p) \geq 0$ и

$$\mathrm{Ker} A_+(p) = \mathrm{Im} A_-(p) = C_-(p) \subset \mathbb{C}^4,$$

$$\mathrm{Ker} A_-(p) = \mathrm{Im} A_+(p) = C_+(p) \subset \mathbb{C}^4 \qquad (48)$$

и

$$\dim C_-(p) = \dim C_+(p) = 2.$$

При этом сужение $A_\pm(p) \,|_{C_\pm(p)}$ совпадает с единичным оператором в двумерном пространстве $C_\pm(p)$ соответственно. Таким образом, можно ввести гильбертовы пространства

$$\mathcal{H}_\pm = \oplus \int\limits_{R^3} C_\pm(p) dp,$$

где $\oplus \int\limits_{R^3} \ldots d^3p$ прямой интеграл гильбертовых пространств, т. е., проще говоря, пространства функций $\{\varphi(p), p \in R^3\}$ таких, что при каждом p значение $\varphi(p) \in C_\pm(p)$ соответственно.

Пространство $\mathcal{H}_+$ описывает состояния частицы (электрона), а $\mathcal{H}_-$—состояния античастицы (позитрона). То обстоятельство, что при каждом фиксированном импульсе $p \in R^3$ пространства $C_\pm(p)$ двумерны, означает два возможных значения спина у частицы и античастицы (см. подробнее [4]). Обозначим

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-.$$

(Как следует из (48) пространство $\mathcal{H} = L_2(R^3, \mathbb{C}^4)$—гильбертово пространство функций со значениями в $\mathbb{C}^4$.)

Лемма 11. *Поле Дирака является обратимо марковским полем и пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ состояний этого поля совпадает с фоковским пространством $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$. При этом трансфер-матрица поля $\mathcal{J}_\tau$ совпадает с оператором $\Gamma(\exp\{-th\})$ в $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$, где оператор h действует в $\mathcal{H}$ как умножение на функцию $\sqrt{p^2 + m^2}$. Гамильтониан поля*

$$H = d\Gamma(h).$$

Доказательство просто, и мы его опускаем. Заметим, что в разобранном примере, как и в случае бозонного поля Нельсона, марковость поля является следствием локальности функции Лагранжа.

5. Эвклидовы поля на дискретном пространстве. В этой книге (гл. 3) будут изучаться эвклидовы поля, определенные на множестве $X \times R^1$ (или $X \times Z^1$), где X—("пространство") некоторое счетное множество, а R^1 (или Z^1)—"время" (непрерывное или дискретное). Такие поля возникают при "дискретизации" непрерывных эвклидовых полей (см. [38]) либо как самостоятельный объект в некоторых моделях статистической физики.

Общая схема вводимых здесь понятий (Θ-инвариантность, OS-положительность, физическое гильбертово пространство, трансфер-матрица, свойство обратимой маркововсти) следует тому же плану, который был принят при изложении эвклидовых полей в непрерывном пространстве. Однако, в отличие от случая таких полей, принимавших значения в конечномерном линейном пространстве, в случае дискретного пространства мы введем более обширный класс так называемых “киральных” полей, т. е. бозонных полей со значениями в произвольном (конечномерном) многообразии (или даже в конечном множестве). Сначала мы опишем эти поля, а затем рассмотрим также фермионные поля на дискретном множестве.

А. Бозонные эвклидовы поля на дискретном множестве. Мы ограничимся рассмотрением дискретного времени Z^1; случай непрерывного времени R^1 рассматривается аналогично.

Итак, пусть на множестве $X \times Z^1 = Y$ определено случайное поле

$$\xi = \{\xi_y, y = (x, x_0) \in X \times Z^1\},$$

т. е. система случайных величин ξ_y, заданных на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ), помеченных элементами $y \in Y$ и принимающих значения в некотором топологическом пространстве S (пространстве “спинов”). В дальнейшем, не ограничивая общности, можно считать, что пространство Ω совпадает с пространством S^Y конфигураций поля (т. е. функций на Y со значениями в S), а σ-алгебра Σ совпадает с борелевской σ-алгеброй относительно тихоновской топологии в S^Y.

Как и выше, рассмотрим полевую алгебру $\mathcal{E} = \hat{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu) = \bigcap_{\infty > p \geq 1} L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Пусть далее фиксирован некоторый конечный набор числовых функций $\{\varphi_\alpha, \alpha \in M\}$ (M—помечающее их множество) на пространстве S такой, что полиномы от величин (полевых переменных)

$$\Phi_{y,\alpha}(\xi) = \varphi_\alpha(\xi_y),\ y \in Y, \alpha \in M,$$

образуют всюду плотное множество в $\mathcal{E}$. Мы предположим также, что вместе с каждой функцией φ_α в наборе $\{\varphi_\alpha, \alpha \in M\}$ содержится комплексно-сопряженная ей функция $\bar{\varphi}_\alpha = \varphi_{\alpha^*}$. Отображение

$$* : M \to M : \alpha \to \alpha^* \qquad (49)$$

назовем *зарядовым сопряжением*.

Для любого $t \in Z^1$ обозначим подалгебры $\mathcal{E}_t^\pm \subset \mathcal{E}$, порожденные соответсвенно полевыми переменными $\{\Phi_{\alpha,y}, \alpha \in M, y = (x, x^0), x^0 \geq t(+)$ или $x^0 \leq t(-)\}$.

Введем теперь следующие предположения относительно поля ξ, аналогичные предположениям, введенным в случае непрерывных полей.

Трансляционная инвариантность. Пусть $\tilde{Z}^\nu$— некоторая группа преобразований пространства X, изоморфная ν-мерной решетке Z и такая, что фактор-пространство $X/\tilde{Z}^\nu$ (множество орбит действия группы $\tilde{Z}^\nu$ в пространстве X) конечно.

Преобразования $s \in \tilde{Z}^\nu$ в X, которые мы будем называть пространственными сдвигами, и временные сдвиги $(x, x^0) \to$ $\to (x, x^0 - \tau)$ порождают группу преобразований Y, изоморфную группе $Z^{\nu+1}$, которую мы будем называть группой *трансляций*. Кроме того, введем преобразование отражения времени $\vartheta : (x, x^0) \to (x, -x^0)$. Трансляции и отражение времени порождают преобразования в пространстве конфигураций поля, с помощью которых определяются соответствующие гомоморфизмы U_s, U_τ, антилинейная инволюция Θ полевой алгебры и соответствующие преобразования $U^*_{s(\tau)}, \Theta^*$ в пространстве мер в Ω.

Предположим, что случайное поле ξ:

1) трансляционно-инвариантно: его распределение μ не меняется при действии трансляций $U^*_{s(\tau)}$,

2) обратимо во времени: распределение μ инвариантно относительно Θ^*,

3) обладает марковским свойством.

Определение марковского свойства для поля ξ на Y в точности совпадает с определением (20^a) этого свойства в случае марковских бозонных полей в пространстве $R^{\nu+1}$.

Для любого $\tau \in Z^1$ обозначим $X \subset Y$ временной слой $X_\tau =$ $= \{y = (x, \tau)\}$ и Σ_τ—σ-алгебру, порожденную значениями $\{\xi_y, y \in X_t\}$ конфигураций на слое X_τ.

Далее, совершенно аналогично случаю бозонных марковских полей на $R^{\nu+1}$ мы вводим физическое гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$

$$\mathcal{H}_{\text{физ}} = L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu) \subset L_2(\Omega, \Sigma, \mu),$$

состоящее из тех квадратично-суммируемых функционалов от поля ξ, которые зависят лишь от значений этого поля на нулевом слое $X_0 \subset Y$.

Трансфер-матрица $\mathcal{J}_\tau$ в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ определяется формулой

$$\mathcal{J}_\tau f = \langle U_\tau f \mid \Sigma_0 \rangle = P_{\mathcal{H}_{\text{физ}}} U_\tau f, \ \tau > 0, \ \tau \in Z^1,$$

где $\{U_\tau, \tau \in Z^\nu\}$—унитарная группа операторов в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$, порожденная гомоморфизмами временных сдвигов алгебры $\mathcal{E}$, $P_{\mathcal{H}_{\text{физ}}}$—оператор проектирования в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ на подпространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$. Как и выше, верна

Лемма 12. *Семейство операторов $\{\mathcal{J}_\tau, \tau \in Z^1, \tau \geq 0\}$ образуют полугруппу самосопряженных сжимающих операторов в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$.*

Самосопряженность $\mathcal{J}_\tau$ следует из обратимости поля во времени, полугрупповое свойство из трансляционной инвариантности и марковского свойства поля. Образующий оператор $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1$ полугруппы $\mathcal{J}_\tau$ обычно и называют *трансфер-матрицей* поля. Гамильтонианом по аналогии со случаем непрерывного времени называют оператор

$$H = \frac{1}{2} \ln \mathcal{J}^2.$$

Гомоморфизмы U_s алгебры $\mathcal{E}$, порожденные пространственными трансляциями (и сохраняющими алгебру $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^+ \bigcup \mathcal{E}_0^-$), продолжаются до унитарной группы операторов $\{U_s, s \in Z^\nu\}$ в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$, коммутирующих с трансфер-матрицей $\mathcal{J}$.

Б. Гиббсовские перестройки. Как уже неоднократно говорилось выше, для многих физических моделей описывающее их эвклидово поле ξ задается как гиббсовская перестройка некоторого сравнительно простого "свободного" поля (независимого или гауссова). Общая конструкция таких перестроек, а также главнейший метод их исследования—метод кластерных разложений—изложены в книге [26]. Здесь мы лишь кратко напомним основные понятия и факты, касающиеся гиббсовских полей, а также введем некотрые специальные предположения относительно них.

Предположим, что на пространстве "спинов" S определена некоторая вероятностная мера ν_0 и пусть $\mu_0 = \nu_0^Y$—распределение вероятностей в S^Y, равное бесконечному произведению одинаковых экземпляров меры ν_0 (т. е. распределение независимого поля на Y).

1. Эвклидово действие. Для каждого конечного множества $\Lambda \subset Y$ определим эвклидово действие $V_\Lambda(\xi)$ поля как полином от полевых переменных

$$V_\Lambda(\xi) = \sum_n R_n \prod_{y,\alpha} (\Phi_\alpha(\xi_y))^{n(y,\alpha)}, \tag{50}$$

где суммирование происходит по мультииндексам $n = \{n(y,\alpha)\}$ (неотрицательным целочисленным финитным функциям на $Y \times M$) таким, что

$$\operatorname{supp} n \subset \Lambda \times M.$$

Система $\{R_n\}$ коэффициентов в (50) (не зависящих от Λ) называется *потенциалом взаимодействия*. Совокупность $\mathfrak{A}$ мультииндексов n, для которых $R_n \neq 0$, называется *носителем потенциала*. Мы введем следующие предположения относительно потенциала взаимодействия $\{R_n\}$.

а) Трансляционная инвариантность и обратимость во времени. Пусть g—одно из преобразований в Y: пространственная трансляция, временная трансляция, или обращение времени. Тогда

$$R_{gn} = R_n \tag{51}$$

(действие g на мультииндексы n очевидно). Из (51) вытекает, что

$$V_{g\Lambda}(\xi) = V_\Lambda(g^{-1}\xi), \ \Lambda \subset Y$$

(действие g на конфигурацию ξ также определено очевидным образом).

б) Зарядовая инвариантность. Предположим, что

$$R_{n^*} = \overline{R}_n, \tag{52}$$

где $n^*(y,\alpha) = n(y,\alpha^*)$, а $*$—зарядовое сопряжение в M (см. (49)). Из (52) следует вещественность действия V_Λ.

Мы предположим, что в множестве X введена некотрая целочисленная метрика ρ, и введем метрику в Y

$$\hat{\rho}(y_1, y_2) = \rho(x_1, x_2) + \mid x_1^{(0)} - x_2^{(0)} \mid,$$

$$y_i = (x_i, x_i^0), \ i = 1, 2.$$

Далее, для любого мультииндекса n обозначим $\operatorname{ssupp} n$ проекцию его носителя $\operatorname{supp} n \subset Y \times M$ в Y.

в) Финитность и марковость. Для любого мультииндекса $n \in \mathfrak{A}$ (т. е. такого, что $R_n \neq 0$) диаметр множества ssupp n равномерно ограничен

$$\max_{n\in\mathfrak{A}} \operatorname{diam} \operatorname{ssupp} n < \infty \text{ (финитность).}$$

Кроме того, для любых двух точек $y_1 = (x_1, x_1^0), y_2 = (x_2, x_2^0) \in$ ssupp n

$$| x_1^{(0)} - x_2^{(0)} | \leq 1 \text{ (марковость).}$$

Степенью мультииндекса $n = \{n(y, \alpha)\}$ назовем число

$$| n | = \sum_{y,\alpha} n(y, \alpha).$$

г) Ограниченность степени. Предположим, что степени всех мультииндексов из носителя $\mathfrak{A}$ потенциала $\{R_n\}$ равномерно ограничены

$$\max_{n\in\mathfrak{A}} | n | < \infty.$$

Замечание. Из перечисленных предположений относительно потенциала взаимодействия $\{R_n\}$ вытекает, что множество значений, принимаемых коэффициентами R_n, конечно и поэтому

$$\max_{n\in\mathfrak{A}} | R_n | < \infty.$$

2. Гиббсовская перестройка. Для каждого конечного множества $\Lambda \subset Y$ определим вероятностную меру μ_Λ в (Ω, Σ) с помощью гиббсовской перестройки меры μ_0

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu_0}(\xi) = \frac{1}{Z_\Lambda} \exp\{-\beta V_\Lambda(\xi)\}, \ \xi \in \Omega = S^Y, \qquad (52^a)$$

где β—некоторый параметр, а Z_Λ—нормировочный множитель (статистическая сумма):

$$Z_\Lambda = \int_\Omega \exp\{-\beta V_\Lambda(\xi)\} d\mu_0.$$

Лемма 13. *Предположим, что набор полевых переменных $\{\varphi_\alpha, \alpha \in M\}$ состоит из ограниченных функций, а также выполнены все предположения а)–г) относительно потенциала взаимодействия $\{R_n\}$. Тогда существует такое значение $\beta_0 > 0$, что при всех $\beta : | \beta | < \beta_0$*

1) *существует слабый предел*

$$\mu = \lim_{\Lambda\uparrow Y} \mu_\Lambda, \qquad (53)$$

где μ—вероятностная мера в пространстве Ω;

2) *случайное поле ξ на Y со значениями в S и распределением вероятностей μ трансляционно-инвариантно, обратимо во времени и обладает свойством марковости.*

Утверждение 1) можно доказать с помощью кластерного разложения для мер μ_Λ (см. книгу [26]). Свойства поля, указанные в 2), легко вытекают из предположений относительно потенциала взаимодействия $\{R_n\}$.

В. Примеры эвклидовых (бозонных) полей на дискретном пространстве. Здесь мы приведем примеры эвклидовых полей описанного выше вида, часто встречающиеся в литературе.

I. Спиновые поля на решетке $Z^{\nu+1}$. В этом случае $X = Z^\nu$(ν-мерная решетка), $S = \{1, -1\}, \nu_0$—равномерное распределение на S: $\nu_0(1) = \nu_0(-1) = 1/2$. Полевые переменные— значения поля

$$\xi_y = \pm 1, \ y \in Z^{\nu+1}.$$

Очевидно, что любой моном вида (50) можно записать как

$$\xi_B = \prod_{y\in B} \xi_y,$$

где $B \subset Y$—конечное множество, и, таким образом, действие спинового поля имеет вид

$$V_\Lambda = \sum_{B\subseteq\Lambda} R_B \xi_B,$$

где потенциал взаимодействия $\{R_B\}$ определен на конечных подмножествах B решетки $Z^{\nu+1}$ и удовлетворяет условиям, аналогичным условиям а)–г).

Для простейшей и наиболее изученной модели спинового поля—так называемой *модели Изинга*—потенциал R_B отличен от нуля на одноточечных подмножествах B и двухточечных подмножествах, состоящих из пары соседних точек $Z^{\nu+1}$.

II. Модель ротаторов. По-прежнему $X = Z^\nu$ (т. е. $Y = Z^{\nu+1}$), $S = T^1$—окружность, $d\nu_0 = \frac{1}{2\pi}d\xi$ ($d\xi$—лебегова мера на T^1).

Полевые переменные

$$\Phi_{\pm,y} = \exp\{\pm i\xi_y\}.$$

Действие V_Λ равно

$$V_\Lambda = \varepsilon \sum_{\substack{y_1,y_2\in\Lambda \\ |y_1-y_2|=1}} \cos(\xi_{y_1} - \xi_{y_2}) =$$

$$= \varepsilon \sum_{\substack{y_1,y_2\in\Lambda \\ |y_1-y_2|=1}} (\Phi_{+,y_1}(\xi)\Phi_{-,y_2}(\xi) + \Phi_{-,y_1}(\xi)\Phi_{+,y_2}(\xi)). \qquad (53^a)$$

Здесь метрика $\rho(y_1, y_2) \equiv \mid y_1 - y_2 \mid$ на решетке $Z^{\nu+1}$ задается формулой

$$\mid y_1 - y_2 \mid = \sum_{i=0}^{\nu} \mid x_1^{(i)} - x_2^{(i)} \mid,$$

$$y_k = (x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(\nu)}),\ k = 1, 2.$$

III. Решетчатое калибровочное поле Янга—Миллса. Множество $Y = E^{\nu+1}$—совокупность ребер решетки $Z^{\nu+1}$. Это множество можно представить в виде, явно выделяющем временную координату

$$E^{\nu+1} = \tilde{E}^\nu \times Z^1,$$

где $\tilde{E}^\nu$—совокупность ребер $y = (x_1, x_2)$, одна из вершин которых лежит на нулевом слое $Z^\nu \subset Z^{\nu+1}$ решетки $Z^{\nu+1} : \{x_1 = (x_1^0, x_1),\ x_1^0 = 0\}$, а другая вершина лежит либо на нулевом, либо на первом слое: $\{x_2 = (x_2^0, x_2),\ x_2^0 = 0, 1\}$.

Пространство $S = G$—некоторая компактная группа, ν^0—нормированная мера Хаара в G. Действие поля $V_\Lambda, \Lambda \subset E^{\nu+1}$, имеет вид

$$V_\Lambda = \sum_{p:\partial p\subset\Lambda} \operatorname{Re}\chi_0(g_p), \qquad (54)$$

где суммирование происходит по всем двумерным граням решетки $Z^{\nu+1}$ таким, что их граница $\partial p = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} \subset \Lambda$; ребра

y_i в ∂p пронумерованы в порядке некоторого обхода грани p, а g_p равно

$$g_p = g_{y_1}^{\varepsilon_1} g_{y_2}^{\varepsilon_2} g_{y_3}^{\varepsilon_3} g_{y_4}^{\varepsilon_4},$$

где $\varepsilon_i = 1$, если ребро y_i при выбранном обходе p проходится вдоль направления соответствующего орта $\{e_s, s = 0, 1, \ldots, \nu\}$ решетки $Z^{\nu+1}$ и $\varepsilon_i = -1$, если это ребро проходится в противоположном направлении. Далее, χ_0—характер некоторого "фундаментального" неприводимого представления $g \to T_g^0$ группы G (см. [20]). Легко показать, что значение $\operatorname{Re}\chi_0(g_p)$ не зависит ни от направления обхода p, ни от его начала, т. е. однозначно определено самой гранью p.

"Фундаментальность" представления $g \to T_g^0$ означает, что любое неприводимое представление $g \to T_g$ группы G содержится при подходящих n_1 и n_2 в тензорном произведении $(T_g^0)^{\otimes n_1} \otimes (\overline{T}_g^0)^{\otimes n_2}$ тензорных степеней представления $g \to T_g^0$ и контргредиентного к нему представления $g \to \overline{T}_g^0$ (см. [20]).

Обозначим $\varphi^0_{\alpha_1,\alpha_2}(g) = (T_g^0\eta_{\alpha_1}, \eta_{\alpha_2})$ матричные элементы представления $g \to T_g^0$ в некотором фиксированном ортонормированном базисе $\{\eta_\alpha\}$ в пространстве, где действует это представление (при этом $\overline{\varphi}^0_{\alpha_1,\alpha_2}(g)$ служат матричными элементами для контргредиентного представления $g \to \overline{T}_g^0$). В качестве полевых переменных можно выбрать функции

$$\Phi^+_{\alpha_1,\alpha_2,y} = \varphi^0_{\alpha_1,\alpha_2}(g_y),\ \Phi^-_{\alpha_1,\alpha_2,y} = \overline{\varphi}^0_{\alpha_1,\alpha_2}(g_y),\ y \in E^{\nu+1}.$$

Легко проверить, что описанная модель удовлетворяет всем условиям а)–г), приведенным выше, и, следовательно, при достаточно малых β в (52) существует случайное поле на $E^{\nu+1}$, получающееся как предел (53) и называемое *калибровочным полем Янга—Миллса*.

Действие (54), а следовательно, и предельное поле инвариантны относительно группы $J = G^{Z^{\nu+1}}$ так называемых *калибровочных преобразований*

$$g_y \to \gamma(s_1)g_y\gamma^{-1}(s_2),\ y = (s_1, s_2),$$

где $\gamma = \{\gamma(s), s \in Z^{\nu+1}\}$—функция на $Z^{\nu+1}$ со значениями в группе G.

Обозначим $L_2^{\text{gauge}}(\Omega, \Sigma, \mu) < L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ совокупность всех калибровочно-инвариантных функционалов из $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ от поля $g = \{g_y\}$, а $\mathcal{H}^{\text{gauge}}_{\text{физ}} = \mathcal{H}_{\text{физ}} \bigcap L_2^{\text{gauge}}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Очевидно, что пространство $\mathcal{H}^{\text{gauge}}_{\text{физ}}$ инвариантно относительно трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ калибровочного поля и, как легко проверить, его ортогональное дополнение

$$\mathcal{H}_{\text{физ}} \ominus \mathcal{H}^{\text{gauge}}_{\text{физ}}$$

переводится трансфер-матрицей в нуль. Таким образом, следует изучить только часть трансфер-матрицы

$$\mathcal{J}^{\text{gauge}}_{\text{физ}} = \mathcal{J}_\tau / \mathcal{H}^{\text{gauge}}_{\text{физ}}$$

в пространстве $\mathcal{H}^{\text{gauge}}_{\text{физ}}$.

Замечание о радиальной калибровке. Часто используется несколько другое (но эквивалентное прежнему) определение пространства $\mathcal{H}^{\text{gauge}}_{\text{физ}}$ и трансфер-матрицы $\mathcal{J}^{\text{gauge}}_{\text{физ}}$. Заметим, что функционалы $f \in L_2^{\text{gauge}}(\Omega, \Sigma, \mu)$ постоянны на орбитах действия групп калибровочных преобразований J в пространстве конфигураций калибровочного поля Ω. Поэтому мы можем перейти к более узкому классу $\Omega' \subset \Omega$ конфигураций поля $g = \{g_y\}$ и к более узкой группе J', действующей в Ω' так, что множество орбит осталось бы прежним. Например, такое сужение можно совершить, полагая

$$g_y = e \ (\text{ единица } G) \qquad (55)$$

для всех ребер y, параллельных временной ("вертикальной") оси $e_0 \in Z^{\nu+1}$ (радиальная калибровка). Таким образом, калибровочное поле $g = \{g_y\}$ фактически задано только на множестве $\hat{Y}$ "горизонтальных" ребер:

$$\hat{Y} = E^\nu \times Z^1,$$

где E^ν—совокупность ребер решетки Z^ν. Действие поля (с учетом (55)) имеет прежний вид, и существует предельное распределение μ' на пространстве Ω' конфигураций нового поля. Калибровочная группа J' состоит теперь только из тех преобразований $\{\gamma(s)\}$, которые не нарушают условия (55) (т. е. функция $\gamma(s)$ не зависит от временной координаты $s^{(0)}$ точки $s \in Z^{\nu+1}$).

Легко проверить, что пространство $\mathcal{H}^{\text{gauge}}_{\text{физ}} \subset \mathcal{H}_{\text{физ}}$, а также калибровочно-инвариантная часть $\mathcal{J}^{\text{gauge}}_{\text{физ}}$ трансфер-частицы в этом пространстве остаются прежними. Однако, в отличие от предыдущего случая, существует уже нетривиальная часть трансфер-матрицы в ортогональном дополнении $\mathcal{H}_{\text{физ}} \ominus \mathcal{H}^{\text{gauge}}_{\text{физ}}$.

Г. Фермионные поля на решетке. Обычно удобно фермионное поле задавать на решетке $\tilde{Z}^{\nu+1} = Z^\nu \times \tilde{Z}^1$, где $\tilde{Z}^1$—решетки полуцелых чисел $\{\pm 1/2, \pm 3/2, \ldots\}$. Полевая грассманова алгебра $\mathcal{E}_F$ порождена образующими $\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\alpha(x), x \in \tilde{Z}^{\nu+1}, \alpha \in M\}$, где M—конечное множество индексов. Элементы $\mathcal{E}_F$ состоят из рядов вида

$$A = \sum C_Q \varphi_Q, \qquad (56)$$

где ψ_Q—моном от переменных $\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\alpha(x)$, расположенных в лексикографическом порядке в множестве $\tilde{Z}^{\nu+1} \times M$, причем все образующие $\bar{\psi}_\alpha(x)$ стоят правее образующих $\psi_\alpha(x)$. Предположим, что коэффициенты C_Q ряда (56) удовлетворяют условию

$$\sum_Q | C_Q | r^{|Q|} = \| A \|_r < \infty \qquad (57)$$

для некоторого фиксированного $r > 1$, а $| Q |$—число множителей в мономе ψ_Q. Относительно нормы (57) алгебра $\mathcal{E}_F$ является банаховой алгеброй, причем

$$\| A_1 A_2 \| \leq \| A_1 \|_r \| A_2 \|_r .$$

Все ранее введенные понятия и конструкции: квазисостояния $\langle \ \rangle$— инволюции Θ, Θ-инвариантность квазисостояния и его OS-положительность, определение условного математического ожидания, свойство обратимой марковости, конструкция физического гильбертова пространства $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ и трансфер-матрицы $\mathcal{J}_\tau$ в дискретном случае проводятся в полной аналогии с непрерывным случаем. Отметим лишь, что физическое гильбертово пространство строится обычным образом (см. выше) с помощью факторизации $\mathcal{E}_{1/2}/N_0$ алгебры $\mathcal{E}_{1/2}$, порожденной образующими

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\alpha(x), \alpha \in M, x \in Y_{1/2}\},$$

где $Y_{1/2} = \{x : x^0 = 1/2\}$ по пространству $N_0 \subset \mathcal{E}_{1/2}$ с нулевой нормой $\langle \Theta F_1 F_2 \rangle^{1/2}$, $F_1, F_2 \in \mathcal{E}_{1/2}$ (см. выше).

Обычно квазисостояния $\langle \ \rangle$, возникающие в различных примерах, являются гиббсовскими перестройками независимых или гауссовых квазисостояний (см. [26]). В следующей главе мы будем изучать трансфер-матрицу для гиббсовской перестройки независимого гауссова квазисостояния $\langle\ \rangle_0$ на $\mathcal{E}_F$, определеляемого условиями

$$\langle\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')\rangle_0 = \langle\bar\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(x')\rangle_0 = 0,$$

$$\langle\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(x')\rangle_0 = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{x,x'}. \qquad (58)$$

Эвклидово действие, порождающее эту перестройку, имеет вид

$$V_\Lambda = \lambda \sum_{Q:\mathrm{supp}Q\subset\Lambda} R_Q\psi_Q, \qquad (58^a)$$

где ψ_Q—четные мономы, а коэффициенты R_Q удовлетворяют условиям, аналогичным условиям а)–г), введенным выше. Здесь $\mathrm{supp}\,Q \subset \tilde Z^{\nu+1}$ — множество тех точек $x \in \tilde Z^{\nu+1}$, для которых образующая $\psi_\alpha(x)$ или $\bar\psi_\alpha(x)$ входит в ψ_Q при некотором $\alpha \in M$. Кроме того, для любого множества $\Lambda \subset \tilde Z^{\nu+1}$, симметричного относительно плоскости $x^{(0)} = 0$, мы предположим, что

1) действие V_Λ инвариантно относительно инволюции Θ

$$\Theta V_\Lambda = V_\Lambda, \qquad (59)$$

2) часть суммы из V_Λ

$$\sum_{\mathrm{supp}Q\subset Y_{-1/2}\bigcup Y_{1/2}} R_Q\psi_Q$$

по тем мономам ψ_Q, которые “зацепляют” и “прошлое” и “будущее”, может быть представлена в виде

$$\sum_k c_kF_k\Theta F_k, \qquad (60)$$

где элементы $F_k \in \mathcal{E}_{1/2}$ и являются однородными элементами $\mathcal{E}_{1/2}$ (т. е. каждый F_k либо четен, либо нечетен), а $c_k \geq 0$.

Лемма 13. *При достаточно малом β гиббсовская перестройка независимого гауссова квазисостояния $\langle\ \rangle$, порождаемая действием (58^a), для которого выполнены указанные выше условия, существует и является трансляционно-инвариантным и обратимо-марковским квазисостоянием $\langle\ \rangle_\lambda$ на алгебре $\mathcal{E}_F$. Это квазисостояние является Θ-инвариантным и*

OS-положительным, а также допускает кластерное разложение.

Кластерное разложение квазисостояния $\langle\ \rangle_\beta$ вытекает из общих построений книги [26]. Отсюда и из свойств коэффициентов R_Q следует марковское свойство этого квазисостояния. Инвариантность относительно Θ и OS-положительность вытекают из (59) и (60). Трансляционная инвариантность следует из трансляционной инвариантности коэффициентов R_Q.

Д. Общий случай. Часто возникают также поля на полной полевой алгебре, $\mathfrak{A} = \mathcal{E}_B \otimes \mathcal{E}_F$, включающие как фермионные, так и бозонные переменные.

В качестве такого примера рассмотрим дираковское фермионное поле на $\tilde Z^4$, взаимодействующее с калибровочным полем с группой калибровки $U(1) = \{e^{i\Theta}, 0 \leq \Theta < 2\pi\}$ (модель решетчатой эвклидовой квантовой электродинамики). Полевая алгебра в этой модели порождена грассмановой алгеброй $\mathcal{E}_F$ с образующими $\{\psi_\alpha(x), \bar\psi_\alpha(x),\ x \in \tilde Z^4, \alpha = 0,1,2,3\}$ и полевой алгеброй калибровочного поля $\{g_b\}$ (взятого в радиальной калибровке). Эвклидово действие поля имеет вид

$$V_\Lambda = m\sum_{x\in\Lambda,\alpha}\psi_\alpha(x)\bar\psi_\alpha(x) + \kappa\sum_{b=\langle x,y\rangle,\alpha,\beta}\psi_\alpha(x)\Gamma_{\alpha\beta}(b)g_b\bar\psi_\beta(y) +$$

$$+\lambda\sum_p \cos(g_p), \qquad (61)$$

где $\Lambda \subset \tilde Z^4$—конечное множество, m, κ, λ— параметры; суммирование во второй сумме в (61) происходит по всем (упорядоченным) парам соседних точек $(x, y), b = \langle x, y\rangle$—ребро с началом в x, а концом в y; $\{\Gamma_{\alpha,\beta}(b)\} = E + \varepsilon(b)\gamma_\mu$, где $\varepsilon(b) = +1$, если ребро направлено вдоль некоторого орта $e_\mu, \mu = 0,1,2,3$ и $\varepsilon(b) = -1$, если оно направлено противоположно, γ_μ—четыре эвклидовы матрицы Дирака (см. (47^a)). Сумма $\sum_p \cos(g(p))$ совпадает с эвклидовым (вильсоновским) действием для калибровочного поля Янга—Миллса с группой калибровки $U(1)$ (см. (54)). Для каждого конечного $\Lambda \subset \tilde Z^4$ мы можем определить квазисостояние

$$\langle F\rangle_\Lambda = \frac{1}{Z_\Lambda}\int Fe^{-V_\Lambda}\prod_{x,\alpha}d\psi_\alpha(x)\prod_{\alpha,x}d\bar\psi_\alpha(x)\prod_b dg_b \qquad (62)$$

на полевой алгебре $\mathfrak{A}_\Lambda$, порожденной образующими $\{\psi_\alpha(x), \bar\psi_\alpha(x), x \in \Lambda, \alpha = 0,1,2,3, g_b, b = \langle x,y\rangle \subset \Lambda\}$. В (62) Z_Λ—нормирующий множитель, интеграл $\int \ldots \prod_{\alpha,x} d\psi_\alpha(x) \prod_{\alpha,x} d\bar\psi_\alpha(x)$—интеграл Березина, а $\prod_b dg_b$—произведение мер Хаара на группе $U(1)$ (произведение $\prod_b$ в силу условия $g_b = g^{-1}(b)$ и радиальной калибровки (см. (55) берется по множеству неориентированных "горизонтальных" ребер в Λ).

Квазисостояние $\langle\ \rangle_\Lambda$ (для Λ—симметричного относительно плоскости $x_0 = 0$) является обратимо-марковским и OS-положительным при условии, что матрица ε, задающая инволюцию Θ, совпадает с $\gamma_0 : \varepsilon = \gamma_0$ и $\kappa > 0$. При достаточно малых κ и β существует термодинамический предел $\langle\ \rangle = \lim_{\Lambda\uparrow\tilde Z^4} \langle\ \rangle_\Lambda$— обратимо-марковское OS-положительное и трансляционно-инвариантное квазисостояние на полной полевой алгебре.

Это поле инвариантно относительно калибровочных преобразований (гомоморфизмов) алгебры $\mathfrak{A}$, действующих на образующие по формуле

$$\gamma g_b = \gamma^{-1}(x) g_b \gamma(y),\ \ b = \langle x,y\rangle,$$

$$\gamma\psi_\alpha(x) = \gamma(x)\psi_\alpha(x),\ \ \gamma\psi_\alpha(x) = \gamma^{-1}(x)\bar\psi_\alpha(x),$$

где $\gamma = \{\gamma(x)\}$—функция на $\tilde Z^4$ со значениями в группе $U(1)$.

§ 6. Эвклидовы поля для температурных состояний и модулярный оператор

Изучение температурных состояний для некоторой "бесконечной" динамики α_t на C^*-алгебре также может быть проведено с помощью эвклидова марковского подхода. Другой альтернативный ("алгебраический") подход связан с глубокой теорией Томиты—Такесаки и понятием модулярного оператора. Мы вкратце изложим оба подхода. Мы приводим эти сведения для полноты изложения и в дальнейшем они в этой книге не используются.

1. Эвклидовы "температурные" поля.

Случай конечной системы. Идея, лежащая в основе приводимых ниже построений, основана на все той же формуле Фейнмана—Каца, уже неоднократно нами обсуждавшейся: ядро оператора $\exp\{-\beta H\}(x,y)$, $x, y \in S$, где $H = H_0 + V$, H_0—инфинитезимальный оператор марковского процесса $\{\xi_t\}$ со значениями в S, а V— функция на S, может быть записано в виде среднего по траекториям этого процесса на отрезке времени $[0,\beta]$

$$\exp\{-\beta H\}(x,y) = \left\langle \exp\left\{ -\int\limits_0^\beta V(\xi_\tau)d\tau \right\} \right\rangle_{\xi_0=x,\xi_\beta=y} \tag{1}$$

(подробнее см. в § 5.0).

Рассмотрим теперь температурное состояние, задаваемое на алгебре $\mathfrak{B}(L_2(S,\nu_0))$ операторов, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(S,\nu_0)$, где ν_0—стационарная мера процесса $\{\xi_t\}$, формулой

$$\langle A\rangle_\beta = \frac{1}{Z}\mathrm{Sp}(Ae^{-\beta H}) \tag{2}$$

$(Z = \mathrm{Sp}\, e^{-\beta H})$. В случае, когда оператор $A = \hat F$ является умножением на некоторую функцию F, определенную на S, числитель в (2) равен

$$\mathrm{Sp}\hat F e^{-\beta H} = \int\limits_S d\nu_0(x) \left\langle \exp\left\{ -\int\limits_0^\beta V(\xi_\tau)d\tau \right\} \right\rangle_{\xi_0=\xi_\beta=x} F(x) =$$

$$= \left\langle F(\xi(\beta)) \exp\left\{ -\int\limits_0^\beta V(\xi_\tau)d\tau \right\} \right\rangle_{\xi_0=\xi_\beta}, \tag{3}$$

а знаменатель

$$Z = \left\langle \exp\left\{ -\int\limits_0^\beta V(\xi_\tau)d\tau \right\} \right\rangle_{\xi_0=\xi_\beta}, \tag{4}$$

где в обеих формулах (3) и (4) выражение $\langle\ \rangle_{\xi_0=\xi_\beta}$ означает усреднение (ненормированное) по множеству "периодических" траекторий процесса $\{\xi_t\}$, т. е. траекторий, принимающих на концах отрезка $[0,\beta]$ одинаковые значения.

С помощью исходного марковского процесса $\{\xi_t\}$ можно определить новый марковский стационарный “периодический” процесс $\{\eta_t^0, t \in T_\beta\}$, т. е. процесс на окружности $T_\beta = [0, \beta]$. Так что формула (2) примет вид

$$\langle \hat{F} \rangle_\beta = \frac{\langle F(\eta_\tau^0) \exp\{-\int\limits_0^\beta V(\eta_\tau^0) d\tau\} \rangle_{\mu_0}}{\langle \exp\{-\int\limits_0^\beta V(\eta_\tau^0) d\tau\} \rangle_{\mu_0}}, \tag{5}$$

где среднее $\langle \ \rangle_{\mu_0}$ означает усреднение по распределению μ_0 в пространстве траекторий процесса $\{\eta_t^0, t \in T_\beta\}$. Ниже мы покажем, как строится периодический процесс $\{\eta_t^0\}$. Отметим лишь, что свойство марковости этого процесса означает, что для любых двух точек $t_1, t_2 \in T_\beta$ и любых значений s_1 и s_2 процесса η_t^0 в этих точках значения процесса η_t на двух разных дугах, на которые точки t_1 и t_2 разбивают окружность T_β, независимы относительно условного распределения, порождаемого условиями

$$\eta_{t_1} = s_1, \ \eta_{t_2} = s_2.$$

Стационарность процесса $\{\eta_t^0\}$ означает, что распределение μ_0 в пространстве его траекторий не меняется при любом повороте окружности T_β.

Если теперь сделать последний шаг: ввести гиббсовскую перестройку процесса $\{\eta_t^0\}$, т. е. задать новое распределение μ в пространстве его траекторий по формуле

$$\frac{d\mu}{d\mu_0} = \frac{\exp\{-\int\limits_0^\beta V(\eta_\tau) d\tau\}}{\langle \exp\{-\int\limits_0^\beta V(\eta_\tau^0) d\tau\} \rangle_{\mu_0}},$$

то формула (5) перепишется в виде

$$\langle \hat{F} \rangle_\beta = \langle F(\eta_{\tau=\beta}) \rangle_\mu, \tag{6}$$

где $\langle \ \rangle_\mu$ означает усреднение по мере μ. Легко показать, что процесс $\{\eta_t, t \in T_\beta\}$ с распределением вероятностей μ также является марковским и стационарным. Введенное представление (6) температурного состояния $\langle \ \rangle_\beta$ для случая конечной системы (заключенной, скажем, в конечной области $\Lambda \subset R^\nu$ и описываемой явно определенным гамильтонианом $H = H_\Lambda$) при переходе к бесконечной системе (например, при термодинамическом предельном переходе $\Lambda \uparrow R^\nu$) может служить определением температурного состояния и его гамильтониана H ровно так же, как это объяснялось в случае основного состояния (см. также ниже). Мы опишем далее соответствующие бесконечные эвклидовы поля на множестве $T_\beta \times R^\nu$, но сначала объясним, как строится упомянутый выше периодический марковский процесс $\{\eta_t^0\}$.

Для наглядности, мы рассмотрим случай, когда S—конечное множество. Конечномерные распределения процесса $\{\eta_t^0, t \in T^\beta\}$ определяются следующим образом. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \beta$. Тогда

$$\Pr(\eta_{t_0} = s_0, \ldots, \eta_{t_n} = s_n) =$$
$$= Q^{-1} \nu_0(s_0) P_{t_1}(s_0, s_1) P_{t_2 - t_1}(s_2, s_1) \ldots P_{\beta - t_n}(s_n, s_0),$$

где $Q = \sum\limits_{s \in S} \nu_0(s) P_\beta(s, s)$, а $P_t(s, s')$— переходные вероятности стационарного процесса $\{\xi_t, t \in R^1\}$. Заметим, что распределение значений $\{\eta_t^0, t \in T_\beta\}$ в любой точке $t \in T$ равно

$$\Pr(\eta_t = s) = Q^{-1} \nu_0(s) P_\beta(s, s).$$

Бесконечные эвклидовы температурные поля. Мы введем теперь этот общий объект—поле на пространстве $T_\beta \times R^\nu$ по аналогии с тем, как в § 5 мы определяли эвклидовы поля для основных состояний. Мы ограничимся здесь случаем бозонного поля.

Как и ранее, будем рассматривать (обобщенное) случайное поле ξ_φ на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ), где $\varphi = \varphi(t, x) \in S(T_\beta \times R^\nu)$, где $(T_\beta \times R^\nu)$— пространство бесконечно-дифференцируемых функций, достаточно быстроубывающих при $| x | \to \infty$. Среднее по распределению μ обозначим через $\langle \ \rangle_\mu$. Полевая алгебра $\mathcal{E}$ определяется, как и выше:

$$\mathcal{E} = \bigcap_{\infty > p \geq 1} L_p(\Omega, \Sigma, \mu).$$

Так же, как и раньше, определяются функции Швингера $S_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \langle \xi_{\varphi_1} \ldots \xi_{\varphi_n} \rangle_\mu$ и предполагается их непрерывность по переменным $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Далее предполагается, что поле трансляционно-инвариантно, т. е. среднее $\langle \ \rangle_\mu$ инвариантно относительно гомоморфизмов $U(s,y), (s,y) \in T_\beta \times R^\nu$ алгебры $\mathcal{E}$, порожденных сдвигами образующих

$$U(s,y)\xi_\varphi = \xi_{\varphi(\cdot-(s,y))},$$

Эта группа гомоморфизмов $\mathcal{E}$ порождает в $L_2(\Omega,\Sigma,\mu)$ группу унитарных операторов, за которыми мы сохраним прежнее обозначение $U(s,y)$. При этом гомоморфизмы $U(s,0) = U(s)$ мы будем называть *временными*, а $U(0,y) = U(y)$—*пространственными* сдвигами.

Инволюция Θ, порожденная отражением времени относительно нулевого слоя $\{0\} \times R^\nu$ в алгебре $\mathcal{E}$, и Θ-инвариантность среднего $\langle\ \rangle_\mu$ определяются в точности так же, как и в § 5. Аналогичным образом определяется OS-положительность: эрмитова форма

$$(F,F) = \langle F\Theta F\rangle \geq 0 \qquad (7)$$

для всех элементов $F \in \mathcal{E}_+ \subset \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}_+$— подалгебра, порожденная образующими ξ_φ такими, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,\beta/2] \times R^\nu$. С помощью формы (7) строится физическое гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ так же, как и в § 5.

В силу инвариантности среднего отосительно пространственных сдвигов $U(y)$, а также в силу соотношения $U(y)\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+$, пространственные сдвиги естественно порождают в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ группу унитарных операторов, также обозначаемых $U(y)$.

Временные сдвиги $U(s), s \in T_\beta$, однако, не переводят алгебру $\mathcal{E}_+$ в себя: $U(s)\mathcal{E}_+ \not\subset \mathcal{E}_+$, и поэтому при построении гамильтониана H поля следует поступить несколько иначе, чем в § 5.

Для любого $t \in [0,\beta/2]$ рассмотрим подалгебру $\mathcal{E}_t \subset \mathcal{E}_+$, порожденную образующими ξ_φ, для которых $\operatorname{supp}\varphi \subset [0,\frac{\beta}{2}-t] \times R^\nu$.

Лемма 1. *Пусть элемент $F \in \mathcal{E}_t$ такой, что*

$$\| F \|^2_{\text{физ}} \equiv \langle F\Theta F\rangle = 0.$$

Тогда для любого $0 \leq s \leq t$

$$\| U(s)F \|_{\text{физ}} = 0. \qquad (8)$$

Доказательство. Пусть сначала $0 < s \leq t/2$. Тогда

$$\langle U(s)F\Theta U(s)F\rangle = \langle FU(-s)\Theta U(s)F\rangle =$$

$$= \langle F\Theta U(2s)F\rangle \leq \| F \|_{\text{физ}} \| U(2s)F \|_{\text{физ}} = 0.$$

Здесь мы воспользовались трансляционной инвариантностью среднего $\langle\ \rangle_\mu$ относительно гомоморфизмов $U(s)$, перестановочным соотношением

$$U(-s)\Theta = \Theta U(s),$$

включением $U(2s)F \in \mathcal{E}_+$ и неравенством Коши—Буняковского для неотрицательной формы (7), рассматриваемой на алгебре $\mathcal{E}_+$. Пусть, далее, $t/2 < s < 3/4t$. Тогда $U(s)F = U(s_1)U(t/2)F$, где $s_1 = s - t/2$. Элемент $F_1 = U(t/2)F \in \mathcal{E}_{t/2}$, и по доказанному его норма $\| F_1 \|_{\text{физ}} = 0$. Поскольку $s_1 < t/4$, применение предыдущего рассуждения к F_1 приводит к (8). Аналогично рассматривается случай $\frac{3}{4}t < s < \frac{7}{8}t$ и т. д. Таким образом, лемма доказана для всех $s < t$. В случае $s = t$ следует воспользоваться непрерывностью формы $\langle U(s)F\Theta U(s)F\rangle$ по переменной s, вытекающей из непрерывности функций Швингера и оценки $| \langle F\Theta F\rangle | < \| F \|^2_{L_2(\Omega,\Sigma,\mu)}$. Лемма доказана.

Для каждого $t \in [0,\beta/2]$ определим подпространство $D_t \subset \mathcal{H}_{\text{физ}}$ (незамкнутое) как образ $\mathcal{E}_t$ при факторизации $\mathcal{E}_+/I_0$, с помощью которой строится $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ (см. § 5). В силу доказанной леммы на подпространстве $D_t \subset \mathcal{H}_{\text{физ}}$ определен оператор

$$P_t : D_t \to \mathcal{H}_{\text{физ}}, \quad P_t[A] = [U(t)A],$$

где $[A] \in \mathcal{H}_{\text{физ}}$ означает образ элемента $A \in \mathcal{E}_+$ при факторизации $\mathcal{E}_+/I_0$. Семейство операторов $\{P_t, 0 < t < \beta/2\}$ образует объект, называемый *локальной симметрической полугруппой*.

Определение. Семейство операторов $\{P_t, D_t, 0 \leq t < T\}$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, каждый из которых определен на своей области определения D_t (вообще говоря, незамкнутой), называется *локальной симметрической полугруппой*, если выполнены следующие условия:

i) Подпространства D_t монотонно убывают (не возрастают) и наибольшее подпространство D_0 всюду плотно в $\mathcal{H}$.

ii) Семейство операторов $\{P_t\}$ обладает полугрупповым свойством в следующем смысле:

а) $P_0 = E$,

б) $P(s)D_t \subset D_{t-s}$ при $0 \leq s \leq t \leq T$;

в) $P(t)P(s)f = P(t+s)f$ для всех $f \in D_{t+s}$, где $0 < s, t \leq T$, $0 \leq t+s \leq T$.

iii) Каждый оператор P_t симметричен на D_t

$$(f, P_t g) = (P_t f, g), \quad f, g \in D_t.$$

iiii) Семейство $\{P_t\}$ слабо непрерывно: квадратичная форма $(f, P_t f)$, где $f \in D_s$, $s > t$, является непрерывной функцией от $t \subset [0, s]$.

Нетрудно проверить, что построенное выше семейство операторов в пространстве $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ удовлетворяет всем этим условиям. Основной результат теории локальных симметрических полугрупп заключен в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $\{P_t, D_t, 0 < t < T\}$—локальная симметрическая полугруппа в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда существует единственный самосопряженный оператор H в $\mathcal{H}$ с областью определения D_H такой, что $D_t \subset D_{\exp\{-tH\}}$ и P_t совпадает с ограничением оператора $\exp\{-tH\}$ на D_t при $0 \le t \le T$. Более того, для любого $0 < \tau \le T$ подпространство*

$$\hat{D}_\tau = \bigcup_{0<t\le\tau} \bigcup_{0<s<t} P_s D_t$$

содержится в D_H и является областью существенной самосопряженности (core) *для H.*

Доказательство этой теоремы см. в [53]. Вводимый таким образом оператор H для локальной симметрической полугруппы $\{P_t\}$, построенной выше, и служит гамильтонианом поля на $T_\beta \times R^\nu$.

Замечание. В случае, когда поле ξ_φ обладает марковским свойством (в том смысле, как это объяснялось выше), оно OS-положительно и физическое гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ может быть отождествлено с $L_2(\Omega, \Sigma_{\{0\}\bigcup\{\beta/2\}}, \mu)$, где $\Sigma_{\{0\}\bigcup\{\beta/2\}} \subset \Sigma$—$\sigma$-подалгебра событий, зависящих от поведения поля в моменты времени $t = 0$ и $t = \beta/2$ (т. е. на множестве $\{0\} \times R^\nu \bigcup \{\beta/2\} \times R^\nu$). Это утверждение проверяется в точности так же, как и для случая марковских полей на $R^1 \times R^\nu$.

2. Модулярная теория Томиты—Такесаки. Сначала мы изложим некотрую абстрактную схему, относящуюся к алгебрам фон Неймана, а затем свяжем ее с гайзенберговой динамикой

$$C \to \exp\{itH_{\text{ГНС}}\}C\exp\{-itH_{\text{ГНС}}\}, \quad C \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\text{ГНС}}),$$

действующей на операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$ и построенной с помощью C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и состояния $\langle\ \rangle$ на $\mathfrak{A}$, являющегося β-КМШ состоянием относительно динамики $\alpha_t : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ в алгебре $\mathfrak{A}$.

I. Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$—алгебра фон Неймана операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$—коммутант $\mathfrak{M}$, т. е. алгебра операторов, коммутирующих со всеми операторами из $\mathfrak{M}$. Предположим, что в пространстве $\mathcal{H}$ имеется вектор $\Omega \in \mathcal{H}$, являющийся циклическим и отделяющим вектором для $\mathfrak{M}$. Это означает, что множество $\{M\Omega, M \in \mathfrak{M}\}$ всюду плотно в $\mathcal{H}$ и из $M\Omega = 0, M \in \mathfrak{M}$, следует, что $M = 0$. Оказывается, что при этом вектор Ω будет циклическим и отделяющим для алгебры $\mathfrak{M}'$ (см. [7]). Определим на плотных множествах $\{M\Omega, M \in \mathfrak{M}\}$ и $\{M'\Omega, M' \in \mathfrak{M}'\}$ антилинейные операторы

$$S(M\Omega) = M^*\Omega, \quad M \in \mathfrak{M},$$

$$F(M'\Omega) = (M')^*\Omega, \quad M' \in \mathfrak{M}'$$

(в силу того, что Ω—отделяющий вектор для обеих алгебр $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, эти определения корректны).

В теории Томиты—Такесаки доказывается, что оба эти оператора замыкаемы и их замыкания $\overline{S}$ и $\overline{F}$ допускают однозначно определенные полярные разложения

$$\overline{S} = J\Delta^{1/2} \tag{9}$$

(и аналогичное разложение для $\overline{F}$). В формуле (9) Δ—положительный самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, называемый *модулярным оператором*, а J—антиунитарный оператор (т. е. антилинейный обратимый оператор такой, что $(\mathcal{J}_\xi, \mathcal{J}_\eta) = (\xi, \eta)$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, который называется *модулярной инволюцией*. При этом выполнены соотношения

$$\Delta = FS, \quad \Delta^{-1} = SF, \quad J = J^{-1}$$

и

$$\Delta^{-1/2} = J\Delta^{1/2}J.$$

Основной результат теории Томиты—Такесаки состоит в том, что

$$J\mathfrak{M}\,J = \mathfrak{M}'$$

и унитарные автоморфизмы $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$

$$\bar{\alpha}_t(C) = \Delta^{-it} C \Delta^{it} \qquad (10)$$

переводят алгебру $\mathfrak{M}$ в себя.

При этом для всех $A, B \in \mathfrak{M}$ таких, что $A\Omega, B\Omega \in D_\Delta$, выполнено соотношение

$$(\Delta A\Omega, B\Omega) = (JA^*\Omega, JB^*\Omega) = (B^*\Omega, A^*\Omega). \qquad (11)$$

Из этого соотношения следует, что состояние на $\mathfrak{M}$

$$\langle A \rangle = (A\Omega, \Omega), A \in \mathfrak{M} \qquad (12)$$

является β—КМШ-состоянием относительно динамики (10) с $\beta = 1$.

Отметим, что всякий оператор, для которого выполняется соотношение (11) при всех $A \in \mathfrak{M}$ и $B \in \mathfrak{M}$ совпадает с Δ.

II. Пусть теперь $\mathfrak{A}$—C^*-алгебра с единицей и $\langle\ \rangle$—точное КМШ-состояние на $\mathfrak{A}$ относительно динамики α_t (состояние $\langle\ \rangle$ называется *точным*, если $\langle A \rangle > 0$ для любого положительного элемента $A \in \mathfrak{A}$). Очевидно, что в этом случае пространство $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$ является замыканием $\mathfrak{A}$ относительно скалярного произведения

$$(A, B) = \langle B^*A \rangle \qquad (13)$$

(см. § 2). Напомним, что при ГНС гомоморфизме $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\text{ГНС}})$, действующем по формуле

$$\pi(A)B = AB \in \mathcal{H}_{\text{ГНС}},\ \ A, B \in \mathfrak{A},$$

динамика α_t в $\mathfrak{A}$ переходит в динамику

$$\pi(\alpha_t A) = \exp\{itH\}\pi(A)\exp\{-itH\} \equiv \tilde{\alpha}_t(\pi(A)) \qquad (13^a)$$

в $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\text{ГНС}})$. Здесь H—самосопряженный оператор, являющийся порождающим оператором для унитарной группы в $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$, действующей на элементы $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_{\text{ГНС}}$ по формуле

$$U_t A = \alpha_t(A)$$

(см. § 2,I). При этом вектор $\Omega = \mathbf{1}$ является циклическим и отделяющим вектором для алгебры $\pi(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\text{ГНС}})$ и удовлетворяет условию

$$\exp\{itH\}\Omega = \Omega.$$

Равенство (13) можно переписать в виде

$$(\pi(A)\Omega, \pi(B)\Omega) = \langle B^*A \rangle.$$

Чтобы воспользоваться условием КМШ, запишем, что для любых A_1 и $A_2 \in \mathfrak{A}$

$$F_{A_1,A_2}(t) = \langle A_1\alpha_t(A_2) \rangle = (\pi(\alpha_t(A_2)\Omega, \pi(A_1^*)\Omega) =$$

$$= (e^{itH}\pi(A_2)\Omega, \pi(A_1^*)\Omega)$$

и, следовательно, из условия , КМШ (в предположении, что $\pi(A_2)\Omega \in D_{(\exp\{-\beta H\})}$—области определения оператора $\exp\{-\beta H\}$) получаем, что

$$(e^{itH}e^{\beta H}\pi(A_2)\Omega, \pi(A_1^*)\Omega) = (\pi(A_1)\Omega, e^{itH}\pi(A_2^*)\Omega),$$

и при $t = 0$ находим,что

$$(e^{\beta H}\pi(A_2)\Omega, \pi(A_2^*)\Omega) = (\pi(A_1)\Omega, \pi(A_2^*)\Omega). \qquad (14)$$

Обозначим теперь $\mathfrak{M}$ минимальную алгебру фон Неймана, содержащую алгебру $\pi(\mathfrak{A})$. Соотношение (14) может быть переписано для всех $C, D \in \mathfrak{M}$ $(C, D \in D_{\exp\{-\beta H\}})$:

$$(e^{\beta H}C\Omega, D\Omega) = (D^*\Omega, C^*\Omega)$$

и, таким образом, $\exp\{-\beta H\} = \Delta$, где Δ—модулярный оператор для алгебры $\mathfrak{M}$ (с отделяющим циклическим вектором Ω). Следовательно, группа автоморфизмов (13^a) совпадет с группой

$$\Delta^{-it/\beta} B \Delta^{it/\beta}, \qquad (15)$$

которая лишь заменой параметра отличается от модулярной группы (10).

Этот вывод имеет следующее важное следствие, относящееся к практическому построению оператора $H_{\text{ГНС}}$ (и динамики) для температурного состояния.

Пусть для каждой конечной системы, описываемой гамильтонианом H_Λ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\Lambda$, определена гайзенбергова динамика

$$\alpha_\Lambda(t)A = \exp\{itH_\Lambda\}A\exp\{-itH_\Lambda\},\ \ A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\Lambda),$$

и задано инвариантное β-КМШ состояние (гиббсовское)

$$\langle A\rangle_\Lambda = \frac{\mathrm{Sp}\,\exp\{-\beta H_\Lambda\}A}{\mathrm{Sp}\,\exp\{-\beta H_\Lambda\}}.$$

Переходя к бесконечной системе (термодинамический предельный переход по индексу Λ), мы должны построить как термодинамический предел

$$\langle A\rangle = \lim_{\Lambda\uparrow}\langle A\rangle_\Lambda$$

состояний, в виде некоторого состояния на подходящей алгебре $\mathfrak{A}$, так и предельную динамику

$$\alpha_t(A) = \lim_{\Lambda\uparrow}\alpha_t^\Lambda(A)$$

на этой алгебре (или ее расширении) так, чтобы при этом выполнялось КМШ-условие.

Теория Томиты—Такесаки в предположении, что первый предел существует и порождает точное состояние на $\mathfrak{A}$, избавляет нас от необходимости устанавливать существование предельной динамики: с помощью предельного состояния строится пространство $\mathcal{H}_{\text{ГНС}}$, гомоморфизм $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\text{ГНС}})$, минимальная алгебра фон Неймана $\mathfrak{M}$, содержащая $\pi(\mathfrak{A})$ с циклическим и отделяющим вектором $\Omega = \mathbf{1} \in \mathfrak{A}$ и модулярный оператор Δ. Тогда группа (15) задает нужную нам динамику, а ее гамильтониан

$$H = \frac{1}{\beta}\ln\Delta.$$

В случае эвклидовой теории поля на $T_\beta \times R^\nu$ соответствующая ей модулярная теория описана в [53]. В качестве алгебры фон Неймана $\mathfrak{M}$ выбирается алгебра, порожденная всеми операторами вида $\exp\{itH\}\hat{f}\exp\{-itH\}$, где $\hat{f}$—оператор, действующей в $\mathcal{H}_{\text{физ}} = L_2(\Omega, \Sigma_{\{0\}\bigcup\{\beta/2\}}, \mu)$ (см. выше), по формуле

$$\hat{f}F = fF,$$

где $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma_{\{0\}}, \mu)$—ограниченная в существенном функция, зависящая от конфигураций на нулевом слое $\{0\} \times R^\nu$. При этом модулярная инволюция совпадает с антилинейной инволюцией отражения в точке $\beta/2$ (и переводит подпространство $L_2(\Omega, \Sigma_{\{0\}}, \mu) \subset L_2(\Omega, \Sigma_{\{0\}\bigcup\{\beta/2\}}, \mu)$ в подпространство $L_2(\Omega, \Sigma_{\{\beta/2\}}, \mu)$), а модулярный оператор Δ оказывается равным $\exp\{-\beta H\}$. Подробнее см. в [53].

ГЛАВА 3

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТРАНСФЕР-МАТРИЦЫ ЭВКЛИДОВА ПОЛЯ

В предыдущей главе мы видели, что изучение гамильтониана $H_{\text{ГНС}}$ бесконечной квантовой системы в ее основном состоянии во многих случаях может быть сведено к изучению трансфер-матрицы $\mathcal{J}_t$ (полугруппе стохастических операторов) некоторого подходящего эвклидового (марковского) поля. Эта задача, как мы видели, имеет также самостоятельный интерес при изучении квантовых эвклидовых полей.

В этой главе мы рассматриваем случай эвклидовых полей, получающихся в виде гиббсовских перестроек (см. § 5.2) некоторых простых "свободных" полей (например, независимых), причем взаимодействие, порождающее эти перестройки, мало, т. е. изучаемые здесь эвклидовы поля являются малыми возмущениями этих "свободных" полей. Это позволяет исследовать их с помощью кластерных разложений.

Для указанного случая здесь развивается общий метод построения и исследования "старших ветвей" спектра трансфер-матрицы $\mathcal{J}_t$, т. е. наибольших по абсолютной величине значений спектра $\mathcal{J}_t$, относящихся к некоторым ее специальным инвариантным подпространствам (в силу равенства $\mathcal{J}_t = \exp\{-tH\}$, где H—гамильтониан поля, "старшие ветви" спектра $\mathcal{J}_t$ соответствуют "нижним ветвям" спектра H).

При этом, как уже говорилось во вводной главе, конструируемые нами старшие инвариантные подпространства $\mathcal{J}_t$ в некотором естественном смысле описывают одночастичные, двухчастичные и т. д. n-частичные состояния поля, т. е. в рассматриваемом случае действительно подтверждаются обычные физические представления о корпускулярной картине для элементарных возбуждений основного состояния.

В нашем изложении мы делаем основной упор на обычные случайные поля, определенные на дискретном пространстве—времени. Затем разбирается случай фермионных полей (также на решетке $Z^{\nu+1}$) и, наконец, вкратце случай полей с дискретным пространством и непрерывным временем.

Итак, мы начинаем со спектрального анализа трансфер-матриц для гиббсовских перестроек независимого поля на пространстве $X = E \times Z^1$ (E—“пространство”, счетное множество (граф), Z^1—“время”). Напомним сначала основные предположения относительно таких полей, введенные в § 5.

Пусть $\{\xi_x, x = (y,t) \in E \times Z^1\}$—независимое случайное поле, помеченное точками $x \in E \times Z^1$ и принимающее значения в пространстве спинов S, на котором задана некоторая вероятностная мера ν. Мы предположим, что распределение поля $\xi = \{\xi_x, x \in E \times Z^1\}$ совпадает с мерой $\mu_0 = \prod\limits_{x \in E \times Z^1} \nu_x$, являющейся бесконечным произведением одинаковых экземпляров меры ν и определенной в пространстве $\Omega = S^{E \times Z^\nu}$ всех реализаций поля. Пусть, далее, $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$—некоторый конечный набор ограниченных функций на S, которые без ущерба для общности можно считать ортонормированными относительно меры ν и ортогональными константе. Мы ограничимся для простоты случаем, когда действие V_Λ, задающее гиббсовскую перестройку μ меры μ_0, имеет вид

$$V_\Lambda = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ x,y,\rho(x,y)=1}} R^{x,y}_{\alpha,\beta} \varphi_\alpha(\xi_x) \overline{\varphi}_\beta(\xi_y), \quad \Lambda \subset Z, \tag{0}$$

где $\Lambda \subset Z^\nu$—конечное множество, а коэффициенты $R^{x,y}_{\alpha,\beta}$ таковы, что выполнены все условия а)–г) из п. 5 § 5 гл. 2. Случай взаимодействия общего вида (50.5.11) мы обсудим отдельно. Итак, в этой главе мы будем заниматься изучением трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ гиббсовского поля с взаимодействием вида (0), хотя развитые здесь приемы переносятся на случай взаимодействия более общего вида.

§ 1. Кластерное разложение трансфер-матрицы

Изучение спектральных свойств трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ случайного поля основано на некотором специальном разложении оператора $\mathcal{J}$, называемом *кластерным разложением.*

Первый шаг в построении такого разложения состоит в конструировании базиса в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$, имеющего специальный мультипликативный вид. Матричные элементы оператора $\mathcal{J}$ в этом базисе, как окажется, и допускают кластерное разложение.

1. Мультипликативный базис. Пусть $\{\varphi_\gamma, \gamma \in \mathcal{N}\}$— некоторый ортонормированный базис в пространстве $L_2(S,\nu)$, состоящий из полиномов от полевых переменных φ_α и включающей φ_α и **1**. Мы предположим, что все φ_γ ограничены в совокупности.

Пусть при этом помечающее множество $\mathcal{N}$ является связным графом с выделенной вершиной θ, причем $\varphi_\theta = \mathbf{1}$, а степени полиномов φ_γ и $\varphi_{\gamma'}$ в двух соседних вершинах графа $\mathcal{N}$ отличаются не более чем на единицу. Расстояние вершины γ от начальной вершины θ (т. е. длину кратчайшего пути вдоль $\mathcal{N}$ от θ до γ) назовем *рангом* $N(\gamma)$ вершины γ.

Предположим, что произведение $\varphi_{\gamma_1}\varphi_{\gamma_2}$ двух полиномов допускает разложение

$$\varphi_{\gamma_1}\varphi_{\gamma_2} = \sum_{\gamma:|N(\gamma_1)-N(\gamma_2)| \le N(\gamma) \le N(\gamma_1)+N(\gamma_2)} C^{\gamma}_{\gamma_1,\gamma_2} \varphi_\gamma, \tag{1}$$

причем все константы $C^{\gamma}_{\gamma_1,\gamma_2}$ ограничены в совокупности. Из (1) следует, что число полиномов, ранг $N(\gamma)$ которых не превосходит n ограничено величиной c^n, где c—некоторая абсолютная константа.

Обозначим $Y_t = E \times \{t\}$ t-й временной слой. Гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ как уже говорилось в п. 5, § 5 гл. 2, можно отождествить с $L_2(S^{Y_0}, \mu\ |_{Y_0})$, где $\mu\ |_{Y_0}$—сужение меры μ на пространство S^{Y^0}. Очевидно, что функции

$$\varphi_\Gamma(\xi) = \prod_{x \in Y_0} \varphi^{(x)}_{\gamma(x)}(\xi), \quad \Gamma = \{\gamma(x), x \in Y_0\}, \quad \xi \in S^{Y_0}, \tag{2}$$

образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(S^{Y_0}, \mu_0\ |_{Y_0})$, где μ_0—свободная (независимая) мера. Здесь $\varphi^{(x)}_{\gamma(x)}(\xi) = \varphi_{\gamma(x)}(\xi_x)$, а $\Gamma = \{\gamma(x), x \in Y_0\}$—мультииндекс, т. е. финитная функция на Y_0 со значениями в $\mathcal{N}$ (финитность Γ означает, что лишь конечное число $\gamma(x)$ отлично от θ). Ниже будет построен ортонормированный базис в истинном пространстве $L_2(S^{Y_0}, \mu\ |_{Y_0})$, имеющий вид, аналогичный (2),

$$\Psi_\Gamma = \prod_{x \in Y_0} \psi^{(x)}_{\gamma(x)}, \tag{3}$$

где $\Gamma = \{\gamma(x), x \in Y_0\}$—мультииндекс, а $\{\psi_\gamma^{(x)}, x \in Y_0\}$ — некоторое семейство ограниченных квазилокальных функций, определенных на S^{Y_0}, которые мы сейчас опишем.

Введем на слое $Y_0(= E)$ некоторое упорядочение и для любой точки $x \in Y_0$ обозначим $V_x \subset Y_0$ ее “прошлое”

$$V_x = \{y \in Y_0 : y < x\}. \tag{4}$$

Для каждой фиксированной конфигурации $\bar\xi^{(x)} = \{\bar\xi_y, y \in V_x\}$, $\xi_y \in S$, заданной на множестве V_x, определим функции от значений поля ξ_x в точке x

$$\tilde\varphi_\gamma^{(x)}(\xi_x; \bar\xi^{(x)}) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \gamma = \theta, \\ \varphi_\gamma(\xi_x) - \langle \varphi_\gamma(\xi_x) \mid \bar\xi^{(x)} \rangle, & \gamma \neq \theta, \end{cases} \tag{5}$$

где $\langle \cdot \mid \bar\xi^{(x)} \rangle$—среднее по условному распределению $\mu(\cdot / \xi \mid_{V_x} = \bar\xi^{(x)})$ поля при условии, что значения поля на V_x фиксированы и совпадают с $\bar\xi^{(x)}$. Введем далее условную матрицу Грамма функций $\{\tilde\varphi_\gamma^{(x)}, \gamma \in \mathcal{N}\}$:

$$G_x = G_x(\bar\xi^{(x)}) = \{\langle \tilde\varphi_{\gamma_1}^{(x)} \overline{\tilde\varphi_{\gamma_2}^{(x)}} \mid \xi^{(x)} \rangle_{\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{N}}\} \tag{6}$$

и ортогонализуем $\{\tilde\varphi_\gamma^{(x)}\}$ (при фиксированной конфигурации $\bar\xi^{(x)}$) по условному распределению $\mu(\cdot / \xi \mid_{V_x} = \bar\xi^{(x)})$. А именно, положим

$$\tilde\psi_\gamma^{(x)}(\xi_x; \bar\xi^{(x)}) = \sum_{\gamma'} m_{\gamma,\gamma'}^{(x)}(\bar\xi^{(x)}) \tilde\varphi_{\gamma'}^{(x)}(\xi_x; \bar\xi^{(x)}), \tag{7}$$

где матрица $M_x = \{m_{\gamma,\gamma'}^{(x)}(\bar\xi^{(x)})\}$ равна

$$M_x = (G_x)^{-1/2}.$$

(Ниже мы покажем, что матрица $(G_x)^{-1/2}$ существует и определим ее с помощью явного разложения в ряд).

Введем теперь для любых $\gamma \in \mathcal{N}$ и $x \in Y_0$ функции на S^{Y_0}

$$\psi_\gamma^{(x)}(\xi) = \tilde\psi_\gamma^{(x)}(\xi_x; \xi \mid_{V_x}), \quad \xi \in S^{Y_0}. \tag{8}$$

Из определений (5), (6) и (7) следует, что

$$\psi_\theta^{(x)} \equiv 1.$$

С помощью функций (8) и определяется система (3) функций $\{\Psi_\Gamma\}$.

Лемма 1. *Система функций $\{\Psi_\Gamma\}$ образует ортонормированный базис в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что система $\{\Psi_\Gamma\}$ ортонормирована в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$. Обозначим $x(\Gamma) \in \mathrm{supp}\Gamma$ наибольшую точку в множестве $\mathrm{supp}\Gamma = \{x \in Y_0 : \gamma(x) \neq \theta\}$. Пусть Γ и Γ'—два мультииндекса; возможны два случая: а) $x(\Gamma) \neq x(\Gamma')$ и б) $x(\Gamma) = x(\Gamma')$. В случае а) (предположив для определенности, что $x(\Gamma) > x(\Gamma')$) находим, что

$$(\Psi_\Gamma, \Psi_{\Gamma'}) = \langle \prod_x \psi_{\gamma(x)}^{(x)} \prod_x \bar\psi_{\gamma'(x)}^{(x)} \rangle =$$

$$= \langle \prod_{x \neq x(\Gamma)} \psi_{\gamma(x)}^{(x)} \prod_x \bar\psi_{\gamma'(x)}^{(x)} \langle \psi_{\gamma(x(\Gamma))}^{(x(\Gamma))} \mid \xi \mid_{V_x} -\text{фиксировано} \rangle \rangle = 0. \tag{9}$$

Мы воспользовались здесь тем, что $\psi_{\gamma(x)}^{(x)}$ при $x < x(\Gamma)$ зависит лишь от значений поля на $V_{x(\Gamma)}$, а $\langle \psi_\gamma^{(x)} \mid \xi \mid_{V_x} -\text{фиксировано} \rangle = 0$ при $\gamma \neq \theta$ в силу построения $\psi_\gamma^{(x)}$.

В случае б) при $x(\Gamma) = x(\Gamma') = x$ аналогичная выкладка приводит к равенству

$$(\Psi_\Gamma, \Psi_{\Gamma'}) = (\Psi_{\hat\Gamma}, \Psi_{\hat\Gamma'}) \delta_{\gamma(x),\gamma'(x)}, \tag{10}$$

где $\hat\Gamma$ и $\hat\Gamma'$—мультииндексы, полученные из Γ и Γ' заменой значений $\gamma(x)$ и $\gamma'(x)$ значениями θ. Из (9) и (10), применяя многократно этот прием, получим, что

$$(\Psi_\Gamma, \Psi_{\Gamma'}) = \delta_{\Gamma,\Gamma'}. \tag{11}$$

Для доказательства полноты системы $\{\Psi_\Gamma\}$ нам понадобится следующее разложение функции $\psi_\gamma^{(x)}$.

Лемма 2. *Справедливо следующее равенство при $\gamma \neq \theta$:*

$$\psi_\gamma^{(x)} = \varphi_\gamma^{(x)} + \sum_{\substack{\bar\gamma \in \mathcal{N} \\ \Gamma : \mathrm{supp}\Gamma \subset V_x}} B_{\Gamma,\bar\gamma}^{(x),\gamma} \varphi_\Gamma \varphi_{\bar\gamma}^{(x)}, \tag{12}$$

где коэффициенты $B_{\Gamma,\bar\gamma}^{(x),\gamma}$ удовлетворяют оценке

$$\mid B_{\Gamma,\bar\gamma}^{(x),\gamma} \mid < L(C\beta)^{d_{\Gamma,\gamma,\bar\gamma,x}}, \tag{13}$$

где L и C—абсолютные константы (зависящие от геометрии графа E, базиса $\{\varphi_\gamma\}$ и коэффициентов $R_{\alpha,\beta}^{x,y}$ в (0), но не от параметра β), а величина $d_{\Gamma,\gamma,\bar\gamma,x}$, где $\gamma, \bar\gamma \in \mathcal{N}, \Gamma = \{\gamma(y), y \in V_x\}$ равна

$$d_{\Gamma,\gamma,\bar{\gamma},x} = \min_{n=\{n(\tau)\}}\{\sum_{\tau} n(\tau)\}, \tag{14}$$

где минимум берется по всем неотрицательным финитным целочисленным функциям $n = \{n(\tau)\}$, *определенным на ребрах* $\tau = (x_1, x_2)$ *графа* X *и таким, что*

1) $\operatorname{supp} n$—*образует связное множество ребер;*

2) *для любого* $y \in V_x$ *сумма*

$$\sum_{\tau : y \in \tau} n(\tau) \geq N(\gamma(y)) \text{ (ранг } \gamma(y));$$

3) $\sum_{\tau : x \in \tau} n(\tau) \geq | N(\gamma) - N(\bar{\gamma}) |;$

4) *никакое ребро* $\tau \in \operatorname{supp} n$ *не лежит целиком в* V_x.

Замечания. I. Для дальнейших подсчетов полезна оценка

$$d_{\Gamma,\gamma,\bar{\gamma},x} \geq \frac{1}{2}\{d_{\mathrm{supp}\Gamma \bigcup \{x\}} + \sum_{y \in \mathrm{supp}\Gamma} N(\gamma(y)) + | N(\gamma) - N(\bar{\gamma}) |\}, \tag{15}$$

где $d_B, B \subset X$, означает длину наименьшего связного набора ребер из X, множество концов которых содержит B.

II. Иногда формулу (12) будем записывать в более кратком виде

$$\psi_{\gamma}^{(x)} = \sum_{\Gamma : \mathrm{supp}\Gamma \subset V_x \bigcup \{x\}} \bar{B}_{\Gamma}^{(x),\gamma} \varphi_{\Gamma}, \tag{15^a}$$

где $\bar{B}_{\Gamma}^{(x),\gamma}$ легко выражается через коэффициенты $B_{\Gamma,\bar{\gamma}}^{(x),\gamma}$.

Доказательство. Выведем следующее представление для условного среднего:

$$\langle \psi_{\gamma}^{(x)} \mid \bar{\xi}^{(x)} \rangle = \sum_{\Gamma : \mathrm{supp}\Gamma \subset V_x} \tilde{B}_{\Gamma}^{(x),\gamma} \varphi_{\Gamma}(\bar{\xi}^{(x)}), \tag{16}$$

в котором коэффициенты $\tilde{B}_{\Gamma}^{(x),\gamma}$ удовлетворяют неравенствам

$$| \tilde{B}_{\Gamma}^{(x),\gamma} | \leq L'(C'\beta)^{d_{\Gamma,\gamma,x}}, \tag{17}$$

где L', C'—абсолютные константы, а $d_{\Gamma,\gamma,x} = d_{\Gamma,\gamma,\Theta,x}$. Воспользуемся известным разложением среднего значения по распределению гиббсовского поля в ряд по семиинвариантам (см. [26]).

В нашем случае это разложение примет вид

$$\langle \psi_{\gamma}^{(x)} \mid \bar{\xi}^{(x)} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \sum \langle \psi_{\gamma}^{(x)}, \psi_{\alpha_1}^{(x_1)} \bar{\psi}_{\beta_1}^{(x_1')}, \ldots$$

$$\ldots, \psi_{\alpha_n}^{(x_n)} \bar{\psi}_{\beta_n}^{(x_n')} \rangle_0 \prod_{i=1}^{n} R_{\alpha_i,\beta_i}^{x_i,x_i'}, \tag{18}$$

где $\langle \cdot, \cdot, \ldots, \cdot \rangle_0$—семиинварианты, вычисленные относительно свободной меры μ_0, а суммирование происходит по упорядоченным наборам ребер $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}, \tau_i = (x_i, x_i')$, таким, что $\tau_i \not\subset V_x$, и наборам пар индексов $\{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)\}$. Сумма в правой части (18) может быть переписана в виде:

$$\sum_{n} \prod_{\tau,\alpha,\beta} \frac{(-\beta)^{n_{\alpha,\beta}(\tau)}}{n_{\alpha,\beta}(\tau)!} \langle \varphi_{\gamma}^{(x)}, \prod{}' \varphi'^{\,n_{\alpha,\beta}(\tau)}_{\alpha,\beta}(\tau) \rangle, \tag{19}$$

где обозначено $\varphi_{\alpha,\beta}(\tau) = \varphi_{\alpha}^{(y)} \bar{\varphi}_{\beta}^{(y')}, \tau = (y, y')$— ориентированное ребро X, а суммирование происходит во всевозможным целочисленным неотрицательным финитным функциям $n = \{n_{\alpha,\beta}(\tau)\}$, определенным на тройках (α, β, τ) таким, что $n_{\alpha,\beta}(\tau) = 0$ для любого ребра $\tau \subset V_x$. Далее каждый семиинвариант в сумме (19) можно записать в виде

$$\langle \varphi_{\gamma}^{(x)}, \prod{}' \varphi'^{\,n_{\alpha,\beta}(\tau)}_{\alpha,\beta}(\tau) \rangle_0 = \prod_{(\alpha,\beta,\tau) : \tau = (y,y'), y \in V_x} (\varphi_{\alpha}^{(y)})^{n_{\alpha,\beta}(\tau)} \times$$

$$\prod_{(\alpha,\beta,\tau) : \tau = (y,y'), y' \in V_x} (\bar{\varphi}_{\beta}^{(y')})^{n_{\alpha,\beta}(\tau)} \langle \varphi_{\gamma}^{(x)}, \prod_{(\alpha,\beta,\tau) : \tau \bigcap V_x = \emptyset}{}' \varphi'^{\,n_{\alpha,\beta}(\tau)}_{\alpha,\beta}(\tau),$$

$$\prod_{(\alpha,\beta,\tau) : \tau = (y,y'), y \in V_x}{}' (\bar{\varphi}_{\beta}^{(y')})^{\prime n_{\alpha,\beta}(\tau)}, \prod_{(\alpha,\beta,\tau) : \tau = (y,y'), y' \in V_x}{}' (\varphi_{\alpha}^{(y')})^{\prime n_{\alpha,\beta}(\tau)} \rangle_0. \tag{20}$$

Произведение полевых переменных в этом представлении можем согласно (1) записать в виде

$$\prod_{(\alpha,\beta,\tau) : \tau = (y,y'), y \in V_x} (\varphi_{\alpha}^{(y)})^{n_{\alpha,\beta}(\tau)} \prod_{(\alpha,\beta,\tau) : \tau = (y,y'), y' \in V_x} (\bar{\varphi}_{\beta}^{(y')})^{n_{\alpha,\beta}(\tau)} =$$

$$= \sum_{\Gamma : \mathrm{supp}\Gamma \subset V_x} D_{\Gamma} \varphi_{\Gamma}, \tag{21}$$

где суммирование происходит по мультииндексам $\Gamma = \{\gamma(y), y \in \in V_x\}$ таким, что для любого $y \in V_x$

$$\sum_{(\alpha,\beta,\tau):\tau\bigcap V_x=\{y\}} n_{\alpha,\beta}(\tau) = K(y) \geq N(\gamma(y)), \tag{22}$$

а коэффициенты D_Γ не превышают $\prod\limits_{y\in\mathrm{supp}\Gamma} m^{K(y)}$, где m—абсолютная константа (определяемая коэффициентами $C^{\gamma}_{\gamma_1,\gamma_2}$ в формуле (1), а также числом полевых переменных). Заметим далее, что семиинвариант в (20) отличен от нуля только для тех $n = \{n_{\alpha,\beta}(\tau)\}$, у которых набор ребер $\{\tau : n_{\alpha,\beta}(\tau) \neq 0$ при какой-нибудь паре $\alpha, \beta\}$ связен и

$$\sum_{(\alpha,\beta,\tau):x\in\tau} n_{\alpha,\beta}(\tau) \geq N(\gamma). \tag{23}$$

Разложения (19) и (21) приводят к формуле (16), а неравенства (22) и (23) и оценка для коэффициентов D_Γ вместе с общими оценками семиинвариантов, изложенными в книге (см. [26], например, оценку (8.7.II) для семиинвариантов частично независимых величин), позволяют получить неравенство (17).

Повторив предыдущие рассуждения применительно к среднему $\langle\varphi^{(x)}_{\gamma_1}\varphi^{(x)}_{\gamma_2} \mid \bar{\xi}^{(x)}\rangle$, а также разложив произведение средних $\langle\varphi^{(x)}_{\gamma_1} \mid \bar{\xi}^{(x)}\rangle\langle\varphi^{(x)}_{\gamma_2} \mid \bar{\xi}^{(x)}\rangle$ с помощью разложения (16) и формулы (1) по мономам φ_Γ, получим, что условная матрица Грамма $G_x = \{g^{(x)}_{\gamma_1,\gamma_2}\}$ имеет вид

$$g^{(x)}_{\gamma_1,\gamma_2} = \delta_{\gamma_1,\gamma_2} + \sum_{\Gamma:\mathrm{supp}\Gamma\subset V_x} D^{(x),\gamma_1,\gamma_2}_\Gamma \varphi_\Gamma(\bar{\xi}^{(x)}), \tag{24}$$

где коэффициенты $D^{(x),\gamma_1,\gamma_2}_\Gamma$ удовлетворяют оценке, аналогичной (13). Из представления $G_x = E + D_x$ получаем, что

$$(G_x)^{-1/2} = E + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (D_x)^k \tag{25}$$

(α_k—биномиальные коэффициенты). Отсюда с помощью разложения (24) и формул (1) и (7) получим окончательно утверждение леммы 2.

Из леммы 2 вытекает, что функции $\psi^{(x)}_\gamma$ при достаточно малых β ограничены в совокупности

$$\mid \psi^{(x)}_\gamma \mid < C,$$

где $C > 0$—абсолютная константа.

Записав для матрицы $G_x^{1/2}$ разложение

$$(G_x)^{1/2} = E + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (D_x)^k, \tag{26}$$

получим, что функция $\varphi^{(x)}_\gamma$ может быть представлена в виде

$$\varphi^{(x)}_\gamma = \sum_{\bar\gamma} (G_x)^{1/2}_{\gamma,\bar\gamma} \psi^{(x)}_\gamma =$$

$$= \sum_{\bar\gamma} R^{(1)}_{\gamma,\bar\gamma}\psi^{(x)}_{\bar\gamma} + \sum_{\bar\gamma,\,\Gamma:\emptyset\neq\mathrm{supp}\Gamma\subset V_x} F^{(1),(x),\gamma}_{\Gamma,\bar\gamma}\varphi_\Gamma\psi^{(x)}_{\bar\gamma}, \tag{27}$$

причем коэффициенты $F^{(1),(x),\gamma}_{\Gamma,\bar\gamma}$ удовлетворяют оценке, аналогичной (13).

Для доказательства полноты системы $\{\Psi_\Gamma\}$ достаточно показать, что каждый моном φ_Γ можно равномерно приблизить суммами вида

$$\sum_\Gamma R_\Gamma \Psi_\Gamma. \tag{28}$$

Рассмотрим для простоты “одноточечный” моном $\varphi^{(x)}_\gamma$ и запишем каждый моном φ_Γ, входящий во второе слагаемое в разложении (27), в виде $\varphi_\Gamma = \varphi^{(x_1)}_{\gamma_1}\varphi_{\hat\Gamma}$, где $x_1 = x(\Gamma), \gamma_1 = \gamma(x_1)$, а $\hat\Gamma$— мультииндекс, получающийся из Γ заменой значения γ_1 в точке x_1 на θ. Снова представив $\varphi^{(x_1)}_{\gamma_1}$ с помощью разложения вида (27) и воспользовавшись соотношением (1), получим, что

$$\varphi^{(x)}_\gamma = \sum_\Gamma R^{(2)}_{\gamma,\Gamma}\Psi_\Gamma + \sum_{\Gamma,\Gamma'} F^{(2),(x),\gamma}_{\Gamma,\Gamma'}\Psi_\Gamma\varphi_{\Gamma'}, \tag{29}$$

где суммирование $\sum\limits_\Gamma$ происходит по мультииндексам Γ таким, что $\mid \mathrm{supp}\,\Gamma \mid \leq 2$, а $\sum\limits_{\Gamma,\Gamma'}$ означает суммирование по парам (Γ, Γ') мультииндексов, в которых Γ такой же, как и выше, а $\mathrm{supp}\,\Gamma' \neq \emptyset$ и $x(\Gamma') < \mathrm{supp}\,\Gamma$. Повторив эту процедуру n раз, получим разложение

$$\varphi^{(x)}_\gamma = \sum_\Gamma R^{(n)}_{\gamma,\Gamma}\Psi_\Gamma + \sum_{\Gamma,\Gamma'} F^{(n),(x),\gamma}_{\Gamma,\Gamma'}\Psi_\Gamma\varphi_{\Gamma'}. \tag{30}$$

Суммирование $\sum\limits_{\Gamma}$ происходит по всем мультииндексам Γ таким, что $\operatorname{supp}\Gamma = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}, x_i \le x, i = 1, \ldots, k, k \le n$, а суммирование $\sum\limits_{\Gamma,\Gamma'}$ происходит по парам (Γ, Γ'), где $\Gamma = \{x_n < < x_{n-1} < \ldots < x_1\}, x_1 \le x$, a $\operatorname{supp}\Gamma' \neq \emptyset$ и $\operatorname{supp}\Gamma' < x_n$.

С помощью индукции по числу n можно вывести следующую оценку для $F^{(n),(x),\gamma}_{\Gamma,\Gamma'}$

$$| F^{(n),(x),\gamma}_{\Gamma,\Gamma'} | < L(C\beta)^n \times$$

$$\times (C\beta)^{\frac{1}{2} d_{\operatorname{supp}\Gamma \bigcup \operatorname{supp}\Gamma' \bigcup \{x\}}} (C\beta)^{1/2[N(\Gamma)+N(\Gamma')]}, \qquad (31)$$

где обозначено $N(\Gamma) = \sum\limits_{x} N(\gamma(x)), \Gamma = \{\gamma(x), x \in Y_0\}$, а $C > 0$, $L > 0$—абсолютные константы. Из (31) и равномерной ограниченности $\varphi^{(x)}_{\gamma}$ и $\psi^{(x)}_{\gamma}$ находим, что при достаточно больших n последнее слагаемое в (30) становится равномерно малым и тем самым функция $\varphi^{(x)}_{\gamma}$ оказывается приближенной суммам вида (28). Аналогичные рассуждения показывают, что это верно и для любого монома φ_Γ.

Лемма доказана.

Замечание. В приведенном здесь доказательстве полноты системы функций $\{\Psi_\Gamma\}$ в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ используется ряд специальных обстоятельств, связанных с кластерным разложением меры μ (разложение (12) и (24), малость β и т. д.), и в этом смысле оно представляется несколько кустарным. По-видимому, для описанного здесь базиса (3) полнота всегда имеет место, скажем, для эргодической меры μ.

В предположении, что выбранный нами порядок $<$ на Y_0 сохраняется при всех пространственных трансляциях τ_s, система функций $\{\Psi_\Gamma\}$ также инвариантна относительно группы $(U_s, s \in Z^\nu)$ пространственных сдвигов в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ и при этом

$$U_s \Psi_\Gamma = \Psi_{\Gamma+s}, \qquad (31^a)$$

где $\Gamma + s = \{\tilde{\gamma}(x), x \in Y_0\}$—сдвиг мультииндекса $\Gamma = \{\gamma(x), x \in Y_0\}$ на s,

$$\tilde{\gamma}(x) = \gamma(\tau_s^{-1} x),$$

а τ_s—действие группы Z^ν в E.

2. Кластерное разложение. Условимся о некоторых терминах и обозначениях. Для любого подмножества $Y \subset X$. Обозначим $\mathfrak{M}(Y)$ совокупность мультииндексов $\Gamma = \{\gamma(x), x \in \in X\}$ с непустыми носителями $\emptyset \neq \operatorname{supp}\Gamma \subset Y$; при этом $\mathfrak{M}(Y_0) = \mathfrak{M}_0$. Набор мультииндексов $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\}$ назовем *дизъюнктным,* если $\operatorname{supp}\Gamma_i \bigcap \operatorname{supp}\Gamma_j = \emptyset, i \neq j$, и *согласованным,* если

$$\Gamma_i \mid_{\operatorname{supp}\Gamma_i \bigcap \operatorname{supp}\Gamma_j} = \Gamma_j \mid_{\operatorname{supp}\Gamma_i \bigcap \operatorname{supp}\Gamma_j}$$

для всех пар $i \neq j$ (всякий дизъюнктный набор согласован). Очевидно, что для всякого согласованного набора мультииндексов $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\}$ существует мультииндекс Γ такой, что $\operatorname{supp}\Gamma = \bigcup\limits_{i} \operatorname{supp}\Gamma_i$ и $\Gamma \mid_{\operatorname{supp}\Gamma_i} = \Gamma_i \mid_{\operatorname{supp}\Gamma_i}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Этот мультииндекс назовем *суммой* набора $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\}$ и обозначим $\Gamma = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i$. Далее, любое представление мультииндекса Γ в виде суммы $\Gamma = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i$ дизъюнктного набора мультииндексов $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\}$ назовем *разбиением* Γ. Наконец, если два дизъюнктных набора $\tau = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\}$ и $\tau' = \{\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_{n'}\}$ являются разбиениями одного и того мультииндекса $\Gamma = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i = \bigvee\limits_{j=1}^{n'} \Gamma'_j$ и для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, $\operatorname{supp}\Gamma_i \subset \operatorname{supp}\Gamma'_j$ для некоторого $j = 1, 2, \ldots, n'$, то говорят, что разбиение мельче τ и пишут $\tau < \tau'$. Очевидно, что множество разбиений $\{\Gamma_i\}$ фиксированного мультииндекса $\Gamma = \mathfrak{M}(X)$ образует структуру относительно порядка $<$, которую мы обозначим $\mathfrak{A}_\Gamma$.

Обозначим $\mathcal{H}'_{\text{физ}} = \mathcal{H}_{\text{физ}} \ominus \{\text{const}\}$ совокупность функций $\Phi \in \in \mathcal{H}_{\text{физ}}$ таких, что $\langle \Phi \rangle_\mu = 0$. Очевидно, что $\mathcal{H}'_{\text{физ}}$ инвариантно относительно трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ и группы $\{U_s\}$ и в дальнейшем, не оговаривая этого особо, мы будем изучать действие этих операторов в $\mathcal{H}'_{\text{физ}}$ (обозначая их по-прежнему $\mathcal{J}$ и U_s). Очевидно, что функции $\{\Psi_\Gamma, \Gamma \in \mathfrak{M}_0 \equiv \mathfrak{M}(Y_0)\}$ образуют базис в $\mathcal{H}'_{\text{физ}}$. Для любых $\Gamma, \Gamma' \in \mathfrak{M}_0$ обозначим

$$a_{\Gamma,\Gamma'} = (\Psi_\Gamma, \mathcal{J}\Psi_{\Gamma'}) = \langle \Psi_\Gamma \overline{\hat{\Psi}_{\Gamma'}} \rangle \qquad (32)$$

матричные элементы трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ в базисе $\{\Psi_\Gamma\}$.

Здесь $\hat{\Psi}_{\Gamma'}$ обозначена функция от поля:

$$\hat{\Psi}_{\Gamma'} = U_{e_0}\Psi_{\Gamma'} = \prod \psi^{\{x\}}_{\gamma'(x)},$$

$$\hat{\psi}^{(x)}_{\gamma'(x)} = U_{e_0}\psi^{(x)}_{\gamma(x')},$$

где U_{ϵ_0}—оператор в $L_2(S^X, \mu)$, соответствующий единичному сдвигу вдоль положительного направления времени.

Если мы разложим функцию $f \in \mathcal{H}'_{\text{физ}}$ по базису $\{\Psi_\Gamma\}$

$$f = \sum_{\Gamma \in \mathfrak{M}_0} f(\Gamma)\Psi_\Gamma,$$

то координаты $\{f(\Gamma)\}$ этой функции при действии оператора $\mathcal{J}$ преобразуется по формуле

$$(\mathcal{J}f)(\Gamma) = \sum_{\Gamma'} a_{\Gamma,\Gamma'} f(\Gamma'). \tag{33}$$

Поскольку функция $\hat{\Psi}_\Gamma$ зависит от значений поля ξ на слое Y_1, нам иногда будет удобно рассматривать второй мультииндекс Γ' в (32) "сдвинутым на слой Y_1", т. е. считать, что $\operatorname{supp}\Gamma' \subset \subset Y_1$, и, таким образом, каждую пару $(\Gamma, \Gamma') \in \mathfrak{M}_0 \times \mathfrak{M}_0$ представлять в виде одного мультииндекса $\tilde{\Gamma} = \Gamma \bigvee \Gamma' \subset \mathfrak{M}(Y_0 \bigcup Y_1)$. Всякий такой мультииндекс $\tilde{\Gamma} \in \mathfrak{M}(Y_0 \bigcup Y_1)$ (т. е. такой, что $\operatorname{supp}\tilde{\Gamma} \bigcap Y_0 \neq \emptyset$ и $\operatorname{supp}\tilde{\Gamma} \bigcap Y_0 \neq \emptyset$) условимся называть *стандартным*.

Воспользовавшись известным представлением моментов случайных величин через их семиинварианты (см. [26]), получим, что

$$a_{\Gamma,\Gamma'} \equiv a_{\tilde{\Gamma}} = \sum_{\tau = (\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n)} \omega_{\tilde{\Gamma}_1}\omega_{\tilde{\Gamma}_2}\ldots\omega_{\tilde{\Gamma}_n}, \tag{34}$$

где суммирование происходит по всем разбиениям стандартного мультииндекса $\tilde{\Gamma}$ на дизъюнктные неупорядоченные наборы $\tau = (\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n)$ стандартных мультииндексов. Здесь величины $\omega_{\tilde{\Gamma}}$ означают семиинварианты

$$\omega_{\tilde{\Gamma}} = \omega_{\Gamma,\Gamma'} = \langle \prod_{y \in \operatorname{supp}\Gamma} {}' \psi^{(x)}_{\gamma(x)}, \prod_{x \in \operatorname{supp}\Gamma'}' \overline{\hat{\psi}}^{(x)}_{\gamma'(x)} \rangle. \tag{35}$$

При выводе формулы (35) мы воспользовались тем, что для любого $\Gamma \in \mathfrak{M}_0$ семиинварианты

$$\langle \prod_{x \in \operatorname{supp}\Gamma} {}' \psi^{(x)}_{\gamma(x)} \rangle = \langle \prod_{x \in \operatorname{supp}\Gamma} {}' \overline{\hat{\psi}}^{(x)}_{\gamma(x)} \rangle = 0, \tag{36}$$

как это следует из равенств $\langle \overline{\Psi}_\Gamma \rangle = \langle \hat{\Psi}_\Gamma \rangle = 0$ для всех $\Gamma \in \mathfrak{M}_0$ и формулы, выражающей семиинварианты через моменты (см. [26]).

Лемма 3 (кластерная оценка). *Семиинварианты $\omega_{\tilde{\Gamma}}$ удовлетворяют следующей оценке:*

$$| \omega_{\tilde{\Gamma}} | < L(C\beta)^{d_{\tilde{\Gamma}}}, \tag{37}$$

где $L > 0, C > 0$—абсолютные константы (зависящие от величин $R^{x,y}_{\alpha,\beta}$, геометрии графа X и системы функций ϕ_γ, но не зависящие от β), а величины $d_{\tilde{\Gamma}}$ определяются аналогично величине $d_{\Gamma,\gamma,\bar{\gamma},\bar{x}}$ в формуле (13):

$$d_{\tilde{\Gamma}} = \min_n \sum_\tau n(\tau), \;\; \tilde{\Gamma} = \{\tilde{\gamma}(x), x \in Y_0 \bigcup Y_1\}, \tag{38}$$

где $n = \{n(\tau)\}$—целочисленная неотрицательная финитная функция на ребрах X, а минимум в (38) берется по всем таким функциям, носитель которых образует связное множество ребер и для любого $x \in \operatorname{supp}\tilde{\Gamma}$:

$$\sum_{\tau : x \in \tau} n(\tau) \geq N(\tilde{\gamma}(x)). \tag{39}$$

Доказательство. Для вывода оценки (37) можно воспользоваться рассуждениями, приведенными в книге [26] (гл. 6, § 2) при оценке семиинвариантов от ограниченных квазилокальных функций (аналитический метод). А именно, с помощью кластерного разложения подходящего гиббсовского распределения можно показать аналитичность семиинварианта $\omega_{\tilde{\Gamma}}$ относительно параметра $\beta(|\, \beta \,| < \beta_0)$, а затем вывести, что $\omega_{\tilde{\Gamma}}$ имеет порядок $(C\beta)^{d_{\tilde{\Gamma}}}$ при малых β. Это утверждение получается с помощью формулы (15^a) и разложения семиинварианта $\omega_{\tilde{\Gamma}}$ в сумму семиинвариантов вида ($\tilde{\Gamma} = (\Gamma, \Gamma')$):

$$\prod_{x \in \operatorname{supp}\Gamma} B^{(x),\gamma(x)}_{\Gamma_x} \prod_{x \in \operatorname{supp}\Gamma} B^{(x),\gamma'(x)}_{\Gamma'_x} \left\langle \prod_x{}' \bar{\varphi}_{\Gamma_x}, \prod_x{}' \hat{\varphi}_{\Gamma'_x} \right\rangle$$

с последующим разложением $\langle\prod_x{}'\bar{\varphi}_{\Gamma_x},\prod_x{}'\hat{\varphi}_{\Gamma'_x}\rangle$ по семиинвариантам независимого поля, аналогичным разложению (18) из предыдущего пункта и их кластерной оценки (см. [26]). Отсюда уже легко получить оценку (37).

Разложение (34) для матричных элементов $a_{\Gamma,\Gamma'}$ трансфер-матрицы вместе с кластерной оценкой (37) называется *кластерным разложением* трансфер-матрицы.

Заметим, что в силу перестановочности трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ с группой $\{U_s\}$, а также соотношения (31^a) получаем, что

$$a_{\Gamma+s,\Gamma'+s}=a_{\Gamma,\Gamma'}\tag{40}$$

и также

$$\omega_{\Gamma+s,\Gamma'+s}=\omega_{\Gamma,\Gamma'}.\tag{41}$$

Замечание. В случае поля, действие которого имеет вид

$$V_\Lambda=\sum R_k\varphi^k,\tag{42}$$

где $k=\{k_\alpha(y)\}$, $\varphi^k=\prod_{y,\alpha}\varphi_\alpha^{k_\alpha(y)}(\xi(y)), R_k$— некоторые коэффициенты, наши построения сохраняют силу. В этом случае в определении величины $d_{\tilde{\Gamma}}$, входящей в оценку (37) семиинварианта $\omega_{\tilde{\Gamma}}$, следует минимизировать сумму

$$\sum_\Delta n(\Delta),$$

где $n=\{n(\Delta)\}$—целочисленная функция, определенная на носителях $\Delta=\operatorname{supp}k$ потенциала V_Λ в (42). При этом минимум берется по множеству функций $n=\{n(\Delta)\}$, для которых набор $\{\Delta:n(\Delta)\neq0\}$ связен и для любого $y\in\operatorname{supp}\tilde{\Gamma}$ выполнена оценка

$$\sum_{\Delta:y\in\Delta}n(\Delta)k_\Delta(y)>N(\tilde{\gamma}(y)),\quad\tilde{\Gamma}=\{\tilde{\gamma}(x)\}.$$

Здесь $k_\Delta(y)$—минимальная степень, в которой полевые переменные $\varphi_\alpha(\xi(y))$ входят в мономы φ^k, в (42) $\operatorname{supp}k=\Delta$.

§ 2. Кластерные операторы (определение и основные свойства)

Введение базиса $\{\psi_\Gamma,\Gamma\in\mathfrak{M}_0\}$ в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ позволяет отождествить это пространство с пространством $l_2(\mathfrak{M}_0)$ функций $f=\{f(\Gamma)\}$ на множестве $\mathfrak{M}_0$ таких, что

$$\|f\|=\sum_{\Gamma\in\mathfrak{M}_0}|f(\Gamma)|^2<\infty.\tag{1}$$

При этом отождествлении группа $\{U_s\}$ действует по формуле

$$(U_sf)(\Gamma)=f(\Gamma-s),\tag{2}$$

а оператор $\mathcal{J}$—по формуле (33.1). Мы введем сейчас более общий класс операторов, действующих в пространстве $l_2(\mathfrak{M}_0)$ и называемых *кластерными операторами*; среди них содержатся, в частности, и трансфер-матрицы гиббсовских полей.

Пусть оператор A задается формулой

$$(Af)(\Gamma)=\sum_{\Gamma'}a_{\Gamma,\Gamma'}f(\Gamma')\tag{3}$$

и его матричные элементы $a_{\Gamma,\Gamma'}\equiv a_{\tilde{\Gamma}}$, где $\tilde{\Gamma}$—стандартный мультииндекс, порожденный парой (Γ,Γ'):

$$\tilde{\Gamma}=\Gamma\bigvee\Gamma'$$

(мультииндекс Γ' считается здесь “сдвинутым” на слой Y_1, см. выше) допускает разложение

$$a_{\tilde{\Gamma}}=\sum_{\tau=(\tilde{\Gamma}_1,\ldots,\tilde{\Gamma}_n)}\omega(\tilde{\Gamma}_1,\ldots,\tilde{\Gamma}_n),\tag{4}$$

где сумма берется по всем дизъюнктным разбиениям мультииндекса $\tilde{\Gamma}$ в наборы стандартных мультииндексов $\tilde{\Gamma}_1,\ldots,\tilde{\Gamma}_n$, а $\omega(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n)$—функция, определенная на совокупности всех неупорядоченных наборов $\tau=(\tilde{\Gamma}_1,\ldots,\tilde{\Gamma}_n)$ (вообще говоря, не дизъюнктных) стандартных мультииндексов и удовлетворяющая следующим требованиям.

1. Независимость кластеров: для любого набора стандартных мультииндексов $(\tilde{\Gamma}_1,\ldots,\tilde{\Gamma}_n)$ и любого набора векторов $\{s_1,\ldots,s_n\},s_i\in Z^\nu$,

$$\omega(\tilde{\Gamma}_1 + s_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n + s_n) = \omega(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n). \qquad (5)$$

2. Кластерная оценка: существует число $\lambda, 0 < \lambda < 1$, (параметр кластерности) и константа L такие, что для всех наборов $\{\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n\}$ выполнена оценка

$$| \, \omega(\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n) \, | < L \prod_{i=1}^{n} \lambda^{d_{\tilde{\Gamma}_i}}. \qquad (6)$$

Функция $\omega(\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n)$, входящая в разложение (4), называется *кластерной* функцией. Сделаем несколько замечаний относительно введенного определения кластерных операторов.

I. Условие (5) выражает основную физическую идею кластерности: разбиение многокомпонентной системы на несколько “невзаимодействующих” подсистем (кластеров) таких, что перемещение любого из них в пространстве не влияет на остальные.

Заметим, что в разложение (4) входят значения кластерной функции $\omega(\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n)$ на дизъюнктных наборах. По существу условие (5) позволяет доопределить $\omega(\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n)$ на всех наборах $(\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n)$ стандартных мультииндексов.

II. Кластерная оценка (6) показывает, что основной вклад в матричный элемент $a_{\Gamma,\Gamma'}$ дают те разбиения $\tau = (\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n)$ мультииндекса $\tilde{\Gamma}$, блоки $\tilde{\Gamma}_i$ которых не слишком “разбросаны” по пространству (т. е. величины $d_{\mathrm{supp}\tilde{\Gamma}_i}$ имеют допустимо минимальные значения). При этом сами матричные элементы $a_{\tilde{\Gamma}}$ малы для мультииндексов $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\gamma}(x)\}$ с достаточно большими степенями $N(\tilde{\Gamma}) = \mathrm{supp}_x N(\tilde{\gamma}(x))$.

Кластерная оценка (6), выбранная нами, достаточно удобна в применениях и хорошо согласуется с кластерной оценкой (37.1) для семиинвариантов $\omega_{\tilde{\Gamma}}$; конечно, эта оценка может быть заменена какой-нибудь другой, близкой ей по смыслу оценкой. В частности, при изучении трансфер-матриц гиббсовских эвклидовых полей, задаваемых действием общего вида (42.1), следует в оценке (6) изменить определение величин $d_{\tilde{\Gamma}}$ так, как это объяснено в замечании в конце предыдущего параграфа.

Сейчас мы установим некоторые общие свойства кластерных операторов.

Лемма 1. *Кластерная функция ω однозначно определяется самим кластерным оператором.*

Иными словами, для матричных элементов кластерного оператора нельзя написать двух различных кластерных разложений (4) с различными кластерными функциями ω_1 и ω_2 соответственно, удовлетворяющими условиям 1 и 2.

Доказательство. Пусть $\tau^0 = \{\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n\}$ — некоторый дизъюнктный набор стандартных мультииндексов. Заметим, что из разложения (4) вместе с условиями (5) и (6) вытекает, что

$$\lim_{\substack{|s_i - s_j| \to \infty \\ i \neq j}} a_{\bigvee_{i=1}^{n}(\Gamma_i + s_i)} \equiv B(\tau_0) = \sum_{\tau \leq \tau_0} \omega(\tau), \qquad (7)$$

где суммирование происходит по всем разбиениям τ, более мелким, чем τ_0. Обозначим $\mathfrak{A}_{\tilde{\Gamma}}$ структуру разбиений стандартного мультииндекса $\tilde{\Gamma}$ на стандартные мультииндексы. Из формулы (7) видно, что суммы

$$\sum_{\tau < \bar{\tau}} \omega(\tau) \equiv B(\bar{\tau})$$

однозначно определены самим оператором. Применяя формулу обращения Мебиуса, получаем, что

$$\omega(\tau) = \sum_{\bar{\tau} : \tau \leq \bar{\tau}} \mu_{\mathfrak{A}_{\tilde{\Gamma}}}(\tau, \bar{\tau}) B(\bar{\tau}),$$

где $\mu_{\mathfrak{A}_{\tilde{\Gamma}}}$—функция Мебиуса структуры $\mathfrak{A}_{\tilde{\Gamma}}$. Лемма доказана.

Обозначим $\mathcal{W}_\lambda$ класс кластерных операторов, действующих в $l_2(\mathfrak{M}_0)$, кластерные функции ω которых удовлетворяют кластерной оценке (6) с фиксированным параметром кластерности λ. Очевидно, что $\mathcal{W}_\lambda$—линейное пространство, полное относительно нормы:

$$||| \, A \, |||_\lambda = \sup_{\tau} | \, \omega(\tau) \, | \prod_{\tilde{\Gamma} \in \tau} \lambda^{-d_{\tilde{\Gamma}}}, \quad A \in \mathcal{W}_\lambda, \qquad (8)$$

где верхняя грань берется по всем дизъюнктным наборам $\tau = \{\tilde{\Gamma}\}$ стандартных мультииндексов.

Лемма 2. *Пусть λ достаточно мало. Тогда любой кластерный оператор $A \in \mathcal{W}_\lambda$ является ограниченным оператором в $l_2(\mathfrak{M}_0)$, причем*

$$|| \, A \, ||_{l_2(\mathfrak{M}_0)} < C\lambda \, ||| \, A \, |||_\lambda, \qquad (9)$$

где $C > 0$—абсолютная константа.

Доказательство. **Из общей формулы**

$$\| A \|_{l_2(\mathfrak{M}_0)} = \sup_{\substack{f,g\in l_2(\mathfrak{M}_0)\\ \|f\|=\|g\|=1}} (Af,g)$$

следует, что норма $\| A \|_{l_2(\mathfrak{M}_0)}$ допускает оценку

$$\| A \|_{l_2(\mathfrak{M}_0)} \leq \frac{1}{2}\left(\sup_{\Gamma}\sum_{\Gamma'} | a_{\Gamma,\Gamma'} | + \sup_{\Gamma'}\sum_{\Gamma} | a_{\Gamma,\Gamma'} |\right), \qquad (10)$$

где $a_{\Gamma,\Gamma'}$—матричные элементы оператора A. Далее, воспользовавшись разложением (4) и оценкой (6), нетрудно подсчитать, что при малых λ

$$\sum_{\Gamma'} | a_{\Gamma,\Gamma'} | < (C\lambda)^{N(\Gamma)} ||| A |||_{\lambda}, \qquad (11)$$

где C—абсолютная константа; аналогичная оценка верна и для $\sum\limits_{\Gamma} | a_{\Gamma,\Gamma'} |$. Из этих оценок и (10) следует (9).

Оказывается, что совокупность кластерных операторов (с достаточно малым значением параметра кластерности λ) образует алгебру. Более точно, справедливо следующее утверждение

Лемма 3. *Существует абсолютная константа $\bar{C}$ такая, что для любого достаточно малого значения λ и любого набора кластерных операторов $A_0, A_1, \ldots, A_n$ из класса $\mathcal{W}_\lambda$ их произведение*

$$B = A_0 A_1 \ldots A_n \qquad (12)$$

принадлежит классу $\mathcal{W}_{\bar{C}\lambda}$, причем

$$||| B |||_{\bar{C}\lambda} < (\bar{C}\lambda)^n \prod_{i=0}^{n} ||| A_i |||_{\lambda} . \qquad (13)$$

Доказательство. Очевидно, что матричные элементы $a^B_{\Gamma,\Gamma'}$ оператора B равны

$$a^B_{\Gamma,\Gamma'} = \sum_{(\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_n)} a^{A_0}_{\Gamma,\Gamma_1} a^{A_1}_{\Gamma_1,\Gamma_2} \ldots a^{A_n}_{\Gamma_n,\Gamma'}. \qquad (14)$$

Далее условимся считать, что каждый мультииндекс Γ_i помещен на слой Y_i ($\mathrm{supp}\Gamma_i \subset Y_i$), и введем стандартные мультииндексы

$$\tilde{\Gamma}_0 = (\Gamma, \Gamma_1), \tilde{\Gamma}_1 = (\Gamma_1, \Gamma_2), \ldots, \tilde{\Gamma}_n = (\Gamma_n, \Gamma')$$

с носителями $\mathrm{supp}\tilde{\Gamma}_i \subset Y_i \bigcup Y_{i+1}$ ($\mathrm{supp}\tilde{\Gamma}_i \bigcap Y_i \neq \emptyset$, $\mathrm{supp}\tilde{\Gamma}_i \bigcap Y_{i+1} \neq \neq \emptyset$), так как набор мультииндексов $(\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_n)$ согласован, и, следовательно, определен мультииндекс

$$\hat{\Gamma} = \bigvee \tilde{\Gamma}_i, \;\; \mathrm{supp}\,\hat{\Gamma} \subset \bigcup_{i=0}^{n+1} Y_i,$$

причем $\mathrm{supp}\,\hat{\Gamma} \bigcap Y_i \neq \emptyset$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$.

Для любого неупорядоченного набора

$$\alpha = \{\tilde{\Gamma}^j_i, \; i = 0, 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, \bar{j}(i)\}$$

стандартных мультииндексов таких, что

$$\mathrm{supp}\,\tilde{\Gamma}^j_i \subset Y_i \bigcup Y_{i+1},$$

определим величину

$$\omega(\alpha) = \omega^{A_0}(\tilde{\Gamma}^1_0, \ldots, \tilde{\Gamma}^{\bar{j}(0)}_0)\omega^{A_1}(\tilde{\Gamma}^1_1, \ldots, \tilde{\Gamma}^{\bar{j}(1)}_1) \ldots \omega^{A_n}(\tilde{\Gamma}^1_n, \ldots, \tilde{\Gamma}^{\bar{j}(n)}_n). \;\; (15)$$

Набор $\alpha = \{\tilde{\Gamma}^j_i, i = 0, 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, \bar{j}(i)\}$ назовем *допустимым*, если:

1) для любого $i = 0, 1, \ldots, n$ наборы $\{\tilde{\Gamma}^1_i, \ldots, \tilde{\Gamma}^{\bar{j}(i)}_i\}$ дизъюнктны;

2) весь набор $\{\tilde{\Gamma}^j_i\}$ согласован, т. е.

$$\bigvee_j \tilde{\Gamma}^j_i |_{Y_i} = \bigvee_j \tilde{\Gamma}^j_{i-1} |_{Y_i}, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Для каждого допустимого набора $\{\tilde{\Gamma}^j_i\}$ введем следующие мультииндексы:

$$\Gamma(\alpha) = \bigvee_{i,j} \tilde{\Gamma}^j_i, \;\; \Gamma_0(\alpha), \;\; \Gamma_{n+1}(\alpha)$$

такие, что

$$\mathrm{supp}\,\Gamma_0(\alpha) \subset Y_0, \;\; \mathrm{supp}\,\Gamma_{n+1}(\alpha) \subset Y_{n+1},$$

$$\Gamma_0(\alpha) |_{Y_0} = \Gamma(\alpha) |_{Y_0}, \;\; \Gamma_{n+1}(\alpha) |_{Y_{n+1}} = \Gamma(\alpha) |_{Y_{n+1}} .$$

Из (14) и (4) и определения (15) вытекает формула

$$a^B_{\Gamma,\Gamma'} = \sum_{\alpha:\Gamma_0(\alpha)=\Gamma,\Gamma_{n+1}(\alpha)=\Gamma'} \omega_\alpha, \tag{16}$$

а суммирование происходит по всем допустимым наборам α стандартных мультииндексов с фиксированными крайними мультииндексами $\Gamma_0(\alpha)$ и $\Gamma_{n+1}(\alpha)$.

Допустимый набор $\alpha = \{\tilde{\Gamma}^j_i\}$ назовем *связкой*, если совокупность носителей $\{\mathrm{supp}\tilde{\Gamma}^j_i\}$ образует связный набор подмножеств. Набор связок $\beta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ назовем *регулярным*, если совокупность мультииндексов $\Gamma(\alpha_1), \dots, \Gamma(\alpha_m)$ дизъюнктна. Поскольку каждый допустимый набор $\alpha = \{\tilde{\Gamma}^j_i\}$ стандартных мультииндексов однозначно разбивается в регулярный набор связок $\beta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ (α_k—связные компоненты набора α), представление (16) можно записать в виде

$$a^B_{\Gamma,\Gamma'} = \sum_{\beta=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}} \omega(\beta), \tag{17}$$

где суммирование происходит по регулярным наборам связок $\beta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ таким, что

$$\bigvee_{k=1}^{m} \Gamma_0(\alpha_k) = \Gamma, \quad \bigvee_{k=1}^{m} \Gamma_{n+1}(\alpha_k) = \Gamma'. \tag{18}$$

При этом для любого набора связок $\beta = \{\alpha_k, k = 1, \dots, n\}$ мы положили $\omega(\beta) = \omega(\alpha(\beta))$, где $\alpha(\beta) = \{\tilde{\Gamma}^j_i(k), i, j, k\}$— набор стандартных мультииндексов, входящих в связки $\alpha_k, k = 1, \dots, m$, причем каждый мультииндекс повторяется в $\alpha(\beta)$ столько раз, сколько связок α_k его содержат. Далее, набор связок $\beta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ назовем *связным*, если связна система подмножеств

$$\mathrm{supp}\,\Gamma(\alpha_1),\ \mathrm{supp}\,\Gamma(\alpha_2),\ \dots,\ \mathrm{supp}\,\Gamma(\alpha_m).$$

Определим теперь кластерные функции ω^B оператора B формулой

$$\omega^B((\Gamma,\Gamma'), \dots, (\Gamma_s, \Gamma'_s)) =$$
$$= \sum_{\{\beta_1,\dots,\beta_s\}} D(\beta_1) \dots D(\beta_s)\omega(\beta_1 \bigcup \beta_2 \bigcup \dots \bigcup \beta_s), \tag{19}$$

где суммирование берется по всем неупорядоченным последовательностям $\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ связных наборов попарно различных связок $\beta_l = \{\alpha^l_k, k = 1, \dots, m_l\}$ таких, что для каждого $l = 1, \dots, s$ наборы мультииндексов

$$\{\Gamma_0(\alpha^l_1), \dots, \Gamma_0(\alpha^l_{m(l)})\},$$
$$\{\Gamma_{n+1}(\alpha^l_1), \dots, \Gamma_{n+1}(\alpha^l_{m(l)})\} \tag{19^а}$$

по отдельности дизъюнктны и

$$\bigvee_{k=1}^{m(l)} \Gamma_0(\alpha^l_k) = \Gamma_l, \quad \bigvee_{k=1}^{m(l)} \Gamma_{n+1}(\alpha^l_k) = \Gamma'_l, \tag{19^б}$$

а $\beta_1 \bigcup \dots \bigcup \beta_s = \beta$ обозначен набор связок, входящих в наборы β_i (и повторяющиеся в β столько раз, сколько наборов β_i их содержат). Величина $D(\beta)$ для любого набора $\beta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ связок определяется следующим образом. Обозначим G_β граф, вершины которого нумерованы числами $1, \dots, m$, причем ребро $(i, j) \in G_\beta$ лишь тогда, когда

$$\mathrm{supp}\,\Gamma(\alpha_i) \bigcap \mathrm{supp}\,\Gamma(\alpha_j) \neq \emptyset.$$

Пусть $\mathfrak{A}_\beta$—структура разбиений графа G_β на связные подграфы (см. [26]) и $\mu_{\mathfrak{A}_\beta}(\cdot,\cdot)$—ее функция Мебиуса. Положим

$$D(\beta) = \mu_{\mathfrak{A}_\beta}(\mathbf{0}, \mathbf{1}), \tag{20}$$

0—наименьшее разбиение (разбиение G_β на вершины), **1**—наибольшее разбиение (разбиение на связные компоненты G_β).

Лемма 4. *Пусть $\beta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$— фиксированный набор связок. Тогда*

$$S(\beta) = \sum_{\{\beta_1,\dots,\beta_s\},\beta=\beta_1\bigcup\beta_2\bigcup\dots\bigcup\beta_s} D(\beta_1)\dots D(\beta_s) =$$
$$= \begin{cases} 1, & \textit{если } \beta - \textit{ регулярный набор }, \\ 0 & \textit{в противном случае.} \end{cases} \tag{21}$$

Суммирование происходит по всем разбиениям $(\beta_1, \dots, \beta_s)$ набора β в связные поднаборы: $\beta = \beta_1 \bigcup \beta_2 \bigcup \dots \bigcup \beta_s$.

Доказательство. Пусть $G_1 = G_{\beta_1}, G_2 = G_{\beta_2}, \dots, G_k = G_{\beta_k}$— связные компоненты графа G_β. Очевидно, что

$$S(\beta) = S(\beta_1) \dots S(\beta_k). \tag{22}$$

С другой стороны, для любого связного графа $G = G_\beta$ и любого его разбиения $\varepsilon = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ на связные подграфы G_{β_i}

$$D(\beta_1) \dots D(\beta_k) = \mu_G(0, \varepsilon). \tag{23}$$

Из определения функции Мебиуса следует, что

$$\sum_{\varepsilon \in \mathfrak{A}_G} \mu_G(0, \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \mathbf{0} = \mathbf{1}, \\ 0, & \mathbf{0} < \mathbf{1}. \end{cases}$$

Отсюда и из (22), (23) следует, что $S(\beta) = 1$ лишь для полностью несвязного графа G, т. е. для регулярного набора связок β, и $S(\beta) = 0$ для остальных наборов. Заметим, что в случае, когда совокупности мультииндексов $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_s\}$ и $\{\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_s\}$ в формуле (19) по отдельности дизъюнктны для любого набора $(\beta_1, \dots, \beta_s)$, в правой части (19) набор $\beta = \beta_1 \bigcup \dots \bigcup \beta_s = \{\alpha_k^l\}$ содержит лишь попарно различные связки и наборы их крайних мультииндексов $\Gamma_0(\alpha_k^l)$ и $\Gamma_{n+1}(\alpha_k^l)$ дизъюнктны. Если обозначить $\Gamma_0(\beta) = \bigvee\limits_{l,k} \Gamma_0(\alpha_k^l)$ и $\Gamma_{n+1}(\beta) = \bigvee\limits_{l,k} \Gamma_{n+1}(\alpha_k^l)$, то очевидно, что любое разбиение $\beta = \bar{\beta}_1 \bigcup \dots \bigcup \bar{\beta}_s$ на связные поднаборы $\bar{\beta}_i$ порождает некоторое дизъюнктное разбиение

$$(\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}'_1), \dots, (\bar{\Gamma}_{\bar{s}}, \bar{\Gamma}'_{\bar{s}})$$

пары $\Gamma_0(\beta), \Gamma_{n+1}(\beta)$ так, что выполнено $(19^{\text{а}}), (19^{\text{б}})$. Из этого замечания, леммы 4, представления (17) и формулы (19) вытекает, что матричные элементы $a^B_{\Gamma,\Gamma'}$ оператора B допускают кластерное разложение (4) с кластерной функцией ω^B. Далее, свойство 1) независимости кластеров вытекает непосредственно из определения (19). Кластерная оценка для ω^B вместе с оценкой нормы $||| \, B \, |||_{C\lambda}$ (C—некоторая абсолютная константа) вытекает из (19), кластерных оценок для функций ω^{A_i} и следующей оценки для величины $D(\beta)$ ($\beta = \{\alpha_k\}_1^m$—набор попарно различных связок):

$$| \, D(\beta) \, | \leq \prod_{k=1}^{m} \tilde{C}^{d_{\operatorname{supp}\Gamma(\alpha_k)}}, \tag{24}$$

где $\tilde{C}$—абсолютная константа, а величина $d_B, B \subset X$ определена на с. 210. Оценка (24) выведена в книге [26], гл. 2, § 6. Следует также воспользоваться неравенством: для любого связного набора связок $\beta = \{\alpha_k, k = 1, \dots, m\}, \alpha_k = \{\Gamma_j^i(k)\}$, для которого выполнено условие $(19^{\text{а}})$ и

$$\bigvee_k (\Gamma_0(\alpha_k)) = \Gamma, \ \bigvee_k (\Gamma_{n+1}(\alpha_k)) = \Gamma',$$

$$\sum_{i,j,k} d_{\Gamma_j^i(k)} \geq n + d_{\tilde{\Gamma}},$$

где $\tilde{\Gamma} = (\Gamma, \Gamma')$ обозначен стандартный мультииндекс, определяемый парой (Γ, Γ') (мультииндекс Γ' рассматривается как мультииндекс с носителем на слое Y_1). Лемма доказана.

Пусть теперь $A_0, A_1, \dots, A_n$—фиксированный набор кластерных операторов, $A_i = \mathcal{W}_\lambda, i = 0, 1, \dots, n$, где параметр λ достаточно мал: $\lambda < \lambda_0$. Обозначим $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(A_0, A_1, \dots, A_n)$ совокупность операторов, представимых в виде

$$B = \sum_{\{i_1, \dots, i_k\}} x_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1} \dots A_{i_k} \equiv T(A_0, A_1, \dots, A_n), \tag{25}$$

где суммирование происходит по всем конечным упорядоченным наборам $\{i_1, \dots, i_k\}, i_s = 0, 1, \dots, n, s = 1, \dots, k, k = 1, 2, \dots$, а коэффициенты $x_{i_1, \dots, i_k}$ таковы, что

$$| \, T(A_0, A_1, \dots, A_n) \, | \equiv$$

$$\equiv \sum_{\{i_1, \dots, i_k\}} | \, x_{i_1, \dots, i_k} \, | \, (\bar{C}\lambda)^{k-1} \prod_{s=1}^{k} ||| \, A_{i_s} \, |||_\lambda < \infty. \tag{26}$$

Из доказанной леммы вытекает, что $\mathfrak{B}(A_0, A_1, \dots, A_n) \subseteq \mathcal{W}_{\bar{C}\lambda}$ и образует алгебру операторов. При этом, если ввести в $\mathfrak{B}$ норму

$$| \, B \, |_\lambda = \inf_T | \, T(A_0, A_1, \dots, A_n) \, |,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям $B \in \mathfrak{B}$ в виде ряда (25), то выполняется оценка

$$||| \, B \, |||_{\bar{C}\lambda} \leq | \, B \, |_\lambda$$

и, кроме того,

$$| \, B_1 B_2 \, |_\lambda \leq \bar{C}\lambda \, | \, B_1 \, |_\lambda | \, B_2 \, |_\lambda, \ \ B_1, B_2 \in \mathfrak{B}. \tag{27}$$

Пусть A—кластерный оператор с кластерной функцией ω; тогда сопряженный ему оператор A^*—также кластерный и его кластерная функция ω равна

$$\omega^*(\tau) = \bar{\omega}(\tau'), \tag{28}$$

где τ' получается из набора пар $\tau = \{(\Gamma_1, \Gamma_1'), \dots, (\Gamma_s, \Gamma_s')\}$ транспонированием этих пар, т. е.

$$\tau' = \{(\Gamma_1', \Gamma_1), \dots, (\Gamma_s', \Gamma_s)\}.$$

Кластерный оператор A, для которого кластерная функция ω имеет вид произведения

$$\omega(\tau) = \omega\{(\Gamma_1, \Gamma_1'), \dots, (\Gamma_s, \Gamma_s')\},$$

$$\tau = \{(\Gamma_1, \Gamma_1'), \dots, (\Gamma_s, \Gamma_s')\}, \tag{29}$$

где $\omega\{(\Gamma, \Gamma')\}$—значения кластерной функции на наборах, состоящих из одной пары (Γ, Γ'), называется *мультипликативным* кластерным оператором. Как видно из (34.1), трансфер-матрица эвклидова поля является (при малых β) именно таким оператором. Далее из формулы (19) вытекает, что произведение двух мультипликативно-кластерных операторов—снова мультипликативно-кластерный оператор. Далее, если $A \in \mathcal{W}_\lambda$— кластерный оператор и T диагональный оператор вида

$$(Tf)(\Gamma) = \kappa^{N(\Gamma)} f(\Gamma),$$

где $N(\Gamma) = \sum N(\gamma(x))$—ранг мультииндекса $\Gamma, 0 < \kappa < 1$, то TA и AT—снова кластерные операторы и

$$|||\, TA \,|||_\lambda \leq \kappa \,|||\, A \,|||_\lambda, \tag{30}$$

аналогична оценка и для $|||\, AT \,|||_\lambda$. Обозначим $\mathfrak{M}_0^k \subset \mathfrak{M}_0$, $k > 0$—целое число, совокупность мультииндексов $\Gamma = \{\gamma(x), x \in Y_0\} \in \mathfrak{M}_0$, ранг которых

$$N(\Gamma) = k, \tag{31}$$

и для любого подмножества R натурального ряда обозначим $\mathfrak{M}_0^R$ объединение

$$\mathfrak{M}_0^R = \bigcup_{k \in R} \mathfrak{M}_0^k.$$

Оператор $A : l_2^{R_1} \to l_2^{R_2}$, где $l_2^R = l_2(\mathfrak{M}_0^R)$, где R_1, R_2—какие-нибудь два подмножества натурального ряда, действующий по формуле

$$(Af)(\Gamma) = \sum_{\Gamma' \in \mathfrak{M}_0^{R_1}} a_{\Gamma, \Gamma'} f(\Gamma'), \Gamma \in \mathfrak{M}_0^{R_2}, \tag{32}$$

также назовем *кластерным*, если его матричные элементы представимы в кластерном виде (4). При этом кластерная функция ω^A оператора A, по-прежнему удовлетворяющая условиям (5) и (6), определена лишь для тех наборов $\{(\Gamma_1, \Gamma_1'), \dots, (\Gamma_s, \Gamma_s')\}$, для которых

$$\sum_i N(\Gamma_i) \in R_2, \ \sum_i N(\Gamma_i') \in R_1. \tag{33}$$

Доопределив кластерную функцию ω^A нулем для всех остальных наборов, мы продолжим оператор A до кластерного оператора, действующего во всем пространстве $l_2(\mathfrak{M}_0)$ (за которым сохраним прежнее обозначение A), при этом

$$l_2^{\mathcal{N} \setminus R_2} \subseteq \mathrm{Ker\,A}, \ \ \mathrm{Im}\, A \subseteq l_2^{R_2}. \tag{34}$$

Пусть $R \subset \mathcal{N}$—ограниченное множество натурального ряда: $\max\limits_{n \in R} n = M$, и $T : l_2^R \to l_2^R$ — диагональный оператор в l_2^R

$$(Tf)(\Gamma) = \kappa^{N(\Gamma)} f(\Gamma), \ \ \Gamma \in \mathfrak{M}_0^R,$$

где $\kappa > 1$. Тогда для любого кластерного оператора $A \in \mathcal{W}_\lambda$ такого, что $\mathrm{Im}\, A \subset l_2^R$, оператор TA—снова кластерный и

$$|||\, TA \,|||_\lambda < \kappa^M \,|||\, A \,|||_\lambda \,. \tag{35}$$

Для всякого кластерного оператора A, у которого $\mathrm{Ker} A \supseteq l_2^{\mathcal{N} \setminus R}$, оператор AT—также кластерный и его норма $|||\, AT \,|||$ удовлетворяет оценке (35).

§ 3. Инвариантные k-частичные подпространства кластерного оператора.

Кластерный оператор $A : l_2^{\{k\}} \to l_2^{\{k\}}, k$—целое число, называют *$k$-частичным* кластерным оператором.

Пусть, далее, в некотором гильбертовом простарнстве $\mathcal{H}$ действует оператор A и коммутирующее с ним унитарное представление $\{U_s, s \in Z^\nu\}$ группы Z^ν. Подпространство $\mathcal{W} \subset \mathcal{H}$ инвариантное относительно операторов A и $\{U_s, s \in Z^\nu\}$ называется *кластерным k-частичным* инвариантным подпространством оператора A (относительно $(E, \mathcal{N})$, где E—наше исходное "пространство", а $\mathcal{N}$—описанный в § 1 граф индексов γ), если существует унитарное отображение пространства $\mathcal{W}$ на пространство $l_2^{(k)}(\mathfrak{M}_0)$ такое, что оператор $A\mid_{\mathcal{W}}$ (часть оператора A в инвариантном подпространстве $\mathcal{W}$) перейдет в кластерный k-частичный оператор, а операторы U_s перейдут в операторы (2.2).

Оказывается, что у самосопряженного кластерного оператора A с достаточно малым параметром кластерности λ при довольно общих условиях существует несколько первых k-частичных подпространств $\mathcal{H}_k, k = 1, 2, \ldots, N$ (причем число N зависит от величины λ : $N = N(\lambda)$). Здесь мы приведем эти условия и построим соответствующие подпространства.

С этой целью для каждого кластерного оператора A определим его главную часть A^0— кластерный оператор, кластерная функция ω^{A^0} которого задается следующим образом. Как следует из определения (38.1), величины $d_{\tilde{\Gamma}} \equiv d_{\Gamma,\Gamma'}$ для любой пары мультииндексов $\tilde{\Gamma} = (\Gamma, \Gamma')$

$$d_{\tilde{\Gamma}} \geq \frac{1}{2}(N(\Gamma) + N(\Gamma')), \tag{1}$$

причем равенство $d_{\Gamma,\Gamma'} = \frac{1}{2}(N(\Gamma) + N(\Gamma'))$, возможно, очевидно, лишь в случае, когда $N(\Gamma)$ и $N(\Gamma')$ имеют одинаковую четность. Пару мультииндексов (Γ, Γ'), для которой

$$d_{\Gamma,\Gamma'} = \frac{1}{2}(N(\Gamma) + N(\Gamma')), \tag{2}$$

назовем *минимальной*. Положим

$$\omega^{A^0}(\tau) = \begin{cases} \omega^A(\tau), & \text{если набор } \tau = \{(\Gamma_i, \Gamma_i')\} \text{ состоит} \\ & \text{только из минимальных пар,} \\ 0 & \text{для остальных } \tau. \end{cases} \tag{3}$$

Условимся для каждых двух подмножеств R_1, R_2 натурального ряда обозначать $A^{R_1R_2}$ оператор

$$A^{R_1R_2} = Q_{R_1} A Q_{R_2}, \tag{4}$$

где Q_R—оператор проектирования в $l_2(\mathfrak{M}_0)$ на подпространство l_2^R.

В случае, когда $R_1 = R_2 = \{1, \ldots, k\} \equiv R_k$, оператор $A^{R_kR_k}$ будем обозначать A_k. Предположим теперь, что при некотором целом N кластерный оператор A с параметром кластерности λ (и нормой $|||\, A \,||| \geq 1$) удовлетворяет следующим условиям, которые мы назовем условиями *N-частичной отделимости*.

i) Все операторы A_k^0, действующие в пространствах $l_2^{R_k}$, $k = 1, \ldots, N$, обратимы в этих пространствах.

ii) Каждый из операторов $(A_k^0)^{-1}$ в $l_2^{R_k}$ представим в виде

$$(A_k^0)^{-1} = (T_k^{\mu_k^{(1)}})^{-1} \tilde{A}_k^0 (T_k^{\mu_k^{(1)}})^{-1}, \tag{5}$$

где $\tilde{A}_k^0$—кластерный оператор, действующий в $l_2^{R_k}$ с параметром кластерности λ^{β_k}, где $\beta_k = \frac{1}{2(4k+12)}$, и нормой $|||\, \tilde{A}_k^0 \,|||_{\lambda^{\beta_k}} \geq \lambda^{-\varepsilon}, \varepsilon = 1/4$, а T_k^μ—сужение на $l_2^{R_k}$ диагонального оператора T^μ в $l_2(\mathfrak{M}_0)$:

$$(T^\mu f)(\Gamma) = (\lambda^\mu)^{N(\Gamma)} f(\Gamma) \tag{6}$$

и

$$\mu_k^{(1)} = \frac{1 + \beta_k}{2}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Для любого целого N существует такое значение $\lambda_0 = \lambda_0(N)$, что у любого самосопряженного кластерного оператора A с параметром кластерности $\lambda < \lambda_0$ и нормой $|||\, A \,||| \leq 1$, удовлетворяющего условиям N-частичной отделимости, существуют N инвариантных ортогональных друг другу подпространств $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N$, где $\mathcal{H}_k$—k-частичное кластерное подпространство, $k = 1, \ldots, N$. При этом спектр $\sigma(A\mid_{\mathcal{H}_k})$ оператора A в пространстве $\mathcal{H}_k$ заключен в пределах:*

$$C_2 \lambda^{k+3/8-\Delta_k^{(2)}} < \inf_{z \in \sigma(A|_{\mathcal{H}_k})} |\, z \,| \leq \sup_{\sigma(A|_{\mathcal{H}_k})} |\, z \,| < C_1 \lambda^{k-5/8+\Delta_k^{(1)}}, \tag{8}$$

где C_1, C_2—абсолютные константы и

$$\Delta_k^{(1)} = \frac{1}{k+2}, \ \ \Delta_k^{(2)} = \frac{1}{2(k+3)}. \tag{9}$$

Спектр A в ортогональном дополнении $\check{\mathcal{H}}_N = (\oplus_{k=1}^{N}\mathcal{H}_k)^{\perp}$ к сумме подпространств $\mathcal{H}_k$ заключен в пределах

$$\sup_{\sigma(A|_{\mathcal{H}_N})} | z |< C\lambda^{N+\frac{3}{8}+\frac{5}{8(N+3)}}, \tag{10}$$

где $C > 0$—абсолютная константа.

Замечание. Как видно из (8) и (10), спектры оператора A в подпространствах $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N, \check{\mathcal{H}}_N$ попарно не пересекаются.

Прежде, чем доказывать эту общую теорему, рассмотрим более подробно случаи $N = 1$ и $N = 2$.

Случай $N = 1$ (одночастичное подпространство). Для всякой минимальной пары (Γ, Γ'), у которой $N(\Gamma) = N(\Gamma') = 1$, носители Γ и Γ' совпадают и состоят из одной точки

$$\operatorname{supp}\Gamma = \operatorname{supp}\Gamma' = \{x\}, \tag{10ª}$$

а $N(\gamma(x)) = N(\gamma'(x)) = 1$. Таким образом, матричные элементы оператора $A^0_{k=1}$ в пространстве $l_2^{(1)}$ равны

$$a^0_{\Gamma,\Gamma'} = \omega((\Gamma, \Gamma')) = b^{(1)}_{\alpha,\alpha'}(s(x))\delta_{x,x'}, \tag{11}$$

где $\{x\} = \operatorname{supp}\Gamma$, $\{x'\} = \operatorname{supp}\Gamma'$, $\alpha = \gamma(x)$, $\alpha' = \gamma(x')$— индексы полевых переменных, $s(x)$—орбита точки $x \in Y_0$ при действии группы сдвигов в $E(= Y_0)$. Числа $b^{(1)}_{\alpha,\alpha'}(s)$ не превосходят λ:

$$| b^{(1)}_{\alpha,\alpha'}(s) | < \lambda \tag{12}$$

и их матрицу $\{b^{(1)}_{\alpha,\alpha'}(s)\}$ обозначим $B^{(1)}(s)$. Таким образом, обратный к $A^0_{k=1}$ оператор существует в том и только в том случае, когда все матрицы $\{B^{(1)}(s), s \in E/Z^{\nu}\}$ обратимы; при этом матричные элементы оператора $(A^0_{k=1})^{-1}$ по-прежнему имеют вид

$$a^{0,-1}_{\Gamma,\Gamma'} = b^{(1),-1}_{\alpha,\alpha'}(s(x))\delta_{x,x'}, \tag{13}$$

где $\{b^{(1),-1}_{\alpha,\alpha'}(s)\} = (B^{(1)}(s))^{-1}$. В случае, когда выполнена оценка

$$| b^{(1),-1}_{\alpha,\alpha'}(s) |< \frac{1}{\lambda^{1+1/4}}, \tag{14}$$

верно представление (5) для оператора $(A^0_{k=1})^{-1}$. Таким образом, если для кластерного оператора A с достаточно малым значением параметра кластерности λ выполнены условия (13) и (14), то у него существует одночастичное подпространство $\mathcal{H}_1$. Далее из оценок (12) и (14) вытекает, что собственные значения $\{E_\alpha(s), \alpha \in M, s \in E/Z^{\nu}\}$ матриц $B^{(1)}(s)$ заключены в пределах

$$k^{-1}\lambda^{1+1/4} < E_\alpha(s) < k\lambda, \tag{15}$$

где k—число полевых переменных. Следующая теорема уточняет положение спектра A в инвариантном одночастичном пространстве $\mathcal{H}_1$.

Теорема 2. *При выполнении условий (13) и (14) спектр оператора $A\,|_{\mathcal{H}_1}$ заключен в $C\lambda^2$-окрестности собственных значений $E_\alpha(s)$ матриц $B(s), s \in E/Z^{\nu}$, где C—некоторая абсолютная константа.*

Случай $N = 2$ (одно- и двухчастичные инвариантные подпространства). Рассмотрим подробнее вид оператора $A^0_{N=2}$ в подпространстве $l_2^{R_2}, R_2 = \{1, 2\}$. Всякая минимальная пара мультииндексов (Γ, Γ'), у которой $N(\Gamma) \leq 2$, $N(\Gamma') \leq 2$, имеет либо вид (10ª) (при $N(\Gamma) = N(\Gamma') = 1$), либо вид

$$\operatorname{supp}\Gamma = \operatorname{supp}\Gamma' = \{x\}, \;\; N(\gamma(x)) = N(\gamma'(x)) = 2. \tag{16}$$

Отсюда получаем, что отличные от нуля матричные элементы $a^0_{\Gamma,\Gamma'}$ либо имеют форму (11) при $N(\gamma(x)) = N(\gamma'(x)) = 1$, либо форму

$$a^0_{\Gamma,\Gamma'} = b^{(1,1)}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha'_1,\alpha'_2}(s(x_1), s(x_2))\delta_{\operatorname{supp}\Gamma,\operatorname{supp}\Gamma'}, \tag{17}$$

$$\operatorname{supp}\Gamma = \{x_1, x_2\},$$

где $x_1 < x_2$ при некотором упорядочении в E, α_i, α'_i— индексы полевых переменных:

$$\alpha_i = \gamma(x_i), \;\; \alpha'_i = \gamma'(x_i), \;\; \alpha_i, \alpha'_i \in M, \;\; i = 1, 2,$$

или, наконец, вид

$$a^0_{\Gamma,\Gamma'} = b^{(2)}_{\gamma,\gamma'}(s(x))\delta_{x,x'}, \tag{18}$$

$$\operatorname{supp}\Gamma = \operatorname{supp}\Gamma' = \{x\}, \;\; N(\gamma(x)) = N(\gamma'(x)) = 2.$$

Числа $\{b^{(1,1)}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha'_1,\alpha'_2}(s_1,s_2)\} \equiv B^{(1,1)}(s_1,s_2)$ и $\{b^{(2)}_{\gamma,\gamma'}(s)\} \equiv B^{(2)}(s)$ не превосходят

$$\max\{\mid b^{(1,1)}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha'_1,\alpha'_2}(s_1,s_2)\mid, \mid b^{(2)}_{\gamma,\gamma'}(s)\mid\} < \lambda^2. \tag{19}$$

Из (17) и (18) видно, что обратный оператор $(A^0_{N=2})^{-1}$ существует в том и только в том случае, когда обратимы матрицы $B^{(1)}(s)$, $B^{(1,1)}(s_1,s_2)$ и $B^{(2)}(s)$, при этом матричные элементы $a^{0,-1}_{\Gamma,\Gamma'}$ этого оператора либо имеют вид (13), либо задаются формулами (17) и (18), в которых матричные элементы матриц $B^{(1,1)}(s_1,s_2)$ и $B^{(2)}(s)$ заменены элементами обратных матриц

$$(B^{(1,1)}(s_1,s_2))^{-1} = \{b^{(1,1),-1}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha'_1,\alpha'_2}(s_1,s_2)\}, \tag{20}$$

$$(B^{(2)}(s))^{-1} = \{b^{(2),-1}_{\gamma,\gamma'}(s)\}.$$

Наконец, условие двухчастичной отделимости эквивалентно оценке (14) вместе с оценками

$$\mid b^{(1,1),-1}_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha'_1,\alpha'_2}(s_1,s_2)\mid, \mid b^{(2),-1}_{\gamma,\gamma'}(s)\mid < \frac{1}{\lambda^{2+1/4}}. \tag{21}$$

Таким образом, если (14) и (21) выполнены, то существуют два инвариантных кластерных подпространства $\mathcal{H}_1$ (одночастичное подпространство) и $\mathcal{H}_2$ (двухчастичное подпространство). Предположим теперь, что кластерная функция ω оператора A отлична от нуля лишь для наборов $\{(\Gamma_1,\Gamma'_1),\ldots,(\Gamma_s,\Gamma'_s)\}$ таких, что все пары мультииндексов (Γ_i,Γ'_i) ранга $N(\Gamma)$ и $N(\Gamma')$ имеют одинаковую четность

$$N(\Gamma) = N(\Gamma') \pmod 2. \tag{22}$$

В этом случае матричные элементы $a^0_{\Gamma,\Gamma'}$ также отличны от нуля лишь при условии (22). При этом положение спектра оператора A в $\mathcal{H}_2$ уточняется следующей теоремой. Из (19) и (21) следует, что собственные значения $\{E^{1,1}_{\alpha_1,\alpha_2}(s_1,s_2)\}$ и $\{E^{(2)}_{\gamma}(s)\}$ матриц $B^{(1,1)}(s_1,s_2)$ и $B^{(2)}(s)$ заключены в пределах

$$C_2\lambda^{2+1/4} < \mid E^{1,1}_{\alpha_1,\alpha_2}(s_1,s_2)\mid < C_1\lambda^2, \tag{23}$$

где C_1, C_2—абсолютные константы (аналогичные неравенства верны для $\{E^{(2)}_{\gamma}(s)\}$).

Теорема 3. *При сформулированных выше предположениях (21) и (22) спектр $A\,|_{\mathcal{H}_2}$ лежит в $C\lambda^3$-окрестности собственных значений матриц $B^{(1,1)}(s_1,s_2)$, $B^{(2)}(s)$ (C—абсолютная константа).*

Проверка условий отделимости при $N > 2$ сложнее, чем в случаях $N = 1$ или 2, поскольку у оператора A^0_k при $k > 2$ могут появиться уже “недиагональные” элементы (из-за “недиагональных” минимальных пар (Γ,Γ') вида $\operatorname{supp}\Gamma = (x_1,x_2)$, где x_1,x_2— соседние точки и $N(\gamma(x_1)) = 2$, $N(\gamma(x_1)) = 1$, $\operatorname{supp}\Gamma' = \{x, N(\gamma(x)) = 1\}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $A \in \mathcal{J}_\lambda$—самосопряженный кластерный оператор, для которого выполнены условия теоремы. Сначала построим цепочку возрастающих инвариантных относительно A и группы $\{U_s, s \in Z^\nu\}$ подпространств

$$\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{L}_N \subset l_2(\mathfrak{M}_0) \tag{24}$$

и затем определим подпространства $\mathcal{H}_k$ в виде “ортогональных разностей”

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{L}_1,\ \mathcal{H}_2 = \mathcal{L}_2 \ominus \mathcal{L}_1,\ \mathcal{H}_N = \mathcal{L}_N \ominus \mathcal{L}_{N-1}. \tag{25}$$

Построение подпространств $\mathcal{L}_k$, $k = 1,\ldots,N$. Разложение $l_2(\mathfrak{M}_0)$ в прямую сумму

$$l_2^{R_k} \oplus l_2^{\mathcal{N}\setminus R_k}$$

порождает разложение оператора A в матрицу

$$A \sim \begin{pmatrix} A^{(k)}_{11} & A^{(k)}_{12} \\ A^{(k)}_{21} & A^{(k)}_{22} \end{pmatrix},$$

где $A^{(k)}_{11}$: $l_2^{R_k} \to l_2^{R_k}, A^{(k)}_{12} : l_2^{\mathcal{N}\setminus R_k} \to l_2^{R_k}$ и т. д. Оператор $A^{(k)}_{11}$ представляется в виде

$$A^{(k)}_{11} = A^{(0)}_k + A^{(1)}_k, \tag{26}$$

где $A^{(0)}_k$—сужение главной части $A^{(0)}$ оператора A на $l_2^{R_k}$, а оператор $A^{(1)}_k$ можно представить в виде

$$A^{(1)}_k = T_k^{\mu_k^{(1)}} \tilde{A}^{(1)}_k T_k^{\mu_k^{(2)}}, \tag{27}$$

где $\tilde{A}_k^{(1)}$—кластерный оператор с параметром кластерности λ^{β_k} и нормой

$$||| \tilde{A}_k^{(1)} |||_{\lambda^{\beta_k}} < \lambda^{\mu_k^{(2)}}, \ \ \mu_k^{(2)} = \frac{1-\beta_k}{2}. \tag{28}$$

Лемма 4. *Пусть выполнено условие отделимости (5). Тогда оператор $A_{11}^{(k)}$ обратим и его обратный $(A_{11}^{(k)})^{-1}$ представим в виде*

$$(A_{11}^{(k)})^{-1} = (T^{\mu_k^{(1)}})^{-1} \tilde{A}_{11}^{(k)} (T^{\mu_k^{(1)}})^{-1}, \tag{29}$$

где $\tilde{A}_{11}^{(k)}$—кластерный оператор из алгебры $\mathfrak{B}(\tilde{A}_k^{(0)}, \tilde{A}_k^{(1)}, T_k^{\mu_k^{(2)}-\mu_k^{(1)}})$ рядов вида (25.2), *причем*

$$| \tilde{A}_{11}^{(k)} |_{\lambda^{\beta_k}} < 2/\lambda^{1/4}. \tag{30}$$

Доказательство. Воспользовавшись разложением (26) и представлениями (5) и (27), оператор $(A_{11}^{(k)})^{-1}$ можно представить в виде

$$\begin{gathered}
(A_{11}^{(k)})^{-1} = (A_k^{(0)})^{-1} - (A_k^{(0)})^{-1} A_k^{(1)} (A_k^{(0)})^{-1} + \cdots \\
\cdots + \underbrace{(-1)^n (A_k^{(0)})^{-1} A_k^{(1)} (A_k^{(0)})^{-1} \ldots A_k^{(1)} (A_k^{(0)})^{-1}}_{n \text{ раз}} + \cdots = \\
= (T_k^{\mu_k^{(1)}})^{-1} [\tilde{A}_k^{(0)} - \tilde{A}_k^{(0)} (T_k^{\mu_k^{(1)}-\mu_k^{(2)}})^{-1} \tilde{A}_k^{(1)} (T_k^{\mu_k^{(1)}-\mu_k^{(2)}})^{-1} \tilde{A}_k^{(0)} + \cdots \\
\cdots + (-1)^n \tilde{A}_k^{(0)} (T_k^{\mu_k^{(1)}-\mu_k^{(2)}})^{-1} \tilde{A}_k^{(1)} (T_k^{\mu_k^{(1)}-\mu_k^{(2)}})^{-1} \tilde{A}_k^{(0)} \ldots \\
\cdots \tilde{A}_k^{(1)} (T_k^{\mu_k^{(1)}-\mu_k^{(2)}})^{-1} \tilde{A}_k^{(0)} + \cdots] (T_k^{\mu_k^{(2)}})^{-1}.
\end{gathered} \tag{31}$$

Положим $\tilde{A}_{11}^{(k)}$ равным сумме ряда в квадратных скобках в последней части равенства (31). Норма $| \tilde{A}_{11}^{(k)} |_{\lambda^{\beta_k}}$ в алгебре
$\mathfrak{B}(\tilde{A}_k^{(0)}, \tilde{A}_k^{(1)}, T_k^{\mu_k^{(1)}-\mu_k^{(2)}})$ не превосходит

$$||| \tilde{A}_k^{(0)} |||_{\lambda^{\beta_k}} + \sum_{n=1}^{\infty} ||| \tilde{A}_k^{(0)} |||_{\lambda^{\beta_k}}^{n+1} | T_k^{\mu_k^{(1)}-\mu_k^{(2)}} |^{-n} \times$$

$$\times ||| \tilde{A}_k^{(1)} |||_{\lambda^{\beta_k}} (C\lambda^{\beta_k})^n < \frac{1}{\lambda^{\varepsilon}} (1 + \sum_1^{\infty} (\lambda^{1/2-\varepsilon-(k+1/2)\beta_k})^n C^{2n}) < \frac{2}{\lambda^{1/4}}$$

при $\frac{1}{2} - \varepsilon - (k+\frac{1}{2})\beta_k > 0$ и достаточно малых λ. Лемма доказана.

Будем искать каждое подпространство $\mathcal{L}_k$ в виде графика

$$\mathcal{L}_k = \{ f + S^{(k)} f, \ f \in l_2^{R_k} \} \tag{32}$$

некоторого оператора $S^{(k)} : l_2^{R_k} \to l_2^{\mathcal{N} \setminus R_k}$. Инвариантность $\mathcal{L}_k$ относительно оператора A эквивалентна соотношению

$$A_{21}^{(k)} + A_{22}^{(k)} S^{(k)} = S^{(k)} (A_{11}^{(k)} + A_{12}^{(k)} S^{(k)}),$$

которое в силу доказанной леммы можно переписать в виде

$$S^{(k)} = A_{21}^{(k)} (A_{11}^{(k)})^{-1} + A_{22}^{(k)} S^{(k)} (A_{11}^{(k)})^{-1} - S^{(k)} A_{12}^{(k)} S^{(k)} (A_{11}^{(k)})^{-1} \tag{33}$$

и рассматривать как уравнение для отыскания оператора $S^{(k)}$. Заметим, что операторы $A_{12}^{(k)}$ и $A_{21}^{(k)}$ можно представить в виде

$$A_{21}^{(k)} = \tilde{A}_{21}^{(k)} T_k^{\mu_k^{(2)}}, \ \ A_{12}^{(k)} = T_k^{\mu_k^{(2)}} \tilde{A}_{12}^{(k)}, \tag{34}$$

где $\tilde{A}_{21}^{(k)}$ и $\tilde{A}_{12}^{(k)}$—кластерные операторы с параметром кластерности λ^{β_k} и нормами

$$||| \tilde{A}_{12}^{(k)} |||_{\lambda^{\beta_k}}, \ ||| \tilde{A}_{21}^{(k)} |||_{\lambda^{\beta_k}} < \lambda^{\mu_k^{(2)}(k+1)}. \tag{35}$$

Оператор $A_{22}^{(k)}$ можно рассматривать как кластерный оператор с параметром кластерности λ^{β_k} и нормой

$$||| A_{22}^{(k)} |||_{\lambda^{\beta_k}} < \lambda^{2\mu_k^{(2)}(k+1)}. \tag{36}$$

Лемма 5. *Существует решение $S^{(k)}$ уравнения* (33), *принадлежащее алгебре*

$$\mathfrak{B}(\tilde{A}_k^{(0)}, A_k^{(1)}, \tilde{A}_{12}^{(k)}, \tilde{A}_{21}^{(k)}, \tilde{A}_{22}^{(k)}, (T_k^{\mu_k})^{-1}),$$

и его норма $| S^{(k)} |_{\lambda^{\beta_k}}$ в этой алгебре не превосходит

$$| S^{(k)} |_{\lambda^{\beta_k}} < C \lambda^{\frac{1}{4(12k+4)}}, \tag{37}$$

C—абсолютная константа. Аналогичное утверждение верно и для сопряженного оператора $(S^{(k)})^*$.

Доказательство. Сначала мы напишем разложение решения уравнения (33) в ряд операторов $(A_{11}^{(k)})^{-1}, A_{12}^{(k)}, A_{21}^{(k)}, A_{22}^{(k)}$. Для любой пары $\alpha = (s, q)$ целых чисел $s \geq 0$, $q \geq 0$ введем оператор

$$B_\alpha = (A_{22}^{(k)})^s A_{21}^{(k)} (A_{11}^{(k)})^{-(q+1)} \tag{38}$$

и для последовательности $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$, $\alpha_i = (s_i, q_i)$ положим

$$B_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} = B_{\alpha_1} A_{12}^{(k)} B_{\alpha_2} A_{12}^{(k)} \dots A_{12}^{(k)} B_{\alpha_r}. \tag{39}$$

Последовательность $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ назовем *регулярной*, если суммы

$$S_i = s_1 + s_2 + \dots + s_i, \;\; Q_i = q_1 + \dots + q_i$$

удовлетворяют условиям

$$Q_i \geq S_i + (i-1), \;\; i = 1, \dots, r-1, \tag{40}$$

$$Q_r = S_r + (r-1)$$

и $q_2 > 0$ при $r > 1$. Покажем, что существует решение уравнения (33), представимое в виде ряда

$$S^{(k)} = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)} x_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} B_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}, \tag{41}$$

где суммирование ведется по всем регулярным последовательностям $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Подставив $S^{(k)}$ в виде (41) в уравнение (33), получим следующие реккурентные соотношения для коэффициентов $x_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}$:

1) при $r = 1$

$$x_{(s,q)} = x_{(s-1,q-1)}, \;\; s > 0, \;\; q > 0, \tag{42}$$

$$x_{0,0} = 1, \;\; x_{0,q} = x_{s,0} = 0, \;\; s > 0, \;\; q > 0,$$

2) при $r > 1$ и $\alpha_1 \neq (0, q)$

$$x_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} = x_{\hat{\alpha}_1,\alpha_2,\dots,\bar{\alpha}_r} - \sum_{p=1}^{r-1} x_{\alpha_1,\dots,\alpha_p} x_{\alpha_{p+1},\dots,\tilde{\alpha}_r}, \tag{43}$$

где для $\alpha = (s, q)$ $\hat{\alpha} = (s-1, q)$ (при $s > 0$) и $\tilde{\alpha} = (s, q-1)$ (при $q > 0$). В случае, когда $\alpha_1 = (0, q)$, слагаемое $x_{\bar{\alpha}_1,\alpha_2,\dots,\bar{\alpha}_r}$ отсутствует в левой части (43). Заметим, что если последовательность $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ нерегулярна, то нерегулярна последовательность $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_r)$ и при любом $p = 1, \dots, r-1$ одна из последоваетльностей $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ или $(\alpha_{p+1}, \dots, \tilde{\alpha}_r)$. Таким образом, наше требование $x_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} = 0$ для всех нерегулярных

последовательностей согласовано с соотношениями (43). Из соотношений (42) вытекает, что при $r = 1$

$$x_{s,q} = \delta_{s,q},$$

а коэффициенты $x_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}$ для регулярных последовательностей $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ однозначно восстанавливаются из реккурентных соотношений (43). Покажем, что ряд

$$\sum | x_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} | u^{S_r} v^r < \infty \tag{44}$$

при достаточно малых u и v. Введем для этого коэффициенты $y_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}$ ($(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$—регулярная последовательность), удовлетворяющие реккурентным соотношениям

$$y_{(s,q)} = \delta_{s,q}, \;\; r = 1, \tag{45}$$

$$y_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} = y_{\hat{\alpha}_1,\dots,\bar{\alpha}_r} + \sum_p y_{\alpha_1,\dots,\alpha_p} y_{\alpha_{p+1},\dots,\tilde{\alpha}_r},$$

при $r > 1$ и $\alpha_1 \neq (0, q)$ (при $\alpha_1 = (0, q)$ отсутствует первое слагаемое $y_{\hat{\alpha}_1,\alpha_2,\dots,\bar{\alpha}_r}$ в правой части (45)). Очевидно, что $y_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} \geq 0$ и

$$| x_{\alpha_1,\dots,\alpha_r} | \leq y_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}. \tag{46}$$

Введем суммы

$$Y_{S,r} = \sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_r): \\ S_r = S > 0}} y_{\alpha_1,\dots,\alpha_r}. \tag{47}$$

Из соотношений (45) легко получаем, что при $r > 1$ и $S > 0$

$$Y_{S,r} = Y_{S-1,r} + \sum_{\substack{S_1 + S_2 = S \\ 1 \leq p \leq r-1}} Y_{S_1,p} Y_{S_2,r-p}, \tag{48}$$

и для $r > 1$ и $S = 0$

$$Y_{0,r} = \sum_{p=1}^{r-1} Y_{0,p} Y_{0,p-r}. \tag{49}$$

Наконец,

$$Y_{S,1} = 1. \tag{50}$$

Отсюда легко выводится, что функция

$$w(u,v)=\sum_{\substack{S\geq 0\\ r\geq 0}} Y_{S,r}u^s v^r \tag{51}$$

удовлетворяет квадратному уравнению

$$w=v+uw+w^2,\ \ w(u,0)=0 \tag{52}$$

При малых u,v решение этого уравнения, равное нулю при $v=$ $=0$, аналитично по переменным u,v. Таким образом, ряд (43), а следовательно, и ряд (44) сходятся в малой окрестности точки $u=v=0$.

Подставляя в (38) выражения (29) и (34) для операторов $(A_{11}^{(k)})^{-1}$ и $A_{21}^{(k)},A_{12}^{(k)}$, получим, что

$$B_\alpha=(A_{22}^{(k)})^s(\tilde{A}_{21}^{(k)})(T_k^{\mu_1^{(k)}-\mu_2^{(k)}})^{-1}\times$$
$$\times\underbrace{\tilde{A}_{11}^{(k)}(T_k^{\mu_1^{(k)}})^{-2}\tilde{A}_{11}^{(k)}(T_k^{\mu_1^{(k)}})^{-2}\ldots\tilde{A}_{11}^{(k)}(T_k^{\mu_1^{(k)}})^{-1}}_{(q+1)\text{раз}}. \tag{53}$$

Таким образом, снова воспользовавшись выражением (34) для $A_{12}^{(k)}$, получим, что

$$B_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}=(A_{22}^{(k)})^{s_1}(\tilde{A}_{21}^{(k)})(T_k^{\mu_2^{(k)}-\mu_1^{(k)}})^{-1}\times$$
$$\times\underbrace{\tilde{A}_{11}^{(k)}(T_k^{\mu_1^{(k)}})^{-2}\ldots\tilde{A}_{11}^{(k)}(T_k^{\mu_1^{(k)}-\mu_2^{(k)}})^{-1}}_{(q_1+1)\text{раз}}(\tilde{A}_{12}^{(k)})(A_{22}^{(k)})^{s_2}\times$$
$$\times\tilde{A}_{21}^{(k)}(T_k^{\mu_2^{(k)}-\mu_1^{(k)}})^{-1}\underbrace{\tilde{A}_{11}^{(k)}(T_k^{\mu_2^{(k)}})^{-2}\ldots\tilde{A}_{11}^{(k)}(T_k^{\mu_1^{(k)}-\mu_2^{(k)}})^{-1}}_{(q_2+1)\text{раз}}\times$$
$$\times\tilde{A}_{12}^{(k)}(A_{22}^{(k)})^{s_3}\ldots(A_{22}^{(k)})^{s_2}\tilde{A}_{21}^{(k)}(T_k^{\mu_1^{(k)}-\mu_2^{(k)}})^{-1}\times$$
$$\times\underbrace{\tilde{A}_{11}^{(k)}(T_k^{\mu_2^{(k)}})^{-2}\ldots\tilde{A}_{11}^{(k)}(T_k^{\mu_1^{(k)}})^{-1}}_{(q_2+1)\text{раз}}. \tag{54}$$

Так как $\tilde{A}_{11}^{(k)}$ представляется рядом по степеням операторов $\tilde{A}_k^{(0)},\tilde{A}_k^{(1)}$ и $(T_k^{\mu_1^{(k)}-\mu_2^{(k)}})^{-1}$, из (41) действительно следует, что $S^{(k)}$ принадлежит алгебре

$$\mathfrak{B}(\tilde{A}_k^{(0)},\tilde{A}_k^{(0)},(T_k^{\mu_2^{(k)}})^{-1},T_k^{\mu_1^{(k)}},A_{22}^{(k)},\tilde{A}_{12}^{(k)},\tilde{A}_{21}^{(k)})\equiv\mathfrak{B}_k,$$

и норма $\mid S^{(k)}\mid_{\lambda^{\beta_k}}$ в силу (30), (35), (36) допускает оценку

$$\mid S^{(k)}\mid_{\lambda^{\beta_k}}<\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}\mid x_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}\mid|||\,A_{22}^{(k)}\,|||_{\lambda^{\beta_k}}^{S_r}\times$$
$$\times\,|||\,\tilde{A}_{21}^{(k)}\,|||_{\lambda^{\beta_k}}^{r}\,|||\,\tilde{A}_{12}^{(k)}\,|||_{\lambda^{\beta_k}}^{r-1}\,|||\,(T^{\mu_2^{(k)}-\mu_1^{(k)}})^{-1}\,|||_{\lambda^{\beta_k}}^{2r-1}\times$$
$$\times\,|||\,\tilde{A}_{11}^{(k)}\,|||_{\lambda^{\beta_k}}^{Q_r+r}\,|||\,(T^{\mu_1^{(k)}})^{-1}\,|||_{\lambda^{\beta_k}}^{2Q_r+1}\,(C\lambda^{\beta_k})^{S_r+Q_r+3r-2}<$$
$$<\lambda^{[(k+1)(1-\beta_k)S_r+\frac{1-\beta_k}{2}(k+1)(2r-1)-\beta_k k(2r-1)]}\times$$
$$\times\lambda^{[-\varepsilon(Q_r+r)-\frac{1+\beta_k}{2}k(2Q_r+1)+\beta_k(S_r+Q_r+3r-2)]}\times$$
$$\times 2^{Q_r+r}C^{S_r+Q_r-3r-2}<\frac{1}{2C^3}[2C^2\lambda^{1-(2k-1)\beta_k-\varepsilon}]^{S_r}\times$$
$$\times[4C^4\lambda^{1-(4k+3)\beta_k-2\varepsilon}]^r\lambda^{-\frac{1}{2}+\varepsilon+(2k-\frac{5}{2})\beta_k}.$$

Здесь мы воспользовались условием регулярности (40). Таким образом, при условии, что $1-(2k-1)\beta_k-\varepsilon>0, 1-(4k+3)\beta_k-2\varepsilon>$ >0, ряд (41) сходится и норма $\mid S^{(k)}\mid_{\lambda^{\beta_k}}$ удовлетворяет оценке

$$\mid S^{(k)}\mid_{\lambda^{\beta_k}}<C_1\lambda^{\frac{1}{2}-\varepsilon-(2k-\frac{11}{2})\beta_k}=C\lambda^{\frac{1}{4(12k+4)}},$$

где $C_1>0$ и $C>0$—абсолютные константы. Таким образом, $S^{(k)}$— кластерный оператор с параметром кластерности $C_0\lambda^{\beta k}$ и его норма $|||\,S^{(k)}\,|||_{C_0\lambda^{\beta_k}}$ при $\varepsilon=1/4$ и

$$\frac{1}{2}-\varepsilon-(2k-\frac{11}{2})\beta_k=\frac{1}{4(12k+4)}$$

и достаточно малых λ очень мала.

Аналогично разбирается случай оператора $(S^{(k)})^*$. Лемма доказана.

Таким образом, мы построили подпространство $\mathcal{L}_k$ вида (32), инвариантное относительно оператора A. Поскольку оператор $S^{(k)}$, как видно из его построения, коммутирует с группой сдвигов $\{U_s, s\in Z^\nu\}$, подпространство $\mathcal{L}_k$ инвариантно относительно этой группы. Оценим теперь границы спектра $\sigma(A\mid_{\mathcal{L}_k})$ оператора A в $\mathcal{L}_k$ и в его ортогональном дополнении $\mathcal{L}_k^\perp$.

Заметим, что кластерный оператор $(S^{(k)})^*S^{(k)}$ отображает подпространство $l_2^{R_k}$ в себя и его норма $|||\,(S^{(k)})^*S^{(k)}\,|||_{C_0\lambda^{\beta_k}}$, а также операторная норма $\| (S^{(k)})^* S^{(k)} \|$ малы. Отсюда, в частности, следует, что определено отображение

$$V_k : l_2^{R_k} \to \mathcal{L}_k : f \to g = (E_k + (S^{(k)})^*(S^{(k)}))^{-1/2} f +$$

$$+ S^{(k)}(E_k + (S^{(k)})^*(S^{(k)}))^{-1/2} f, f \in l_2^{R_k}, \tag{55}$$

где E_k—единичный оператор в $l_2^{R_k}$ и V_k унитарно отображает $l_2^{R_k}$ на все $\mathcal{L}_k$. При этом квадратичная форма $(Ag, g), g \in \mathcal{L}_k$, равна

$$(Ag, g) = (B_k f, f), \;\; f = V_k^{-1} g \in l_2^{R_k}, \tag{56}$$

а оператор B_k, действующий в $l_2^{R_k}$ и унитарно эквивалентный оператору $A\,|_{\mathcal{L}_k}$, равен

$$B_k = (E_k + (S^{(k)})^*(S^{(k)}))^{-1/2}[A_{11}^{(k)} + A_{12}^{(k)} S^{(k)} + \tag{57}$$

$$+ (S^{(k)})^* A_{21}^{(k)} + (S^{(k)})^* A_{22}^{(k)}](E_k + (S^{(k)})^*(S^{(k)}))^{-1/2} =$$

$$= (E_k + (S^{(k)})^*(S^{(k)}))^{-1/2}(A_{11}^{(k)} + A_{12}^{(k)} S^{(k)})(E_k + (S^{(k)})^*(S^{(k)}))^{-1/2}.$$

Здесь мы воспользовались уравнением (33).

Далее,

$$A_{11}^{(k)} + A_{12}^{(k)} S^{(k)} = A_{11}^{(k)}[E_k + (A_{11}^{(k)})^{-1} A_{12}^{(k)} S^{(k)}] \tag{58}$$

и с помощью представлений (29) и (34) находим, что

$$(A_{11}^{(k)})^{-1} A_{12}^{(k)} S^{(k)} = (T_k^{\mu_1^{(k)}})^{-1} \tilde{A}_{11}^{(k)} (T_k^{\mu_1^{(k)} - \mu_2^{(k)}})^{-1} \tilde{A}_{12}^{(k)} S^{(k)}$$

и норма этого оператора в алгебре $\mathfrak{B}_k$ не превосходит

$$C_1 \lambda^{-(\frac{1+\beta_k}{2})k - \varepsilon - \beta_k k + (\frac{1-\beta_k}{2})(k+1) - \varepsilon - (2k+\frac{5}{2})\beta_k} =$$

$$= C_1 \lambda^{1 - 2\varepsilon - (4k+3)\beta_k} < C \lambda^{\frac{9}{2(4k+12)}},$$

где C_1—абсолютная константа. Норма оператора $(A_{11}^{(k)})^{-1} A_{12}^{(k)} \times \times S^{(k)}$, таким образом, мала. Из (57) и (58) находим, что оператор B_k обратим и в силу оценки (30)

$$\| B_k^{-1} \| < \| (A_{11}^{(k)})^{-1} \| < C \lambda^{-(1+\beta_k) + \beta_k - 1/4}. \tag{59}$$

Отсюда получаем, что спектр $\sigma(B_k) = \sigma(A\,|_{\mathcal{L}_k})$ ограничен снизу:

$$x_k \equiv \inf_{z \in \sigma(A|_{\mathcal{L}_k})} \{| z |\} > \bar{C} \lambda^{k + (k-1)\beta_k + 1/4}, \tag{60}$$

$\bar{C}$—абсолютная константа (не зависящая ни от k ни от λ).

Далее, ортогональное дополнение $\mathcal{L}_k^{\perp}$ к подпространству $\mathcal{L}_k$ имеет вид

$$\mathcal{L}_k^{\perp} = \{f - (S^{(k)})^* f, f \in l_2^{\mathcal{N} \setminus R_k}\}$$

и отображение

$$\overline{V}_k : l_2^{\mathcal{N} - R_k} \to \mathcal{L}_k^{\perp} : f \to g = (E_{>k} + S^{(k)}(S^{(k)})^*)^{-1/2} f -$$

$$- (S^{(k)})^*(E_{>k} + S^{(k)}(S^{(k)})^*)^{-1/2} f, f \in l_2^{\mathcal{N} \setminus R_k}, \tag{61}$$

($E_{>k}$—единичный оператор в $l_2^{\mathcal{N} \setminus R_k}$) унитарно переводит $l_2^{\mathcal{N} \setminus R_k}$ в $\mathcal{L}_k^{\perp}$. Рассуждая как и выше, найдем, что оператор $A\,|_{\mathcal{L}_k^{\perp}}$ оказывается при этом унитарно эквивалентным оператору $\bar{B}_k$ в $l_2^{\mathcal{N} \setminus R_k}$, имеющему вид

$$\bar{B}_k = (E_{>k} + S^{(k)}(S^{(k)})^*)^{1/2}(A_{22}^{(k)} - S^{(k)} A_{12}^{(k)})(E_{>k} + S^{(k)}(S^{(k)})^*)^{-1/2}.$$

Далее из разложения (41) для $S^{(k)}$ и представления (34) для $A_{12}^{(k)}$ следует, что норма $| S^{(k)} A_{12}^{(k)} |_{\lambda^{\beta_k}}$ не превосходит $C_1 \lambda^{(k+1) - (3k+4)\beta_k} \times \times \lambda^{-1/4}$ и, таким образом, $\| S^{(k)} A_{12}^{(k)} \| < \bar{C} \lambda^{(k+1) - (3k+4)\beta_k - 1/4}$. В силу очевидной оценки $\| A_{22}^{(k)} \| < \bar{C} \lambda^{k+1}$ находим окончательно, что $\| \bar{B}_k \| < \bar{C} \lambda^{(k+1) - (3k+4)\beta_k - 1/4}$ и

$$\bar{x}_k \equiv \operatorname{supp} \sigma(A\,|_{\mathcal{L}_k^{\perp}}) < \bar{C} \lambda^{(k+1) - (3k+4)\beta_k - 1/4}. \tag{62}$$

В силу того, что $1 - (4k+3)\beta_k - 1/2 = \frac{9}{2(4k+12)} > 0, x_k > \bar{x}_k$ при достаточно малых λ, т. е. спектр $A\,|_{\mathcal{L}_k}$ отделен от спектра A в $\mathcal{L}_k^{\perp}$.

Отсюда вытекает, что $\mathcal{L}_k = \mathcal{H}(-\infty, -x_k) \oplus \mathcal{H}(x_k, \infty)$ и $\mathcal{L}_k^{\perp} = = \mathcal{H}(-\bar{x}_k, \bar{x}_k)$, где $\{\mathcal{H}(\Delta), \Delta \subset R^1\}$—спектральное семейство инвариантных подпространств самосопряженного оператора A.

Описанным выше способом мы построим подпространства $\mathcal{L}_k$ для каждого $k = 1, 2, \ldots, N$. При $k > 1$ мы видим из оценок (6) и (62), что $x_{k-1} > \bar{x}_k$ и, следовательно, $\mathcal{L}_{k-1} \subset \mathcal{L}_k$. Таким образом, определение (25) подпространств $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_N$ корректно. Эти подпространства инвариантны относительно A и $\{U_s\}$ и попарно ортогональны друг другу. Из (60) и (62) находим, что

$$\bar{C}_1 \lambda^{k + 3/8 - \frac{7}{8(k+3)}} < x_k = \inf_{z \in \sigma(A|_{\mathcal{H}_k})} | z | < \sup_{z \in \sigma(A|_{\mathcal{H}_k})} | z | \leq$$

$$\leq \bar{x}_{k-1} < \bar{C}_2 \lambda^{k-5/8+\frac{5}{8(k+2)}}, \tag{63}$$

откуда и следует (8).

Покажем, что каждое построенное нами инвариантное подпространство является кластерным k-частичным подпространством. В случае $k=1$ унитарное преобразование $V_1 : l_2^{R_1} \to \to \mathcal{L}_1 = \mathcal{H}_1$ переводит оператор $A\,|_{\mathcal{H}_1}$ в оператор B_1, задаваемый формулой (57) при $k=1$:

$$B_1 = (E_1 + (S^{(1)})^* S^{(1)})^{-1/2} (A_{11}^{(1)} + A_{12}^{(1)} S^{(1)}) \times$$
$$\times (E_1 + (S^{(1)})^* S^{(1)})^{-1/2}. \tag{64}$$

Поскольку $(E_1 + (S^{(1)})^* S^{(1)})^{\pm 1/2} = E_1 + D_1^{\pm}$, где $D_1^{\pm}$—кластерные операторы, из (64) получаем, что B_1—кластерный оператор из алгебры $\mathfrak{B}_1$.

В случае $k > 1$ построим унитарное отображение $W_k : l_2^{\{k\}} \to \mathcal{H}_k$. Зададим предварительно отображение

$$\widetilde{W}_k : l_2^{(k)} \to \mathcal{H}_k : f \to g = P_{\mathcal{L}_{k-1}^{\perp}} (f + S^{(k)} f) \in \mathcal{H}_k,$$

$f \in l_2^{\{k\}}$, где $P_{\mathcal{L}_{k-1}^{\perp}}$—оператор ортогонального проектирования в подпространство $\mathcal{L}_{k-1}^{\perp}$, ортогональное $\mathcal{L}_{k-1}$. Найдем явный вид $P_{\mathcal{L}_{k-1}^{\perp}}$. Для любого $\varphi \in l_2(\mathfrak{M}_0)$

$$P_{\mathcal{L}_{k-1}} \varphi = \psi + S^{(k-1)} \psi, \quad \psi \in l_2^{R_k},$$
$$P_{\mathcal{L}_{k-1}^{\perp}} \varphi = \xi - (S^{(k-1)})^* \xi, \quad \xi \in l_2^{\mathcal{N} \setminus R_k}.$$

Отсюда ($Q_{l_2^{R_{k-1}}}, Q_{l_2^{\mathcal{N} \setminus R_k}}$—проекторы в соответствующие пространства)

$$Q_{l_2^{R_{k-1}}} \varphi \equiv \varphi_1 = \psi - (S^{(k-1)})^* \xi,$$
$$Q_{l_2^{\mathcal{N} \setminus R_k}} \varphi \equiv \varphi_2 = \xi + S^{(k-1)} \psi.$$

Исключая из этих соотношений ψ, получаем, что

$$\xi = (E_{>(k-1)} + S^{(k-1)} (S^{(k-1)})^*)^{-1} (\varphi_2 - S^{(k-1)} \varphi_1),$$

где $E_{>(k-1)}$—единичный оператор в $l_2^{\mathcal{N} \setminus R_k}$ и обратный $(E_{>(k-1)} + +S^{(k-1)} (S^{(k-1)})^*)^{-1}$ вычисляется в этом пространстве. Таким образом,

$$P_{\mathcal{L}_{k-1}^{\perp}} \varphi = (E_{>(k-1)} + (S^{(k-1)})^*)(E_{>(k-1)} + S^{(k-1)} (S^{(k-1)})^*)^{-1} \times$$

$$\times (\varphi_2 - S^{(k-1)} \varphi_1).$$

Из этой формулы, учитывая, что при $f \in l_2^{\{k\}}$ функция $Q_{l_2^{R_{k-1}}} f = = (f + S^{(k)} f) = 0$, находим окончательно, что

$$\widetilde{W}_k f = (E_{>(k-1)} + (S^{(k-1)})^*)(E_{>(k-1)} + S^{(k-1)} (S^{(k-1)})^*)^{-1} \times$$
$$\times (f + S^{(k)} f). \tag{65}$$

Отсюда с помощью несложных подсчетов получаем, что

$$(\widetilde{W}_k f, \widetilde{W}_k f) = ((E_{\{k\}} + D_k) f, f),$$

где $E_{\{k\}}$—единичный оператор в $l_2^{\{k\}}$, а D_k—кластерный самосопряженный оператор, действующий в $l_2^{\{k\}}$ и принадлежащий алгебре $\tilde{\mathfrak{B}}_k$ рядов с образующими из алгебр $\mathfrak{B}_k$ и $\mathfrak{B}_{k-1}$; при этом кластерная норма D_k мала. Таким образом, определено отображение

$$W_k f = \widetilde{W} (E_{\{k\}} + D_k)^{-1/2}, \quad f \in l_2^{\{k\}}, \tag{66}$$

которое унитарно отображает $l_2^{\{k\}}$ на $\mathcal{H}_k$. При этом оператор $B_k = W_k^* A W_k$, действующий в $l_2^{\{k\}}$ и унитарно-эквивалентный $A\,|_{\mathcal{H}_k}$, оказывается кластерным, как это легко вывести из формул (65) и (66). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Заметим, что собственные значения $\{E_\alpha(s)\}$ матриц $B^{(1)}(s)$ образуют (бесконечнократный) спектр оператора $A_1^{(0)}$. Поскольку норма оператора $A_1^{(1)}$ не превосходит $C\lambda^2$ (как следует из леммы 2.2), спектр $A_{11}^{(1)}$ расположен в $\bar{C}\lambda^2$—окрестности собственных значений $\{E_\alpha(s)\}$ (где $\bar{C} > C > 0$—абсолютные константы). Напишем далее уравнение (33) при $k=1$:

$$S^{(1)} = A_{21}^{(1)} (A_{11}^{(1)})^{-1} + A_{22}^{(1)} S^{(1)} (A_{11}^{(1)})^{-1} - S^{(1)} A_{12}^{(1)} S^{(1)} (A_{11}^{(1)})^{-1}. \tag{67}$$

Его правую часть можно рассматривать как отображение T пространства операторов $S \in \mathfrak{A}_{l_2^{\{1\}}, l_2^{\mathcal{N} \setminus \{1\}}}$, действующих из $l_2^{\{1\}}$ в $l_2^{\mathcal{N} \setminus \{1\}}$ в себя. Поскольку

$$\| A_{21}^{(1)} \|, \| A_{22}^{(1)} \|, \| A_{12}^{(1)} \| < C_0 \lambda^2, \tag{68}$$

где C_0—абсолютная константа, $\| (A_{11}^{(1)})^{-1} \| < \lambda^{-5/4}$, как это следует из условия отделимости для $A_2^{(1)}$ и оценки $\| A_1^{(1)} \| < C\lambda^2$, шар в $\mathfrak{A}_{l_2^{\{1\}}, l_2^{\mathcal{N}\setminus\{1\}}}$:

$$\{S : \| S \| < \bar{C}\lambda^{3/4}\} \tag{69}$$

при некоторой константе $\bar{C} > 0$ переводится отображением T в себя и T действует в этом шаре как сжатие. Отсюда уравнение (67) имеет решение $S^{(1)}$ с нормой, не превосходящей (69), которое, как нетрудно понять, совпадает с рядом (41). Далее, воспользовавшись оценками (68) и (69), а также формулой (57) при $k = 1$, получим, что оператор B_1 в $l_2^{\{1\}}$, унитарно-эквивалентный оператору $A |_{\mathcal{H}_1}$, имеет вид

$$B_1 = A_{11}^{(1)} + G_1,$$

где $\| G \| < C\lambda^{5/2}$. Отсюда и следует утверждение теоремы 2.

Теорема 3 доказывается аналогично, если заметить, что в случае, когда выполнено условие (21), подпространства $l_2^{\text{четн}} = l_2^{\mathcal{N}_{\text{четн}}}$ и $l_2^{\text{нечетн}} = l_2^{\mathcal{N}_{\text{нечетн}}}$, где $\mathcal{N}_{\text{четн}}$ ($\mathcal{N}_{\text{нечетн}}$)— совокупность четных (нечетных) чисел, инвариантных относительно оператора A (и группы U_s), а подпространство $\mathcal{H}_2 \subset l_2^{\text{четн}}$ является “старшим” (по порядку величины спектра A) инвариантным подпространством в $l_2^{\text{четн}}$.

Замечание. Из приведенных в доказательстве теоремы 1 выкладок (см., например, формулу (57)) следует, что оператор $A |_{\mathcal{L}_k}$ в инвариантном подпространстве $\mathcal{L}_k$ унитарно-эквивалентен оператору $A_{11}^{(k)} + A_{12}^{(k)} S^{(k)}$. Таким образом, в подпространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, которые совпадают с соответствующими пространствами $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ (в условиях теоремы 3), спектр оператора A совпадает со спектрами операторов $A_{11}^{(1)} + A_{12}^{(1)} S^{(1)}$ и $A_{11}^{(2)} + A_{12}^{(2)} S^{(2)}$ соответственно.

§ 4. Некоторые примеры

Здесь мы рассмотрим применения развитой выше теории к некоторым конкретным моделям, упомянутым в § 5 гл. 2.

1. Модель Изинга на решетке $\mathbf{Z}^{\nu+1}$, $\nu > 0$ (при высоких значениях температуры). Эта модель описана в § 5 гл. 2. Напомним, что пространство спинов $S = \{-1, 1\}$, мера $\nu_0(\{1\}) = \nu_0(\{-1\}) = 1/2$. Невозмущенный базис на S состоит

из функций

$$\varphi_0(\sigma) = 1, \quad \varphi_1(\sigma) = \sigma, \quad \sigma = \pm 1.$$

Множество мультииндексов в этом случае совпадает с совокупностью C_{Z^ν} всех конечных подмножеств решетки Z^ν. Результаты предыдущих параграфов применительно к этой модели показывают, что трансфер-матрица поля Изинга унитарно-эквивалентна мультипликативно-кластерному оператору A, действующему в $l_2(C_{Z^\nu})$ с параметром кластерности $\lambda = C_0\beta$, где $C_0 > 0$—абсолютная константа. Легко проверить, что минимальные пары $X, X' \in C_{Z^\nu}$ (см. § 3) для оператора A имеют вид

$$X = X' = \{y\}, \text{ где } y \in Z^\nu, \tag{1}$$

т. е. состоят из одинаковых одноточечных подмножеств, а оператор $A^{(0)}$ (главная часть A, см. § 3) диагонален и его матричные элементы

$$a_{X,X'}^0 = \prod_{y \in x} \omega(\{y\}, \{y\}) \delta_{X,X'}, \tag{2}$$

где $\omega(X, X')$—кластерная функция оператора A. Несложная оценка этого семиинварианта показывает, что

$$\omega(\{y\}, \{y\}) = C_1\beta + O(\beta^2), \quad y \in Z^\nu, \tag{3}$$

где C_1—абсолютная константа. Отсюда вытекает, что при достаточно малых $\beta : \beta < \beta_0(N)$ выполнено условие N-частичной отделимости для оператора A и, следовательно, у трансфер-матрицы модели Изинга существует N инвариантных кластерных подпространств $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_N$, в которых оператор A имеет кластерный вид (при выборе надлежащего базиса в $\mathcal{H}_k$). В частности, в пространстве $\mathcal{H}_1$ оператор $A |_{\mathcal{H}_1} = A_1$ в базисе $\{h_x, x \in Z^\nu\}$, где $h_x = W_1 h_x^0$, $h_x^0(T) = \delta_{\{x\},T}$, а оператор W_1, определенный в предыдущем параграфе, действует как свертка

$$A_1 h_x = \sum_{y \in Z^\nu} a_{x-y}^{(1)} h_y, \tag{4}$$

где функция a_ξ, $\xi \in Z^\nu$ (как это следует из оценок и формул предыдущего параграфа), удовлетворяет оценке

$$| a_\xi | < L(C_0\beta)^{|\xi|}, \tag{5}$$

причем

$$| a_0 |> D\beta, \tag{6}$$

где L, C_0, D—абсолютные константы. Из (5) и (6), в частности, вытекает, что существует обратный оператор A_1^{-1} и его действие задается формулой

$$(A_1^{-1})h_x = \sum_y b_{x-y}^{-1} h_y, \tag{7}$$

где

$$| b_\xi^{-1} |< \frac{L}{\beta}(C_0\beta)^{|\xi|}, \tag{8}$$

где L—абсолютная константа.

Рассмотрим теперь подробнее оператор $A_2 = A_2 |_{\mathcal{H}_2}$. В силу кластерности этого оператора в базисе $\{h_{x_1,x_2}, x_1, x_2 \in Z^\nu$, $h_{x_1,x_2} = W_2 h^0_{x_1,x_2}, h^0_{x_1,x_2}(T) = \delta_{T,\{x_1,x_2\}}\}$ его матричные элементы $a_{T,T'}$ допускают кластерное разложение

$$a_{T,T'} = \omega((x_1, x_1'), (x_2, x_2')) + \omega((x_1, x_2'), (x_2, x_1')) + \omega(T, T'), \tag{9}$$

$T = (x_1, x_2), T' = (x_1', x_2')$, и кластерная функция ω удовлетворяет кластерным оценкам (6.2) с параметром $\lambda_2 = (C_0\beta)^{\beta_2}, C_0$—константа, а $\beta_2 = 1/40$ (см. предыдущий параграф).

Теорема 1. *В $\mathcal{H}_2$ можно выбрать ортонормированный базис $\{\hat{h}_{x_1,x_2}\}$ такой, что для матричных элементов A_2 в этом базисе будет по-прежнему верно кластерное разложение (9), причем*

$$\omega(\{x_1, x_1'\}, \{x_2, x_2'\}) = a^{(1)}_{x_1-x_1'} a^{(1)}_{x_2-x_2'}, \tag{10}$$

где a_ξ—функция, определенная в (4).

Доказательство. Как обычно, будем считать, что $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$—подпространства в $l_2(C_{Z^\nu})$. При этом, как следует из построений предыдущего параграфа, функции $\{h_x(T), x \in Z^\nu\}$ имеют вид

$$h_x(T) = \begin{cases} \delta_{xy} + \tilde{h}_x(\{y\}), & T = \{y\}, \\ \tilde{h}_x(T), & | T |\geq 2, \end{cases} \tag{10^a}$$

причем $\tilde{h}_x(T)$ удовлетворяет оценке

$$| \tilde{h}_x(T) |< L(C\beta)^{d_{\{x\}} \bigcup T}. \tag{11}$$

Для построения нужного нам базиса $\hat{h}_{x_1,x_2}$ в $\mathcal{H}_2$ рассмотрим систему $\{\tilde{h}_{x_1,x_2}\}$ функций из $l_2(C_{Z^\nu})$

$$\tilde{h}_{x_1,x_2}(T) = \begin{cases} 0, & | T |= 1, \\ \displaystyle\sum_{\substack{T_1 \bigcup T_2 = T \\ T_1 \bigcap T_2 = \emptyset}} h_{x_1}(T_1) h_{x_2}(T_2), & | T |> 1. \end{cases}$$

В силу мультипликативной кластерности A и оценки (11) можно показать, что

$$(A\tilde{h}_{x_1,x_2})(T) = \sum_{\substack{T_1 \bigcup T_2 = T \\ T_1 \bigcap T_2 = \emptyset}} (Ah_{x_1})(T_1)(Ah_{x_2})(T_2) + g_{x_1,x_2}(T) =$$

$$= \sum_{\substack{T_1 \bigcup T_2 = T \\ T_1 \bigcap T_2 = \emptyset}} a_{x_1-x_1'} h_{x_1'}(T_1) a_{x_2-x_2'} h_{x_2'}(T_2) + g_{x_1,x_2}(T) =$$

$$= \sum_{\{x_1',x_2'\}} (a_{x_1-x_1'} a_{x_2-x_2'} + a_{x_1-x_2'} a_{x_2-x_1'}) \tilde{h}_{x_1',x_2'}(T) + \tilde{g}_{x_1,x_2}(T), \tag{12}$$

где $\tilde{g}_{x_1,x_2}(T)$ удовлетворяет оценке

$$| \tilde{g}_{x_1,x_2}(T) |= L(C\lambda_2)^{d_{\{x_1,x_2\}} \bigcup T}. \tag{12^a}$$

Введем два семейства функций

$$\delta^{(1)}_{x_1,x_2} = P_{\mathcal{H}^\perp} \tilde{h}_{x_1,x_2},$$

$$\hat{g}^{(1)}_{x_1,x_2} = P_{\mathcal{H}^\perp} \tilde{g}_{x_1,x_2}, \tag{13}$$

где $\mathcal{H}^\perp$—ортогональное дополнение к прямой сумме $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, а $P_{\mathcal{H}^\perp}$—проектор на это подпространство. Из соотношения (12) получаем, что

$$(A\delta^{(1)}_{x_1,x_2})(T) - \sum_{x_1',x_2'} b_{(x_1,x_2),(x_1',x_2')} \delta^{(1)}_{x_1',x_2'}(T) = \hat{g}^{(1)}_{(x_1,x_2)}(T),$$

где

$$b_{(x_1,x_2),(x_1',x_2')} = a_{x_1-x_1'} a_{x_2-x_2'} + a_{x_1-x_2'} a_{x_2-x_1'}. \tag{14^a}$$

Далее воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого приведем несколько позже.

Лемма 2. *Пусть A_0—кластерный оператор в $l_2(C^{(2)}_{Z^\nu})$ ($C^{(2)}_{Z^\nu}$—совокупность двухточечных подмножеств Z^ν)*

$$(A_0 f)(T) = \sum_{T' \in C^{(2)}_{Z^\nu}} b_{T,T'} f(T'), \;\; T \in C^{(2)}_{Z^\nu}, \tag{14^б}$$

где $b_{T,T'}$ задается формулой (14). *Этот оператор обратим в $l_2(C^{(2)}_{Z^\nu})$ и обратный к нему A_0^{-1} снова является кластерным оператором с параметром кластерности $C\lambda_2$ и нормой*

$$||| A_0^{-1} ||| < L\beta^{-2}, \tag{15}$$

C и L—константы.

Обозначим матричные элементы A_0^{-1} через $b^{-1}_{\{x_1,x_2\},\{x'_1,x'_2\}}$ и перепишем соотношение (14^a) в виде

$$\sum_{x'_1,x'_2} b^{-1}_{\{x_1,x_2\},\{x'_1,x'_2\}} (A^\perp \delta^{(1)}_{x'_1,x'_2})(T) - \delta^{(1)}_{x_1,x_2}(T) =$$

$$= \sum_{x'_1,x'_2} b^{-1}_{\{x_1,x_2\},\{x'_1,x'_2\}} \hat{g}^{(1)}_{x'_1,x'_2}(T), \tag{16}$$

где $A^\perp = A \mid_{\mathcal{H}^\perp}$.

Рассмотрим далее пространство $\mathcal{K}$ семейств функций $\{\delta_{x_1,x_2}(T), (x_1,x_2) \in C^{(2)}_{Z^\nu}\}$ таких, что $\delta_{x_1,x_2} \in \mathcal{H}^\perp$ при всех $\{x_1,x_2\}$ и выполнена оценка

$$\mid \delta_{x_1,x_2}(T) \mid < L(C\lambda_2)^{d_{\{x_1,x_2\} \bigcup T}}, \tag{17}$$

где L—константа. Норма в $\mathcal{K}$ вводится обычным образом

$$\| \delta \|_{\mathcal{K}} = \inf L,$$

где нижняя грань берется среди всех L, для которых верна оценка (17). Воспользовавшись результатами предыдущего параграфа, можно показать, что

$$\| \{A^\perp \delta_{x_1,x_2}\} \|_{\mathcal{K}} \leq C\beta^3 \| \delta \|_{\mathcal{K}} .$$

И, таким образом, в силу оценки (15), отображение

$$\mathcal{K} \to \mathcal{K} : \delta = \{\delta_{x_1,x_2}\} \to \left\{ \sum_{x'_1,x'_2} b^{-1}_{\{x_1,x_2\},\{x'_1,x'_2\}} A \delta_{x'_1,x'_2}, \{x_1,x_2\} \in C^{(2)}_{Z^\nu} \right\}$$

является сжимающим. Отсюда и из оценок (15) и (12) следует, что семейство $\{\delta^{(1)}_{x_1,x_2}\}$ имеет конечную (порядка константы) норму. Рассмотрим далее

$$\delta^{(2)}_{x_1,x_2} = P_{\mathcal{H}_1} \tilde{h}_{x_1,x_2} = \sum_y C^y_{x_1,x_2} hy,$$

где

$$C^y_{x_1,x_2} = (h_y, \tilde{h}_{x_1,x_2}).$$

Из оценок для h_{x_1,x_2} легко установить, что

$$\mid C^y_{x_1,x_2} \mid < L(C\lambda_2)^{d_{\{x_1,x_2\} \bigcup \{y\}}},$$

и, таким образом, отсюда вытекает, что семейство $\{\delta^{(2)}_{x_1,x_2}\}$ подчинено оценке (17). Положим теперь

$$\tilde{\tilde{h}}_{x_1,x_2} = \tilde{h}_{x_1,x_2} - \delta^{(1)}_{x_1,x_2} - \delta^{(2)}_{x_1,x_2} \in \mathcal{H}_2. \tag{18}$$

Матрица Грамма $G_{\{x_1,x_2\},\{x'_1,x'_2\}}$ этого семейства имеет вид

$$G_{\{x_1,x_2\},\{x'_1,x'_2\}} = (\tilde{\tilde{h}}_{x_1,x_2}, \tilde{\tilde{h}}_{x'_1,x'_2}) = \delta_{\{x_1,x_2\},\{x'_1,x'_2\}} + D_{\{x_1,x_2\},\{x'_1,x'_2\}}, \tag{19}$$

где $D_{\{x_1,x_2\},\{x'_1,x'_2\}}$ удовлетворяет оценке

$$\mid D_{\{x_1,x_2\},\{x'_1,x'_2\}} \mid < L(C\lambda_2)^{d_{\{x_1,x_2\} \bigcup \{x'_1,x'_2\}}}. \tag{20}$$

Отсюда вытекает, что матрица $G^{-1/2}$ также имеет вид, аналогичный (19), и, таким образом, ортонормированная система функций

$$\hat{h}_{x_1,x_2} = G^{-1/2} \tilde{\tilde{h}}_{x_1,x_2}$$

имеет вид

$$\hat{h}_{x_1,x_2} = \tilde{\tilde{h}}_{x_1,x_2} + \hat{\delta}_{x_1,x_2},$$

где $\hat{\delta}_{x_1,x_2}$ удовлетворяет оценке (17). Из выражения (10^a) для h_x легко установить, что $\hat{h}_{x_1,x_2}$ образует базис в $\mathcal{H}_2$. Матричные элементы операторы A_2 в этом базисе по-прежнему имеют кластерное разложение вида (9), как это следует из леммы 3.2, причем в силу формулы (12) и единственности кластерного разложения мы и получаем (10). Теорема доказана.

Замечание. Равенство (10) означает, что оператор A в $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ имеет мультипликативно-кластерный вид. По-видимому, это справедливо и для любого N: в каждом из подпространств $\mathcal{H}_k$, $k = 1, \ldots, N$, можно выбрать базис $\{h_T, T \in$

$C^{(k)}_{Z^\nu}\}$ ($C^{(k)}_{Z^\nu}$— совокупность k-точечных подмножеств Z^ν) так, что оператор A в $\oplus_{k=1}^{N}\mathcal{H}_k$ имеет мультипликативно-кластерный вид.

Доказательство леммы 2. Пространство $l_2(C^{(2)}_{Z^\nu})$ можно отождествить с пространством $\tilde{l}_2^{\mathrm{sym}}(Z^\nu \times Z^\nu) \subset l_2^{\mathrm{sym}}(Z^\nu \times Z^\nu)$ симметричных функций $f(x_1, x_2)$ от двух переменных $x_1, x_2 \in Z^\nu$ таких, что

$$f(x, x) = 0.$$

Переходя к преобразованию Фурье

$$f(x_1, x_2) \to \tilde{f}(x_1, x_2) = \sum_{x_1, x_2} e^{i[(\lambda_1, x_1)+(\lambda_2, x_2)]} f(x_1, x_2)$$

($\lambda_1, \lambda_2 \in T^\nu$—точки ν-мерного тора), мы получим, что оператор A_0 (14^6) перейдет в оператор $\tilde{A}_0$, действующий в $\tilde{l}_2^{\mathrm{sym}}(T^\nu \times T^\nu)$ по формуле

$$(\tilde{A}_0\tilde{f})(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2)\tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2) -$$

$$- \int\limits_{T^\nu \times T^\nu} \tilde{\omega}(\mu_1, \mu_2)\delta(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2)\tilde{f}(\mu_1, \mu_2)d\mu_1 d\mu_2,$$

где $\tilde{L}_2^{\mathrm{sym}}(T^\nu \times T^\nu) \subset L_2^{\mathrm{sym}}(T^\nu \times T^\nu)$— пространство симметрических функций $\tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2)$ от двух переменных $\lambda_1, \lambda_2 \in T^\nu$ таких, что

$$\int\limits_{T^\nu \times T^\nu} f(\lambda_1, \lambda_2)\delta(\lambda_1 + \lambda_2 - \Lambda)d\lambda_1 d\lambda_2 = 0$$

при любом $\Lambda \in T^\nu$ ($d\lambda$—нормированная мера Хаара на торе T^ν), а $\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2)$—преобразование Фурье функции $a_{\xi_1}a_{\xi_2}$. Легко подсчитать, что обратный $\tilde{A}_0^{-1}$ к оператору $\tilde{A}_0$ имеет вид

$$(\tilde{A}_0^{-1}\tilde{f}) = \frac{1}{\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2)}\left[\tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2) - \left(\int\limits_{\mu_1+\mu_2=\lambda_1+\lambda_2} (\tilde{\omega}(\mu_1, \mu_2))^{-1} d\mu_1 d\mu_2)^{-1} \times\right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int\limits_{\mu_1+\mu_2=\lambda_1+\lambda_2} f(\mu_1, \mu_2)\tilde{\omega}^{-1}(\mu_1, \mu_2)d\mu_1 d\mu_2\right)\right].$$

Переходя снова к функциям $f \in \tilde{l}_2^{\mathrm{sym}}(Z^\nu \times Z^\nu)$, получаем, что обратный A_0^{-1} действует по формуле

$$(A_0^{-1}f)(x_1, x_2) = \sum_{(x_1', x_2')} b^{-1}_{x_1-x_1'} b^{-1}_{x_2-x_2'} f(x_1', x_2') -$$

$$- \sum_{(x_1', x_2')} K(x_1, x_2; x_1', x_2')f(x_1', x_2'),$$

где ядро $K(x_1, x_2; x_1', x_2')$ имеет вид

$$K(x_1, x_2; x_1', x_2') = \sum_{z,t} b^{-1}_{x_1-z} b^{-1}_{x_2-z} p(t-z) b^{-1}_{t-x_1'} b^{-1}_{t-x_2'},$$

где

$$p(\xi) = \int\limits_{T^\nu} e^{i(\Lambda,\xi)} \left(\int\limits_{\mu_1+\mu_2=\Lambda} \omega^{-1}(\mu_1, \mu_2)d\mu_1 d\mu_2 \right)^{-1} d\Lambda.$$

Заметим, что в силу (5), (6) функция $\omega(\lambda_1, \lambda_2)^{-1}$ аналитична в некоторой полосе

$$|\operatorname{Im}\lambda_i| < \bar{C}_1\beta^{-1}, \ i = 1, 2,$$

где $\bar{C}_1$—абсолютная константа. С помощью тех же рассуждений получаем, что функция

$$\left(\int\limits_{\mu_1+\mu_2=\Lambda} \omega^{-1}(\mu_1, \mu_2)d\mu_1 d\mu_2 \right)^{-1}$$

аналитична по Λ в полосе

$$|\operatorname{Im}\Lambda| < \bar{C}_2\beta^{-1}.$$

Отсюда и из оценок (5) и (6) следует, что $p(\xi)$ удовлетворяет оценке

$$|p(\xi)| < L\beta^2(C\beta)^{|\xi|},$$

где L, C—абсолютные константы.

Таким образом, ядро $K(x_1, x_2; x_1', x_2')$ допускает оценку

$$|K(x_1, x_2; x_1', x_2')| < \frac{L}{\beta^2}(C\beta)^{d_{\{x_1,x_2\}\bigcup\{x_1',x_2'\}}}.$$

Из этой оценке и оценки (8) и вытекает утверждение леммы 2.

2. Модель ротаторов. (см. § 5, гл. 2). Напомним, что в этом случае $S = T^1$—окружность, полевые переменные $\varphi_1 = e^{i\theta}$, $\varphi_2 = e^{-i\theta}$, $\theta \in T^1$, а базис в $L_2(T^1, d\theta)$

$$\{\varphi_n = e^{in\theta},\ n = 0, \pm 1, \dots\}.$$

Множество мультииндексов $\mathfrak{M}_0$ совпадает, таким образом, с совокупностью всех финитных, целочисленных функций на Z^ν $\Gamma = \{n(x),\, x \in Z^\nu\}$. При этом $N(\Gamma) = \sum\limits_x \mid n(x) \mid$. Трансфер-матрица для модели ротаторов при малых β унитарно-эквивалентна мультипликативному кластерному оператору A в $l_2(\mathfrak{M}_0)$ с параметром кластерности $\lambda_0 = C_0\beta, C_0$— абсолютная константа.

Заметим, что в пространстве $\Omega = S^{Z^\nu}$ конфигураций поля действуют две группы симметрии, сохраняющие взаимодействие (53ª.5.2):

1) однопараметрическая группа

$$G : \theta(x) \to \theta(x) + \alpha,\ \alpha \in T^1,\ x \in Z^\nu,$$

2) инволюция

$$J : \theta(x) \to -\theta(x).$$

Эти симметрии порождают унитарные операторы $\{U_\alpha, \alpha \in T^1\}$ и U_J, действующие в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ и коммутирующие с трансфер-матрицей $\mathcal{J}$ и группой трансляций $\{U_s, s \in Z^\nu\}$. Как следует из описанной в § 1 процедуры построения мультипликативного базиса $\{\Psi_\Gamma\}$, группа U_α при переходе в $l_2(\mathfrak{M}_0)$ действует по формуле

$$(U_\alpha f)(\Gamma) = e^{in(\Gamma)\alpha} f(\Gamma), \tag{21}$$

где $n(\Gamma) = \sum\limits_x n(x)$, а оператор U_J действует как

$$(U_J f)(\Gamma) = f(-\Gamma). \tag{22}$$

Инвариантные подпространства трансфер-матрицы следует искать, очевидно, так, чтобы они были инвариантны относительно группы симметрий U_α. Применение предыдущих построений к исследуемой модели приводит к следующему результату относительно одно- и двухчастичных инвариантных подпространств трансфер-матрицы $\mathcal{J}$.

Теорема 3. 1. *Существуют два одночастичных подпространства $\mathcal{H}_1^+$ и $\mathcal{H}_1^-$, ортогональные друг к другу и инвариантные относительно $\mathcal{J}$, группы сдвигов $\{U_s\}$ и группы симметрий $\{U_\alpha\}$. При этом для любого $f \in \mathcal{H}_1^\pm$*

$$U_\alpha f = e^{\pm i\alpha} f$$

и

$$U_J \mathcal{H}_1^+ = \mathcal{H}_1^-,\ U_J \mathcal{H}_1^- = \mathcal{H}_1^+. \tag{23}$$

При этом, как обычно, трансфер-матрица $\mathcal{J}$ в каждом из пространств $\mathcal{H}_1^\pm$ унитарно-эквивалентна оператору свертки с функциями $a^\pm(\xi)$, причем в силу (23) $a^+(\xi) = a^-(\xi) = a(\xi)$ и для функции $a(\xi)$ выполнены оценки (5) и (6). Спектр трансфер-матрицы в пространствах $\mathcal{H}_1^\pm$ заключен в $C\beta^2$-окрестности значения $\varepsilon\beta$ (ε— константа взаимодействия в (53ª.5.2).

2. Существуют три попарно ортогональных двухчастичных подпространства $\mathcal{H}_2^\pm, \mathcal{H}_2^0$, инвариантных относительно трансфер-матрицы, группы трансляций и группы симметрии U_α. При этом для $f \in \mathcal{H}_2^\pm$

$$U_\alpha f = e^{\pm 2i\alpha} f$$

и для $f \in \mathcal{H}_2^0$

$$U_\alpha f = f, \tag{24}$$

$$U_J \mathcal{H}_2^\pm = \mathcal{H}_2^\mp,\ U_J \mathcal{H}_2^0 = \mathcal{H}_2^0.$$

В пространствах $\mathcal{H}_2^{\pm,0}$ можно выбрать базисы $\{h_\Gamma^{\pm,0}\}$, помеченные соответственно мультииндексами $\Gamma = \{n(x),\, x \in Z^\nu\}$ такими, что $N(\Gamma) = 2$ и $n(\Gamma) = \pm 2, 0$ (соответственно в $\mathcal{H}_2^\pm, \mathcal{H}_2^0$), причем так, что матричные элементы трансфер-матрицы в этих базисах имеют мультипликативно-кластерные разложения, т. е. функция $\omega(\{\Gamma_1, \Gamma_1'\}, \{\Gamma_2, \Gamma_2'\})$ для пар мультииндексов с одноточечными носителями равна произведению

$$\omega(\{\Gamma_1, \Gamma_1'\}, \{\Gamma_2, \Gamma_2'\}) = \omega(\{\Gamma_1, \Gamma_1'\})\omega(\{\Gamma_2, \Gamma_2'\}), \tag{25}$$

причем $\omega(\{\Gamma, \Gamma'\}) = a(x - x')$, где $\{x\} = \operatorname{supp}\Gamma$, $\{x'\} = \operatorname{supp}\Gamma'$.

Спектр оператора $\mathcal{J}$ во всех трех пространствах $\mathcal{H}_2^\pm, \mathcal{H}_2^0$ расположен в $(C\beta)^3$-окрестности точки $(\varepsilon\beta)^2, C$— абсолютная константа. При этом в силу соотношения (24) спектр $\mathcal{J}$ в пространстве $\mathcal{H}_2^+$ совпадает с его спектром в $\mathcal{H}_2^-$.

Почти все утверждения теоремы непосредственно вытекают из теоремы 1.3, 2.3 и 3.3.

Доказательство утверждения о мультипликативной кластерности кластерной функции аналогично доказательству подобного утверждения для модели Изинга.

Замечание. Представляется интересным выяснить существуют ли следующие трех, четырех- и т. д. k-частичные инвариантные подпространства трансфер-матрицы для модели ротаторов. Этот вопрос нетривиален, поскольку у этой модели имеются недиагональные минимальные пары (см. замечание на стр. 232).

3. Калибровочное поле Янга—Миллса. Мы рассмотрим сначала калибровочное поле с абелевой группой $U(1)$ (комплексные числа z такие, что $\mid z \mid = 1$). Вводя, как уже говорилось в § 5.2, радиальную калибровку (т. е. полагая $g(b) = 1$ на всех "вертикальных" ребрах $Z^{\nu+1}$) мы будем рассматривать поле, заданное лишь на "горизонтальных" ребрах этой решетки, причем нулевой слой Y_0 совпадает с совокупностью E^ν ребер решетки Z^ν. Множество $S = U(1) = \{e^{i\theta}, 0 \le \theta < 2\pi\}$ совпадает с окружностью, на которой выбрана обычная нормированная мера Хаара $d\theta$. В качестве исходного базиса выбираются функции $\{\varphi_n = e^{in\theta}, n = 0, \pm 1, \pm 2\}$. Рассмотрим правильно ориентированные ребра, т. е. направленные вдоль единичных ортов e_μ решетки Z^ν. Записав каждое такое ребро в виде $\{b = \{x_0, e_\mu\}\}$, где x_0—начало ребра b, мы введем лексикографический порядок в E^ν. Далее, как это описано в § 1, мы строим базис в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ вида

$$\Psi_\Gamma = \prod \psi^b_{n(b)}, \tag{26}$$

где $\Gamma = \{n(b)\}$—целочисленная финитная функция на E^ν. Из описанного в §1 построения функционалов $\psi^b_{n(b)}$ легко вывести, что при калибровочном преобразовании $\{e^{i\alpha(x)}\}$ поля они преобразуются по формуле

$$\psi^b_{n(b)} \to \exp\{in(b)(\alpha(x_0) - \alpha(x_1))\}\psi^b_{n(b)}, \tag{27}$$

где x_1—конец, а x_0—начало ребра b. Отсюда следует, что элементы базиса $\{\Psi_\Gamma\}$ преобразуются при калибровочных преобразованиях по закону

$$\Psi_\Gamma \to \prod_{x \in \operatorname{supp} \partial\Gamma} \exp\{(\partial\Gamma)(x)\alpha(x)\}. \tag{28}$$

Здесь $\partial\Gamma$—функция на Z^ν, равная

$$(\partial\Gamma)(x) = \sum_{b \in \operatorname{supp}\Gamma} n(b)(-1)^{\varepsilon(b,x)}, \tag{29}$$

где сумма берется по всем ребрам из $\operatorname{supp}\Gamma$, инцидентным точке x, причем $\varepsilon(b,x) = 0$, если ребро b выходит из x, и $\varepsilon(b,x) = 1$, если оно входит в x.

Из (28) вытекает, что матричные элементы $(\mathcal{J}\Psi_\Gamma, \Psi_{\Gamma'})$ трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ в базисе $\{\Psi_\Gamma\}$ отличны от нуля лишь тогда, когда

$$\partial\Gamma = \partial\Gamma'. \tag{30}$$

При этом они допускают кластерное разложение (34.1)

$$a_{\Gamma,\Gamma'} = \sum_{\{(\Gamma_1,\Gamma'_1),\ldots,(\Gamma_k,\Gamma'_k)\}} \prod_{i=1}^{k} \omega(\Gamma_i, \Gamma'_i), \tag{30^a}$$

где сумма берется по всем разбиениям (Γ, Γ') на пары $(\{\Gamma_i, \Gamma'_i\})$, для которых выполнено условие (30). При этом согласно замечанию в § 1 в определении (38.1) и (39.1) величины $d_{\Gamma,\Gamma'} = d_{\tilde{\Gamma}}$, фигурирующей в кластерной оценке семиинвариантов $\omega(\Gamma, \Gamma')$, функцию $n = \{n(p)\}$ следует считать заданной на двумерных гранях p (плакетах) решетки Z^ν. Из (28) вытекает, что те и только те векторы $\{\Psi_\Gamma\}$ входят в пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ калибровочно-инвариантных функционалов, для которых

$$\partial\Gamma \equiv 0. \tag{31}$$

Как легко показать с помощью несложных оценок, мультииндексы Γ, удовлетворяющие условию (31), для которых матричные элементы $(\mathcal{J}\Psi_\Gamma, \Psi_{\Gamma'})$ имеют наибольшее значение, таковы, что $\operatorname{supp}\Gamma = \partial p = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, где p—некоторый плакет (двумерная грань решетки), а значения $n(b_i)$ мультииндекса Γ на ребрах b_i равны либо +1, либо -1 (одновременно для всех ребер). Далее все плакеты Z^ν разбиваются на $k = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$ классов $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, составляющих орбиты действия группы сдвигов. Таким образом, фиксируя в каждом классе σ_i по представителю p_{σ_i}, мы видим, что каждый мультииндекс Γ с наибольшим значением $(\mathcal{J}\Psi_\Gamma, \Psi_\Gamma)$ задается тройкой (σ, x, μ), где σ—класс плакетов p, x—вектор, переводящий выбранный представитель p_σ в p, а $\mu = \pm$— значения Γ на границе p. Воспользовавашись разложением (29) и кластерными оценками, легко проверить, что для мультииндекса $\Gamma = (\sigma, x, \mu)$

$$(\mathcal{J}\Psi_\Gamma, \Psi_\Gamma) \sim \beta^4,$$

и для любой пары мультииндексов (Γ, Γ'), в которой либо $\Gamma \neq \Gamma'$, либо мультииндексы не принадлежат описанному выше классу,

$$(\mathcal{J}\Psi_\Gamma, \Psi_{\Gamma'}) \ll \beta^5.$$

Таким образом, выполнено условие, аналогичное условию одночастичной отделимости, и верна следующая теорема.

Теорема 4. *Для калибровочного поля с группой калибровки $U(1)$ на решетке $Z^{\nu+1}$ существуют $\nu(\nu-1)$ одночастичных подпространств $\mathcal{H}_1^{\pm,\sigma}$, инвариантных относительно трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ и группы трансляций $\{U_s\}$. При этом в каждом из них можно выбрать ортонормированный базис $\{h_x^{\pm,\sigma}, x \in Z^\nu\}$, так что*

$$\mathcal{J} h_x^{\pm,\sigma} = \sum_{x'} a_{x-x'}^{\pm,\sigma} h_{x'}^{\pm,\sigma}, \tag{32}$$

где функции $a_\xi^{\pm,\sigma} = a_\xi$ совпадают для всех пространств $\mathcal{H}_1^{\pm,\sigma}$ и a_ξ имеет вид

$$a_\xi = \beta^4 \delta_{\xi,0} + O(\beta^8).$$

Введенные подпространства $\mathcal{H}_1^{\pm,\sigma}$ описывают возбуждения калибровочного поля с наименьшей энергией $4\ln\beta$—так называемые *основные глюоны*. Кроме них существует следующий класс возбуждений— *возбужденные глюоны*, с энергией $6\ln\beta$. Пространства, описывающие эти состояния, получаются небольшим возмущением пространств, натянутых на векторы Ψ_Γ, у которых $\operatorname{supp}\Gamma$—контур из 6 ребер $b_1, \ldots, b_6$, ограничивающих два смежных плакета, а $n(b_i) = \pm 1$.

Подобные же рассмотрения обобщаются и на случай неабелевых компактных групп. Рассмотрим случай группы $SU(2)$ (унитарные матрицы u 2-го порядка, $\det u = 1$). В качестве базиса φ_γ на группе $SU(2)$ выбираем функции

$$\varphi_\gamma(u) = \sqrt{2l+1}a_{m,n}^l(u), \ \ \gamma = (l, m, n),$$

где $a_{m,n}^l(u)$—матричные элементы неприводимого представления $u \to T_u^l$ группы $SU(2)$ в так называемом каноническом базисе $\{\xi_m^l, m = -l, \ldots, l\}$ группы $SU(2)$. Число l— так называемый вес неприводимого представления—принимает все целые и полуцелые значения, а $m, n = -l, \ldots, l$ (подробнее см. в книге [9]). Как и выше, мультипликативный базис в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ строится в виде

$$\Psi_\Gamma = \prod_b \Psi_{\gamma(b)}^b.$$

Действие преобразования калибровочной группы $u_0 = \{u_0(x), x \in Z^\nu\}$ на вектор $\Psi_{\gamma(b)}^b$ имеет вид

$$U_{u_0}\Psi_{\gamma(b)}^b = \sum_{\gamma' : l(\gamma') = l(\gamma)} C_{\gamma,\gamma'}^b \Psi_{\gamma'}^b, \tag{33}$$

где $C_{\gamma,\gamma'}^b = a_{m,m'}^l(u_0(x_0))a_{n,n'}^l(u_0(x_1))$, где $\gamma = (l, m, n), \gamma' = (l, m', n')$, ($x_0$—начало, а x_1—конец ребра b).

Формула (33) позволяет построить ортонормированный базис $\{\Psi_{\Delta,L}^{\{\lambda(x)\}}\}$ в пространстве $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ в виде некоторых линейных комбинаций векторов Ψ_Γ. А именно, рассмотрим мультииндекс $\Gamma = \{l(b), m(b), n(b), b$— ориентированное ребро решетки $Z^\nu\}$. Назовем его правильным, если для каждой точки $x \in Z^\nu$ выполнены условия

1) $$\sum_{\substack{b \in \operatorname{supp}\Gamma \\ b \text{ входит в } x}} m(b) = \sum_{\substack{b \in \operatorname{supp}\Gamma \\ b \text{ выходит из } x}} n(b), \tag{34}$$

2) тензорное произведение представлений

$$\bigotimes_{\substack{b \in \operatorname{supp}\Gamma \\ b \text{ инцидентно } x}} T_u^{l(b)} \tag{35}$$

содержит в качестве неприводимой компоненты единичное (тривиальное) представление (быть может, с некоторой кратностью).

Обозначим далее Δ некоторое связное множество ориентированных ребер b и пусть $L = \{l(b), b \in \Delta\}$—функция на Δ с целыми и полуцелыми значениями такая, что для любой точки $x \in \partial\Delta$ выполнено условие (35). Выберем вектор

$$\Psi_{L,\Delta}^{\{\lambda(x), x \in \partial\Delta\}} =$$

$$= \sum_\Gamma \prod x \in \Delta C^{\lambda(x)\{l(b), b \in \operatorname{supp}\Gamma, b \text{ инцидентно } x\}}_{\{m(b), b \in \operatorname{supp}\Gamma, b \text{ выходит из } x\}\{n(b), b \in \operatorname{supp}\Gamma, b \text{ входит в } x\}} \times$$

$$\times\Psi_{\Gamma=\{l(b),m(b),n(b)\}}.$$

Суммирование происходит по всем правильным мультииндексам $\Gamma = \{l(b), m(b), n(b), b \in \Delta\}$ таким, что

$$\operatorname{supp}\Gamma = \Delta$$

и функция $\{l(b), l \in \Delta\} = L$.

Числа $C^{\lambda,l_1,\dots,l_k}_{m_1,\dots,m_s,n_1,\dots,n_{k-s}}$ являются коэффициентами одного из инвариантных векторов η^λ (индекс λ различает эти векторы) в тензорном произведении представлений

$$\otimes T_u^{l_i}$$

в базисе

$$(\otimes_{i=1}^{s}\xi_{m_i}^{l_i}) \otimes (\otimes_{i=1}^{k-s}\xi_{n_i}^{l_{s+i}}).$$

В случае произвольного (несвязного) множества Δ мы определим функции $\Psi_{L,\Delta}^{\{\lambda(x),x\in\partial\Delta\}}$ в виде

$$\Psi_{L,\Delta}^{\{\lambda(x),x\in\partial\Delta\}} = \prod_{i=1}^{k}\Psi_{L_i,\Delta_i}^{\{\lambda_i(x),x\in\partial\Delta_i\}}, \tag{36}$$

где $\Delta_1, \dots, \Delta_k$—связные компоненты Δ, L_i— сужение функции L на Δ_i и аналогичный смысл имеет $\{\lambda_i(x)\}$.

Можно показать, что векторы вида (36) образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_{\text{физ}}$, а матричные элементы $\mathcal{J}$ в этом базисе допускают естественное кластерное разложение. С помощью этого разложения и некоторых уточненных оценок старших матричных элементов $\mathcal{J}$ в этом базисе можно доказать теорему, аналогичную теореме 4.

Теорема 5. *При достаточно малых β у трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ поля Янга—Миллса с группой калибровки $SU(2)$ существует $\nu(\nu-1)/2$ инвариантных одночастичных подпространств $\mathcal{H}_1^\sigma$, где индекс σ помечает классы плакетов в Z^ν, образующие орбиты для группы сдвигов (см. выше). Спектры $\mathcal{J}$ во всех пространствах $\mathcal{H}_1^\sigma$ совпадают и лежат в $(C\beta)^8$-окрестности значения β^4 ($C > 0$—абсолютная константа).*

Замечания. 1. Как мы видим, в случае группы $SU(2)$ оказалось вдвое меньше старших одночастичных пространств, чем их было в случае группы $U(1)$. Это различие связано с тем, что любое неприводимое представление группы $SU(2)$ самосопряжено (т. е. совпадает со своим контргградиентным представлением, см. [9]).

2. Как и в случае калибровочного поля с группой калибровки $U(1)$, в случае группы $SU(2)$ также существует серия одночастичных инвариантных подпространств трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ со спектром $\sim \beta^6$, описывающих возбужденные глюоны.

4. Блуждание частицы в случайной среде. В качестве примера применения изложенных выше приемов исследования стохастических операторов рассмотрим здесь задачу о случайном блуждании частицы по решетке Z^ν, на которой задано марковское поле, причем частица и поле взаимодействуют друг с другом. Пусть $x_t \in Z^\nu, t = 0, 1, \dots,$—положение частицы в момент времени t и $\xi_t = \{\xi_t(x), x \in Z^\nu\}$—конфигурация поля, принимающего значения $\xi_t(x) = \pm 1$ в этот же момент времени.

Переходные вероятности случайной системы (частица-поле) имеют вид

$$\Pr(\xi_t \in A, x_t = x \mid \xi_{t-1} = \eta, x_{t-1} = z) = \tag{37}$$

$$= \Pr(\xi_t \in A \mid \xi_{t-1} = \eta, x_{t-1} = z)\Pr(x_t = x \mid \xi_t = \eta, x_{t-1} = z)',$$

где $A \subset \{-1,1\}^{Z^\nu}$—произвольное (измеримое) подмножество конфигураций, а $\eta = \{\eta(y), y \in Z^\nu\}$—фиксированная конфигурация поля на Z^ν. Иными словами, изменения положения частицы и конфигурации поля при фиксированных η и z условно-независимы. Далее мы введем следующие предположения относительно переходных вероятностей частицы и поля:

1. $\Pr(x_t = x \mid \xi_{t-1} = \eta, x_{t-1} = z) = p_0(x-z) + c(x-z; \eta(z))$. (38)

Здесь $p_0(x-z)$ задает вероятности блуждания частицы по решетке с вероятностями перескока $\Pr(z \to x) = p_0(x-z)$; $c(u,s)$, $u \in Z^\nu, s = \pm 1,$— некоторая функция на $Z^\nu \times \{-1,1\}$ такая, что

$$\sum_{u\in Z^\nu} c(u,s) = 0, \;\; s = \pm 1,$$

а $p_0(u) + c(u,s) \geq 0$ при всех $u \in Z^\nu$ и $s = \pm 1$. Некоторое дополнительное условие относительно $c(u,s)$ будет указано ниже (см. формулу (46^{a})).

2.$\Pr(\xi_t = \bar{\xi}(x), x \in \Lambda \mid \xi_{t-1} = \eta, x_{t-1} = z) =$

$$= \prod_{y\in\Lambda} q_y(\bar{\xi}(y), \eta(y); z), \tag{39}$$

где Λ—произвольное конечное множество решетки, $\bar{\xi}$— произвольная конфигурация поля в Λ, а

$$q_y(s, s'; z) = \begin{cases} q_0(s, s'), & y \neq z, \\ q_1(s, s'), & y = z, \end{cases}$$

где q_0, q_1—две стохастические матрицы, задающие марковские эргодические цепи с пространством состояний $\{-1, 1\}$. Мы будем в дальнейшем предполагать, что взаимодействие поля с частицей мало, т. е.

$$\max_{u,s} | c(u,s) | \equiv \varepsilon_0 \ll 1$$

и

$$\max_{s,s'} | q_0(s,s') - q_1(s,s') | \equiv \varepsilon_1 \ll 1.$$

Кроме того, мы будем считать, что функции $p_0(u)$ и $c(u, s)$ финитны:

$$p_0(u) = 0 \text{ и } c(u,s) = 0 \text{ при } | u | > R.$$

Мы докажем здесь следующую теорему.

Теорема 6. *При достаточно малых ε_0 и ε_1 и при любом начальном распределении Π значений поля ξ_0 вероятность отклонения $x_t - x_0 = u$ частицы от своего начального положения асимптотически при больших t равна*

$$\Pr(x_t - x_0 = u) =$$

$$= \frac{D^{1/2}}{\sqrt{(2\pi t)^\nu}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}(A(u - bt)\right\}\{1 + o(1)\}, \tag{40}$$

где $b \in R^\nu$—некоторый ν-мерный вектор, $A(\cdot)$—положительно-определенная квадратичная форма в R^ν, а D—детерминант матрицы этой формы. Вектор b и форма $A(\cdot)$ не зависят от начального распределения Π. Асимптотика (40) равномерна в интервале

$$| u - bt | < t^{1/2+\varepsilon},$$

где ε достаточно мало ($\varepsilon < 1/6$).

Доказательство. Введем пространство $C(\Omega \times Z^\nu)$ функционалов $\Phi(\xi, x)$, $\xi \in \Omega = \{-1, 1\}, x \in Z^\nu$, от координат

случайной системы, непрерывных по ξ (в пространстве Ω вводится тихоновская топология) и быстро стремящихся к нулю при $x \to \infty$. Введем в $C(\Omega \times Z^\nu)$ оператор

$$(\mathcal{J}\Phi)(\eta, z) = \int\limits_{\Omega\times Z^\nu} \Phi(\xi, x) dP(\xi, x \mid \eta, z) \tag{41}$$

(стохастический оператор случайной системы или ее трансфер-матрица).

Легко проверить, что $\mathcal{J}$ действительно переводит $C(\Omega \times Z^\nu)$ в себя. Фиксируем начальное положение системы $x_0 = y, \xi_0 = \eta$ и для любого функционала $\Phi \in C(\Omega \times Z^\nu)$ рассмотрим условное среднее

$$\langle \Phi(\xi_t, x_t) \mid \xi_0 = \eta, x_0 = y \rangle,$$

где (ξ_t, x_t)—положение системы в момент времени t. Тогда очевидно, что

$$\langle \Phi(\xi_t, x_t) \mid \xi_0 = \eta, x_0 = y \rangle = (\mathcal{J}^t \Phi)(\eta, y).$$

Отсюда, в частности,

$$\Pr(x_t = \bar{x} \mid x_0 = y) = \int\limits_{\Omega} (\mathcal{J}^t \Phi_{\bar{x}})(\eta, y) d\Pi(\eta), \tag{42}$$

где $\Phi_{\bar{x}}(\xi, x) = \delta_{x,\bar{x}}$.

Обозначим $\{\pi_0(s), s = \pm 1\}$ стационарное распределение марковской цепи с матрицей переходных вероятностей $q_0(s, s')$. Рассмотрим в качестве начального распределение

$$\Pi_0 = (\pi_0)^{Z^\nu}$$

и обозначим $\mathcal{H} = L_2(\Omega, \Pi_0) \otimes l_2(Z^\nu)$. Пусть теперь $e_0(s) \equiv 1$ и e_1—нормированный собственный вектор стохастической матрицы

$$(Qe_1)(s') = \sum_{s=\pm 1} q_0(s, s') e_1(s)$$

с собственным значением $\mu, | \mu | < 1$. Введем в $\mathcal{H}$ базис

$$\Psi_{Q,z}(\xi, x) = \prod_{y \in Q} e_1(\xi(y)) \delta_{z,x}, \tag{43}$$

где Q—конечное подмножество $Z^\nu, z \in Z^\nu$.

В силу очевидного соотношения

$$\sum_s \pi_0(s) e_1(s) = 0$$

и условия

$$\sum_s \pi_0(s) \mid e_1(s) \mid^2 = 1$$

базис $\{\Psi_{Q,z}\}$ является ортонормированным в $\mathcal{H}$. Разложение любого элемента $\Phi \in \mathcal{H}$

$$\Phi = \sum_{(Q,z)} f(Q,z) \Psi_{Q,z} \tag{43^a}$$

задает изоморфизм пространства $\mathcal{H} \to l_2(C_{Z^\nu} \times Z^\nu)$, где C_{Z^ν} обозначает совокупность всех конечных подмножеств решетки Z^ν. Трансфер-матрица $\mathcal{J}$ задает в $\mathcal{H}$ ограниченный оператор, который при переходе к пространству $l_2(C_{Z^\nu} \times Z^\nu)$ запишется в виде

$$\begin{gathered}(\mathcal{J} f)(Q,z) = \sum_{z'} R_{Q-z}(z'-z) f(Q,z') + \\ +(1-\chi(Q-z)) \sum_{z'} G_{(Q-z)\bigcup\{0\}}(z'-z) f(Q \bigcup \{z\}, z') + \\ +\chi(Q-z) \sum_{z'} H_{(Q-z)\bigcup\{0\}}(z'-z) f(Q \backslash \{z\}, z'). \end{gathered} \tag{44}$$

Здесь обозначено

$$\chi_0(Q) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in Q, \\ 0, & \text{в остальных случаях} . \end{cases}$$

Далее, при $Q \neq 0$

$$\begin{gathered} R_Q(u) = \mu^{|Q|} p_0(u) + \chi_0(Q) \mu^{|Q|-1} \times \\ \times (\alpha_1 p_0(0) + c_1(u))(\mu b_1 + b_1 \alpha_1 + \alpha_0), \\ G_Q(u) = \mu^{|Q|-1} \{\alpha_0 p_0(u) + b_0 \mu c_1(u) + \alpha_0 b_0 c_1(u)\}, \\ H_Q(u) = \mu^{|Q|} c_1(u). \end{gathered} \tag{45}$$

При $Q = \emptyset$

$$R_\emptyset(u) = p_0(u), \;\; G_\emptyset(u) = 0, \;\; H_\emptyset(u) = c_1(u). \tag{46}$$

Здесь константы α_0 и α_1, b_0, b_1 и функция $c_1(u)$ определяются следующим образом:

$$\sum_s (q_1(s,s') - q_0(s,s')) e_1(s) = \alpha_0 + \alpha_1 e_1(s'),$$

$$e_1(s) e_1(s) = b_0 + b_1 e_1(s),$$

$$c(u,s) = c_0(u) + c_1(u) e_1(s).$$

При этом, если предположить, что

$$\sum_s c(u,s) \pi_0(s) = 0 \tag{46^a}$$

(это условие всегда можно удовлетворить за счет изменения p_0), то $c_0(u) \equiv 0$. Заметим, что представление $\{U_\nu, \, \nu \in Z^\nu\}$ группы сдвигов решетки, действующее в $\mathcal{H}$ по формуле

$$(U_v \Phi)(\xi, x) = \Phi(\xi - v, x - v),$$

где $\xi - v$—сдвиг конфигурации на вектор v, переходит в операторы

$$(U_v f)(Q,x) = f(Q-v, z-v)$$

в пространстве $l_2(C_{Z^\nu} \times Z^\nu)$.

Заметим далее, что всякая функция на пространстве $C_{Z^\nu} \times Z^\nu$ вида

$$f_x(Q,z) = \varphi(Q-z) e^{i(x,z)},$$

где $\varphi(Q) \in l_2(C_{Z^\nu}), \kappa \in T^\nu$($\nu$-мерный тор), является обобщенной собственной функцией непрерывного спектра операторов U_v (см. [10]) с собственным значением $\exp\{i(\kappa, v)\}$. Обозначим пространство таких функций $\mathcal{H}(\kappa)$. Очевидно, что оно изоморфно пространству $l_2(C_{Z^\nu})$ и каждая функция $f \in l_2(C_{Z^\nu} \times Z^\nu)$ может быть однозначно разложена в интеграл

$$f(Q,z) = \int_{T^\nu} \varphi_\kappa(Q-z) \exp\{i(\kappa, z)\} d\kappa,$$

где $d\kappa$—нормированная мера Хаара на T^ν. Оператор $\mathcal{J}$, коммутирующий с группой $\{U_v\}$, порождает семейство операторов $\{\mathcal{J}(\kappa), \, \kappa \in T^\nu\}$, каждый из которых действует в пространстве $\mathcal{H}(\kappa)$ или в силу указанного выше изоморфизма в пространстве $l_2(C_{Z^\nu})$. При этом

$$(\mathcal{J}f)(Q,z) = \int\limits_{T^\nu} (\mathcal{J}(\kappa)\varphi_\kappa)(Q-z)\exp\{i(\kappa,z)\}d\kappa.$$

Оператор $\mathcal{J}(\kappa)$ действует в $l_2(C_{Z^\nu})$ по формуле

$$(\mathcal{J}(\kappa)\varphi)(Q) = \sum_{u\in Z^\nu}[R_Q(u)\varphi(Q-u)+$$

$$+(1-\chi_0(Q))G_{Q\bigcup\{0\}}(u)\varphi((Q-u)\bigcup\{-u\})+$$

$$+\chi_0(Q)H_{Q\setminus\{0\}}(u)\varphi((Q-u)\bigcup\{-u\})]e^{-i(\kappa,u)}, \qquad (47)$$

где R_Q, G_Q и H_Q определены формулами (45) и (46).

Рассмотрим теперь случай “невозмущенного” блуждания: $c(u,s)=0$ и $q_0=q_1$, при котором частица и поле эволюционируют независимо. В этом случае операторы $\mathcal{J}^0(\kappa)$ действуют по формуле

$$(\mathcal{J}^0(\kappa)\varphi)(Q) = \mu^{|Q|}\sum_{u\in Z^\nu}p_0(u)\varphi(Q-u)e^{-i(\kappa,u)}. \qquad (48)$$

Заметим, что пространство $l_2(C_{Z^\nu})$ разлагается в прямую ортогональную сумму подпространств $l_2(C^n_{Z^\nu})$:

$$l_2(C_{Z^\nu}) = \oplus_{n=0}^\infty l_2(C^n_{Z^\nu}),$$

где $C^n_{Z^\nu}$—совокупность n-точечных множеств решетки Z^ν ($l_2(C^0_{Z^\nu})$—одномерное пространство). Каждое из пространств $l_2(C^n_{Z^\nu})$ инвариантно относительно операторов $\mathcal{J}^0(\kappa)$. В частности, одномерное подпространство $l_2(C^0_{Z^\nu}) = \{B\delta_{Q,}\}$ является собственным пространством для $\mathcal{J}^0(\kappa)$ с собственным значением

$$\tilde{p}_0(\kappa) = \sum_{\xi\in Z^\nu}p_0(\xi)e^{i(\kappa,\xi)}.$$

В ортогональном дополнении

$$l_2^\perp(C_{Z^\nu}) = \oplus_{n=1}^\infty l_2(C^n_{Z^\nu})$$

норма оператора $\mathcal{J}^0(\kappa)$ допускает оценку

$$\| \mathcal{J}^0(\kappa)\ |_{l_2^\perp(C_{Z^\nu})}\| < |\ \mu\ |.$$

Доказательство этой оценки легко получается из явной формулы (48). Рассмотрим теперь окрестность V_δ нуля, $0\in T^\nu$, такую, что

$$\min_{\kappa\in V_\delta}|\ \tilde{p}_0(\kappa)\ | > |\ \mu\ | + \delta,$$

где $0<\delta<1-|\ \mu\ |$—некоторая константа. Таким образом, собственное значение $\tilde{p}_0(\kappa)$ при $\kappa\in V_\delta$ отделено от всего остального спектра оператора $\mathcal{J}^0(\kappa)$ щелью, не меньшей, чем δ. Поскольку оператор $\mathcal{J}(\kappa)$ при малых $\varepsilon_0,\varepsilon_1$ близок к оператору $\mathcal{J}^0(\kappa)$, у него существует при каждом $\kappa\in V_\delta$ собственный вектор $\chi_\kappa\in l_2(C_{Z^\nu})$, нормированный условием $\chi_\kappa(\emptyset)=1$, с собственным значением $\tilde{p}(\kappa)$, достаточно близким к $\tilde{p}_0(\kappa)$. При этом χ_κ и $\tilde{p}(\kappa)$ аналитически зависят от κ, изменяющимся в некоторой комплексной окрестности V_δ. Кроме того, нетрудно проверить, что

$$|\ \tilde{p}(\kappa)\ | \le 1,\ \ \tilde{p}(0)=1, \qquad (49)$$

и действительная часть квадратичной формы

$$\operatorname{Re}\sum_{i<j}\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial\kappa_i\partial\kappa_j}\Bigg|_{\kappa=0}^{\Delta\kappa_i\Delta\kappa_j} > 0. \qquad (50)$$

Рассмотрим подпространство $\mathcal{H}_\delta$ элементов вида

$$f(Q,z) = \int\limits_{V_\delta}\chi_\kappa(Q-z)\varphi(\kappa)\exp\{-i(\kappa,z)\}d\kappa,$$

$$\varphi\in L_2(V_\delta,d\kappa). \qquad (51)$$

Очевидно, что $\mathcal{H}_\delta$—инвариантное относительно $\mathcal{J}$ и $\{U_\nu,\nu\in Z^\nu\}$ подпространство $l_2(C_{Z^\nu}\times Z^\nu)$. Рассмотрим далее оператор $\mathcal{J}^*$ в $\mathcal{H}$, сопряженный к оператору $\mathcal{J}$. Рассуждая так же, как выше, мы построим для него инвариантное подпространство $\mathcal{H}^*_\delta$, аналогичное подпространству $\mathcal{H}_\delta$. Очевидно, что ортогональное дополнение

$$\bar{\mathcal{H}}_\delta = (\mathcal{H}^*_\delta)^\perp$$

инвариантно относительно $\mathcal{J}$ и пространство $l_2(C_{Z^\nu}\times Z^\nu)$ разлагается в сумму

$$l_2(C_{Z^\nu}\times Z^\nu) = \mathcal{H}_\delta + \bar{\mathcal{H}}_\delta.$$

Аналогичное разложение возникает и для пространства $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}_\delta + \hat{\bar{\mathcal{H}}}_\delta,$$

где $\hat{\mathcal{H}}_\delta \subset \mathcal{H}$, $\hat{\bar{\mathcal{H}}}_\delta \subset \mathcal{H}$— прообразы пространств $\mathcal{H}_\delta$ и $\bar{\mathcal{H}}_\delta$ при изоморфизме (43^a).

Можно далее проверить, что при разложении

$$\Phi_x = \Phi_x^{(\delta)} + \overline{\Phi}_x^{(\delta)},\ \ \Phi_x^{(\delta)} \in \hat{\mathcal{H}}_\delta,\ \ \overline{\Phi}_x^{(\delta)} \in \overline{\hat{\mathcal{H}}}_\delta,$$

функционала $\Phi_x(\xi, z) = \delta_{zx}$ обе компоненты

$$\Phi_x^{(\delta)},\ \overline{\Phi}_x^{(\delta)} \in C(\Omega \times Z^\nu)$$

и

$$\| \mathcal{J}^t \overline{\Phi}_x^{(\delta)} \|_{C(\Omega \times Z^\nu)} = O((| \mu | + \delta)^t).$$

Отсюда вытекает, что вычисление асимптотики вероятности (42) сводится к вычислению интеграла

$$\int\limits_\Omega (\mathcal{J}^t \Phi_x^{(\delta)})(\eta, y) d\Pi(\eta) = \int\limits_\Omega (U_x \mathcal{J}^t \Phi_0^{(\delta)})(\eta, y) d\Pi(\eta) =$$

$$= \int\limits_{V_\delta} (\tilde{p}(x))^t \varphi(\kappa, y) e^{i((y-x),\kappa)} d\kappa,$$

$$\varphi(\kappa, y) = \varphi^0(\kappa) \sum_Q \chi_\kappa(Q - y) a_Q,$$

где $a_Q = \int_\Omega \Phi_Q(\eta) d\Pi(\eta)$, а $\varphi^0(\kappa)$— функция, входящая в представление (51) для $f_0^\delta(Q, z)$—коэффициентов Φ_0^Δ по базису $\Psi_{Q,z}$. Легко далее проверить, что $\varphi(\kappa, y)$—гладкая функция и $\varphi(0, y) = 1$. Отсюда, применяя метод перевала, получаем асимптотику (40), где квадратичная форма $A(\cdot, \cdot)$ задается матрицей, обратной матрице производных,

$$\left\{ \frac{\partial^2 \tilde{p}(\kappa)}{\partial \kappa_i \partial \kappa_j} \right\} \Bigg|_{\kappa=0}, \tag{52}$$

а вектор $b = \{ i \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \kappa_j} |_{\kappa=0} \}$. Из (49) следует, что b—вещественный вектор, а в силу того, что выражение (40) представляет вероятность, матрица (52) вещественна. Теорема доказана.

§ 5. Спектральный анализ трансфер-матрицы фермионного поля

В этом параграфе мы обобщим приемы спектрального анализа трансфер-матрицы обычных случайных (бозонных) полей на случай, когда полевая алгебра содержит грассмановы переменные (фермионное поле). В начале мы изучим случай чисто фермионных полей, а затем—уже на примере—рассмотрим общий смешанный случай.

Пусть на нормированной алгбере $\mathcal{E}_F$ с образующими $\{\psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\alpha(x), x \in \tilde{Z}^{\nu+1} = Z^\nu \times \tilde{Z}^1, \alpha \in M\}$ (M—множество индексов) и нормой (57.5.2) задана гиббсовская перестройка $\langle\ \rangle$ независимого гауссова квазисостояния $\langle\ \rangle_0$ с помощью эвклидова действия, описанного в §5.2 (с малым параметром λ). Напомним, что возмущенное квазисостояние $\langle\ \rangle$ на $\mathcal{E}_F$ является обратимо-марковским (см. §5.3).

Общая схема исследования трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ такого поля аналогична изложенной выше схеме для случая бозонных (вероятностных) полей. Однако в ней имеются некоторые технические отличия, возникающие из-за того, что скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ в алгебре $\mathcal{E}_{1/2}$ (порожденной образующими $\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\alpha(x)$, “живущими” на временном слое $Y_{1/2} = Z^\nu \times \{1/2\}$) задается с помощью инволюции θ, переводящей эту алгебру в другую алгебру $\mathcal{E}_{-1/2}$. С тем, чтобы сохранить прежнюю конструкцию мультипликативного базиса $\{\Psi_\Gamma\}$, мы введем в алгебре $\mathcal{E}_{1/2}$ эрмитову билинейную форму по формуле

$$[F_1, F_2] = \langle F_1, \vartheta F_2 \rangle, F_1, F_2 \in \mathcal{E}_{1/2}, \tag{1}$$

где ϑ—антилинейная инволюция в $\mathcal{E}_{1/2}$, действующая на образующие по формуле

$$\vartheta \psi_\alpha(x) = \sum_{\alpha' \in M} \varepsilon_{\alpha,\alpha'} \bar{\psi}_{\alpha'}(x),$$

$$\vartheta \bar{\psi}_\alpha(x) = \sum_{\alpha' \in M} \bar{\varepsilon}_{\alpha,\alpha'} \psi_{\alpha'}(x), \tag{2}$$

здесь $\varepsilon = \{\varepsilon_{\alpha,\alpha'}\}$—матрица, задающая θ в $\mathcal{E}$ (см. §5.2. п. 2). На всю алгебру $\mathcal{E}_{1/2}$ инволюция ϑ продолжается с помощью соотношения, аналогичного соотношению (17^6, 5.2):

$$\vartheta(A_1 A_2) = \vartheta(A_2) \vartheta(A_1).$$

Эрмитовость формы (1) вытекает из ϑ-инвариантности состояния $\langle\ \rangle$ на алгебре $\mathcal{E}_F$

$$\langle \vartheta F\rangle = \langle \bar{F}\rangle,$$

которая в свою очередь следует из представления

$$\vartheta F = U_{e_0}\Theta F. \tag{3}$$

Без ограничения общности мы можем считать матрицу ε диагональной:

$$\varepsilon_{\alpha,\alpha'} = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha,\alpha'}. \tag{4}$$

Мы построим сейчас мультипликативный базис $\{\Psi_\Gamma\}$ в $\mathcal{E}_{1/2}$, аналогичный базису (3.1) для случая обычных случайных полей (мультииндексы Γ будут описаны ниже), ортонормированный относительно формы (1):

$$[\Psi_{\Gamma_1}, \Psi_{\Gamma_2}] = (-1)^{\alpha(\Gamma)}\delta_{\alpha,\alpha'}, \tag{5}$$

где знаковая функция $\alpha(\Gamma)$ указывается ниже. Рассмотрим сначала независимое гауссово состояние $\langle\ \rangle_0$ (невозмущенное поле) и построим указанный базис для этого поля. Для любой точки $x_0 \in Y_{1/2}$ обозначим $\mathfrak{A}(x_0) \subset \mathcal{E}_{1/2}$ грассманову алгебру, порожденную образующими $\{\psi_\alpha(x_0), \bar{\psi}_\alpha(x_0), \alpha \in M\}$. Для каждого $\alpha \in M$ обозначим $\eta_\alpha^\pm(x_0)$, $\eta_\alpha^0(x_0)$, $\eta_\alpha^{\bar{0}}(x_0)$ элементы

$$\eta_\alpha^+(x_0) = \psi_\alpha(x_0),\ \ \eta_\alpha^-(x_0) = \bar{\psi}_\alpha(x_0),\ \ \eta_\alpha^0(x_0) = 1,$$

$$\eta_\alpha^{\bar{0}}(x_0) = \psi_\alpha(x_0)\bar{\psi}_\alpha(x_0) - 1.$$

Легко подсчитать, что мономы из $\mathfrak{A}(x_0)$

$$\eta_s(x_0) = \prod_{\alpha\in M} \eta_\alpha^{s(\alpha)}(x_0), \tag{6}$$

где $s = \{s(\alpha), s(\alpha) = 0, \bar{0}, \pm\}$—мультииндекс, а множители в (6), следующие в порядке возрастания α (предполагается, что в M введено некоторое упорядочение), ортонормированы относительно формы $[\ ,\ ]_0$

$$[\eta_{s_1}(x_0), \eta_{s_2}(x_0)]_0 = \langle \eta_{s_1}(x_0)\vartheta\eta_{s_2}(x_0)\rangle_0 = \delta_{s_1,s_2}(-1)^{\sigma(s_1)}, \tag{7}$$

где $\sigma(s) = \sum\limits_{\alpha: s(\alpha)\neq\bar{0}} \varepsilon(\alpha) s\{\alpha : \alpha = \bar{0}\}$. Далее вводим мультипликативный базис в $\mathcal{E}_{1/2}$

$$\Phi_\Gamma^0 = \prod_x \eta_{s(x)}(x) \tag{8}$$

(множители стоят в лексикографическом порядке), где $\Gamma = \{s(x) = \{s(x,\alpha)\}\}$— мультииндекс, ортонормированный относительно формы $[\ ,\ ]_0$,

$$[\Phi_\Gamma^0, \Phi_{\Gamma'}^0]_0 = \delta_{\Gamma,\Gamma'}(-1)^{\sigma(\Gamma)}, \tag{9}$$

где $\sigma(\Gamma) = \sum\limits_x \sigma(s(x))$, и ортогональный единице

$$[\Phi_\Gamma^0, \mathbf{1}] = 0.$$

Мы построим теперь базис Φ_Γ возмущенного поля $\langle\ \rangle$.

Как и ранее, для каждого $x \in Y_{1/2}$ введем элементы

$$\tilde{\eta}_s(x) = \eta_s(x) - \langle \eta_s(x) \mid \mathcal{E}_{1/2}^{<x}\rangle,$$

где $\langle F \mid \mathcal{E}_{1/2}^{<x}\rangle \in \mathcal{E}_{1/2}^{<x}$, $F \in \mathcal{E}_{1/2}$, означает условное математическое ожидание относительно подалгебры $\mathcal{E}_{1/2}^{<x} \subset \mathcal{E}_{1/2}$ порожденной образующими $\{\psi_\alpha(y), \bar{\psi}_\alpha(y), y < x, \alpha \in M\}$ (имеется в виду лексикографический порядок на Z^ν). Рассмотрим условную матрицу Грамма

$$D_{s,s'} = \langle \tilde{\eta}_s(x)\vartheta\tilde{\eta}_{s'}(x) \mid \mathcal{E}_{1/2}^{<x}\rangle \in \mathcal{E}_{1/2}^{<x},$$

элементы которой являются однородными элементами супералгебры $\mathcal{E}_{1/2}^{<x}$. Применяя, как и ранее, кластерные разложения условных средних относительно квазисостояния $\langle\ \rangle$ (см. [26]), получим, что

$$D_{s,s'} = \delta_{s,s'}(-1)^{\sigma(s)} + m_{s,s'}(x), \tag{9^a}$$

причем $m_{s,s'}(x) \in \mathcal{E}_{1/2}^{<x}$ “малы” и допускают разложение в ряд по мономам Φ_Γ^0 вида (8)

$$m_{s,s'}(x) = \sum_{\Gamma:\operatorname{supp}\Gamma<x} C_\Gamma^{x,s,s'}\Phi_\Gamma^0. \tag{$9^б$}$$

При этом коэффициенты $C_\Gamma^{x,s,s'}$ в этом разложении допускают кластерные оценки

$$| C_\Gamma^{x,s,s'} | < (C\lambda)^{d_{\{x\}\bigcup\operatorname{supp}\Gamma}}, \tag{10}$$

где d_B, $B \in \tilde{Z}^{\nu+1}$—мощность минимального связного набора $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, носителей потенциала в (58^а.5.2), покрывающего множество B.

Заметим теперь, что если мы перейдем от базиса $\tilde{\eta}_s(x)$ к базису

$$h_s(x) = \sum_{s'} B_{s,s'}(x)\tilde{\eta}_s(x), \tag{11}$$

где $B_{s,s'}(x) \in \mathcal{E}_{1/2}^{<x}$, то матрица Грамма $\{D_{s,s'}(x)\}$ нового базиса равна

$$\hat{D}(x) = B(x)D(x)B^*(x),$$

где $B(x) = \{B_{s,s'}(x)\}$, а $B^*(x) = \{B^*_{s,s'}(x)\}$, где $B^*_{s,s'}(x) = \vartheta B_{s,s'}(x)$. Сейчас мы последовательными преобразованиями вида (11) приведем $D(x)$ к диагональной матрице $\{(-1)^{\sigma(s)}\delta_{s,s'}\}$. Разобьем множество N значений мультииндексов на два подмножества $N_\pm = \{s : (-1)^{\sigma(s)} = \pm 1\}$. При этом матрица Грамма D запишется в виде блочной матрицы

$$D = \begin{pmatrix} D_{+,+} & D_{+,-} \\ D_{-,+} & D_{-,-} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$D^*_{+,+} = D_{+,+}, \;\; D^*_{-,-} = D_{-,-}, \;\; D^*_{+,-} = D_{-,+},$$

где $D_{+,+} = \{D_{s,s'},\, s, s' \in N_+\}$, $D_{+,-} = \{D_{s,s'},\, s \in N_+, s' \in N_-\}$ и т. д. В силу ($9^а$) $D_{+,+} = E + M_{+,+}$, $D_{-,-} = -E + M_{-,-}, D_{+,-} = $ $= M_{+,-}$, $D_{-,+} = M_{-,+}$, где матрицы $M_{+,+} = \{m_{s,s'},\, s, s' \in N_+\}$ и т. д. “малы”. Совершив сначала преобразование с матрицей

$$B_1 = \begin{pmatrix} (E + M_{+,+})^{-1/2} & 0 \\ 0 & (E - M_{-,-}^{-1/2}) \end{pmatrix},$$

мы придем к матрице Грамма

$$\begin{pmatrix} E & \hat{D}_{+,-} \\ \hat{D}_{-,+} & -E \end{pmatrix},$$

где $\hat{D}_{-,+} = \hat{D}^*_{+,-}$ и обе матрицы $\hat{D}_{+,-}, \hat{D}_{-,+}$ малы, а их элементы допускают разложение вида ($9^б$) с кластерными оценками (10) для коэффициентов.

Преобразование B_2 с треугольной матрицей

$$B_2 = \begin{pmatrix} (E + D_{+,-}D^*_{+,-})^{-1/2} & (E + D_{+,-}D^*_{+,-})^{-1/2}D_{+,-} \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

приводит матрицу (12) к виду ($11^а$). Итак, для каждого $x \in Y_{1/2}$ мы построили условно-ортонормированный базис $\{h_s(x)\} \in \mathcal{E}_{1/2}^{\le x}$ (алгебра $\mathcal{E}_{1/2}^{\le x} \subset \mathcal{E}_{1/2}$ определяется аналогично алгебре $\mathcal{E}_{1/2}^{<x}$)

$$\langle h_s(x)\vartheta h_{s'}(x) \mid \mathcal{E}_{1/2}^{<x}\rangle = (-1)^{\sigma(s)}\delta_{s,s'}. \tag{13}$$

Легко проверить, что базис

$$\Psi_\Gamma = \prod_x h_{s(x)}(x), \tag{14}$$

где $\Gamma = \{s(x), x \in Y_{1/2}\}$—финитный мультииндекс, а произведение в (14) берется в лексикографическом порядке на $Y_{1/2}$, ортонормирован относительно формы [,]

$$[\Psi_\Gamma, \Psi_{\Gamma'}] = \delta_{\Gamma,\Gamma'}(-1)^{\sigma(\Gamma)}. \tag{14^a}$$

Подобно тому, как это делалось выше для случая обычных полей, можно доказать, что система элементов полна в $\mathcal{E}_{1/2}$ относительно нормы $\| \; \|_r$, определенной формулой (57.5.2) при всех достаточно больших $r > 1$. Заметим также, что базис $\{\Psi_\Gamma\}$ инвариантен относительно пространственных сдвигов

$$U_v\Psi_\Gamma = \Psi_{\Gamma+v},$$

где $\Gamma + v$—мультииндекс Γ, “сдвинутый” на вектор $v \in Z^\nu$.

Обозначим $\mathcal{E}^0_{1/2} \subset \mathcal{E}_{1/2}$ линейную оболочку элементов базиса $\{\Psi_\Gamma\}$. Разложение

$$F = \sum_\Gamma f_\Gamma \Psi_\Gamma,$$

где $F \in \mathcal{E}^0_{1/2}$ и сумма берется по какому-нибудь конечному множеству индексов Γ, порождает отображение $\mathcal{E}^0_{1/2} \to l_{\text{физ}}(\mathfrak{M}_0)$ в множестве финитных функций на $\mathfrak{M}_0$ ($\mathfrak{M}_0$—совокупность мультииндексов Γ). При этом для двух элементов $F, G \in \mathcal{E}^0_{1/2}$

$$(F, G)_{\text{физ}} = \langle F\Theta G\rangle = \sum_{\Gamma,\Gamma'} D_{\Gamma,\Gamma'} f_\Gamma \bar{g}_{\Gamma'},$$

где $\{D_{\Gamma,\Gamma'}\}$ обозначена (транспонированная) матрица Грамма базиса $\{\Psi_\Gamma\}$:

$$D_{\Gamma,\Gamma'} = (\Psi_{\Gamma'}, \Psi_\Gamma)_{\text{физ}} = \langle \Psi_{\Gamma'}\theta\Psi_\Gamma\rangle. \tag{15}$$

Мы опишем физическое гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ в терминах функций $f = \{f_\Gamma, \Gamma \in \mathfrak{M}_0\}$ на множестве $\mathfrak{M}_0$.

Из выражения (15) для матричных элементов $D_{\Gamma,\Gamma'}$ так же, как и в случае обычного случайного поля, выводится их кластерное разложение

$$D_{\Gamma,\Gamma'} = \sum_{\tau=\{(\Gamma_1,\Gamma_1'),\ldots,(\Gamma_k,\Gamma_k')\}} (-1)^{\pi(\tau)}\omega(\Gamma,\Gamma')\ldots\omega(\Gamma_k,\Gamma_k'), \qquad (16)$$

где суммирование, как и в (34.1), происходит по всем разбиениям пары мультииндексов в дизъюнктные пары $\{(\Gamma,\Gamma')\}$ (непустых) мультииндексов, а

$$\omega(\Gamma,\Gamma') = \left\langle \prod_{x\in\operatorname{supp}\Gamma}{}' h_{s(x)}(x), \prod_{x'\in\operatorname{supp}\Gamma'} \theta h_{s'(x')}(x') \right\rangle \qquad (17)$$

—семиинварианты двух наборов элементов

$$\{h_{s(x)}(x),\ x\in\operatorname{supp}\Gamma,\ \ h_{s'(x')}(x'),\ x'\in\operatorname{supp}\Gamma'\},$$

расположенных в надлежащем порядке (лексикографическом порядке в первом наборе и противоположном лексикографическому порядку во втором); знак $(-1)^{\pi(\tau)}$ зависит от четности перестановки, порожденной разбиением τ (см. подробнее в [26]).

Снова с помощью приемов, подробно изложенных в начале этой главы (а также в [26]) получаем, что семиинварианты $\omega(\Gamma,\Gamma')$ допускают при малом λ в (58ᵃ.5.2) кластерную оценку вида (10)

$$|\,\omega(\Gamma,\Gamma')\,| < (C\lambda)^{d_{\operatorname{supp}\Gamma\bigcup\vartheta\operatorname{supp}\Gamma'}}, \qquad (18)$$

где $d_B, B\in\tilde{Z}^{\nu+1}$, определено выше, C—абсолютная константа, а ϑ—отражение "во времени".

Из этой оценки следует, что матрица $D=\{D(\Gamma,\Gamma')\}$ задает в пространстве $l_2(\mathfrak{M}_0)$ ограниченный самосопряженный оператор

$$(Df)(\Gamma) = \sum_{\Gamma'\in\mathfrak{M}} D(\Gamma,\Gamma')f(\Gamma'),\ \ f\in l_2(\mathfrak{M}_0),$$

причем так, что

$$(Df,g)_{l_2(\mathfrak{M}_0)} = \sum_{(\Gamma,\Gamma')} D(\Gamma,\Gamma')f(\Gamma')\bar{g}(\Gamma) = (F,G)_{\text{физ}},$$

$$F,G\in\mathcal{E}^0_{1/2},\ \ F=\sum f(\Gamma)\Psi_\Gamma,\ \ G=\sum g(\Gamma)\Psi_\Gamma,$$

$f,g\in l_2(\mathfrak{M}_0)$, для всех финитных функций f,g. Это означает, что мы можем расширить алгебру $\mathcal{E}_{1/2}$ до гильбертова пространства $\overline{\mathcal{E}}_{1/2}$ элементов вида

$$\sum_\Gamma f(\Gamma)\Psi_\Gamma,$$

где $f=\{f(\Gamma)\}\in l_2(\mathfrak{M}_0)$, изоморфного $l_2(\mathfrak{M}_0)$, и на $\overline{\mathcal{E}}_{1/2}$ будет по-прежнему определена и непрерывна билинейная форма

$$(F,G)_{\text{физ}} = \langle F\theta G\rangle.$$

При этом физическое гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ согласно лемме 11.5.2 равно

$$\mathcal{H}_{\text{физ}} = \overline{(\overline{\mathcal{E}}_{1/2}/\overline{N})}, \qquad (19)$$

где $\overline{N}\subset\overline{\mathcal{E}}_{1/2}$ подпространство $\overline{\mathcal{E}}_{1/2}$ с нулевой нормой $(\|\,F\,\|^2_{\text{физ}}=(F,F)_{\text{физ}}=0)$, а пополнение берется по скалярному произведению $(\cdot,\cdot)_{\text{физ}}$.

Обозначим $K_0\subset l_2(\mathfrak{M}_0)$ подпространство

$$K_0 = \operatorname{Ker} D$$

(изоморфное $\overline{N}$), а через K_1 его ортогональное дополнение

$$K_1 = \operatorname{Im} D = K_0^\perp \subset l_2(\mathfrak{M}_0),$$

которое можно отождествить с $l_2(\mathfrak{M}_0)/K_0$. В K_1 билинейная форма

$$(Df,g)_{l_2(\mathfrak{M}_0)} \equiv (f,g)_{\text{физ}}$$

порождает скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{\text{физ}}$ и, таким образом, пространство $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ изоморфно пополнению пространства K_1 по этому скалярному произведению, которое мы обозначим $\overline{K}_1$.

Введем далее для каждого элемента базиса $\{\Psi_\Gamma\}$ разложение

$$\langle U_{e_0}\Psi_\Gamma \mid \mathcal{E}_{1/2}\rangle = \sum a_{\Gamma,\Gamma'}\Psi_{\Gamma'}. \qquad (20)$$

Из формул (14ᵃ), (1), (3) и (33ᵃ.5.2) находим, что

$$a_{\Gamma,\Gamma'} = (-1)^{\sigma(\Gamma')}[\langle U_{e_0}\Psi_\Gamma \mid \mathcal{E}_{1/2}\rangle, \Psi_{\Gamma'}] =$$

$$= \langle\langle U_{e_0}\Psi_\Gamma \mid \mathcal{E}_{1/2}\rangle\vartheta\Psi_{\Gamma'}\rangle(-1)^{\sigma(\Gamma')} = \langle\langle U_{e_0}\Psi_\Gamma, \vartheta\Psi_{\Gamma'}\rangle\rangle(-1)^{\sigma(\Gamma')} =$$

$$= (-1)^{\sigma(\Gamma')}\langle\Psi_\Gamma\theta\Psi_{\Gamma'}\rangle = (-1)^{\sigma(\Gamma')}D_{\Gamma,\Gamma'}. \tag{21}$$

Для любого элемента $F \in \overline{\mathcal{E}}$

$$F = \sum_\Gamma f(\Gamma)\Psi_\Gamma,$$

$$\langle U_{e_0}F \mid \mathcal{E}_{1/2}\rangle = \sum_\Gamma \tilde{f}(\Gamma)\Psi_\Gamma,$$

где

$$\tilde{f}(\Gamma) = \sum a_{\Gamma,\Gamma'}f = (-1)^{\sigma(\Gamma)}D_{\Gamma,\Gamma'}f(\Gamma').$$

Таким образом, оператор условного математического ожидания $\langle U_{e_0}F \mid \mathcal{E}_{1/2}\rangle$ продолжается до ограниченного оператора в пространстве $\overline{\mathcal{E}}_{1/2}$ и при изоморфизме этого пространства с пространством $l_2(\mathfrak{M}_0)$ переходит в кластерный оператор

$$A = JD, \tag{22}$$

где J—диагональный оператор:

$$(Jf)(\Gamma) = (-1)^{\sigma(\Gamma)}f(\Gamma).$$

Заметим, что $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \mathrm{D} = K_0$. Отсюда и из формул (46ª.5.2) и (19) следует, что трансфер-матрица $\mathcal{J}$ нашего поля при отождествлении пространства $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ с пространством $\bar{K}_1$ совпадает с замыканием (по норме $\| \ \|_{\text{физ}}$ в $\bar{K}_1$) оператора

$$P_{K_1}JD_1, \tag{23}$$

действующего в K_1, где D_1—часть оператора D в его инвариантном подпространстве K_1, а P_{K_1}—проектор в $l_2(\mathfrak{M}_0)$ на подпространство K_1.

Заметим, что отображение

$$\operatorname{Im} D_1^{1/2} \to K_1 : f \to D_1^{-1/2}f,$$

$$f = \operatorname{Im} D_1^{1/2} \subset K_1$$

продолжается до унитарного отображения

$$U : K_1 \to \overline{K}_1$$

(в K_1 рассматривается скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{l_2(\mathfrak{M}_0)}$, а в $\overline{K}_1$—скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{\text{физ}}$). При этом отображении, как легко проверить, оператор $\mathcal{J}$, действующий в $\overline{K}_1$, переходит в унитарно-эквивалентный ему самосопряженный оператор

$$\mathcal{J}' = D_1^{1/2}J_1D_1^{1/2}, \tag{24}$$

действующий в K_1, где

$$J_1 = P_{K_1}JP_{K_1}.$$

Заметим, что оператор (24) является сужением оператора

$$D^{1/2}JD^{1/2},$$

действующего в $l_2(\mathfrak{M}_0)$ на его инвариантное подпространство K_1.

Формула (24), хотя и полезна в некоторых отношениях, но мало пригодна для непосредственных вычислений с оператором $\mathcal{J}$, поскольку нет никаких эффективных способов получить кластерное разложение для квадратного корня из положительного кластерного оператора D (и даже установить его кластерность).

Поэтому удобнее иметь дело непосредственно с кластерным оператором A. А именно, верна следующая простая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{L} \subset l_2(\mathfrak{M}_0)$—инвариантное пространство оператора A в $l_2(\mathfrak{M}_0)$ такое, что для всех $f \in \mathcal{L}$*

$$\| Af \|_{l_2(\mathfrak{M}_0)} > C \| f \|_{l_2(\mathfrak{M}_0)}, \tag{25}$$

где $C > 0$—некоторая константа. Тогда

1) *квадратичная форма*

$$(Df,f) = (f,f)_{\text{физ}} > \bar{C} \| f \|_{l_2(\mathfrak{M}_0)}, \quad f \in \mathcal{L}, \tag{25^a}$$

где $\bar{C} > 0$—некоторая константа,

2) *пространство $\mathcal{L}$ полно относительно нормы $\| \ \|_{\text{физ}}$,*

3) *отображение*

$$j : l_2(\mathfrak{M}_0) \to l_2(\mathfrak{M}_0)/D_0 \subset \mathcal{H}_{\text{физ}}$$

переводит пространство $\mathcal{L}$ в (замкнутое в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$) инвариантное подпространство $\hat{\mathcal{L}}$ трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ и $j : \mathcal{L} \to \hat{\mathcal{L}}$ является унитарным отображением (в смысле нормы $\| \cdot \|_{\text{физ}}$ в $\mathcal{L}$),

4) *оператор A в $\mathcal{L}$ унитарно-эквивалентен трансфер-матрице $\mathcal{J}$ в $\hat{\mathcal{L}}$*

$$j(A\,|_{\tilde{\mathcal{L}}})j^{-1} = \mathcal{J}\,|_{\hat{\mathcal{L}}}\,.$$

Первое утверждение леммы следует из оценки

$$(Af, Af) = \| Df \|^2 = (D^2 f, f) \leq$$

$$\leq (Df, f)^{1/2}(D^2 f, Df)^{1/2} < (Df, f)^{1/2} \| D \|^{1/2} \| Df \|\,.$$

Отсюда $\| Af \|_{l_2(\mathfrak{M}_0)} = \| Df \|_{l_2(\mathfrak{M}_0)} < \| D \|^{1/2} (Df, f)^{1/2}$ и из (25) следует (25^a). Остальные утверждения леммы очевидны.

Таким образом, задача построения инвариантных подпространств трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ сводится к задаче построения инвариантных подпространств оператора A в $l_2(\mathfrak{M}_0)$, удовлетворяющих условию (25).

Замечание. В случае, когда удается построить инвариантное подпространство $\mathcal{L}$ оператора A в $l_2(\mathfrak{M}_0)$, для которого нарушено условие (25) и, тем самым, быть может, нарушено условие (25^a), следует рассмотреть пространство $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \ominus \ominus(\mathcal{L} \bigcap D_0)$ (ортогональное дополнение берется в смысле скалярного произведения в $l_2(\mathfrak{M}_0)$) и оператор $\hat{D}_1 = P_{\mathcal{L}_1} D_1 P_{\mathcal{L}_1}$, задающий скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{\text{физ}}$ в $\mathcal{L}_1$. Тогда пространство $\mathcal{L}_1$ унитарно-эквивалентно некоторому инвариантному подпространству $\hat{\mathcal{L}} \subset \mathcal{H}_{\text{физ}}$ трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ и сужение $\mathcal{J}\,|_{\hat{\mathcal{L}}}$ унитарно-эквивалентно оператору

$$\hat{D}_1^{1/2} J \hat{D}_1^{1/2}$$

в $\mathcal{L}_1$ (ср. с формулой (24)). В некоторых простых случаях (скажем, в случае одночастичных подпространств) оператор $\hat{D}_1^{1/2}$ вычисляется несложно.

Теорема 2. *Пусть при достаточно малом коэффициенте λ в действии (58^{a}.5.2), задающем перестройку свободного гиббсовского поля (58.5.2) для оператора $A = JD$ в $l_2(\mathfrak{M}_0)$ выполнены условия N-частичной отделимости (см. теорему 1.3). Тогда в $l_2(\mathfrak{M}_0)$ существует N инвариантных кластерных подпространств $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N$ оператора A, в которых спектры A не пересекаются и заключены в пределах, указанных в теореме 1.3 (и в частности, для них выполнено условие (10.3)). Эти подпространства взаимно ортогональны (в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_{\text{физ}}$).*

Доказательство этой теоремы следует плану доказательства общей теоремы 1.3, относящейся к самосопряженному кластерному оператору. То обстоятельство, что оператор A несамосопряжен относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_{l_2(\mathfrak{M}_0)}$ (а самосопряжен только относительно формы $(Df, f)_{l_2(\mathfrak{M}_0)} = (\cdot,\cdot)_{\text{физ}}$), вносит некоторые дополнительные усложнения, которые мы здесь и укажем. Заметим, что с помощью условия N-частичной отделимости мы можем построить N инвариантных подпространств $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_N$ оператора A так же, как это мы сделали при доказательстве теоремы. Эти пространства строятся с помощью операторов $S^{(1)}, \ldots, S^{(n)}$, отображающих соответственно пространства $l_2^{R_k}(\mathfrak{M}_0)$, $k = 1, \ldots, N$, в их ортогональные дополнения $l_2^{N \setminus R_k}(\mathfrak{M}_0)$. С помощью приведенных в теореме 1.3 оценок для операторов $S^{(k)}$ мы легко оценим нижнюю границу норм

$$\inf_{f \in \mathcal{L}_k, \|f\|_{l_2(\mathfrak{M}_0)} = 1} \| Af \|_{l_2(\mathfrak{M}_0)} = c_k,$$

где c_k равно κ_k (см. (60.3)).

Рассмотрим далее сопряженный к A оператор $A^* = DJ$. Этот оператор также удовлетворяет условию N-частичной отделимости и у него имеется N инвариантных подпространств

$$\hat{\mathcal{L}}_1, \ldots, \hat{\mathcal{L}}_N,$$

порождаемых операторами $\hat{S}^{(k)}, l_2^{R_k} \to (l_2^{R_k})^{\perp}$. Заметим, что ортогональные дополнения $\hat{\mathcal{L}}_k^{\perp}$ к этим пространствам инвариантны относительно оператора A, причем пространства $\mathcal{L}_k$ и $\hat{\mathcal{L}}_k^{\perp}$ пересекаются лишь по нулевому элементу и их прямая сумма

$$\mathcal{L}_k + \hat{\mathcal{L}}_k^{\perp} = l_2(\mathfrak{M}_0). \tag{26}$$

Это легко доказывается с помощью оценок $S^{(k)}$ норм и $\hat{S}^{(k)}$. Далее, как и при доказательстве теоремы 1.3, получается оценка сверху

$$\inf_{f \in \mathcal{L}_k^{\perp}, \|f\|_{l_2(\mathfrak{M}_0)} = 1} \| Af \|_{l_2(\mathfrak{M}_0)} = b_k,$$

где $b_k = \bar{\kappa}_k$, см. формулу (62.3).

Как и выше, замечаем, что

$$c_k > b_k > c_{k+1} \tag{26^a}$$

для всех $k = 1, \dots, N$. Отсюда и из (26), а также из самосопряженности оператора A относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_{\text{физ}}$ заключаем, что

$$\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \dots \subset \mathcal{L}_N,$$

и, следовательно,

$$\hat{\mathcal{L}}_1^{\perp} \supset \hat{\mathcal{L}}_2^{\perp} \supset \dots \supset \hat{\mathcal{L}}_N^{\perp}.$$

Определим далее

$$\mathcal{H}_k = \mathcal{L}_k \bigcap \hat{\mathcal{L}}_{k-1}^{\perp}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{H}_k$—инвариантное подпространство и спектр $A\,|_{\mathcal{H}_k}$ заключен в пределах (8.3). Поскольку в силу (26^a) подпространства $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{L}_k^{\perp}$ при всех k ортогональны относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$, подпространства $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$ также взаимно ортогональны относительно этого скалярного произведения. Следует теперь доказать, что оператор $A\,|_{\mathcal{H}_k}$—кластерный, т. е. выбрать в каждом $\mathcal{H}_k$ базис $\{\hat{h}_\Gamma, \Gamma \in \mathfrak{M}_0^{(k)}\}$ (вообще говоря, неортогональный), такой, что матричные элементы $b_{\Gamma,\Gamma'}$ оператора $A\,|_{\mathcal{H}_k}$ в этом базисе

$$A\hat{h}_\Gamma = \sum_{\Gamma} b_{\Gamma,\Gamma'}\hat{h}_{\Gamma'} \tag{27}$$

допускают кластерное разложение (4.2) и, кроме того,

$$U_v\hat{h}_\Gamma = \hat{h}_{\Gamma+v}, \;\; v \in Z^{\nu}.$$

Заметим, что ортогональный проектор $P_{\mathcal{H}_k}$ в $l_2(\mathfrak{M}_0)$ на подпространство $\mathcal{H}_k$ строится с помощью кластерных операторов $S^{(k)}$ и $\hat{S}^{(k)}$ равно так же, как и при доказательстве теоремы 1.3, и имеет вид

$$P_{\mathcal{H}_k} = P_{l_2^{(k)}} + D^{(k)}, \tag{28}$$

где $D^{(k)}$—кластерный оператор с малой нормой, а $P_{l_2^{(k)}}$— проектор на подпространство $l_2^{(k)}$. Рассмотрим в $\mathcal{H}_k$ базис

$$h_\Gamma = P_{\mathcal{H}_k} e_\Gamma,$$

где $e_\Gamma(\Gamma') = \delta_{\Gamma,\Gamma'}$—базис в $l^{(k)}$. Взаимная матрица Грамма этих базисов равна

$$B^{(k)}_{\Gamma,\Gamma'} = (e_\Gamma, h_{\Gamma'}) = \delta_{\Gamma,\Gamma'} + D^{(k)}_{\Gamma,\Gamma'}, \tag{28^a}$$

где $D^{(k)}_{\Gamma,\Gamma'}$—матричные элементы кластерного оператора $D^{(k)}$ (в базисе $\{e_\Gamma\}$). Таким образом, если перейти к базисам

$$\hat{e}_\Gamma = \sum_{\Gamma'} S_{\Gamma,\Gamma'} e_{\Gamma'} = e_\Gamma + \sum_{\Gamma'} U_{\Gamma,\Gamma'} e_{\Gamma'}$$

и

$$\hat{h}_\Gamma = \sum_{\Gamma'} S_{\Gamma,\Gamma'} h_{\Gamma'} = h_\Gamma + \sum_{\Gamma'} U_{\Gamma,\Gamma'} h_{\Gamma'}, \tag{29}$$

где $S_{\Gamma,\Gamma'} = (E + D^{(k)})^{-1/2}_{\Gamma,\Gamma'} = \delta_{\Gamma,\Gamma'} + U_{\Gamma,\Gamma'}$ ($\{U_{\Gamma,\Gamma'}\}$—кластерный оператор с малой нормой), то эти базисы будут биортогональны

$$(\hat{e}_\Gamma, \hat{h}_{\Gamma'}) = \delta_{\Gamma,\Gamma'}, \Gamma, \Gamma' \in \mathfrak{M}_0^{(k)}. \tag{30}$$

Из (27) и (30) мы заключаем, что матричные элементы оператора $A\,|_{\mathcal{H}_k}$ в базисе $\{\hat{h}_\Gamma\}$ имеют вид

$$b_{\Gamma,\Gamma'} = (A\hat{h}_\Gamma, \hat{e}_{\Gamma'}).$$

Отсюда из формул (28), (28^a), (29) находим, что $b_{\Gamma,\Gamma'}$ допускают кластерное разложение (4.2). Теорема доказана.

В качестве применения результатов, установленных в этом, а также предыдущих параграфах, рассмотрим решетчатую модель квантовой эвклидовой электродинамики на решетке $\tilde{Z}^{3+1}$, введенную в §5.2 и описывающую взаимодействие фермионного поля Дирака с калибровочным полем (с группой калибровки $U(1)$). В эту модель, напомним, входят три параметра: масса фермиона m (которую мы выберем $m = 1$), параметр взаимодействия $\kappa > 0$ между фермионным и калибровочным полями и параметр β (коэффициент при вильсоновском действии калибровочного поля). Описанные ниже результаты относятся к области достаточно малых значений параметров κ и β.

Заметим, что инвариантные подпространства трансфер-матрицы различаются по действию в них вращений решетки Z^3. В связи с этим рассмотрим гомоморфизмы алгебры $\mathcal{E}_{1/2} : T_g : \mathcal{E}_{1/2} \to \mathcal{E}_{1/2}$, образующие представление $g \to T_g$ группы $O(Z^3)$ вращений решетки Z^3 (т. е. подгруппу группы вращений $O(R^3)$ трехмерного пространства, переводящих решетку в себя). На образующие алгебры $\mathcal{E}_{1/2}$ гомоморфизм T_g действует по формулам

$$T_g\psi_\alpha(x) = \sum s_{\alpha\beta}(g)\psi_\beta(g^{-1}x),$$

$$T_g\bar{\psi}_\alpha(x) = \sum \bar{s}_{\alpha\beta}(g)\bar{\psi}_\beta(g^{-1}x),$$

где $s(g) = \{s_{\alpha\beta}(g)\}, g \in O(Z^3)$—матрица беспинорного представления группы $O(Z^3)$ (см. [9])

$$T_g u(b) = u(g^{-1}b).$$

Рассмотрим для каждого $x \in Y_{1/2}$ следующие квадратичные формы от образующих:

$$\Phi_{\text{ск}}(x) = \sum_\alpha \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\alpha(x),$$

$$\Phi_{\text{пск}}(x) = \sum_{\alpha,\beta} \psi_\alpha(x)(\gamma_5)_{\alpha,\beta}\bar{\psi}_\beta(x),$$

$$\Phi^\mu_{\text{вект}}(x) = \sum_{\alpha,\beta} \psi_\alpha(x)(\gamma_\mu)_{\alpha,\beta}\bar{\psi}_\beta(x), \quad \mu = 1, 2, 3,$$

$$\Phi^\mu_{\text{пвект}}(x) = \sum_{\alpha,\beta} \psi_\alpha(x)(\gamma_\mu\gamma_5)_{\alpha,\beta}\bar{\psi}_\beta(x), \quad \mu = 1, 2, 3,$$

где $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Эти формы калибровочно-инвариантны и при трансляциях $x \to x + s, s \in Z^\nu, x \in Y_{1/2}$, сдвигаются на s:

$$\Phi_{\text{ск}}(x) \to \Phi_{\text{ск}}(x + s)$$

и аналогично для остальных форм. При действии T_g группы вращений в $\mathcal{E}_{1/2}$ эти формы преобразуются соотвественно как скалярное, псевдоскалярное, векторное и псевдовекторное поля:

$$T_g\Phi_{\text{ск}}(x) = \Phi_{\text{ск}}(g^{-1}x),$$

$$T_g\Phi_{\text{пск}}(x) = \det g\Phi_{\text{пск}}(g^{-1}x),$$

$$T_g\Phi^\mu_{\text{вект}}(x) = \sum_{\mu'} g_{\mu,\mu'}\Phi^{\mu'}_{\text{вект}}(g^{-1}x),$$

$$T_g\Phi^\mu_{\text{пвект}}(x) = \det g \sum_{\mu'} g_{\mu,\mu'}\Phi^{\mu'}_{\text{пвект}}(g^{-1}x).$$

Рассмотрим линейные оболочки соответствующих форм

$$\mathcal{L}_{\text{ск}} = \sum_x c_x\Phi_{\text{ск}}(x),$$

$$\mathcal{L}_{\text{вект}} = \sum_x c_x\Phi^\mu_{\text{вект}}(x)$$

и т. д., где $\{c_x\}$—финитный набор коэффициентов.

Построенные пространства $\mathcal{L}_{\text{ск}}, \mathcal{L}_{\text{пск}}, \mathcal{L}_{\text{вект}}, \mathcal{L}_{\text{пвект}}$ инварианты относительно калибровочной группы, группы трансляций и группы вращения. Оказывается, что при достаточно малых $\kappa > 0$ и $\beta > 0$ таких, что $\kappa > c \mid \beta \mid^{1/2}$ ($c > 0$—некоторая абсолютная константа), существует два старших инвариантных относительно $\mathcal{J}$ подпространства $\mathcal{H}_{\text{пск}}$ и $\mathcal{H}_{\text{вект}}$ близких к пространствам $\mathcal{L}_{\text{пск}}$ и $\mathcal{L}_{\text{вект}}$ соответственно. Спектр трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ в этих пространствах $\sim \kappa^2$. Точнее, в пространствах $\mathcal{H}_{\text{пск}}$ и $\mathcal{H}_{\text{вект}}$ можно выбрать ортонормированные базисы $\{h^{\text{пск}}_x, x \in Y_{1/2}\}$ и $\{h^{\text{вект}}_{x,\mu}, x \in Y_{1/2}, \mu = 1, 2, 3\}$, элементы которых при действии трансляций и вращений преобразуются так же, как $\{\Phi_{\text{пск}}(x)\}$ и $\{\Phi^\mu_{\text{вект}}(x)\}$, а при действии трансфер-матрицы $\mathcal{J}$—по формулам

$$\mathcal{J}h^{\text{пск}}_x = \sum_y a^{\text{пск}}(x - y)h^{\text{пск}}_y,$$

$$\mathcal{J}h^{\text{вект}}_{x,\mu} = \sum_y a^{\text{вект}}(x - y)h^{\text{вект}}_{y,\mu},$$

где

$$a^{\text{пск}}(\xi) = 4\kappa^2\delta_{\xi,0} + O(\kappa^4),$$

$$a^{\text{вект}}(\xi) = 4\kappa^2\delta_{\xi,0} + O(\kappa^4)$$

(слагаемые $O(\kappa^4)$ порядка κ^4 в этих формулах, вообще говоря, различны). Пространства $\mathcal{H}_{\text{пск}}$ и $\mathcal{H}_{\text{вект}}$ описывают соответственно состояния псевдоскалярных и векторых “мезонов” в нашей модели. Что касается пространств $\mathcal{L}_{\text{ск}}$ и $\mathcal{L}_{\text{пвект}}$, то для них квадратичная форма $\langle F\Theta F\rangle, F \in \mathcal{L}_{\text{ск,пвект}}$ имеет порядок $\kappa^2\beta$. Поэтому построение соответствующих инвариантых подпространств (скалярных и псевдоскалярных “мезонов”) представляет более трудную и пока еще нерешенную задачу.

§ 6. Модели с непрерывным временем

Здесь мы будем рассматривать гиббсовские поля, заданные на “пространстве-времени” $Z^\nu \times R^1$ (Z^ν—“пространство”, а R^1—непрерывное “время”) и принимающие значения из некоторого конечного множества S. Пусть определен эргодический марковский процесс $\eta_0 = \{\eta_0(t), t \in R^1\}$ со значениями в S и стационарной мерой ν_0. Определим “свободное поле” на $Z^\nu \times R^1$ как набор одинаковых независимых экземпляров $\{\eta_x = \{\eta_x(t), t \in R^1\}, x \in Z^\nu\}$ процесса η_0, приписанных каждой точке решетки $x \in Z^\nu$. Как и выше, мы предположим, что на S заданы конечное число “полевых переменных” $\{\varphi_i, i = 1, \ldots, k\}$ и ортонормированный базис $\{\varphi_\gamma, \gamma \in N\}$ в $l_2(s, \nu_0)$, состоящий из полиномов от φ_i (включающий и сами эти функции), удовлетворяющий условию (1.1).

Мы предположим, что инфинитезимальная матрица $a(s, s')$ переходных вероятностей для процесса η_0, определяемая из соотношений

$$\Pr(s \to s' \text{ за время } \Delta t) = a(s, s')\Delta t + o(\Delta t), \quad s \neq s',$$

$$\Pr(s \to s \text{ за время } \Delta t) = 1 - a(s, s)\Delta t + o(\Delta t), \tag{1}$$

где

$$a(s, s) = -\sum_{s \neq s'} a(s, s'),$$

является симметричной, и, следовательно, процесс $\eta(t)$, а также и свободное поле $\{\eta_x(t)\}$ инварианты относительно обращения времени.

Для любого конечного множества $\Lambda \subset Z^\nu$ и отрезка $T \subset R^1$ определим действие

$$S_{\Lambda,T} = \beta \sum_{\substack{i,j \\ x,y \in \Lambda \mid x-y \mid = 1}} \int_T \Phi^{i,j}_{x,y} \varphi_i(\eta_x(t))\varphi_j(\eta_y(t))dt \tag{2}$$

и конечную гиббсовскую перестройку $\mu_{\Lambda,T}$ меры μ_0 (распределения “свободного поля”) с помощью этого действия.

Как показано в [26], при достаточно малом β эта мера допускает кластерное разложение. А именно, оно сводится к изучению дискретного гиббсовского поля на решетке $Z^\nu \times Z^1_a$, где Z^1_a—одномерная решетка с шагом $a =\mid \ln \beta \mid$, и кластерное разложение исходного поля получается с помощью кластерного разложения этого вспомогательного решетчатого поля (причем малым параметром кластерности λ в этом разложении служит величина $\lambda = C\beta \mid \ln \beta \mid$ (см. [26]), где $C > 0$— абсолютная константа. Из полученного таким образом кластерного разложения вытекает, в частности, что существует термодинамический предел μ меры $\mu_{\Lambda,T}$

$$\mu = \lim_{\Lambda \uparrow Z^\nu} \mu_{\Lambda,T}.$$

Построенное предельное поле образует марковский процесс с пространством состояний S^{Z^ν}. Обозначим $\mathcal{H}_{\text{физ}} \subset L_2(\Omega, \mu)$, где Ω—пространство конфигураций $\eta = \{\eta_x(t), (x, t) \in Z^\nu \times R^1\}$ этого поля, подпространство функционалов от них, зависящих лишь от значений $\eta_0 = \{\eta_x(t = 0), x \in Z^\nu\}$—конфигурации в нулевой момент времени. Как и выше, определена сжимающая полугруппа стохастических операторов $\mathcal{J}_t, t > 0$, которые в силу симметричности матрицы $a(s, s')$ и вида (2) действия являются самосопряженными. Представление этой полугруппы в виде

$$\mathcal{J}_t = \exp\{-tH\} \tag{3}$$

определяет самосопряженный неотрицательный оператор $H \geq$ ≥ 0—гамильтониан нашего поля. Как и выше, в случае непрерывного времени мы также можем построить мультипликативный ортонормированный базис $\{\Psi_\Gamma\}$ в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ вида

$$\Psi_\Gamma = \prod_x \psi^x_{\gamma(x)}, \quad \Gamma = \{\gamma(x)\},$$

причем квазилокальные функционалы $\psi^x_{\gamma(x)}$ допускают разложение вида (12.1). Таким образом, матричные элементы $a^t_{\Gamma,\Gamma'} =$ $= (\mathcal{J}_t \Psi_\Gamma, \Psi_{\Gamma'})$ имеют кластерное мультипликативное разложение вида (34.1):

$$a^t_{\Gamma,\Gamma'} = \sum_{(\{\Gamma,\Gamma'\})} \prod_i \omega^t(\Gamma_i, \Gamma'_i), \tag{4}$$

а семиинварианты ω^t допускают кластерную оценку

$$\mid \omega^t(\Gamma, \Gamma') \mid < (C\lambda)^{d_{\operatorname{supp}\Gamma \bigcup \operatorname{supp}(\Gamma+t)}},$$

где $d_B, B \subset Z^\nu \times R^1$—длина наименьшего связного графа, построенного на точках конечного множества $B \subset Z^\nu \times R^1$. При этом метрика в $Z^\nu \times R^1$ вводится по формуле

$$\rho(x,t)(x',t') = \rho_{Z^\nu}(x,x') + [\frac{\mid t-t' \mid}{a}],$$

[ ]—целая часть числа.

Отсюда видно, что при $t = a$ оператор $\mathcal{J}_a$ является самосопряженным кластерным оператором и в случае выполнения условий k-частичной отделимости имеет k инвариантных пространств $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_k$, как это описано в теореме 1.3. Эти подпространства инвариантны также и относительно гамильтониана H.

Далее из кластерного разложения (4), верного при любом $t > 0$ вытекает, что матричные элементы $b_{\Gamma,\Gamma'}$ оператора H в базисе $\{\Psi_\Gamma\}$, равные

$$b_{\Gamma,\Gamma'} = \frac{d}{dt} a^t_{\Gamma,\Gamma'} \mid_{t=0}, \tag{5}$$

имеют вид

$$b_{\Gamma,\Gamma'} = \sum_{\substack{(\bar\Gamma,\bar\Gamma')\subset(\Gamma,\Gamma') \\ \Gamma\setminus\bar\Gamma=\Gamma'\setminus\bar\Gamma'}} W(\bar\Gamma, \bar\Gamma'), \tag{6}$$

где

$$W(\bar\Gamma, \bar\Gamma') = \frac{d}{dt}\omega^t(\bar\Gamma, \bar\Gamma') \mid_{t=0}, \tag{7}$$

а суммирование происходит по всем парам мультииндексов $(\bar\Gamma, \bar\Gamma')$, подчиненным паре (Γ, Γ'), причем таким, что сужения

$$\Gamma \mid_{\operatorname{supp}\Gamma\setminus\operatorname{supp}\bar\Gamma} \equiv \Gamma\setminus\bar\Gamma, \;\; \Gamma' \mid_{\operatorname{supp}\Gamma'\setminus\operatorname{supp}\bar\Gamma'} \equiv \Gamma'\setminus\bar\Gamma'$$

совпадают. Формула легко выводится из представления (4) и того замечания, что $a_{\Gamma,\Gamma'} \to \delta_{\Gamma,\Gamma'}$ при $t \to 0$.

Рассмотрим в качестве примера так называемую *квантовую модель Изинга*. Здесь пространство $S = \{1, -1\}$—матрица переходных вероятностей, задающая невозмущенный процесс, имеет вид

$$a_{s,s'} = 1, \;\; s \neq s', \;\; a_{s,s} = -1.$$

Инвариантное распределение на $S : \nu_0(1) = \nu_0(-1) = 1/2$. Действие $S_{\Lambda,T}$ равно

$$S_{\Lambda,T} = \beta \sum_{\substack{x,y\in\Lambda \\ |x-y|=1}} \int s_x(t) s_y(t) dt.$$

При достаточно малых β для трансфер-матрицы $\mathcal{J}_t$ предельного поля в этой модели выполнено условие N-частичной отделимости (при $t \geq a = \mid \ln\beta \mid$) и, следовательно, у $\mathcal{J}_a$, а таким образом, у всей полугруппы $\mathcal{J}_t$ существует N k-частичных кластерных инвариантных подпространств $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N$.

При этом оператор $H \mid_{\mathcal{H}_1} = H_1$ в некотором ортонормированном базисе $\{h_x, x \in Z^\nu\}$ имеет вид свертки

$$H_1 h_x = \sum_y a_{x-y} h_y, \tag{8}$$

причем $\mid a_\xi \mid < (C\lambda)^{|\xi|}, \xi \in Z^\nu$. В двухчастичном подпространстве $\mathcal{H}_2$ можно выбрать базис $\{h_{x,y}, x, y \in Z^\nu\}$, в котором оператор $H_2 = H \mid_{\mathcal{H}_2}$ имеет вид

$$H_2 h_{x,y} = \sum_{x'\in Z^\nu} a_{x-x'} h_{x',y} + \sum_{y'\in Z^\nu} a_{y-y'} h_{x,y'} + \sum_{x',y'\in Z^\nu} B_{x,y,x',y'} h_{x',y'}, \tag{9}$$

где функция a_ξ—та же самая, что и в (8), а ядро $B_{x,y,x',y'}$ допускает оценку

$$\mid B_{x,y,x',y'} \mid < (C\lambda)^{d_{\{x,y;x',y'\}}}$$

(обе пары (x,y) и (x',y') лежат на нулевом временном слое).

Утверждение о совпадении функций a_ξ в формулах (8) и (9) доказывается аналогично тому, как в случае модели Изинга с дискретным временем была доказана мультипликативная кластерность оператора $\mathcal{J}$.

§7. Спектральный анализ k-частичных кластерных операторов

Для более детального изучения спектра конечно-частичных кластерных операторов удобно перейти к преобразованию Фурье в пространстве $l_2^{(k)}$.

С этой целью введем следующий класс операторов, которые будем называть *кластерными операторами* в p-представлении. Обозначим $L_2(T^\nu, dp, \mathcal{N}) = L_2(T^\nu, dp) \times l_2(\mathcal{N}) = L_2$ гильбертово пространство функций $f(p,\gamma)$, определенных на декартовом произведении $T^\nu \times \mathcal{N}$, где T^ν—ν-мерный тор, dp—нормированная мера Хаара на T^ν, а $\mathcal{N}$—некоторое конечное или счетное множество. Пусть, далее, $\mathcal{F}_s(L_2)$—фоковское пространство, порожденное L_2, т. е. пространство последовательностей функций

$$F = \{f_0, f_1(p,\gamma), f_2((p_1,\gamma_1),(p_2,\gamma_2)), \ldots, \tag{1}$$

$$\ldots, f_n((p_1,\gamma_1),\ldots,(p_n,\gamma_n)) \ldots\},$$

симметричных относительно всех перестановок пар $(p_i, \gamma_i) \in \in (T^\nu \times \mathcal{N})$.

Обозначим $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}_s(L_2)$ подпространство последовательностей вида (1), для элементов которых выполнено условие

$$\int f_n((p_1,\gamma_1),\ldots,(p_n,\gamma_n))h(p_i+p_j)dp_i dp_j \equiv 0 \tag{2}$$

при всех $n, i, j = 1, \ldots, n, i \neq j$ и всех функций $h \in L_2(T^\nu)$.

Обозначим $\tilde{\mathcal{F}}_k \subset \tilde{\mathcal{F}}$ подпространство последовательностей (1), у которых все компоненты $f_n = 0$, кроме f_k. Очевидно, что

$$\tilde{\mathcal{F}} = \oplus_{k=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{F}}_k \tag{3}$$

и каждый оператор A в $\tilde{\mathcal{F}}$ представляется с помощью операторной матрицы $A = \{A_{m,n}\}$, где $A_{m,n} : \tilde{\mathcal{F}}_n \to \tilde{\mathcal{F}}_m$.

Определение кластерного оператора в p-представлении. Рассмотрим оператор A в $\mathcal{F}$, каждый блок $A_{m,n}$ которого задается ядром (обобщенным)

$$K_{m,n}((p_1,\gamma_1),\ldots,(p_m,\gamma_m);(p'_1,\gamma'_1),\ldots,(p'_n,\gamma'_n)) = \sum_{\varepsilon} a_\varepsilon \delta_\varepsilon, \tag{4}$$

где суммирование происходит по всем разбиениям пары множеств $M = \{1,\ldots,m\}$, $M' = \{1,\ldots,n\}$ на пары $\{(\beta_1,\beta'_1),\ldots \ldots,(\beta_k,\beta'_k)\}$ непустых подмножеств $\beta_i \subseteq M$, $\beta'_i \subseteq M'$, а

$$\delta_\varepsilon = \prod_i \delta(P_{\beta_i} - P'_{\beta'_i}).$$

Здесь для $(\beta_i, \beta'_i) \subseteq (M, M')$ и двух наборов $(p_1,\ldots,p_m)$, $(p'_1,\ldots,p'_n)$ обозначено:

$$P_\beta = \sum_{k\in\beta} p_k, \quad P'_{\beta'} = \sum_{k\in\beta'} p'_k, \tag{5}$$

а $\delta(\cdot)$—обычная δ-функция на торе T^ν. При этом a_ε—гладкая (аналитическая) функция, определенная на $\Gamma_\varepsilon \times N^{m+n}$; здесь Γ_ε— многообразие в $(T^\nu)^{m+n}$:

$$\Gamma_\varepsilon = \{(p_1,\ldots,p_m);(p'_1,\ldots,p'_n) : p_{\beta_i} = p'_{\beta'_i},\ i = 1,\ldots,k\}. \tag{6}$$

При этом ядро $K_{m,n}$ в (4) предполагается симметричным как относительно переменных $\{p_i, \gamma_i\}$, так и переменных $\{p'_i, \gamma'_i\}$.

Пусть далее $\mathfrak{M}_0$, как и выше, пространство мультииндексов $\Gamma = \{\gamma(x)\}$. Условимся каждый мультииндекс Γ записывать в виде неупорядоченной последовательности пар $\{x_i, \gamma(x_i)\}$ при некоторой нумерации точек из $\operatorname{supp}\Gamma$.

Таким образом, пространство $l_2(\mathfrak{M}_0)$ можно отождествить с подпространством фоковского пространства $\mathcal{F}_s(l_2(Z^\nu \times \mathcal{N}))$, состоящим из тех последовательностей

$$\Psi = \{\psi_0, \psi_1((x_1,\gamma_1)),\ldots,\psi_n((x_1,\gamma_1),\ldots,(x_n,\gamma_n)),\ldots\} \in$$

$$\in \mathcal{F}_s(l_2(Z^\nu \times \mathcal{N})), \tag{7}$$

у которых

$$\psi_n((x_1,\gamma_1),\ldots,(x_n,\gamma_n)) = 0,$$

если при каких-нибудь $i \neq j$, $x_i = x_j$. Очевидно, что преобразование Фурье

$$\Psi \to \{f_0, f_1(p_1,\gamma_1),\ldots,f_n((x_1,\gamma_1),\ldots,(x_n,\gamma_n),\ldots\},$$

где

$$f_n((p_1,\gamma_1),\ldots,(p_n,\gamma_n)) =$$

$$= \sum_{\{x_1,\ldots,x_n\}} \prod_{k=1}^{n} \exp\{i(p_k,x_k)\}\psi_n((x_1,\gamma_1),\ldots,(x_n,\gamma_n)) \tag{8}$$

переводит $\mathcal{F}_s(l_2(Z^\nu \times \mathcal{N}))$ в $\mathcal{F}_s(l_2(T^\nu \times \mathcal{N}))$ и при этом $l_2(\mathfrak{M}_0)$ переходит в пространство $\tilde{F}$.

При таком преобразовании группа $\{U_s, s \in Z^\nu\}$ трансляций, ~~действующих в $l_2(\mathfrak{M}_0)$~~ по формуле (31^{a}.1), переходит в группу, действующую в $\tilde{\mathcal{F}}$ по формуле

$$(U_s F)_n((p_1,\gamma_1),\ldots,(p_n,\gamma_n)) =$$

$$= \exp\{i(s, p_1 + \ldots + p_n)\} f_n((p_1,\gamma_1),\ldots,(p_n,\gamma_n)). \qquad (9)$$

Лемма 1. *Пусть A—кластерный оператор в $l_2(\mathfrak{M}_0)$ с параметром кластерности λ. Тогда после преобразования Фурье (8) он переходит в кластерный оператор в p-представлении. При этом функции a_ε в представлении (4) аналитичны в некоторой комплексной окрестности многообразия Γ_ε и удовлетворяют в этой окрестности оценкам*

$$| a_\varepsilon((p_1,\gamma_1),\ldots,(p_m,\gamma_m)); ((p'_1,\gamma'_1),\ldots,(p'_n,\gamma'_n)) | <$$

$$< \prod_{l=1}^{k} \prod_{i\in\beta_l} \lambda^{N(\gamma_i)/2} \prod_{i\in\beta'_l} \lambda^{N(\gamma'_i)/2}, \qquad (10)$$

где $\varepsilon = \{(\beta_1,\beta'_1),\ldots,(\beta_k,\beta'_k)\}$.

Доказательство. Имеем

$$K_{n,m}((p_1,\gamma_1),\ldots,(p_n,\gamma_n)); ((p'_1,\gamma'_1),\ldots,(p'_m,\gamma'_m)) =$$

$$= \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\\(x'_1,\ldots,x'_m)}}{}' a((x_1,\gamma_1),\ldots,(x_n,\gamma_n)); ((x'_1,\gamma'_1),\ldots,(x'_m,\gamma'_m))\times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \exp\{i(x_j,p_j)\} \prod_{j=1}^{m} \exp\{-i(x'_{j'},p'_{j'})\}, \qquad (11)$$

где $\sum'$ означает, что мы суммируем по набором $(x_1,\ldots,x_n)$, $(x'_1,\ldots,x'_m)$ с попарно различными элементами в каждом наборе. Заметим, что функция $K_{n,m}$ в отдельности симметрична относительно пар $\{(p_i,\gamma_i)\}$ и $\{(p'_i,\gamma'_i)\}$. Поскольку мы суммируем в (11) по $x_1,\ldots,x_n$, $x'_1,\ldots,x'_m$ при фиксированных $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$, $\gamma'_1,\ldots,\gamma'_m$, мы далее опустим эти переменные для избежания громоздкости в формулах. Воспользовавшись кластерным разложением (4.2) для функции a, перепишем (11) в виде

$$\sum_{k} \sum_{\varepsilon=\{(\beta_l,\beta'_l),l=1,\ldots,k\}} \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\\(x'_1,\ldots,x'_n)}}{}' \omega(\{x_j, j\in\beta_l\},\{x'_{j'}, j'\in\beta'_l\}, l=1,\ldots,k)\times$$

$$\times \prod_{l=1}^{k} \prod_{j\in\beta_l} \exp\{i(x_j,p_j)\} \prod_{j'\in\beta'_l} \exp\{-i(x'_{j'},p'_{j'})\}. \qquad (11^a)$$

Далее при фиксированном разбиении ε можно написать

$$\sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\\(x'_1,\ldots,x'_m)}}{}' = \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\\(x'_1,\ldots,x'_n)}}{}'_{\varepsilon} - \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n)\\(x'_1,\ldots,x'_n),}}{}''_{\varepsilon},$$

где $\sum'_\varepsilon$ означает суммирование по наборам $(x_1,\ldots,x_n),(x'_1,\ldots \ldots,x'_n)$, в которых различны элементы с номерами, попавшими в один и тот же блок β_l (или β'_l), $l=1,\ldots,k$, а $\sum''_\varepsilon$ означает суммирование по паре наборов $(x_1,\ldots,x_n),(x'_1,\ldots,x'_m)$ с тем же свойством, но таких, что по крайней мере в одном из них совпадет по меньшей мере два элемента с номерами из разных блоков β_{l_1} и β_{l_2} (или β'_{l_1} и β'_{l_2}), $l_1 \neq l_2$. Напомним, что для таких наборов кластерная функция ω все равно определена в силу свойства (5.2) независимости кластеров.

Рассмотрим сначала первую сумму $\sum'_\varepsilon$ и зафиксируем в каждом блоке β_l наименьший элемент s_l. Заметим далее, что опять в силу свойства независимости кластеров эту сумму можно записать в виде

$$\sum_{\varepsilon}{}' \omega(\{x_j - x_{s_l}, j\in\beta_l\},\{x'_{j'} - x_{s_l}, j'\in\beta'_l\}, l=1,\ldots,k)\times$$

$$\times \prod_{l=1}^{k} \Big(\prod_{j\in\beta_l} \exp\{i(x_j - x_{s_l},p_j)\} \prod_{j'\in\beta'_l} \exp\{-i(x'_{j'} - x_{s_l},p'_{j'})\}\times$$

$$\times \exp\{i(x_{s_l},(P_{\beta_l} - P_{\beta'_l})\}\Big). \qquad .(12)$$

Фиксировав x_{s_l}, просуммируем по переменным $y_j = x_j - x_{s_l}, y'_{j'} = x'_{j'} - x_{s_l}$. В силу кластерной оценки (6.2) сумма (12) сходится и представляет собой аналитическую функцию от переменных $\{p_j\}_{j=1,\ldots,n}$, $\{p'_{j'}\}_{j'=1,\ldots,m}$, удовлетворяющую оценке (10). Суммирование по x_{s_l} приводит к дополнительным множителям $\prod_{l=1}^{k} \delta(P_{\beta_l} - P_{\beta'_l})$.

Переходя ко второй сумме $\sum''_\varepsilon$, заметим, что каждой паре наборов $\{x_j\}_{j=1,\ldots,n}, \{x'_{j'}\}_{j'=1,\ldots,m}$, входящих в нее, можно сопоставить пару наборов $(y_1,\ldots,y_{n'}),(y_1,\ldots,y_{m'})$, состоящих из попарно различных элементов из $\{x_j\}$ и $\{x'_{j'}\}$. Далее, каждому $y_j, j=1,\ldots,n'$, (и соответственно каждому $y'_{j'}, j'=1,\ldots,m'$) отнесем множество $\alpha_j \subseteq [1,\ldots,n]$ (или $\alpha'_j \subseteq [1,\ldots,m]$) такое, что $x_i = y_j$ для всех $i \in \alpha_j$ и только для них (аналогично $x'_{i'} = y'_{j'}$ при $i' \in \alpha'_{j'}$). Далее сопоставим наборам

$\{y_j\}_{j=1,\dots,n'}, \{y'_{j'}\}_{j'=1,\dots,m'}$ разбиение $\tilde{\varepsilon} = \{(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}'_1), \dots, (\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}'_{p'})\}$ пары множеств $(1, \dots, n'), (1, \dots, m')$ на пары подмножеств $(\tilde{\beta}_i, \tilde{\beta}'_i)$, получающееся “склеиванием” блоков исходного разбиения ε по “пересекающимся блокам”. Точно это означает следующее. Образуем из блоков (β_l, β'_l) разбиения ε граф, связав ребрами те пары блоков $(\beta_{l_1}, \beta'_{l_1})$ и $(\beta_{l_2}, \beta'_{l_2})$, у которых либо β_{l_1} и β_{l_2} пересекаются с одним и тем же множетсовм α_j, либо β'_{l_1} и β'_{l_2} пересекаются одновременно с каким-нибудь их $\alpha'_{j'}$. Образуем новое разбиение $\tilde{\varepsilon}$ пары множеств $(1, \dots, n), (1, \dots, m)$, объединяя в один блок все блоки исходного разбиения ε, попавшие в одну связную компоненту нашего графа. Переходя теперь от наборов $\{x_j\}_{j=1,\dots,n}$ и $\{x'_{j'}\}_{j'=1,\dots,m}$ к наборам $\{y_j\}_{j=1,\dots,n'}, \{y'_{j'}\}_{j'=1,\dots,m'}$, мы и получим упомянутое разбиение. Очевидно, что число блоков разбиения $\tilde{\varepsilon}$ меньше k. Таким образом, сумму $\sum''_{\varepsilon}$ можно представить в виде

$$\sum_{n',m'} \sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha'_n)\\(\alpha'_1,\dots,\alpha'_{m'})}} \sum_{p<k} \sum_{\tilde{\varepsilon}=(\tilde{\beta}_i,\tilde{\beta}'_i),i=1,\dots,p} \times$$

$$\times \sum_{\substack{y_1,\dots,y_{n'}\\y'_1,\dots,y'_{m'}}} \tilde{\omega}(\{y_j, j \in \tilde{\beta}_s\}, \{y'_{j'}, j' \in \tilde{\beta}'_s\}, s = 1, \dots, p) \prod_{s=1}^{p} \times$$

$$\times \prod_{j \in \tilde{\beta}_s} \exp\{i(y_j, \sum_{t \in \alpha_j} p_t)\} \prod_{j' \in \tilde{\beta}'_s} \exp\{-i(y'_{j'}, \sum_{t' \in \alpha'_{j'}} p'_{t'})\}. \qquad (12^a)$$

Функции $\tilde{\omega}$ от набора кластеров $\{y_j, j \in \tilde{\beta}_s\}, \{y'_{j'}, j' \in \tilde{\beta}'_s\}, s = = 1, \dots, p$, удовлетворяют обоим условиям (5.2) и (6.2) в определении кластерной функции.

Далее следует для каждого разбиения $\tilde{\varepsilon}$ в сумме (12^a) повторить предыдущие рассуждения и снова выделить слагаемые в (12^a), приводящие к произведению p δ-функций в выражении для $K_{m,n}$. При этом остаток снова будет иметь вид суммы (12^a), причем входящие в нее разбиения содержат менее чем p блоков. Повторяя эту процедуру несколько раз, мы и придем к выражению (4). Лемма доказана.

Заметим, что k-частичный кластерный оператор в пространстве $l_2(\mathfrak{M}_0^{(k)})$ после перехода к p-представлению превращается в оператор $\tilde{\mathcal{J}}$, у которого ядра

$$K_{m,n}((p_1, \gamma_1), \dots, (p_m, \gamma_m); (p'_1, \gamma'_1), \dots, (p'_m, \gamma'_m))$$

отличны от нуля лишь при условии, что

$$\sum_{i=1}^{m} N(\gamma_i) = \sum_{j=1}^{n} N(\gamma'_j) = k$$

(и, таким образом, $m, n \leq k$).

Рассмотрим здесь более подробно спектр одно- и двухчастичного кластерного оператора.

Случай $k = 1$. После преобразования Фурье одночастичный оператор A, действующий в $l_2(\mathfrak{M}_0^{(1)})$, перейдет в оператор $\tilde{A}$ в пространстве $L_2(T^\nu \times \mathcal{N}^{(1)})$, действующий по формуле

$$(\tilde{A}f)(p, \gamma) = \sum_{\gamma' \in \mathcal{N}^{(1)*}} B_{\gamma,\gamma'}(p) f(p, \gamma'), \qquad (13)$$

где $B(p) = \{B_{\gamma,\gamma'}(p), \gamma, \gamma' \in \mathcal{N}^{(1)}\}$— семейство самосопряженных матриц порядка $r =\mid \mathcal{N}^{(1)} \mid$ ($\mathcal{N}^{(1)} \subseteq \mathcal{N}$—множество индексов γ, для которых $\mathcal{N}(\gamma) = k$). Пусть

$$\varepsilon_1(p) \geq \varepsilon_2(p) \geq \dots \geq \varepsilon_r(p)$$

—собственные значения матрицы $B(p)$. Очевидно, что спектр оператора A совпадает с объединением множеств значений функций

$$\sigma(A) = \bigcup_{s=1}^{r} \operatorname{Im} \varepsilon_s(p).$$

В случае, когда A—одночастичная часть трансфер-матрицы некоторого гиббсовского поля, ее собственные векторы, соответствующие собственным векторам $e_s(p)$ матрицы $B(p)$, интерпретируются в физике как состояния элементарных частиц (или “элементарных возбуждений”) поля с квазиимпульсом $p \in T^\nu$. При этом энергия этих частиц равна $-\ln \mid \varepsilon_s(p) \mid$.

Случай $k = 2$. Кластерный оператор A в $l_2(\mathfrak{M}_0^{R_2})$ переходит в оператор $\tilde{A}$, действующий в пространстве L_2 пар функций

$$\{f_1(p, \gamma), f_2((p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2))\} = F,$$

$$\gamma \in \mathcal{N}^{(2)}, \ \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{N}^{(1)}. \qquad (14)$$

При этом функция $f_2((p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2))$ симметрична относительно пар переменных (p_1, γ_1) и (p_2, γ_2) и удовлетворяет общему условию (2)

$$\int f_2((p_1,\gamma_1),(p_2,\gamma_2))h(p_1+p_2)dp_1dp_2=0$$

для любой функции $h\in L_2(T^\nu)$. Оператор $\tilde{A}$ действует на F по формуле

$$(\tilde{A}F)_1(p,\gamma)=\sum_{\gamma'}a^{(1,1)}_{\gamma,\gamma'}(p)f_1((p,\gamma')+$$

$$+\sum_{\gamma_1',\gamma_2'}\int\limits_{p_1'+p_2'=p}a^{(2,2)}_{\gamma;\gamma_1',\gamma_2'}(p;p_1',p_2')f_2((p_1',\gamma_1'),(p_2',\gamma_2'))dp_1'dp_2',$$

$$(\tilde{A}F)_2((p_1,\gamma_1),(p_2,\gamma_2))=\sum_{\gamma'}\bar{a}^{(1,2)}_{\gamma';\gamma_1,\gamma_2}(p_1+p_2;p_1,p_2)f_1(p_1+p_2,\gamma')+$$

$$+\sum_{\gamma_1',\gamma_2'}a^{(2,2)}_{\gamma_1,\gamma_2;\gamma_1',\gamma_2'}(p_1,p_2)f_2((p_1,\gamma_1'),(p_2,\gamma_2'))+\tag{15}$$

$$+\sum_{\gamma_1',\gamma_2'}\int\limits_{p_1'+p_2'=p_1+p_2}b^{(2,2)}_{\gamma_1,\gamma_2;\gamma_1',\gamma_2'}(p_1,p_2;p_1',p_2')f_2((p_1',\gamma_1'),(p_2',\gamma_2'))dp_1'dp_2'.$$

Переходя к переменным $P=p_1+p_2$ и $p=p_1$, мы можем представить пространство L_2 в виде прямого интеграла

$$L_2=\int\limits_{T^\nu}L_2(P)dP\tag{16}$$

гильбертовых пространств $L_2(P)$, состоящих из пар $F=\{f_1(\gamma),f_2(\gamma_1,\gamma_2,p)\}$, где функция $f_2(\gamma_1,\gamma_2,p)\in L(T^\nu)$ для каждой пары $\gamma_1,\gamma_2\in\mathfrak{M}_0^{(1)}$ и, кроме того, удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{T^\nu}f_2(\gamma_1,\gamma_2,p)dp=0\tag{17}$$

и

$$f_2(\gamma_1,\gamma_2,p)=f_2(\gamma_2,\gamma_1,P-p).\tag{18}$$

При этом оператор $\tilde{A}$ в L_2 также может быть разложен в прямой интеграл

$$\tilde{A}=\int\limits_{T^\nu}\tilde{A}(P)dP\tag{19}$$

операторов $\tilde{A}(P)$; каждый из них действует в $L_2(P)$ по формулам

$$(\tilde{A}(P)F)_1(\gamma)=\sum_{\gamma'}\hat{a}^{(1,1)}_{\gamma,\gamma'}(P)f_1(\gamma')+$$

$$+\sum_{\gamma_1',\gamma_2'}\int\limits_{T^\nu}\hat{a}^{(1,2)}_{\gamma;\gamma_1',\gamma_2'}(P;p)f_2(\gamma_1',\gamma_2';p)dp,$$

$$(\tilde{A}(P)F)_2(\gamma_1,\gamma_2,p)=\sum_{\gamma'}\bar{\hat{a}}^{(1,2)}_{\gamma';\gamma_1,\gamma_2}(P;p)f_1(\gamma')+\tag{20}$$

$$+\sum_{\gamma_1',\gamma_2'}\hat{a}^{(2,2)}_{\gamma_1,\gamma_2;\gamma_1',\gamma_2'}(P;p)f_2(\gamma_1',\gamma_2',p)+$$

$$+\sum_{\gamma_1',\gamma_2'}\int\limits_{T^\nu}\hat{b}^{(2,2)}_{\gamma_1,\gamma_2;\gamma_1',\gamma_2'}(P;p,p')f_2(\gamma_1',\gamma_2',p')dp',$$

где ядра $\hat{a}^{(1,1)},\hat{a}^{(1,2)}$ и т. д. естественным образом выражаются через $a^{(1,1)},a^{(1,2)}$ и т. д.

Операторы U_s также представляются в виде прямого интеграла операторов $U_s(P)$, где $U_s(P)=e^{i(s,P)}E_P$ (E_P единичный оператор в $L_2(P)$).

Операторы вида (20), называемые иногда обобщенными операторами Фридрихса, изучались в ряде работ (см. [22,41]). Применяя результаты этих работ к нашему случаю, получим следующую картину спектра оператора $\tilde{A}(P)$.

В пространстве $L_2(P)$ существует (единственное) подпространство $\mathcal{H}_0\subset L_2(P)$, инвариантное относительно операторов $\tilde{A}(P)$ и $U_s(P)$, и такое, что сужения $\tilde{A}(P)\mid_{\mathcal{H}_0}$ и $U_s(P)\mid_{\mathcal{H}_0}$ на это подпространтсво унитарно-эквивалентны операторам

$$(\hat{A}(P)f)(\gamma_1,\gamma_2,p)=\sum_{\gamma_1',\gamma_2'}\hat{a}^{(2,2)}_{\gamma_1,\gamma_2;\gamma_1',\gamma_2'}(P;p)f(\gamma_1',\gamma_2',p),$$

$$(U_s(P)f)(\gamma_1,\gamma_2,p)=e^{i(P,s)}f(\gamma_1',\gamma_2',p),$$

действующим в пространстве $\tilde{L}_2^P(T^\nu\times\mathcal{N}^1\times\mathcal{N}^1)$ функций $f(\gamma_1,\gamma_2,p)$, удовлетворяющих условию (18). Ортогональное дополнение $L_2(P)\ominus\mathcal{H}_0$ конечномерно.

Если обозначить

$$\varepsilon_1^{(P)}(p)\geq\varepsilon_2^{(P)}(p)\geq\ldots\geq\varepsilon_g^{(P)}(p),\quad g=r^2=\mid\mathcal{N}^{(1)}\mid^2,\tag{21}$$

собственные значения матрицы $\{\hat{a}^{(2,2)}_{\gamma_1,\gamma_2;\gamma_1',\gamma_2'}(P;p)\}$, то получим, что спектр $A(P)$ состоит из объединения множества значений функций $\{\varepsilon_i^{(P)}(p), p \in T^\nu\}$ и еще, быть может, конечного числа собственных значений

$$\mu_1(P) \geq \mu_2(P) \geq \ldots \mu_s(P),$$

где $s = s(P)$.

Поскольку функции $\hat{a}^{(1,1)}, \hat{a}^{(1,2)}$ и т. д., входящие в выражение (20) для операторов $\tilde{A}(P)$ аналитичны по переменным p и P, собственные значения $\mu_1(P), \ldots, \mu_s(P)$ при всех P, кроме, быть может, множества $S_{\text{кр}}$ значений $P \in T^\nu$, состоящего из конечного числа многообразий, размерность которых меньше, чем ν, лежат вне непрерывного спектра $\tilde{A}(P)$ и непрерывно зависят от P. Это означает, иными словами, что на торе T^ν существует конечное число областей $G_1, \ldots, G_m$ и непрерывные функции $\{\mu_j(P), P \in G_j\}$, определенные каждая на своей области G_j так, что для любого $P \in T^\nu$, $P \notin S_{\text{кр}}$, попавшего в области $G_{j_1}, \ldots, G_{j_s}$, собственные значения $\mu_1(P), \ldots, \mu_s(P)$ оператора $\tilde{A}(P)$ совпадают со значениями функций $\mu_{j_1}(P), \ldots, \mu_{j_s}(P)$.

Переходя теперь ко всему оператору A, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть задан двухчастичный кластерный оператор A в $l_2(\mathfrak{M}_0^{R_2})$. Тогда существует такое инвариантное относительно оператора A и группы $\{U_s\}$ подпространство $\mathcal{H}_0 \subset l_2(\mathfrak{M}_0^{R_2})$, в котором операторы $A\,|_{\mathcal{H}_0}$ и $U_s\,|_{\mathcal{H}_0}$ унитарно-эквивалентны операторам*

$$(\hat{A}_0 f)((p_1,\gamma_1),(p_2,\gamma_2)) = \sum_{\gamma_1',\gamma_2'} a^{(2,2)}_{\gamma_1,\gamma_2;\gamma_1',\gamma_2'}(p_1;p_2) f((p_1,\gamma_1'),(p_2,\gamma_2')),$$

$$(U_s f)((p_1,\gamma_1),(p_2,\gamma_2)) = \exp\{i(s,(p_1+p_2))\} f((p_1,\gamma_1'),(p_2,\gamma_2')), \quad (22)$$

действующим в гильбертовом пространстве $L_2(T^\nu \times T^\nu \times \mathcal{N}^{(1)} \times \times \mathcal{N}^{(1)})$ функций двух переменных $(p_1,\gamma_1),(p_2,\gamma_2)$ и симметричных относительно этих пар, где функция $a^{(2,2)}_{\gamma_1,\gamma_2;\gamma_1',\gamma_2'}(p_1;p_2)$ определена в (15).

Ортогональное дополнение $l_2(\mathfrak{M}_0^{R_2}) \ominus \mathcal{H}_0$ разбивается в прямую ортогональную сумму конечного числа подпространств $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_k$, инвариантных относительно A и U_s, в которых эти операторы унитарно-эквивалентны операторам

$$(\hat{A}f)(P) = \mu_j(P) f(P), \quad P \in G_j,$$

$$(\hat{U}_s^{(i)} f)(P) = e^{i(P,s)} f(P),$$

действующим соответственно в пространствах $L_2(G_j)$, а $G_1, \ldots, G_m$ — некоторые области на торе T^ν и $\mu_j(P)$—непрерывные функции, определенные в областях G_j соответственно. При каждом $P \in T^\nu$, $P \in \bigcap_{l=1}^{s} G_{j_l}$ значения функций $\mu_{j_1}(P), \ldots, \mu_{j_s}(P)$ лежат вне множества, заметаемого собственными значениями $\varepsilon_1^{(P)}(p), \ldots, \varepsilon_g^{(P)}(p)$ (21), когда p пробегает тор T^ν.

Согласно физической интерпретации (обобщенные) собственные векторы оператора $A\,|_{\mathcal{H}_0}$, соответствующие (при унитарном изоморфизме $\mathcal{H}_0$ и $L_2(T^\nu \times T^\nu \times \mathcal{N}^{(1)} \times \mathcal{N}^{(1)})$) собственным векторам непрерывного спектра $l_m(p_1^0,p_2^0)\delta(p_1-p_1^0)\delta(p_2-p_2^0)$ оператора (22), где $l_m(p_1^0,p_2^0)$— собственный вектор матрицы $\{a_{\gamma_1,\gamma_2;\gamma_1',\gamma_2'}(p_1^0,p_2^0)\}$ с собственным значением $\varepsilon_m(p_1^0,p_2^0) = = \varepsilon_m^{(p_1^0+p_2^0)}(p_1^0)$, описывает "свободное" движение двух частиц с квазиимпульсами $p_1^0, p_2^0 \in T^\nu$ и энергией $-\ln \mid \varepsilon_m(p_1^0,p_2^0) \mid$ ("состояния рассеяния"). Обобщенные собственные векторы операторов $A\,|_{\mathcal{H}_j}, j = 1, \ldots, k$, соответствующие собственным векторам непрерывного спектра $e_j(P_0)\delta(P-P_0)$, $P_0 \in G_j$—операторов $\hat{A}_j$ с собственными значениями $\mu_j(P_0)$, описывают движение двух связных частиц с суммарными квазиимпульсом $p_1 + p_2 = P_0$ и энергией $-\ln \mid \mu_j(P_0) \mid$ ("связанные состояния" двух частиц).

Пусть, далее, задан двухчастичный кластерный оператор в p-представлении вида (15) с малым параметром кластерности. В этом случае "главная часть" оператора

$$(A_0 F)_1(p,\gamma) = \sum_{\gamma'} a^{(1,1)}_{\gamma,\gamma'}(p) f_1(p,\gamma'),$$

$$(A_0 F)_2((p_1,\gamma_1),(p_2,\gamma_2)) = \sum_{\gamma_1',\gamma_2'} a^{(2,2)}_{\gamma_1,\gamma_2;\gamma_1',\gamma_2'}(p_1;p_2) f_2((p_1,\gamma_1'),(p_2,\gamma_2'))$$

имеет меньший порядок малости по λ, чем добавочные члены в (15). В предположении, что матричная функция $A = = \{a_{\gamma 1,\gamma_2;\gamma_1',\gamma_2'}(p_1;p_2)\}$ является функцией "общего положения" (см. [3]), можно эффективно описать число возможных “связанных состояний” $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_k$, а также области $G_j \subseteq T^\nu$ полного квазиимпульса, в которых существует каждое из них. Для простоты описания мы предположим, что индекс γ принимает лишь одно значение, а недиагональные члены в (15) равны нулю. В таком случае оператор (15) распадается на одночастичную и двухчастичную части и последняя имеет вид

$$(Af)(p_1, p_2) = \lambda^2[a(p_1, p_2; \lambda)f(p_1, p_2) -$$

$$- \int\limits_{p_1'+p_2'=p_1+p_2} a(p_1', p_2'; \lambda)f(p_1', p_2')dp_1'dp_2' +$$

$$+\lambda \int\limits_{p_1'+p_2'=p_1+p_2} B(p_1, p_2; p_1', p_2'; \lambda)f(p_1', p_2')dp_1'dp_2'],$$

$$f \in \tilde{L}_2^{\text{sym}}(T^\nu \times T^\nu) =$$

$$= \{f : \int\limits_{p_1+p_2=P} f(p_1, p_2)dp_1dp_2 = 0 \text{ при всех } P \in T^\nu\},$$

где λ мало, а семейство функций $a(p_1, p_2; \lambda)$ состоит при всех λ из функций общего положения, отделенных от нуля конечной величиной (не зависящей от λ). После выделения полного импульса $p_1 + p_2 = P$ получим семейство операторов

$$(A_Pf)(p) = \lambda^2[a_P(p; \lambda)f(p) - \int\limits_{T^\nu} a_P(p'; \lambda)f(p')dp' +$$

$$+\lambda \int\limits_{T^\nu} K_P(p, p'; \lambda)f(p')dp'],$$

где $a_P(p; \lambda) = a(p, P - p; \lambda), K_P(p, p'; \lambda) = B(p, P - p, p', P - p'; \lambda)$, действующих каждый в пространствах $L_p(T^\nu)$ функций, удовлетворяющих условиям

$$\int\limits_{T^\nu} f(p)dp = 0, \;\; f(p) = f(P - p).$$

Рассмотрим сначала случай малых размерностей: $\nu = 1$ или $\nu = 2$.

Случай $\nu = 1$. Заметим, что у функции $a_P(p; \lambda)$ имеется всегда две критические точки вида $p^0 = P/2, p^{0'} = P/2 + \pi$, которые мы будем называть *основными*. Любая другая—*дополнительная*— критическая точка $p_{\text{кр}} \in T^\nu$ входит вместе с парной ей точкой $p_{\text{кр}}' = P - p_{\text{кр}} \neq p_{\text{кр}}$. Заметим, что

$$a_P(p_{\text{кр}}; \lambda) = a_P(p_{\text{кр}}'; \lambda)$$

и

$$K_P(p_{\text{кр}}, p_{\text{кр}}; \lambda) = K_P(p_{\text{кр}}, p_{\text{кр}}'; \lambda) = K_P(p_{\text{кр}}', p_{\text{кр}}; \lambda) =$$

$$= K_P(p_{\text{кр}}', p_{\text{кр}}'; \lambda).$$

Таким образом, нам будет удобно принять пару дополнительных критических точек $(p_{\text{кр}}, p_{\text{кр}}')$ за одну точку. У семейства функций $a_P(p; \lambda = 0)$ (общего положения) может быть лишь конечное число $P_1^{\text{кауст}}, \ldots, P_s^{\text{кауст}}$ каустических значений параметра P, при которых функция $a_{P_i^{\text{кауст}}}(p; 0)$ имеет вырожденный абсолютный экстремум (принимаемый либо в одной из основных критических точек, либо в одной из пар дополнительных критических точек). При этом для каждого из значений $P_i^{\text{кауст}}$ вырождение в точке экстремума таково, что в ней обращаются в нуль лишь первые три производные функции $a_{P_i^{\text{кауст}}}(p; 0)$.

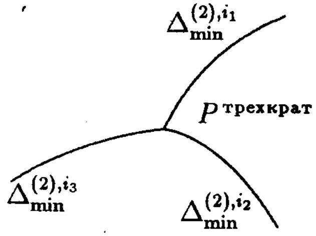


рис. 1

Эта картина сохраняется и для семейства $a_P(p; \lambda)$ при всех достаточно малых λ. Для каждого каустического значения $P_i^{\text{кауст}}|_{\lambda=0}$ обозначим B_i величину (всегда вещественную в силу самосопряженности ядра K_P)

$$B_i = \left.\frac{\partial^2 K_{P_i^{\text{кауст}}}}{\partial p \partial p'}\right|_{p=p'=p_{\text{кр}}, \lambda=0},$$

где $p_{\text{кр}}$—точка, в которой достигается (вырожденный) экстремум $a_{P_i^{\text{кауст}}}(p;0)$.

Далее рассмотрим кратные значения $P_1^{\text{крат}},\ldots,P_m^{\text{крат}}$ параметра P (также появляющиеся лишь в конечном числе), т. е. такие значения, что у функции $a_{P_i^{\text{крат}}}(p;\lambda=0)$ имеются по крайней мере две различные критические точки $p_{\text{кр}}^{(1)}$, $p_{\text{кр}}^{(2)}$, в которых одновременно принимается либо абсолютный минимум, либо абсолютный максимум этой функции (напомним, что парные критические точки считаются нами за одну точку, т. е. точки $p_{\text{кр}}^{(1)}$ и $p_{\text{кр}}^{(2)}$ не являются парными). Заметим, что число точек $P_j^{\text{крат}}$, $j=1,\ldots,m$ не меняется при малых λ, а их положения (так же, как и положения кратных критических $p_{\text{кр}}^{(1)}$ и $p_{\text{кр}}^{(2)}$) мало изменяется при малых изменениях λ. Для каждого значения $P_j^{\text{крат}}, j=1,\ldots,m$, введем величину (вещественную)

$$B_j = K_{P_j^{\text{крат}}}(p_{\text{кр}}^{(1)},p_{\text{кр}}^{(1)},\lambda=0)+K_{P_j^{\text{крат}}}(p_{\text{кр}}^{(2)},p_{\text{кр}}^{(2)},\lambda=0)-$$

$$-K_{P_j^{\text{крат}}}(p_{\text{кр}}^{(1)},p_{\text{кр}}^{(2)},\lambda=0)-K_{P_j^{\text{крат}}}(p_{\text{кр}}^{(2)},p_{\text{кр}}^{(1)},\lambda=0).$$

Каустическое или кратное значение P назовем *правильным*, если соответствующая величина $B_i\le 0$ и вырожденный или является минимумом или $B_i\ge 0$ и этот экстремум является максимумом. В остальных случаях значение $P_i^{\text{кауст}}$ или $P_j^{\text{крат}}$ называется неправильным. Оказывается, что связные состояния при достаточно малых λ появляются лишь в окрестности правильных каустических или правильных кратных значений P. Более точно, верна следующая теорема.

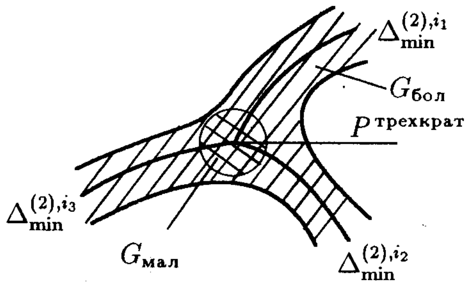


рис. 2

Теорема 3. *Пусть $P_0=P_i^{\text{кауст}}$ или $P_0=P_j^{\text{крат}}$ — правильное значение параметра P. Тогда при достаточно малых*

λ в окрестности точки P_0 имеется интервал $G\subset T^1, P_0\subset G$, для всех точек которого $P\in G$ у оператора A_P имеется единственное собственное значение $\mu(P)$. Это собственное значение расположено правее (соответственно левее) непрерывного спектра, если значению P_0 соответствует вырожденный или кратный максимум (соответственно минимум) функции $a_{P_0}(p,\lambda=0)$. Расстояние $\mu(P)$ от ближайшего к нему края непрерывного спектра (щель) не превосходит величины $C\lambda^4$ в случае, когда $P_0=P_i^{\text{кауст}}$, и величины $C\lambda^2$ в случае $P_0=P_j^{\text{крат}}$, где C— абсолютная константа. При малых значениях λ описанные интервалы G в окрестностях правильных каустических или кратных значений параметра P исчерпывают область значений этого параметра, при которых существует хотя бы одно связанное состояние.

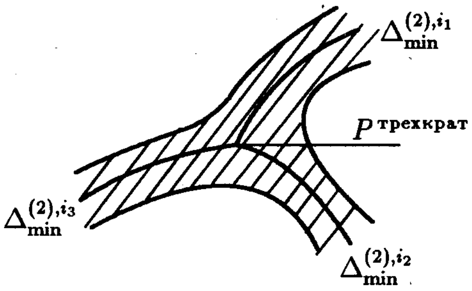


рис. 3

Перейдем к случаю $\nu=2$. Снова функция $a_P(p;\lambda)=$ $=a(p,P-p;0),p\in T^2,P\in T^2$, имеет четыре основных критических точки

$$P_{\text{кр}}^{0,0}=(\frac{P_1}{2},\frac{P_2}{2}),\ \ P_{\text{кр}}^{0',0}=(\frac{P_1}{2}+\pi,\frac{P_2}{2}),$$

$$P_{\text{кр}}^{0,0'}=(\frac{P_1}{2},\frac{P_2}{2}+\pi),\ \ P_{\text{кр}}^{0',0'}=(\frac{P_1}{2}+\pi,\frac{P_2}{2}+\pi),$$

$P=(P_1,P_2)$ и, быть может, некоторое число парных дополнительных критических точек $(p_{\text{кр}},p'_{\text{кр}})$, где $p'_{\text{кр}}=P-p_{\text{кр}}$; каждую такую пару мы будем снова рассматривать как одну критическую точку. Заметим, что в двумерном случае, в отличие от одномерного, вырожденные критические точки при тех типах вырождения, которые возможны для семейства функций общего положения, не приводят к появлению связанных состояний у оператора A; они возникают лишь из-за наличия кратных минимумов или кратных максимумов у функции $a_P(p;\lambda=0)$. Обозначим $\Delta^{(k)}_{\min}\subset T^{(2)}$ множество значений $P\in T^2$, при которых у функции $a_P(p;\lambda=0)$ имеется по крайней мере k различных критических точек, где достигается абсолютный минимум. Аналогично определяется множество $\Delta^{(k)}_{\max}$. При размерности $\nu=2$ в случае функции $a(p_1,p_2;\lambda=0)$ общего положения непусты лишь $\Delta^{(2)}_{\text{ext}}$ и $\Delta^{(3)}_{\text{ext}}$, ext = min, max, причем множество $\Delta^{(3)}_{\text{ext}}$ конечно, а $\Delta^{(2)}_{\text{ext}}$ распадается на конечное число дуг $\Delta^{(2)}_{\text{ext},1},\dots,\Delta^{(2)}_{\text{ext},s}$, имеющих концы в точках $P^{\text{трехкрат}}\in\Delta^{(3)}_{\text{ext}}$ и в каждой точке $P^{\text{трехкрат}}$ из $\Delta^{(3)}_{\text{ext}}$ сходится ровно три дуги $\Delta^{(2)}_{\text{ext},1},\Delta^{(2)}_{\text{ext},2},\Delta^{(2)}_{\text{ext},3}$ (см. рис. 1).

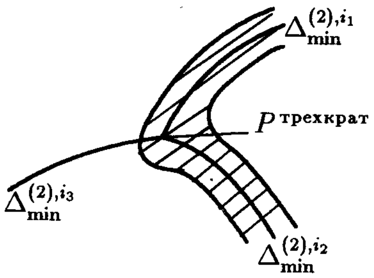


рис. 4

Оказывается, что связанные состояния оператора A могут появиться лишь в некоторой окрестности G множества $\Delta^{(2)}_{\text{ext}}$, причем при каждом P из этой окрестности существует не более двух собственных значений $\mu(P)$ оператора A_P. Возможные расположения той части этой окрестности, которая содержит трехкратную точку $P^{\text{трехкрат}}$ изображены на следующих рисунках. На рис. 2 изображены две области

$$G_{\text{мал}}\subset G_{\text{бол}},$$

причем для всех $P\in G_{\text{мал}}$ существует два собственных значения (при ext = min)

$$\mu_{\text{бол}}(P)<\mu_{\text{мал}}(P).$$

Собственное значение $\mu_{\text{мал}}(P)$ исчезает на границе области $G_{\text{мал}}$, а $\mu_{\text{бол}}(P)$ сохраняется во всей области $G_{\text{бол}}$. "Ширина" области $G_{\text{бол}}$ (а также диаметр $G_{\text{мал}}$) имеет порядок $\exp\{-\text{const}\mid\lambda\mid^{-1}\}$, и она "вытянута" на конечное расстояние вдоль всех дуг $\Delta^{(2)}_{\min,1},\Delta^{(2)}_{\min,2},\Delta^{(2)}_{\min,3}$, примыкающих к $P^{\text{трехкрат}}$.

Случаи, когда в окрестности $P^{\text{трехкрат}}$ существует лишь одно значение $\mu(P)$, изображены на рис. 3–5.

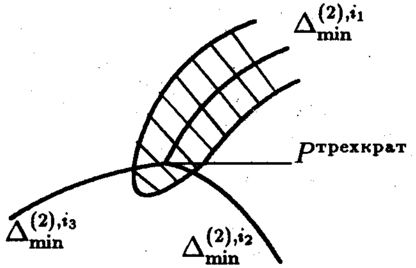


рис. 5

Во всех случаях ширина изображенной области $\sim\exp\{-\text{const}\mid\lambda\mid^{-1}\}$, и она вытянута вдоль одной, двух или трех дуг на конечное расстояние. Возможен также случай, когда трехкратная точка $P^{\text{трехкрат}}$ не принадлежит области G, а также случай, когда G охватывает только внутренние точки какой-нибудь из дуг $\Delta^{(2)}_{\text{ext}}$ (рис. 6).

Во всех случаях появляющиеся собственные значения $\mu(P)$ расположены левее непрерывного спектра A_P на расстоянии $\sim\exp\{-\text{const}\mid\lambda\mid^{-1}\}$ от его левого конца.

Аналогичная картина возникает и в окрестности множества $\Delta^{(2)}_{\max}$ с той лишь разницей, что появляющиеся собственные значения $\mu(P)$ лежат правее непрерывного спектра A_P.

рис. 6

Существуют явные рецепты для опознания того, какая же картина возникает, но они довольно громоздки, и мы не будем их здесь приводить (см. [28]). В случае размерностей $\nu>2$ при малых λ и функции $a(p_1,p_2)$ общего положения у оператора A вообще не возникает связанных состояний.

Доказательство всех этих результатов изложено в [28]. Отметим, что в случае произвольного k-частичного кластерного оператора картина его спектра качественно подобна картине спектра k-частичного оператора Шредингера: каждая ветвь этого спектра определяется разбиением k частиц в связанные группы (кластеры) и описывает "свободное" движение этих групп (подробнее см. в [36], [17]).

§ 8. Асимптотика убывания корреляций для гиббсовских полей

В качестве приложения описанных выше результатов, рассмотрим задачу о вычислении асимптотики корреляций при $| x |\to \infty$

$$\langle F_A, F_{A+x}\rangle \equiv \langle F_A F_{A+x}\rangle - \langle F_A\rangle^2, \tag{1}$$

где $\langle\ \rangle$—среднее по гиббсовскому трансляционно-инвариантному полю на решетке $Z^{\nu+1}$, F_A—какой-нибудь локальный ограниченный функционал от этого поля, а $F_{A+x} = U_x F_A$—"сдвиг" этого функционала на вектор $x \in Z^{\nu+1}$. Для простоты мы ограничимся случаем, когда $A \subset Y_0$ принадлежит нулевому слою решетки $Z^{\nu+1}$, а вектор $x = (t, 0)$ направлен вдоль оси "времени". В этом случае

$$\langle F_A F_{A+t}\rangle = (\mathcal{J}_t F_A, F_A)_{\mathcal{H}_{\text{физ}}}, \tag{2}$$

где $\mathcal{J}_t = \mathcal{J}^t$, $\mathcal{J}$—трансфер-матрица.

Допустим, что нам удалось выделить старшее одночастичное подпространство $\mathcal{H}_1$ трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ так, что спектр $\mathcal{J}$ в ортогональном дополнении $\mathcal{H}_1^\perp$ к пространству $\mathcal{H}_1$ отделен от спектра $\mathcal{J}$ в $\mathcal{H}_1$

$$\sup\sigma(\mathcal{J} \mid_{\mathcal{H}_1^\perp}) \equiv m_2 < \inf\sigma(\mathcal{J} \mid_{\mathcal{H}_1}). \tag{2^a}$$

Напишем ортогональное разложение

$$F_A = F_A^0 + F_A^{(1)} + \hat{F}_A^{(1)},$$

где $F_A^0 = \langle F_A\rangle$, $F_A^{(1)} \in \mathcal{H}_1$, $\hat{F}_A^{(1)} \in \mathcal{H}_1^\perp$. Тогда из (1) и (2) вытекает, что

$$(\mathcal{J}^t F_A, F_A) = \langle F_A\rangle^2 + (\mathcal{J}^t F_A^{(1)}, F_A^{(1)}) + (\mathcal{J}^t \hat{F}_A^{(1)}, \hat{F}_A^{(1)}). \tag{3}$$

Последнее слагаемое имеет порядок

$$O(m_2^t). \tag{3^a}$$

После перехода к преобразованию Фурье в пространстве $\mathcal{H}_1$ элемент $F_1^{(1)}$ перейдет в функцию $f = \{f(p,\gamma)\}$ и второе слагаемое в (3) примет вид

$$(\mathcal{J}^t F_A^{(1)}, F_A^{(1)}) = \sum_{\gamma,\gamma'} \int\limits_{T^\nu} b_{\gamma,\gamma'}^t(p) f(p,\gamma) \bar{f}(p,\gamma') dp, \tag{4}$$

где $b_{\gamma,\gamma'}^t(p)$—матричные матрицы $(B(p))^t$ (см. (13.7)). Наконец, диагонализовав матрицу $B(p)$ при каждом $p \in T^\nu$, мы получим, что выражение справа в (4) равно

$$\sum_k \int\limits_{T^\nu} \varepsilon_k^t(p) \mid p_k(p) \mid^2 dp, \tag{5}$$

где $\{f_k(p)\}$—компоненты вектора $\{f(\gamma, p)\}$ в базисе из собственных векторов матрицы $B(p)$ ($\varepsilon_k(p)$—ее собственные значения). Пусть

$$m_1 \equiv \max_{p,k} \mid \varepsilon_k(p) \mid = \varepsilon_{k_0}(p_0) > 0$$

(для простоты мы предполагаем, что максимальное собственное значение матрицы $B(p_0)$ положительно и однократно). Далее, если предположить, что $f_{k_0}(p)$ непрерывна в точке $p = p_0$, то асимптотика суммы (5) равна

$$C\frac{\mid f_{k_0}(p_0) \mid^2}{(2\pi t)^{\nu/2}} m_1^t (1 + o(1)), \tag{6}$$

$$C = \mathrm{Det}\{a_{ij}\}^{-1/2}, a_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \ln \varepsilon_{k_0}(p)\Big|_{p=p_0}.$$

В силу (2^a) и (3^a) выражение (6) и задает асимптотику корреляции (1).

Приведенное вычисление становится непригодным, если проекция $F_A^{(1)}$ функции F_A равна нулю. Так будет, например, в случае поля Изинга для всех четных функций F (т. е. представимых в виде суммы четных мономов от переменных $\{\sigma_x, x \in Z^\nu\}$). Предположим теперь, что кроме одночастичного подпространства $\mathcal{H}_1$ построено двухчастичное инвариантное подпространство $\mathcal{H}_2$ трансфер-матрицы $\mathcal{J}$, и пусть

$$F = \langle F_A\rangle + F_A^{(2)} + \hat{F}_A^{(2)}, \tag{7}$$

где $F_A^{(2)} \in \mathcal{H}_2, \hat{F}_A^{(2)} \in (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2)^\perp \equiv \bar{\mathcal{H}}$.

Предположим также, что спектр $\mathcal{J}$ в $\mathcal{H}_2$ отделен от спектра $\mathcal{J}$ в $\bar{\mathcal{H}}$. Тогда, как и выше, асимптотика корреляции (1) совпадает с

$$(\mathcal{J}_2^t F_A^{(2)}, F_A^{(2)}), \tag{8}$$

где $\mathcal{J}_2$—часть $\mathcal{J}$ в $\mathcal{H}_2$.

Следует различать два случая:

1) регулярный случай

$$m_2 = \sup_{k,p_1,p_2} \varepsilon_k(p_1,p_2) > \sup_{l,p} \mu_l(p). \tag{9}$$

Здесь $\varepsilon_k(p_1,p_2)$ собственные значения матрицы $\{a^{(2,2)}_{\gamma_1,\gamma_2;\gamma_1',\gamma_2'}(p_1,p_2)\}$, входящей в выражение (15.7) для двухчастичного кластерного оператора $\mathcal{J}_2$, а $\mu_l(p)$—связанные состояния этого оператора;

2) нерегулярный случай: выполняется обратное к (9) неравенство.

В регулярном случае асимптотика (8), как показывают некоторые вычисления с резольвентой оператора $\mathcal{J}_2$ (см. [18]), равна

1) при $\nu = 1$

$$\frac{c(F_A)m_2^t}{t^2}(1+o(1)),$$

2) при $\nu = 2$

$$\frac{c(F_A)m_2^t}{t^2 \ln t}(1+o(1)),$$

3) при $\nu \geq 3$

$$\frac{c(F_A)m_2^t}{t^\nu}(1+o(1)),$$

($c(F_A)$—некоторая константа, зависящая от F_A).

В нерегулярном случае асимптотика будет иметь вид (6) с заменой m_1 на $m_2 = \sup_{l,p} \mid \mu_l(p) \mid$

$$\frac{c(F_A)m_2^t}{t^{\nu/2}}(1+o(1)).$$

В случае, когда вектор x в (1) направлен под углом к оси времени, асимптотика (1) в случае $F_A^{(1)} \neq 0$ имеет вид (6), где $m_1 = m_1(\alpha)$ зависит от направления α вектора x.

ГЛАВА 4

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА ДЛЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ФЕРМИОННЫХ СИСТЕМ

В предыдущих главах (см. § 4.0 и §3.1) мы рассматривали квантовую динамику фермионных систем, определенную в алгебре КАС $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, для некоторого одночастичного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Наиболее полное изложение касалось так называемой квазисвободной динамики, порожденной гамильтонианом вида

$$H = d\Gamma(h),$$

где h—некоторый одночастичный гамильтониан, действующий в $\mathcal{H}$ (см. § 3.1). Спектр оператора энергии $H_{\text{ГНС}}$ в ГНС представлении такой динамики относительно ее квазисвободного КМШ-состояния, как мы видели (см. §.2), состоит из счетного набора “ветвей” (“k-частичных” ветвей), каждая их которых описывает свободное движение k “квазичастиц”. В случае, когда $\mathcal{H} = L_2(R^\nu)$ (или $\mathcal{H} = l_2(Z^\nu)$), т. е. частицы движутся в ν-мерном пространстве (или по ν-мерной решетке) и динамика $\alpha(t)$ в алгебре КАС получается из свободной динамики включением небольшого взаимодействия между частицами, она оказывается подобной свободной динамике при условии, что размерность пространства R^ν не очень мала, обычно при $\nu \geq 3$, но в некоторых случаях следует требовать, чтобы $\nu \geq 4$ или $\nu \geq 5$. Точно это означает, что существует $*$-автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, переводящий динамику $\tau(t)$ в квазисвободную динамику $\tau^0(t)$. Отсюда, в частности, вытекает, что оператор $H_{\text{ГНС}}$ для взаимодействующей динамики, порожденный ее представлением относительно некоторого ее КМШ-состояния, унитарно-эквивалентен оператору $H^0_{\text{ГНС}}$ для свободной динамики (относительно соответствующего квазисвободного КМШ-состояния). Это, в частности, означает, что спектр $H_{\text{ГНС}}$ по-прежнему состоит из ветвей, описывающих движение не зависимых друг от друга квазичастиц.

Заметим, что предположение о том, что взаимодействие между частицами мало (а размерность пространства R^ν достаточно велика), существенно, поскольку при больших взаимодействиях в спектре $H_{\text{ГНС}}$ могут появиться так называемые связанные состояния: ветви спектра, описывающие движение группы (кластера) из конечного числа "связывавшихся" друг с другом частиц. Такие ветви спектра могут появиться в случае одномерных или двумерных частиц даже при сколь угодно малом взаимодействии. Установление указанного подобия между $\tau_0(t)$ и $\tau(t)$ достигается приемами, заимствованными из общей теории рассеяния в квантовой механике, и принадлежит к тому кругу вопросов в этой теории, которые обозначаются как задача об *асимптотической полноте* (подробнее см. [36]).

Сначала мы рассмотрим случаи, связанные с взаимодействием в чистой системе ферми-частиц. В последнем параграфе мы изучим аналогичную задачу для системы состоящей из ферми-газа, взаимодействующей с некоторой инородной выделенной частицей.

§ 1. Ферми-системы с ограниченным взаимодействием

1. Морфизмы Меллера. Пусть $\mathcal{H}$—сепарабельное гильбертово пространство и $\mathfrak{A}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{F}_{as}(\mathcal{H}))$—алгбера КАС ограниченных операторов, действующих в антисимметрическом фоковском пространстве $\mathcal{F}_{as}(\mathcal{H})$, порожденная операторами рождения и уничтожения $\{a(f), a^*(f), f \in \mathcal{H}\}$ в $\mathcal{F}_{as}(\mathcal{H})$. Пусть, далее, h_0—самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, $H_0 = d\Gamma(h_0)$— его вторичное квантование (см. § 3.1) и τ_t^0—группа $*$-автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, порожденная H_0:

$$\tau_t^0(A) = \exp\{itH_0\}A\exp\{-itH_0\}, \quad A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}), \tag{1}$$

и называемая, как уже говорилось в §§ 3.1 и 3.2, свободной динамикой в $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, порожденной одночастичным оператором h_0. То обстоятельство, что $\tau_t^0(A) \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ при любом t и любом $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$, вытекает из формулы

$$\tau_t^0(a^{\#}(f)) = a^{\#}(e^{ith_0}f), \quad f \in \mathcal{H}$$

(см. (9ª.3.2), где $a^{\#}f$—оператор рождения или уничтожения.

Пусть далее V—самосопряженный элемент из $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ и

$$H = H_V = H_0 + V \tag{2}$$

—"возмущенный оператор". Определим возмущенную динамику τ_t^V в $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ с помощью формулы

$$\tau_t^V(A) = \exp\{itH_V\}A\exp\{-itH_V\}, A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}). \tag{2^a}$$

То обстоятельство, что $\tau_t^V(A) \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ при любом вытекает из следующего разложения динамики τ_t^V в ряд, введенного нами в § 4.0:

$$\tau_t^V(A) = \tau_t^0(A) + \sum(i)^n \int\limits_{\Delta_n^t} [\tau_{s_1}^0(V)[\tau_{s_2}^0(V),$$

$$[\ldots,[\tau_{s_n}^0(V), \tau_t^0(A)]]]ds_1 \ldots ds_n, \tag{3}$$

где при $t > 0$

$$\Delta_n^t = \{0 \le s_1 \le \ldots \le s_n \le t\},$$

а при $t < 0$

$$\Delta_n^t = \{t \le s_1 \le \ldots \le s_n \le 0\}.$$

Легко показать, что этот ряд при всех t сходится по операторной норме в $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$.

Введем теперь общее понятие морфизмов Меллера для упорядоченной пары динамик $(\tau_t^{(2)}, \tau_t^{(1)})$, действующих в некоторой $*$-алгебре $\mathfrak{A}$.

Пусть существуют пределы (по норме в $\mathfrak{A}$)

$$\gamma_\pm^{\tau^{(2)},\tau^{(1)}}(A) = \lim_{t\to\pm\infty} \tau_{-t}^{(2)}(\tau_t^{(1)}(A)) \tag{4}$$

для всех элементов $A \in \mathfrak{A}$. Отображения

$$\gamma_\pm^{\tau^{(2)},\tau^{(1)}} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} : A \to \gamma_\pm^{\tau^{(2)},\tau^{(1)}}(A)$$

называются *морфизмами Меллера* для пары динамик $(\tau_t^{(2)}, \tau_t^{(1)})$.

Лемма 1 (*сплетающее свойство морфизмов Меллера). Пусть $\tau_t^{(1)}, \tau_t^{(2)}$—две динамики на алгбере $\mathfrak{A}$. Тогда:*

а) если существуют морфизмы Меллера $\gamma_\pm^{\tau^{(2)},\tau^{(1)}}$ и $\gamma_\pm^{\tau^{(1)},\tau^{(2)}}$, то

$$\gamma_\pm^{\tau^{(2)},\tau^{(1)}} = [\gamma_\pm^{\tau^{(1)},\tau^{(2)}}]^{-1};$$

б) если существуют морфизмы Меллера $\gamma_\pm^{\tau^{(2)},\tau^{(1)}}$, то

$$\gamma_\pm^{\tau^{(2)},\tau^{(1)}}\tau_t^{(1)} = \tau_t^{(2)}\gamma_\pm^{\tau^{(2)},\tau^{(1)}};$$

в) если снова существуют оба морфизма $\gamma_\pm^{\tau^{(2)},\tau^{(1)}}$ *и* $\gamma_\pm^{\tau^{(1)},\tau^{(2)}}$, *то*

$$\tau_t^{(2)} = \gamma_\pm^{\tau^{(2)},\tau^{(1)}}\tau_t^{(1)}\gamma_\pm^{\tau^{(1)},\tau^{(2)}}.$$

Доказательство. Утверждение а) непосредственно следует из определения (4).

Далее,

$$(\tau_t^{(2)}\gamma_\pm^{\tau^{(2)},\tau^{(1)}})(A) = \lim_{s\to\pm\infty}\tau_t^{(2)}(\tau_{-s}^{(2)}(\tau_s^{(1)}(A))) =$$

$$= \lim_{s\to\pm\infty}\tau_{t-s}^{(2)}(\tau_{s-t}^{(1)}(\tau_t^{(1)}(A))) = (\gamma_\pm^{\tau^{(2)},\tau^{(1)}}\tau_t^{(1)})(A),$$

что и означает б). Наконец, в) следует из а) и б).

Вернемся теперь к паре динамик τ_t^0 и τ_t^V— свободной и возмущенной на алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$. Тогда морфизмы Меллера

$$\gamma_\pm^{\tau^{(V)},\tau^{(0)}}(A) = \lim_{t\to\pm\infty}\tau_{-t}^V(\tau_t^0(A)) = \gamma_\pm(A)$$

(если они существуют) называют *прямыми* морфизмами, а морфизмы

$$\gamma_\pm^{\tau^{(0)},\tau^{(V)}}(A) = \lim_{t\to\pm\infty}\tau_{-t}^0(\tau_t^V(A)) = \hat{\gamma}_\pm(A)$$

обратными.

Приведем один простой прием доказательства существования прямых морфизмов $\gamma_\pm$, восходящий к Куку (см. [36]).

Лемма 2 *(метод Кука). Пусть* τ_t^0*—свободная и* τ_t^V*— возмущенная динамики на алгебре* $\mathfrak{A}$. *Пусть существует всюду плотное множество* $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ *такое, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| [\tau_t^0(V), A] \| \, dt < \infty, \ A \in \mathfrak{A}^0. \qquad (5)$$

Тогда прямые морфизмы $\gamma_\pm(A)$ *существуют.*

Доказательство. Как легко проверить, элемент

$$A_t = \tau_{-t}^V(\tau_t^0(A)) = \exp\{-it(H_0+V)\}\exp\{iH_0t\}A\times$$

$$\times\exp\{-iH_0t\}\exp\{i(H_0+V)t\}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dA_t}{dt} = i\tau_{-t}^V(\tau_t^0([\tau_{-t}^0(V), A])).$$

Отсюда после интегрирования по t получаем, что

$$A_{t_1} - A_{t_2} = i\int_{t_1}^{t_2}\tau_{-t}^V(\tau_t^0([\tau_{-t}^0(V), A]))dt.$$

Поскольку τ_t^V и τ_t^0 сохраняют норму

$$\| A_{t_1} - A_{t_2} \| \leq \int_{t_1}^{t_2} \| [\tau_{-t}^0(V), A] \| \, dt,$$

и в силу (5) находим, что для $A \in \mathfrak{A}^0$ существует предел $\lim_{t\to\pm\infty} A_t = \gamma_\pm(A)$. Отсюда уже следует, что этот предел существует для всех $A \in \mathfrak{A}$ в силу изометричности отображений $\gamma_\pm : \| \gamma_\pm(A) \| = \| A \|$.

2. Существование прямых морфизмов Меллера при ограниченных возмущениях свободной динамики. В $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ всюду плотной $*$-подалгеброй является множество $\mathfrak{A}^0(\mathcal{H})$ конечных линейных комбинаций мономов от операторов рождения-уничтожения $a^\#(f)$ для функций $f \in L_2(R^\nu)$, преобразования Фурье которых принадлежат $C^\infty(R^\nu)$.

Рассмотрим в алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ C^*-подалгебру $\mathfrak{A}_l(\mathcal{H})$, порождаемую мономами от операторов рождения и уничтожения с четным числом множителей. Элементы C^*-подалгебры $\mathfrak{A}_l(\mathcal{H})$ мы будем в дальнейшем называть *четными.* В $\mathfrak{A}_l(\mathcal{H})$ всюду плотной $*$-подалгеброй является множество $\mathfrak{A}_l^0(\mathcal{H}) = \mathfrak{A}^0(\mathcal{H}) \bigcap \bigcap \mathfrak{A}_l(\mathcal{H})$.

Введем следующие классы гладких ограниченных взаимодействий. Пусть $V = V^*$ и V имеет вид

$$V = \sum_{i=1}^{d} V_i,$$

$$V_i = \sum_{k=1}^{M_i} c_k a^*(f_{i,1}^{(k)}) \ldots a^*(f_{i,m_i}^{(k)}) a^*(f_{i,m_i+1}^{(k)}) \ldots a^*(f_{i,m_i+k_i}^{(k)}), \qquad (6)$$

где d, M_i конечны, $m_i + n_i > 0$, $\tilde{f}_{i,j}^{(k)}) \in C^{\infty}(R^{\nu})$ для всех i, j, k ($\tilde{f}$—преобразование Фурье функции f).

Скажем, что $V \in A_l^0$, если в (6) для всех i суммы $m_i + n_i$ четны, и соответственно $V \in A^0$, если для всех i $m_i > 0, n_i > 0$.

Очевидно, что оба класса A_l^0 и A^0 принадлежат $\mathfrak{A}^0(\mathcal{H})$, причем $A_l^0 \subset \mathfrak{A}_l(\mathcal{H})$.

Замечание. Все дальнейшие результаты верны и для более широких классов A и A_l гладких ограниченных взаимодействий V, а именно таких, для которых $V = V^*$ имеет вид

$$V = \sum_{i=1}^{d} \int V_i(x_1, \ldots, x_{m_i}, x_{m_i+1}, \ldots, x_{m_i+n_i}) a^*(x_1) \ldots$$

$$\ldots a^*(x_{m_i}) a(x_{m_i+1}) \ldots a(x_{m_i+n_i}) dx_1 \ldots dx_{m_i+n_i}, \tag{7}$$

причем

$$V_i \subset S(R^{m_i+n_i}), \quad m_i + n_i > 0.$$

Если $m_i + n_i$ четны для всех i, то $V \in A_l$. Если же $m_i > 0, n_i > 0$, то $V \in A$.

Все теоремы этого параграфа будут в основном доказываться только для взаимодействий из A^0, A_l^0, и лишь кратко будут отмечаться особенности доказательств для взаимодействий из A, A_l соответственно.

Обозначим в (6) и в (7) соответственно

$$m_{\max} = \max_i m_i = \max_i n_i,$$

$$m_{\min} = \min_i m_i = \min_i n_i$$

(равенство $\max_i m_i = \max_i n_i$ и аналогичное равенство для минимальных значений следует из самосопряженности V).

Введем также класс $\mathbb{H}$ одночастичных гамильтонианов h в $L_2(R^{\nu})$. Скажем, что $h \in \mathbb{H}$, если h в Фурье-представлении есть оператор умножения на функцию $h(k), h \in C^{\infty}(R^{\nu}), k \in R^{\nu}$, причем сама эта функция и ее первые две производные ограничены некоторым полиномом на R^{ν} и

$$\operatorname{dist}(S_h, G_h) > 0,$$

$$\operatorname{mes} S_h = \operatorname{mes} G_h = 0,$$

где $S_h = \{k : \nabla h(k) = 0\}$—множество стационарных точек функции h, а G_h—множество тех $k \in R$, где матрица ее вторых производных вырождена.

Заметим, что класс $\mathbb{H}$ содержит одночастичный нерелятивистский гамильтониан $-\Delta + \mu$, а также релятивистский гамильтониан $(-\Delta + m^2)^{1/2}, m > 0$, действующие оба в $L_2(R^{\nu})$.

Будем в дальнейшем считать, что свободная динамика τ_t^0 порождена одночастичным гамильтонианом h из класса $\mathbb{H}$.

Теорема 3 (существование прямых морфизмов Меллера). *Пусть $\nu \geq 1$, тогда для $V = V^* \in A_l$ существуют морфизмы*

$$\gamma_{\pm}(A) = \lim_{t \to \pm\infty} \tau_{-t}^{V} \tau_t^0(A), \quad A \in \mathbb{H}(\mathcal{H}).$$

Доказательство. Случай $\nu = 1, 2$ немного отличается от случая $\nu \geq 3$.

Пусть $\nu \geq 3$. В силу критерия Кука нам достаточно указать плотное подмножество $\mathfrak{A}^0 \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{H})$, для которого выполнено условие (5).

Пусть $\mathfrak{A}^0 \equiv \mathfrak{A}^0(\mathcal{H})$, т. е.

$$\mathfrak{A}^0 = D\{a^*(f_1) \ldots a^*(f_m) a(g_1) \ldots a(g_n), \quad m, n \geq 0,$$

$$\tilde{f}_i, \tilde{g}_j \in C_0^{\infty}(R^{\nu}), \; i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n\}$$

($D\{\ \}$ означает линейную оболочку множества $\{\ \}$).

Если мы докажем выполнение условия (5) для $A = a^{\#}(f)$, где $\tilde{f} \in C_0^{\infty}(R^{\nu})$— произвольная функция, то в силу того, что $\tau_{-t}^{V} \tau_t^0$ есть $*$-автоморфизм для любого фиксированного $t \in R^{\nu}$, отсюда будет следовать существование $\gamma_{\pm}(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}^0$.

Пусть $A = a(f)$. Имеем

$$\| [\tau_t^0(V), A] \| = \| [\tau_{-t}^0(V), A] \| \leq \| [a(e^{ith} f), V] \| =$$

$$= \| \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{M_i} \sum_{j=1}^{m_i} (-1)^{j-1} (f_{i,j}^{(k)}, e^{-ith} f), \tag{8}$$

$$a^*(f_{1,j}^{(k)}) \ldots \check{a}^*(f_{i,j}^{(k)}) \ldots a^*(f_{i,m_i}^{(k)}) \times$$

$$\times a(f_{i,m_i+1}^{(k)}) \ldots a(f_{i,m_i+n_i}^{(k)}) \| < \frac{C(V, f)}{(1 + |t|)^{\nu/2}}$$

(значок ˇ над множителем $a^*(f_{i,j}^{(k)})$ означает, что этот множитель опускается), так как в силу теоремы о стационарной фазе (см., например, [3])

$$|(f_{i,j}^{(k)}, e^{ith} f)| < \frac{C(f, f_{i,j}^{(k)})}{(1+|t|)^{\nu/2}}, \tag{9}$$

где $C(f, f_{i,j}^{(k)})$—некоторая константа, и

$$C(V, f) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{M_i} \sum_{j=1}^{m_i} |c_k| \, C(f, f_{i,j}^{(k)}) \prod_{l \neq j}^{m_i+n_i} \| f_{i,l}^{(k)} \| < \infty. \tag{10}$$

Так как в неравенстве (8) справа стоит функция из $L_1(R^1)$, в силу критерия Кука $\gamma_\pm(a(f))$ существует. Случай $A = a^*(f)$ разбирается аналогично.

Для $\nu = 1, 2$ плотное подмножество $\mathfrak{A}^0$ в $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ выберем следующим образом:

$$\mathfrak{A}^0 = D\{a^*(f_1) \ldots a^*(f_m) a(g_1) \ldots a(g_n), m, n \geq 0,$$
$$\tilde{f}_i, \tilde{g}_j \in C_0^\infty(R^\nu \backslash S_h)\}.$$

Для функции $\tilde{f}_i \in C_0^\infty(R^\nu \backslash S_h)$ с помощью q-кратного интегрирования по частям при $|t| > 1$ получаем оценку

$$|(f, e^{ith} f_{i,j}^{(k)})| < \frac{C_q(f, f_{i,j}^{(k)})}{|t|^q}, \tag{11}$$

где константа $C_q(f, f_{i,j}^{(k)})$ зависит еще от q. Если взять $q \geq 2$, то мы получим в (8) функцию из $L_1(R \backslash [-1, 1])$.

Теорема 3 доказана для взаимодействия из A_l^0. Чтобы доказать эту теорему для $V \in A_l$, заметим, что нам достаточно проверить лишь оценку (10). Для этого нам достаточно взаимодействие $V \in A_l$ представить в следующем виде:

$$V = \sum_{i=1}^{d} \sum_{N_1} \cdots \sum_{N_{m_i+n_i}} c_i(N_1, \ldots, N_{m_i+n_i}) \times$$
$$\times a^*(e_{N_1}) \ldots a^*(e_{N_{m_i}}) a(e_{N_{m_i+1}}) \ldots a(e_{N_{m_i+n_i}}), \tag{12}$$

где $\| e_{N_j} \| = 1$, $e_{N_j} \in C_0^\infty(R^\nu)$, N_j пробегают счетное множество $\mathcal{N}$, причем

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{N_1} \cdots \sum_{N_{m_i+n_i}} |c_i(N_1, \ldots, N_{m_i+n_i})| < \infty \tag{13}$$

и для любых $N, N' \in \mathcal{N}$ и $f \in C_0^\infty(R^\nu)$ имеют место оценки

$$|(e_N, e^{-ith} f)| < \frac{C(f)}{(1+|t|)^\delta}, \tag{14}$$

$$|(e_N, e^{-ith} e_{N'})| < \frac{C}{(1+|t|)^\delta}, \tag{15}$$

где $C(f)$—некоторая константа, зависящая только от f, а C, δ—абсолютные константы, причем $\delta > 1$.

Легко видеть, что из (12), (13), (14), (15) следует оценка (10).

Докажем, что $V \in A_l$ представимо в виде (12).

Пусть сначала преобразования Фурье ядер V_i

$$\tilde{V}_i \in C_0^\infty(R^{\nu(m_i+n_i)}),$$

тогда можно выбрать L так, что $\operatorname{supp} \tilde{V}_i \subset [-L, L]^{\nu(m_i+n_i)}$ для любого i. Пусть

$$e_n(k) = \frac{\kappa(k) \exp\{2\pi i n \frac{k}{A}\}}{d_n}, \tag{16}$$

где функция $\kappa(k)$ из $C_0^\infty(R)$ $0 \leq \kappa(k) \leq 1$ для всех $|k| \leq B$ и $\kappa(k) = 0$ для всех $|k| > B$. Константы d_n выбраны так, чтобы выполнялось $\| e_n \| = 1$.

Выберем A и B так, что $L < B < 2L < A$. Тогда

$$\tilde{V}_i = \sum_{\overline{N}} c_i(\bar{N}) \prod_{j=1}^{D_i} e_{n_j}(k_j), \tag{17}$$

где $\overline{N} = (n_1, \ldots, n_{D_i})$, $D_i = \nu(m_i + n_i)$. Очевидно, что для любого q существует константа $C(q)$ такая, что

$$|c_{\overline{N}}| < \frac{C(q)}{|\overline{N}|^q}, \quad |\overline{N}| = \sum_i |n_i|. \tag{18}$$

Очевидно, что при $q > \max_i D_i$ имеет место оценка

$$\sum_{\overline{N}} |c_i(\overline{N})| < \infty.$$

Для функций

$$e_N = \prod_{j=1}^{\nu} e_{n_j}(k_j), \;\; e_{N'} = \prod_{j=1}^{\nu} e_{n'_j}(k_j),$$

$$N = (n_1, \ldots, n_\nu), \;\; N' = (n'_1, \ldots, n'_\nu),$$

равномерно по $N, N' \in Z^\nu$ выполнены оценки:

$$\text{а)} \qquad |\,(e_N, e^{ith} e_{N'})\,| < \frac{C}{(1+|\,t\,|)^{\nu/2-\delta'}}, \tag{19}$$

$$\text{б)} \qquad |\,(e_N, e^{ith} f)\,| < \frac{C(f)}{(1+|\,t\,|)^{\nu/2-\delta'}}, \tag{20}$$

где константу $\delta' > 0$ можно сделать сколь угодно малой, $C = C(\nu, \delta')$, $C(f) = \mathrm{C}(f, \nu, \delta')$. Выбрав $\delta = \nu/2 - \delta' > 1$ при $\nu \geq 3$, $\delta' < 1/2$ в (19) и (20), мы получим неравенства (14) и (15).

Если же $\tilde{V}_i \in S(R^{(m_i+n_i)\nu})$, то воспользуемся разложением единицы

$$\sum_{\bar{N}} \alpha_{\bar{N}}(k) = 1, \tag{21}$$

где $\operatorname{diam} \operatorname{supp} \alpha_{\bar{N}} \leq \mathrm{const}$ равномерно по $\overline{N}$. Затем представляем ядро $\tilde{V}_i$ в виде суммы $\tilde{V}_i \alpha_{\bar{N}}$ финитных ядер и, используя аналогичное (10) разложение для $\tilde{V}_i \alpha_{\bar{N}}$ с соответствующим образом сдвинутыми функциями $e_{\bar{N}}$, повторяем предыдущее доказательство.

Теорема 3 полностью доказана.

3. Существование обратных морфизмов Меллера при малых ограниченных возмущениях свободной динамики.

Для доказательства обратимости прямых морфизмов Меллера достаточно доказать существование обратных морфизмов Меллера.

Как и для случая обычных волновых операторов, в k-частичных квантовых системах доказать существование обратных морфизмов Меллера оказывается значительно труднее, чем существование прямых морфизмов.

Теорема 4 (обратимость прямых морфизмов Меллера). *Пусть $\nu \geq 3$, тогда для $V = V^* \in A_l$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $|\,\varepsilon\,| < \varepsilon_0, \varepsilon \in R^1$, существуют и обратимы прямые морфизмы Меллера*

$$\gamma_\pm(A) = \lim_{t\to\pm\infty} \tau^{\varepsilon V}_{-t} \tau^0_t(A), \;\; A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}),$$

причем

$$\tau^{\varepsilon V}_t = \gamma_\pm \tau^0_t \gamma^{-1}_\pm, \;\; t \in R. \tag{22}$$

Следствие. *Пусть $\nu \geq 3$, тогда для $V = V^* \in A_l$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $|\,\varepsilon\,| < \varepsilon_0$, $\varepsilon \in R^1$, C^* динамические системы $\{\mathfrak{A}(\mathcal{H}), \tau^0_t\}$ и $\{\mathfrak{A}(\mathcal{H}), \tau^{\varepsilon V}_t\}$ эквивалентны.*

Прежде чем доказывать теорему 4, сделаем два замечания.

Замечание 1. В отличие от прямых морфизмов Меллера, обратные могут не существовать при $\nu = 1, 2$ при сколь угодно малом значении константы связи ε. Соответствующий пример можно построить следующим образом.

Пример. Пусть $V = -a^*(f_0)a(f_0)$; тогда $\tau^{\varepsilon V}_t$—тоже свободная динамика, порожденная оператором $h_\varepsilon = h + \varepsilon P_0$, где P_0—проектор на вектор f_0. При $A = a^\#(f)$ обратные морфизмы Меллера выглядят так

$$\hat{\gamma}_\pm(A) = \lim_{t\to\pm\infty} \tau^0_{-t} \tau^{\varepsilon V}_t (a^\#(f)) = a^\#(W_\pm f), \tag{23}$$

где $\hat{W}_\pm$—обычные обратные волновые операторы. Хорошо известно, что если $h = -\Delta$, а функция f_0 такова, что $\tilde{f}_0 \in C^\infty_0(R^\nu)$ и

$$\int_{R^\nu} \tilde{f}_0(k) dk < \infty, \tag{24}$$

то у оператора h_ε есть собственное значение $\lambda_\varepsilon < 0$ при сколь угодно малом ε с собственным вектором e_ε. Поэтому $\hat{W}_\pm e_\varepsilon$ не существует, а следовательно, не существует и $\hat{\gamma}_\pm(a^\#(a_\varepsilon))$.

Замечание 2. В теореме 4 при $\nu \geq 3$ требуется, чтобы параметр связи ε был мал, и это требование по существу, так как при больших значениях константы связи ε могут возникать связанные состояния. Предыдущий пример при $\nu \geq 3$ и больших $|\,\varepsilon\,|$, как легко видеть, демонстрирует указанное явление.

Доказательство теоремы 4. По критерию Кука и в силу замечания, сделанного при доказательстве теоремы 3, для существования $\hat{\gamma}_+$ достаточно доказать, что

$$\|\,[\tau^{\varepsilon V}_t(V), \dot{a}^\#(f)]\,\| \in L_1(R_+),$$

т. е., что

$$\int\limits_0^\infty \| [\tau_t^{\varepsilon V}(V), a^\#(f)] \| \, dt < \infty$$

для всех $f \in C_0^\infty(R^\nu)$ и при обоих значениях $\#$.

Воспользовавшись формулой (5.4.0), получим

$$\int\limits_0^\infty \| [\tau_t^{\varepsilon V}(V), a^\#(f)] \| \, dt \le \int\limits_0^\infty \| [\tau_t^0(V), a^\#(f)] \| \, dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty | \varepsilon |^n \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Delta_n} \| [a^\#(f), [\tau_{s_1}^0(V)[\ldots$$

$$\ldots [\tau_{s_n}^0(V), \tau_t^0(V)] \ldots]] \| \, ds_1 \ldots ds_n dt. \qquad (25)$$

Лемма 5. *Существуют константа $C = C(V, \nu)$, не зависящая от f, и константа $C(f, V)$ такие, что имеют место оценки:*

$$a) \qquad \int\limits_0^\infty \| [\tau_s^0(V), a^\#(f)] \| \, ds < C \cdot C(f, V); \qquad (26)$$

$$б) \qquad \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Delta_n^s} \| [a^\#(f), [\tau_{s_1}^0, [\ldots [\tau_{s_n}^0(V), \tau_s^0(V)] \ldots]] \| \, ds_1 \ldots$$

$$\ldots ds_n ds < C^{n+1} C(f, V). \qquad (27)$$

Замечание. Очевидно, что из леммы 5 при $\varepsilon_0 = C^{-1}$ следует теорема 4.

Доказательство леммы 5. Мы сначала оценим подынтегральное выражение (27) некоторой суммой

$$\| [a^\#(f), [\tau_{s_1}^0(V), [\ldots [\tau_{s_n}^0(V), \tau_s^0(V)] \ldots]] \| \le$$

$$\le \sum_G W_G(s_1, \ldots, s_n, s), \qquad (27^a)$$

где $\sum\limits_G$ берется по всем допустимым диаграммам с весом W_G.

Эти допустимые диаграммы G и их вес мы опишем ниже. Затем уже оценим

$$\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{\Delta_n^s} [\sum_G W_G(s_1, \ldots, s_n, s)] ds_1 \ldots ds_n \right) ds < C^{n+1} C(f, V)$$

с помощью специальной техники оценки суммы диаграмм. Сопоставим каждому $s_i, i = 0, \ldots, n+1$, где $s_{n+1} = s$, $s_0 = 0$, вершину с номером $n + 1 - i$.

Имеем

$$\tau_{s_j}^0(V) = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^M c_k a^*(e^{is_j h} f_{i1}) \ldots$$

$$\ldots a^*(e^{is_j h} f_{i,m_i}) a(e^{is_j h} f_{i,m_i+1}) \ldots a(e^{is_j h} f_{i,m_i+n_i}). \qquad (28)$$

Выражение (27ᵃ) есть $(n+1)$-кратный коммутант. Мы будем раскрывать квадратные скобки в этом коммутанте последовательно за $(n + 1)$ шагов.

На первом шаге в самом внутреннем коммутанте $[\tau_{s_n}^0(V), \tau_{s_n+1}^0(V)]$ будем с помощью канонических антикоммутационных соотношений "протаскивать" вправо операторы рождения и уничтожения, относящиеся к $\tau_{s_n}^0(V)$, т. е. множители вида

$$a^\#(e^{is_n h} f_{i,j}),$$

"сквозь" оператор $\tau_{s_n+1}^0(V)$. Иначе говоря, мы используем формулы

$$a(f)a(g) = -a(g)a(f),$$

$$a(f)a^*(g) = -a^*(g)a(f) + (f, g)I$$

или аналогичные—для $a^*(f)$. При этом "протаскивании" будут возникать множители вида

$$(e^{is_n h} f_{i,j}, e^{is_{n+1} h} f_{i',j'}) \qquad (29)$$

или сопряженные к ним; появление таких множителей назовем "спариванием", причем "протаскивание" мы делаем поочередно: сначала мы протаскиваем самый левый оператор рождения—уничтожения $a^\#(f)$ в каждом слагаемом из $\tau_{s_n}^0(V)$ через весь оператор $\tau_{s_n+1}^0(V)$. При этом при каждом "спаривании" оператора $a^\#(f)$ возникает слагаемое

$$(e^{is_n h} f_{i,j}, e^{is_{n+1} h} f_{i',j'})W, \tag{30}$$

где W—некоторый моном из операторов рождения—уничтожения вида $a^{\#}(e^{is_n h} f_{i,j})$ или $a^{\#}(e^{is_{n+1} h} f_{i',j'})$. Эти слагаемые мы далее менять не будем, а начнем "протаскивать" следующий оператор $a^{\#}(f)$ в $\tau^0_{s_n}(V)$ через $\tau^0_{s_n+1}(V)$ и снова получим некоторое количество слагаемых вида (30). Продолжая таким образом дальше и замечая, что в силу четности V слагаемые, в которых не произошло спариваний, сократятся с $\tau^0_{s_{n+1}}(V)\tau^0_{s_n}(V)$, мы убедимся, что коммутант $W_1 = [\tau^0_{s_n}(V), \tau^0_{s_{n+1}}(V)]$ состоит из суммы слагаемых вида (30). С каждым таким слагаемым мы свяжем ребро (s_n, s_{n+1}) с вкладом (29).

Далее, таким же образом представим следующий коммутант $[\tau^0_{s_{n-1}}(V), W_1]$ с помощью аналогичной процедуры "протаскивания" операторов рождения—уничтожения вида

$$a^{\#}(e^{is_{n-1} h} f_{i,j})$$

"сквозь" W_1. На втором шаге возникнут множители вида

$$(e^{is_{n-1} h} f_{i,j}, e^{is_{n+1} h} f_{i',j'})$$

или

$$(e^{is_{n-1} h} f_{i,j}, e^{is_n h} f_{i',j'}).$$

Иными словами, коммутант $[\tau^0_{s_{n-1}}(V), W_1]$ состоит из слагаемых

$$(e^{is_{n-1} h} f^{(2)}_{i,j}, e^{is_k h} f^{(2)}_{i',j'})(e^{is_n h} f^{(1)}_{i,j}, e^{is_{n+1} h} f^{(1)}_{i',j'})\tilde{W},$$

где $k = n$ или $n+1$, а $\tilde{W}$—моном от операторов рождения–уничтожения вида $a^{\#}(e^{is_{n-1} h} f), a^{\#}(e^{is_n h} f'), a^{\#}(e^{is_{n+1} h} f'')$. Множителю вида $(e^{is_{n-1} h} f^{(2)}_{i,j}, e^{is_k h} f^{(2)}_{i',j'})$ мы отнесем ребро (s_{n-1}, s_k). Продолжая эту процедуру дальше, мы будем получать на каждом шаге v ребро $(s_v, s_{v'})$, где $v' = v'(v) > v$ с множителем вида

$$r_{v,v'} = (e^{is_v h} f_{i,j}, e^{is_{v'} h} f_{i',j'}).$$

Очевидно, что для всех $1 < i, j, i', j' \le d$, $0 < v, v' \le n+1$ имеет место оценка

$$| r_{v,v'} | < \frac{C}{(| s_v - s_{v'(v)} | + 1)^{\delta}}, \tag{30ᵃ}$$

где $\delta = \nu/2 - \delta' > 1$, δ'—сколь угодно малая константа, $C > 0$ не

зависит от $i, j, i', j', v, v', s_v, s_{v'}$. На последнем шаге мы "протащим" оператор $a^{\#}(f)$. В результате $(n+1)$-кратный коммутант

$$a^{\#}(f)[\tau^0_{s_1}(V)[\ldots[\tau^0_{s_n}(V)\tau^0_{s_{k+1}}(V)]$$

представится в виде слагаемых вида

$$\prod_v r(v, v')\tilde{W}, \tag{31}$$

где $\tilde{W}$—моном от операторов рождения—уничтожения вида $a^{\#}(e^{is_k h} f)$, а набор $\{(v, v')\}$ образует диаграмму G с вершинами в точках $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{n+1}$, расположенными на числовой оси и занумерованными в порядке возрастания. При этом из каждой вершины s_v проведено одно и только одно ребро $(s_v, s_{v'})$ вправо, т. е. такое, что $v' > v$, и не более чем $2m_{\max}$ ребер $(s_v, s_{v''})$ влево $(v'' < v)$. Такую диаграмму G назовем допустимой. Если заметить, что число мономов вида (31) с одной и той же диаграммой G не превосходит C_0^n, а норма каждого монома также не более чем C_1^n, где C_1 и C_0—абсолютные константы, мы получим окончательно оценку (27ᵃ), где сумма в правой части (27ᵃ) берется по всем описанным выше допустимым диаграммам G, а вес W_G задается формулой

$$W_G = (C_0 C_1)^n \prod_v \frac{C}{(| s_v - s_{v'(v)} | + 1)^{\delta}}.$$

Из оценки (27ᵃ) следует, что интеграл (27) оценивается величиной

$$\int\limits_{\Delta^{\infty}_{n+1}} \sum W_G(s_1, \ldots, s_n, s_{n+1}) ds_1 \ldots ds_n =$$

$$= (\bar{C})^n \int\limits_{\Delta^{\infty}_{n+1}} \sum_{\{v'(v)\}} \prod_v \frac{C}{(| s_v - s_{v'(v)} | + 1)^{\delta}} ds_1 \ldots ds_{n+1}, \tag{32}$$

где каждому v соответствует единственное значение $n + 1 \ge$ $\ge v'(v) > v$ и сумма $\sum\limits_{\{v'(v)\}}$ берется по всем наборам $\{v'(v), v =$ $= 0, \ldots, n\}$ таким, что среди чисел $\{v'(0), \ldots, v'(n)\}$ не более чем $2m_{\max}$ совпадающих с l, где l принимает значения $0, 1, \ldots, n+1$.

Для оценки суммарного вклада всех диаграмм воспользуемся следующей леммой.

Лемма 6. *Пусть $g \in L_1(R)$, $g(t) \geq 0$ для всех $t \in R^1$. Тогда для всех n имеет место следующая оценка:*

$$\int\limits_{\Delta^{\infty}_{n+1}} (\sum_{\{v'(v)\}} \prod_{v} g(t_v - t_{v'(v)}))dt_1 \ldots dt_{n+1} \leq$$

$$\leq c^n [\int\limits_{R} g(t)dt]^{n+1}, \tag{33}$$

где сумма $\sum$ берется по всем наборам допустимых диаграмм, а константа $c > 0$ не зависит от n.

Очевидно, что из оценок (32) и (33) следует лемма 5.

Доказательство леммы 6. Рассмотрим римановы суммы обеих частей неравенства (33) и докажем, что это неравенство верно при любом d для римановых сумм, где d есть шаг аппроксимации

$$d^n \left(\sum_{0<t_1<\ldots<t_n} \sum_{\{v'(v)\}} \prod_{v} g(t_v - t_{v'(v)}) \right) \leq$$

$$\leq d^{n+1} c^n \left(\sum_{s \neq 0} g(s) \right)^{n+1} = d^n c^n \left(\sum_{s_1 \neq 0} \cdots \sum_{s_{n+1} \neq 0} \prod_{i=1}^{n+1} g(s_i) \right). \quad .(34)$$

Суммы в неравенстве (34) берутся по всем $t_i, s_i \in Z_d$, где Z_d— одномерная решетка с шагом d.

Покажем с помощью некоторого алгоритма, что для любого набора $(s_0, \ldots, s_{n+1})$, $s_0 = 0$ соответствующему слагаемому из суммы в правой части неравенства (34) можно отнести не более, чем C^n возможных допустимых диаграмм из левой части с вкладом

$$g(s_1) \ldots g(s_{n+1}).$$

Алгоритм будет состоять не более чем из $2m_{\max}n$ шагов. Мы будем нумеровать шаги

$$(1,1),\ \ldots,\ (1, 2m_{\max}),\ \ldots,\ (n,1),\ \ldots,\ (n, 2m_{\max}).$$

На шаге (1,1) мы возьмем s_1 и построим ребро из 1-ой вершины в s_1; и так мы построим вершины 1, s_1 и ребро между ними. Далее действуем по индукции. Пусть линии длиной $s_1, \ldots, s_q$ построены и нам предстоит следующий шаг (i, j); действуем по следующим правилам:

1. На каждом шаге мы либо строим одно ребро, либо не строим ни одного ребра, и соответственно одну или ни одной вершины.
2. Если на шаге (i, j) не строится ребер, то на следующих шагах $(i, j'), j' > j$, мы также не строим ребер.
3. На шаге $(i, 1)$ мы вибираем одну из построенных уже вершин v_i, и на следующих шагах $(1,1), \ldots, (1, 2m_{\max})$ мы можем строить ребра только из вершины v_i. При этом мы будем называть вершину v_i "использованной" на шаге $(i, 1)$.
4. Выбор вершины v_i определяется однозначно с помощью следующего правила: v_i—первая (с наименьшим номером) из уже построенных вершин, но не "использованных" на предыдущих шагах, исключая нулевую вершину; если все построенные вершины являются "использованными", то выбирается непостроенная вершина с наименьшим номером, исключая нулевую вершину.
5. Алгоритм останавливается или на шаге $(n, 2m_{\max})$, или когда нет неиспользованных вершин, или все n ребер построены, т. е. все $s_1, \ldots, s_{n+1}$ исчерпаны.

Очевидно, что каждая диаграмма G будет построена алгоритмом и каждый набор $s_1, \ldots, s_{n+1}$ будет использован не более чем C^n раз, где C зависит от $m_{\max}$, так как на шагах $(i, 1), \ldots (i, 2m_{\max})$ при каждом $i, 1 \leq i \leq n$, алгоритм имеет следующие разветвления:

а) ребро ведется либо вправо, либо влево;

б) в v_i-й вершине на этих шагах строится не более $2m_{\max}$ ребер;

в) если ребро ведется вправо, то мы можем либо попасть в нулевую вершину, либо нет.

При $d \to 0$ из неравенства (34) следует неравенство (33). Лемма 6 доказана, и, следовательно, доказана теорема 4 для взаимодействий V из класса A^0_l.

Для обобщения доказательства теоремы 4 на случай взаимодействия из класса A_l достаточно $V \in A_l$ представить в виде (12) так, чтобы были выполнены оценки (13), (14), (15), что и было показано в п. 2. Теорема 4 полностью доказана.

4. Унитарная эквивалентность гамильтонианов свободного и ограниченно возмущенного ферми-газа в основном состоянии. В предыдущих пунктах было доказано существование морфизмов Меллера как $*$-автоморфизмов КАС, алгебры для двух динамик: свободного ферми-газа и ферми-газа с ограниченным взаимодействием. В случае, когда взаимодействие $V \subset A$, т. е. каждый моном из V содержит операторы уничтожения (стоящие, как всегда, левее операторов рождения), вакуум $\Omega \in \mathcal{F}_{as}$ остается основным вектором как для свободной, так и для возмущенной динамики (отсутствует “поляризация” вакуума), т. е. основные состояния для обеих динамик имеют вид

$$\langle A \rangle = (A\Omega, \Omega), \quad A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}),$$

а ГНС-представление алгебры КАС, построенное по этому состоянию, задается в фоковском фермиевском пространстве, причем операторы $H^0_{\text{ГНС}}$ и $H^V_{\text{ГНС}}$ для свободной и возмущенной динамик совпадают соответственно с гамильтонианами $H_0 = d\Gamma(h)$ и $H_0 + V$. Таким образом, по существу здесь решается вопрос об унитарной эквивалентности операторов H_0 и H, действующих в $\mathcal{F}_{as}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть* $\mathcal{H} = L_2(R^\nu, d^\nu x)$, $H_0 = d\Gamma(h)$. $H = H_0 + \varepsilon V$, *где* $h \in H$, $V \in A$. *Тогда при* $\nu \geq 3$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при* $|\, \varepsilon \,| < \varepsilon_0$ *существуют и обратимы прямые волновые операторы*

$$W_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{-it(H_0+\varepsilon V)} e^{itH_0}, \tag{35}$$

причем

$$H_0 + \varepsilon V = W_\pm H_0 W_\pm^{-1}. \tag{36}$$

Замечание. Для взаимодействия $V \in A_l \bigcap A$ утверждение теоремы 7 следует из теоремы 4. Действительно, в силу того, что в этом случае нет поляризации вакуума, т. е. $V\Omega = 0$, имеем

$$e^{it(H_0+V)}\Omega = e^{itH_0}\Omega = \Omega \tag{37}$$

для всех t.

Поэтому для

$$A = a^*(f_1)\dots a^*(f_n), \quad \tilde{f}_i \in C_0^\infty(R^\nu), \tag{38}$$

предел

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{-itH_0} e^{it(H_0+\varepsilon V)} A\Omega =$$

$$= \lim_{t\to\pm\infty} e^{-itH_0} e^{it(H_0+\varepsilon V)} A e^{-it(H_0+\varepsilon V)} e^{itH_0}\Omega = \hat{\gamma}_\pm(A)\Omega$$

существует в силу теоремы 4 при достаточно малых ε. А так как линейные комбинации векторов вида $A\Omega$, где A имеет вид (38), плотны в $\mathcal{F}_{as}$, то существуют обратные волновые операторы. То же, очевидно, верно и для прямых волновых операторов.

Доказательство теоремы 7. В случае $V \in A$ тоже нет поляризации вакуума, но мы не можем воспользоваться теоремой 4, так как в V могут содержаться нечетные мономы. Но мы воспользуемся идеей доказательства теоремы 4.

Пусть

$$\Phi_N = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N, 0, \dots) \in \mathcal{F}_{as,0}, \quad \tilde{\varphi}_k \in C_0^\infty(R^{\nu k}).$$

Обратный волновой оператор $\hat{W}_+\Phi_N$ можно представить в виде ряда теории возмущениий

$$\hat{W}\Phi_N = \Phi_N + \sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n \int\limits_{\Delta_n^{0,t}} dt_1 \dots dt_n V(t_n)\dots V(t_1)\Phi_N, \tag{39}$$

$$\hat{W}_\pm = \lim_{t\to+\infty} \hat{W}_+(t),$$

где $\Delta_n^{0,t} = \{(t_1,\dots,t_n), 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t\}$,

$$V(t) = e^{itH_0} V e^{-itH_0}.$$

Выражение под интегралом является произведением виковских мономов и может быть представлено в виде суммы

$$V(t_n)\dots V_{t_1} = \sum_G V_G(t_1,\dots,t_n) \tag{40}$$

виковских моментов, индексируемых ***диаграммами Фридрихса*** (см. ниже §2). Но таких диаграмм слишком много, и мы воспользуемся другим разложением. В этом новом разложении мы фактически проделаем частичное пересуммирование фридрихсовских диаграмм. Вектор Φ_N мы представим в виде некоторого полинома P от операторов рождения, примененного к вакуумному вектору Ω и такое представление подставим в формулу (39).

Далее сопоставим моному $V(t_v)$ вершину v некоторого графа и выделим в нем крайний справа оператор уничтожения вида

$$a(f^{(v)}(t_v)),$$

где

$$f^{(v)}(t_v) = e^{it_v h} f^{(v)},$$

который, пользуясь антикоммутационными соотношениями

$$a(f^{(v)}(t_v))a^*(f^{(v')}(t_{v'})) =$$

$$= -a^*(f^{(v')}(t_{v'}))a(f^{(v)}(t_v)) + (f^{(v')}(t_{v'}), f^{(v)}(t_v)), \qquad (41)$$

будем переносить вправо к вакуумному ветору Ω.

При каждой такой перестановке возникает один из двух членов в правой части (41). Если возник первый член, мы продолжаем перенос, если возник второй, т. е. произошло "спаривание", то скажем, что возникла линия (v, v') диаграммы. Если в результате перестановок спаривание так и не произошло, то такой член даст нулевой вклад, так как $a(f)\Omega = 0$ для всех $f \in \mathcal{H}$. Таким образом у нас возникнет ровно n линий $(v, v'(v)), v = 1, \ldots, n$. При этом, если спаривание возникло с оператором рождения из полинома P, то скажем, что $v'(v) = 0$.

Очевидно, что

$$|\,(f^{(v')}(t_{v'}), f^{(v)}(t_v))\,| < \frac{C}{(1+ \mid t_v - t_{v'} \mid)^{\nu/2}}. \qquad (42)$$

Рассмотрим возникший граф G с вершинами $n, n+1, \ldots, 1, 0$ с ребрами (линиями) $(v, v'(v))$, который по построению является связным. Обозначим класс всех таких графов $\mathbb{C}^n_N$.

Заметим, что единственное отличие графов из $\mathbb{C}^n_N$ от соответствующих допустимых графов,описанных выше, заключается в том, что в нулевую вершину может входить не одно, а много ребер, но не более чем N.

Нетрудно видеть, что в этом случае имеет место оценка

$$\|\, V(t_n) \ldots V(t_1)\Phi_N \,\| \leq \qquad (43)$$

$$\leq C(\Phi_N)c^N(\sum_{\{v'(v)\} \in \mathbb{C}^n_N} \prod_v \frac{1}{(1+ \mid t_v - t_{v'(v)} \mid)^{\delta}}.$$

Лемма 8. *Пусть $g \in L_1(R)$, $g(t) \geq 0$ для всех $t \in R^1$. Тогда для всех n имеет место следующая оценка:*

$$\int\limits_{\Delta^\infty_n} \left(\sum_{\{v'(v)\} \in \mathbb{C}^n_N} \prod_v g(t_v - t_{v'(v)} \right) dt_1 \ldots dt_n \leq N! c^n \left(\int\limits_R g(t) dt \right)^n, \qquad (44)$$

где сумма $\sum$ берется по всем наборам допустимых диаграмм, а константа c не зависит от n.

Доказательство леммы 8 полностью аналогично доказательству леммы 6. Из леммы 8 следует теорема 7.

5. Унитарная эквивалентность гамильтонианов свободного и ограниченно возмущенного ферми-газа в КМШ-состояниях. Рассмотрим свободный ферми-газ с динамикой τ^0_t, задаваемой одночастичным гамильтонианом $h = -\Delta + \mu$ в пространстве $L_2(R^\nu)$, и его единственное β—КМШ-состояние $\langle\ \rangle^0_\beta$ на алгебре КАС. Пусть задано, далее, взаимодействие $V = V^* \in \mathfrak{A}$, порождающее динамику τ^V_t (см. (2^a)). Справедлива следующая лемма, доказанная в [49].

Лемма 9. *Для динамики τ^V_t существует единственное β— КМШ-состояние $\langle\ \rangle^V_\beta$, имеющее вид*

$$\langle A \rangle^V_\beta = \frac{\langle F^* A F \rangle^0_\beta}{\langle F^* F \rangle^0_\beta},$$

где элемент $F \in \mathfrak{A}$ равен

$$F \overset{\text{def}}{=} e^{-\beta/2(H_0+V)} e^{\beta/2 H_0} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\beta/2} \int\limits_0^{s_1} \int\limits_0^{s_{n-1}} \tau^0_{is_1}(V)\tau^0_{is_2}(V) \ldots \tau^0_{is_n}(V) ds_1 \ldots ds_n, \qquad (45)$$

где ряд (45) *сходится по норме.*

Определение. C^*-динамическая система $(\mathfrak{A}, \tau)$ называется $L_1(\mathfrak{A}^0)$ *асимптотически абелевой*, если

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|\, [A, \tau_t(B)] \,\| \, dt < \infty \qquad (46)$$

для любых A, B из плотной по норме в $\mathfrak{A}$ $*$-подалгебры $\mathfrak{A}^0$.

Между КМШ-состояниями и морфизмами Меллера существует следующая простая связь.

Утверждение 10 (см. [49]). *Пусть $(\mathfrak{A}(\mathcal{H}), \tau_t^0)$ является $L_1(\mathfrak{A}^0)$ асимптотически абелевой, тогда для любого $V = V^* \in \mathfrak{A}^0$ существуют прямые морфизмы Меллера*

$$\gamma_\pm(A) = \lim_{t\to\pm\infty} \tau_{-t}^V(\tau_t^0(A)), \;\; A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}),$$

и если $\langle\;\rangle_V$ есть (τ_t^V, β) КМШ-состояние при $\beta \neq 0$, то и состояние $\langle\gamma_\pm(\cdot)\rangle_V$ есть (τ_t^0, β)—КМШ-состояние.

Заметим, что $(\mathfrak{A}_l(\mathcal{H}), \tau_t^0)$ является $L_1(\mathfrak{A}_l^0(\mathcal{H}))$ асимптотически абелевой, где τ_t^0 порождена одночастичным гамильтонианом h.

Теорема 11. *Пусть $\nu \geq 3, \beta \neq 0$ и $V = V^* \in A_l$. Тогда существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(V, \nu) > 0$ такое, что при $\mid \varepsilon \mid< \varepsilon_0$ операторы $H^0_{\text{ГНС}}$ и $H^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}$, построенные по соответствующим КМШ-состояниям, унитарно-эквивалентны.*

Доказательство. В силу теоремы 4 существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(V, \nu) > 0$ такое, что при $\mid \varepsilon \mid< \varepsilon_0$ существуют и обратимы морфизмы Меллера $\gamma_\pm$. Из утвержденаия 10 следует, что состояние $\langle\gamma_\pm(\cdot)\rangle_{\varepsilon V}$ является (τ_t^0, β)— КМШ-состоянием на $\mathfrak{A}_l(\mathcal{H})$, но такое состояние единственно (см. [49]). А в силу калибровочной инвариантности $\langle\;\rangle_0$ и $\langle\;\rangle_{\varepsilon V}$ имеет место равенство

$$\langle\gamma_\pm(A)\rangle_{\varepsilon V} = \langle A\rangle_0 \tag{47}$$

для всех $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$.

Определим операторы $U_\pm : \mathcal{H}^0_{\text{ГНС}} \to \mathcal{H}^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}$ следующим образом:

$$U_\pm(\pi_0(A)\Omega_0) = \pi_{\varepsilon V}(\gamma_\pm(A))\Omega_{\varepsilon V}, \tag{48}$$

где мы для краткости положили $\pi_0 = \pi_{\langle\;\rangle_0}, \pi_{\varepsilon V} = \pi_{\langle\;\rangle_{\varepsilon V}}, \Omega_0 = = \Omega_{\langle\;\rangle_0}, \Omega_{\varepsilon V} = \Omega_{\langle\;\rangle_{\varepsilon V}}$.

Операторы $U_\pm$ унитарны. Действительно,

$$(U_\pm\pi_0(A)\Omega_0, U_\pm\pi_0(B)\Omega_0) =$$

$$= (\pi_{\varepsilon V}(\gamma_\pm(A))\pi_{\varepsilon V}(\gamma_\pm(\beta))\Omega_{\varepsilon V}, (\gamma_\pm(B))\Omega_{\varepsilon V}) =$$

$$= \langle(\gamma_\pm(B))^*\gamma_\pm(A)\rangle_{\varepsilon V} = \langle\gamma_\pm(B^*A)\rangle_{\varepsilon V} =$$

$$= \langle B^*A\rangle_0 = (\pi_0(A)\Omega_0, \pi_0(B)\Omega_0).$$

Очевидно, что $\operatorname{Ran} U_\pm = \mathcal{H}^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}$ и обратные операторы $U_\pm^{-1}$ задаются следующим образом:

$$U_\pm^{-1}(\pi_{\varepsilon V}(A)\Omega_{\varepsilon V}) = \pi_0(\gamma_\pm^{-1}(A)\Omega_0) \tag{49}$$

для всех $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$.

По определению операторов $H^0_{\text{ГНС}}$ и $H^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}$

$$e^{itH^0_{\text{ГНС}}}\pi_0(A)\Omega_0 = \pi_0(\tau_t^0(A))\Omega_0,$$

$$e^{itH^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}}\pi_{\varepsilon V}(A)\Omega_{\varepsilon V} = \pi_{\varepsilon V}(\tau_t^{\varepsilon V}(A))\Omega_{\varepsilon V}.$$

Откуда в силу того, что $\tau_t^{\varepsilon V}(A) = \gamma_\pm\tau_t^0\gamma_\pm^{-1}$, имеем

$$U_\pm^{-1}e^{itH^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}}U_\pm\pi_0(A)\Omega_0 = U_\pm^{-1}e^{itH^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}}\times$$

$$\times\pi_{\varepsilon V}(\gamma_\pm(A))\Omega_{\varepsilon V} = U_\pm^{-1}\pi_{\varepsilon V}(\tau_t^{\varepsilon V}(\gamma_\pm(A)))\Omega_{\varepsilon V} =$$

$$= \pi_0(\gamma_\pm^{-1}\tau_t^{\varepsilon V}\gamma_\pm(A))\Omega_0 = \pi_0(\tau_t^0(A))\Omega_0 = e^{itH^0_{\text{ГНС}}}\pi_0(A)\Omega_0.$$

Таким образом,

$$e^{itH^0_{\text{ГНС}}} = U_\pm^{-1}e^{itH^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}}U_\pm, \;\; t \in R, \tag{50}$$

и, следовательно,

$$U_\pm^{-1}H^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}U_\pm = H^0_{\text{ГНС}}. \tag{51}$$

6. Оператор $\mathbf{H}^{\varepsilon \mathbf{V}}_{\text{ГНС}}$ в гильбертовом пространстве $H^0_{\text{ГНС}}$. Пусть $(\mathcal{H}^0_{\text{ГНС}}, \pi_0, \Omega_0), (\mathcal{H}^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}, \pi_{\varepsilon V}, \Omega_{\varepsilon V})$— циклические представления $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ по β—КМШ-состояниям $\langle\;\rangle_0$ и $\langle\;\rangle_{\varepsilon V}$ соответственно. Обозначим $H^0_{\text{ГНС}}$ и $H^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}$ генераторы унитарных групп, действующие в $\mathcal{H}^0_{\text{ГНС}}$ и $\mathcal{H}^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}$ и порожденные динамиками τ_t^0 и $\tau_t^{\varepsilon V}$ в $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$.

Определим оператор $U : \mathcal{H}^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}} \to \mathcal{H}^0_{\text{ГНС}}$, действующий следующим образом:

$$U\pi_{\varepsilon V}(A)\Omega_{\varepsilon V} = C_{\varepsilon V}\pi_0(AF)\Omega_0, \tag{52}$$

где

$$C_{\varepsilon V} = \langle F^*F\rangle, \tag{53}$$

а F задается выражением (45). Заметим, что оператор U является унитарным. Действительно, для любых $A, B \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$

$$(U\pi_{\varepsilon V}(A)\Omega_{\varepsilon V}, U\pi_{\varepsilon V}(B)\Omega_{\varepsilon V}) = C^2_{\varepsilon V}\langle(BF)^*AF\rangle_0 =$$

$$= C^2_{\varepsilon V}\langle F^*B^*AF\rangle_0 = \langle B^*A\rangle_{\varepsilon V} = (\pi_{\varepsilon V}(A)\Omega_{\varepsilon V}, \pi_{\varepsilon V}(B)\Omega_{\varepsilon V}).$$

Будем считать, что возмущение εV определяется с помощью полиномов от операторов рождения и уничтожения $a^{\#}(f)$, где f является аналитическим вектором для оператора h (см. [49]). Элемент F C^*-алгебры $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ при малых ε обратим, причем (см. [49])

$$F^{-1} = e^{-\beta/2H_0} e^{\beta/2(H+\varepsilon V)} =$$

$$= 1 + \sum (-\varepsilon)^n \int\limits_0^{\beta/2} \int\limits_0^{s_n} \dots \int\limits_0^{s_2} \tau_{is_1}(V) \tau_{is_2}(V) \dots \tau_{is_n} ds_1 \dots ds_n, \qquad (54)$$

и поэтому обратный оператор $U^{-1} : \mathcal{H}^0_{\text{ГНС}} \to \mathcal{H}^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}$ действует так:

$$U^{-1} \pi_0(A) \Omega_0 = C^{-1}_{\varepsilon V} \pi_{\varepsilon V}(AF^{-1}) \Omega_{\varepsilon V}.$$

Утверждение 12. *Оператор $H^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}$, определенный в пространстве $\mathcal{H}^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}}$, унитарно-эквивалентен оператору H', действующему в $\mathcal{H}^0_{\text{ГНС}}$ для всех $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ таких, что $\pi_0(A)\Omega_0 \in$*
$\in D(H^0_{\text{ГНС}})$ по следующей формуле:

$$H' \pi_0(A) \Omega_0 = H^0_{\text{ГНС}} \pi_0(A) \Omega_0 + i\varepsilon(\pi_0(VA)\Omega_0 - \pi_0(AV_{\beta/2})\Omega_0, \quad (55)$$

где $V_{\beta/2} = \tau^0_{i\beta/2}(V) \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ и $D(H^0_{\text{ГНС}})$— область определения оператор $H^0_{\text{ГНС}}$.

Доказательство. Докажем, что оператор в (55) совпадет с оператором

$$U H^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}} U^{-1}.$$

Имеем

$$U H^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}} U^{-1} \pi_0(A) \Omega_0 = U H^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}} (C^{-1}_{\varepsilon V} \pi_{\varepsilon V}(AF^{-1}) \Omega_{\varepsilon V}) =$$
$$= C^{-1}_{\varepsilon V} U \pi_{\varepsilon V}(i[H_0 + \varepsilon V, AF^{-1}]) \Omega_{\varepsilon V}. \qquad (56)$$

Далее, преобразуя (56), получаем

$$U H^{\varepsilon V}_{\text{ГНС}} U^{-1} \pi_0(A) \Omega_0 = \pi_0(i[H_0 + \varepsilon V, AF^{-1}]F) \Omega_0 =$$
$$= \pi_0(i[(H_0 + \varepsilon V)A]) \Omega_0 - \pi_0((iAF^{-1}H_0 + V)F) \Omega_0 =$$
$$= \pi_0(i[(H_0 + \varepsilon V)A]) \Omega_0 - \pi_0(iA\tau_{i\beta/2}(H_0 + \varepsilon V)) \Omega_0, \qquad (57)$$

так как

$$F^{-1}(H_0 + \varepsilon V)F = e^{-\beta/2H_0} e^{\beta/2(H_0+\varepsilon V)} (H_0 + \varepsilon V) e^{-\beta/2(H_0+\varepsilon V)} e^{\beta/2H_0} -$$

$$= e^{-\beta/2H_0}(H_0 + \varepsilon V) e^{\beta/2H_0} = \varepsilon e^{-\beta/2H_0} V e^{\beta/2H_0} + H_0, \qquad (58)$$

где мы сначала воспользовались коммутативностью операторов $H_0 + \varepsilon V$ и $e^{\pm\beta(H_0+\varepsilon V)}$ и тем, что на множестве аналитических векторов оператора H_0 в $\mathcal{F}_{as}(\mathcal{H})$ имеют место равенства

$$e^{\beta/2(H_0+\varepsilon V)} e^{-\beta/2(H_0+\varepsilon V)} = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{as}(\mathcal{H})}, \qquad (59)$$

а затем—коммутативностью операторов H_0 и $e^{\pm\beta/2H_0}$ и тем, что

$$e^{-\beta/2H_0} e^{\beta/2H_0} = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{as}(\mathcal{H})} \qquad (60)$$

на множестве аналитических векторов оператора H_0. Из (57) и (58) очевидно следует формула (55).

§ 2. Асимптотическая полнота для взаимодействий, поляризующих вакуум ("linked cluster theorem")

В п. 5 предыдущего параграфа мы рассмотрели возмущение $V \in A$ свободного гамильтониана H_0, сохраняющее вакуум: $V\Omega = 0$, и установили при некоторых общих предположениях унитарную эквивалентность операторов H_0 и $H_0 + V$, действующих в $\mathcal{F}_a(\mathcal{H})$. В данном параграфе мы рассмотрим случай более общего возмущения $V \in A_l$, уже не сохраняющего вакуум. При этом, строго говоря, операторы H_0 и $H_0 + \varepsilon V$ уже не унитарно-эквивалентны, но эта их неэквивалентность не очень существенна: для малых ε найдется такое вещественное λ_ε, что оператор $H_0 + \varepsilon V$ унитарно-эквивалентен оператору $H_0 + \lambda_\varepsilon V$, т. е. спектры этих операторов отличаются лишь сдвигом.

На формальном уровне этот факт хорошо известен, например, из знаменитой "linked cluster theorem" (теоремы о связанных кластерах), являющейся основным инструментом в вычислениях по теории возмущений в квантовой теории многих частиц. Основной результат этой главы состоит в доказательстве этой теоремы. Это позволит нам строго доказать также все формальные следствия из нее, имеющиеся в классических книгах К. Фридрихса [42] и К. Хеппа [44].

Мы будем рассматривать следующие две ситуации:

1) $\mathcal{J}_a = \mathcal{J}_{as}(L_2(R^\nu))$—антисимметрическое фоковское пространство над $L_2(R^\nu), \nu \geq 3, H = H_0 + \varepsilon V$, где $H_0 = d\Gamma(h)$, или в k-представлении

$$H_0 = \int\limits_{R^\nu} h(k)a^*(k)a(k)d^\nu k, \tag{1}$$

а $V \in A_l$, при этом либо

$$h(k) = (k^2 + m^2)^{1/2}, m > 0 \text{ (релятивистский случай) },$$

либо

$$h(k) = Lk^2, L > 0 \text{ (безмассовый случай) }.$$

Так как $V = V^* \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$, то $H = H_0 + \varepsilon V$ является самосопряженным оператором в $\mathcal{F}_a$ с той же плотной областью определения, что и H_0.

2) $\mathcal{F}_a = \mathcal{F}_{as}(l_2(Z^\nu)), H_0 = d\Gamma(h), h = -\Delta + \mu$, где Δ—решетчатый лапласиан, $\mu \geq 0$. Выпишем оператор H_0 в k-представлении. После преобразования Фурье $l_2(Z^\nu)$ перейдет в $L_2(T^\nu)$, $T^\nu = [0, 2\pi]^\nu$—ν-мерный тор, $\mathcal{F}_a = \mathcal{F}_{as}(L_2(T^\nu))$ и

$$H_0 = \int\limits_{T^\nu} h(k)a^*(k)a(k)dk, \tag{2}$$

где

$$h(k) = \sum_{i=1}^{\nu} 2(1 - \cos(k_i)) + \mu, \quad k = (k_1, \ldots, k_\nu). \tag{3}$$

Так как мы предполагаем, что $\mu \geq 0$, спектр оператора H_0 неотрицателен. В рассматриваемом случае мы ограничимся взаимодействием $V \in A_l$ вида

$$V = \sum_{i=1}^{d} c_i a^*(f_{i,1}) \ldots a^*(f_{i,m_i})a(f_{i,m_i+1}) \ldots a(f_{i,m_i+n_i}), \tag{4}$$

где $m_i + n_i$—четно, $f_{i,j} \in C^\infty(T^\nu)$ для всех i, j.

Все результаты, доказываемые ниже, верны в обоих случаях, однако для удобства изложения мы будем проводить его для случая 2).

В дальнейшем (п. п. 5 и 6) мы откажемся от требования неотрицательности одночастичного гамильтониана (условия $\mu \geq 0$).

1. Диаграммы Фридрихса. Алгебра виковских экспонент. Операции $\Gamma_\pm$ и Γ. Рассмотрим вакуумное (основное) состояние на C^*-алгебре КАС $\mathfrak{A}(L_2(T^\nu))$

$$\langle A \rangle = (A\Omega, \Omega), \tag{5}$$

которое является квазисвободным калибровочно-инвариантным состоянием.

Скобки Вика относительно этого состояния (см. гл. 2) означают просто, что операторы уничтожения надо переставить вправо от операторов рождения с учетом правила знаков. Иначе говоря, на мономах вида

$$W = a^*(f_1) \ldots a^*(f_m)a(f_{m+1}) \ldots a(f_{m+n})$$

виковские скобки действуют тождественно.

Произведение нескольких мономов Вика может быть разложено в сумму мономов Вика. Соответствующее правило легко формируется на языке диаграмм.

С мономом

$$\begin{aligned} W_i = \int w_i(k_{i1}, \ldots, k_{im_i}, k_{i,m_i+1}, \ldots, k_{i,m_i+n_i}) \times \\ \times a^*(k_{i1}) \ldots a^*(k_{im_i})a(k_{im_i+1}) \ldots a(k_{im_i+n_i}) \times \\ \times dk_{i1} \ldots dk_{im_i} dk_{im_i+1} \ldots dk_{im_i+n_i} \end{aligned} \tag{6}$$

связывается диаграмма G_i с m_i занумерованными левыми (правыми) отростками, причем j-му левому отростку соответствует $a^*(k_{ij})$, а j-му правому отростку соответствует $a(k_{im_i+j})$.

Тогда

$$W_1 W_2 \ldots W_s = \sum_G W_G, \tag{7}$$

где сумма берется по всевозможным спариваниям, дающим диаграмму G, в несвязном объединении диаграмм G_i и

$$W_G = \int \prod w_i \prod_{i,j} dk_{ij} \prod{}' \delta(k_{ij} - k_{i'j'}) \prod{}'' a^\#(k_{ij}) : (-1)^{\pi(G)}, \tag{8}$$

где произведение $\prod'$ берется по всем линиям (парам связанных отростков i, j и i', j') диаграммы G, а $\prod''$—по всем неспаренным отросткам. Формулы (7) и (8) легко доказать, если, пользуясь антикоммутационными соотношениями, переносить каждый оператор уничтожения вправо от операторов рождения. При этом $\pi(G)$ будет общим числом таких транспозиций.

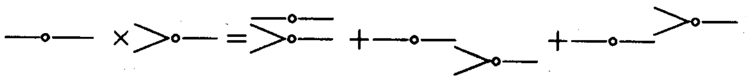
Следующий пример поясняет обозначения

$$W_1 = a^*(f_1)a(f_2), W_2 = a^*(f_3)a^*(f_4)a(f_5),$$

$$W_1W_2 =: W_1W_2 : + W_1 - \cdot - W_2 = a^*(f_1)a^*(f_3)a^*(f_4)a(f_2)a(f_5)+$$

$$+(f_3f_2)a^*(f_1)a^*(f_4)a(f_5) - (f_4, f_2)a^*(f_1)a^*(f_3)a(f_5),$$

или графически



Заметим, что $: W_1W_2 :$ —это тот член в разложении W_1W_2, в котором при переносах операторов уничтожения не возникло ни одного спаривания.

Введем следующие обозначения:

$(W_1 \dots W_s)_c$—сумма по всем связным диаграммам G в (7);

$(W_1 \dots W_s)_{0,0}$— сумма по всем связным диаграммам без внешних линий в (7);

$(\dots)_L = (\dots)_c - (\dots)_{0,0}$—сумма по всем связным диаграммам по крайней мере с одной внешней линией в (7);

$(\dots)_{CR}$—сумма по всем диаграммам из класса $(\dots)_L$ с внешними линиями, относящимися только к операторам рождения.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые алгебраические свойства рядов из мономов Вика.

Для формального степенного ряда

$$A = \sum_{m,n} x^m y^n A_{m,n},$$

где $A_{m,n}$—мономы Вика, положим по определению

$$: A := \sum_{m,n} x^m y^n : A_{m,n} :$$

Утверждение 1. *Пусть*

$$A = \sum_{m,n} x^m y^n A_{m,n}, \quad B = \sum_{m,n} x^m y^n B_{m,n}$$

—формальные степенные ряды по четным мономам Вика $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ ($m+n$ четно). Тогда верны тождества

$$A : \exp B :=: (A : \exp B :)_c \exp B :, \tag{9}$$

$$: \exp B : A =: (: \exp B : A)_c \exp B :, \tag{10}$$

где ( )$_c$, как и раньше, выделяет связные диаграммы.

Доказательство сводится к простым комбинаторным рассуждениям при одних и тех же степенях $x^m y^n$ (см. [42], [44]).

Определение. *Левое связное* $W_1 \prec : W_2 \dots W_s :$ *(правое связное* $: W_2 \dots W_s : \succ W_1$*) произведение* есть сумма всех виковских мономов из $W_1 : W_2 \dots W_s :$ (соответственно из $: W_2 \dots W_s : W_1$), графы которых связны. (Напомним, что каждая вершина графа помечена множителем W_i).

Замечание. Обычно тождества (9) и (10) записывают в виде

$$A : \exp B :=: (A\perp : \exp B :) \exp B :,$$

$$: \exp B : A =: (: \exp B : \perp A) \exp B : .$$

Определение. Определим *операции Фридрихса* $\Gamma_{\pm\kappa}$ на мономах

$$U_{mp} = \int u_{mp}(k_1, \dots, k_{m+p}) a^*(k_1) \dots a^*(k_m) \times$$

$$\times a(k_{m+1}) \dots a(k_{m+p}) dk_1 \dots dk_{m+p}$$

при $\kappa > 0$ как

$$\Gamma_{\pm\kappa}(U_{mp}) \overset{\text{def}}{=} i \int\limits_{\pm\infty}^{0} e^{-\kappa|t|} \tau_t^0(U_{mp}) dt =$$

$$= \int u_{mp}(k_1, \dots, k_{m+p})[E_c - E_A \pm i\kappa]^{-1} \times$$

$$\times a^*(k_1) \dots a^*(k_m) a(k_{m+1}) \dots a(k_{m+p}) dk_1 \dots dk_{m+p} \tag{11}$$

и $\Gamma_\pm(U_{mp})$ как сильный предел $\Gamma_{\pm\kappa}(U_{mp})$ при $\kappa \to 0$, где

$$E_c = \sum_{j=1}^{m} h(k_j), \quad E_A = \sum_{j=m+1}^{m+p} h(k_j),$$

а *операцию Глимма* Γ как

$$\Gamma(U_{mp}) = \int U_{mp}(k_1, \dots, k_{m+p}) E_c^{-1} a^*(k_1) \dots a^*(k_m) a(k_{m+1}) \dots$$

$$\ldots a(k_{m+p})dk_1 \ldots dk_{m+p}. \tag{12}$$

Определим также *операцию*

$$[H_0^{\pm\kappa}, U_{mp}] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{d}{dt}[e^{-\kappa|t|}\tau_t^0(U_{mp})]\bigg|_{t=\pm 0}. \tag{13}$$

Она сводится к замене ядра U_{mp} ядром

$$iU_{mp}(k_1, \ldots, k_{m+p})(E_c - E_A \pm i\kappa).$$

Утверждение 2. *При $\kappa > 0$ имеют место следующие формулы:*

$$[H_0^{\pm\kappa}, \Gamma_{\pm\kappa}(U_{mp})] = U_{mp}, \tag{14}$$

$$[H_0^{\pm\kappa}, : \exp(\Gamma_{\pm\kappa}(U_{mp})) :] =: U_{mp} \exp(\Gamma_{\pm\kappa}(U_{mp})) : . \tag{15}$$

Доказательство. Первое равенство следует из определения операции $\Gamma_{\pm\kappa}$. Из первого равенства утверждения 2 имеем

$$[H_0^{\pm\kappa}, : \exp(\Gamma_{\pm\kappa}(U_{mp})) :] =$$

$$=: [H_0^{\pm\kappa} \underset{1}{\text{-}\circ\text{-}} \Gamma_{\pm\kappa}(U_{mp})) - \Gamma_{\pm\kappa}(U_{mp})) \underset{1}{\text{-}\circ\text{-}} H_0^{\pm\kappa}] \exp(\Gamma_{\pm\kappa}(U_{mp})) :$$

где $\underset{1}{\text{-}\circ\text{-}}$ указывает на то что берутся мономы Вика с одним спариванием. Но выражение в квадратных скобках равно U_{mp}.

2. Адиабатические волновые операторы ("Linked cluster theotem"). Введем дополнительно следующие обозначения. Определим для $-\infty < t, s < \infty$, $\kappa > 0$, оператор эволюции без адиабатического урезания

$$U(t, s) = e^{itH_0}e^{-i(t-s)H}e^{isH_0} \tag{16}$$

и оператор $U^\kappa(t, s)$ с адиабатическим урезанием, определяемый из уравнения

$$U^\kappa(t, s) = 1 - i\int_s^t V^\kappa(r)U^\kappa(r, s)dr, \tag{17}$$

где $V^\kappa(r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{-i\kappa|r|}e^{irH_0}Ve^{-irH_0}$.

Хорошо известно, что для конечных t, s и $\kappa \geq 0$ (см. [44]) верна формула

$$U^\kappa(t, s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n \int_{\Delta_n^{s,t}} dt_1 \ldots dt_n V^\kappa(t_1) \ldots V^\kappa(t_n), \tag{18}$$

где $\Delta_n^{s,t} = \{(t_1, \ldots, t_n) : s < t_1 < \ldots < t_n < t\}$, и ряд сходится по норме.

Выражение под интегралом является произведением виковских мономов и может быть представлено в виде суммы

$$V^\kappa(t_1) \ldots V^\kappa(t_n) = \sum_G W_G(t_1, \ldots, t_n) \tag{19}$$

виковских мономов, индексируемых диаграммами Фридрихса.

Если воспользоваться равенством при $\kappa > 0$

$$(\Gamma_{\pm\kappa}(V))(t) = i\int_{\pm\infty}^{t} V^\kappa(s)ds,$$

то после интегрирования по $\Delta^{0,\pm\infty}$ в каждом члене ряда (18) получим, что

$$U^\kappa(0, \pm\infty) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n\Gamma_{\pm n\kappa}(V \ldots \Gamma_{\pm 2\kappa}(V\Gamma_{\pm\kappa}(V))), \tag{20}$$

а после интегрирования по $\Delta^{\pm\infty,0}$ получим, что

$$U^\kappa(\mp\infty, 0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n\Gamma_{\pm n\kappa}(\ldots\Gamma_{\pm 2\kappa}(\Gamma_{\pm\kappa}(V)V)\ldots), V). \tag{21}$$

Теорема 3. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $|\,\varepsilon\,| < \varepsilon_0$ и любого из двух случаев*

$$-\infty < t, s < \infty \text{ и } \kappa \geq 0;$$

$$-\infty \leq t, s \leq \infty \text{ и } \kappa > 0$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-i\varepsilon)^n \int_{\Delta_n^{s,t}} dt_1 \ldots dt_n (V^\kappa(t_1) \ldots V^\kappa(t_n))_c =$$

$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} U^\kappa(t, s)_c \tag{22}$$

сходится по норме, и ε_0 не зависит от t, s, и κ. То же верно, если вместо $(\ldots)_c$ поставить $(\ldots)_{0,0}, (\ldots)_L, (\ldots)_{CR}$.

Из этой теоремы можно вывести следующую теорему.

Теорема 4 (linked cluster theorem). *В условиях теоремы 3 имеют место равенства*

$$U^{\kappa}(t,s) =: \exp(U^{\kappa}(t,s)_c) :, \tag{23}$$

$$\frac{U^{\kappa}(t,s)}{(\Omega, U^{\kappa}(t,s)\Omega)} =: \exp(U^{\kappa}(t,s)_L) :, \tag{24}$$

где экспоненты в правых частях (23), (24) *определяются обычным разложением в ряды по степеням* $U^{\kappa}(t,s)_{c,L}$, *которые сходятся по норме.*

Пусть

$$T^{\kappa}_{t,s} \overset{\text{def}}{=} \frac{U^{\kappa}(t,s)}{(\Omega, U^{\kappa}(t,s)\Omega)}. \tag{25}$$

Теорема 5. *Если* $\nu \geq 3$, *то существует* ε_0 *такое, что для* $|\, \varepsilon \,| < \varepsilon_0$ *существуют следующие пределы*

$$s-\lim_{\kappa\to 0} T^{\kappa}_{0,\pm\infty} \overset{\text{def}}{=} T^{\pm} \quad \textit{(прямые адиабатические волновые операторы)}, \tag{26}$$

$$s-\lim_{\kappa\to 0} T^{\kappa}_{\pm\infty,0} \overset{\text{def}}{=} \hat{T}^{\pm} \quad \textit{(обратные адиабатические волновые операторы)}. \tag{27}$$

Теорема 6. *В условиях теоремы 5 константа перенормировки*

$$Z^{-1} \overset{\text{def}}{=} \| \exp(\sum_n (-\varepsilon)^n (\underbrace{\Gamma(V \ldots \Gamma(V)) \ldots}_{n-\text{раз}})_{CR}\Omega \,\|^2, \tag{28}$$

где n *—число операций Фридрихса конечна. Оператор* $\sqrt{Z}T^{\pm}$ *унитарен и осуществляет унитарную эквивалентность*

$$HT^{\pm} = T^{\pm}(H_0 + \lambda_\varepsilon), \tag{29}$$

где

$$\lambda_\varepsilon = (\Omega, (\varepsilon V \perp T^{\pm})\Omega) \tag{30}$$

($V \perp T^{\pm}$ *—левое связное произведение).*

Перед тем как доказывать теоремы 3–6, мы приведем формальное доказательство теоремы 6 (см. [44]), в котором мы не будем обращать внимание на сходимость тех или иных рядов.

Доказательство (формальное) теоремы 6. В силу (20) и (24)

$$T^{\kappa}(0, \pm\infty) =: \exp(\sum_{n=1}^{\infty} (-i\varepsilon)^n \Gamma_{\pm n\kappa}(V \ldots$$

$$\ldots \Gamma_{\pm 2\kappa}(V\Gamma_{\pm\kappa}(V)) \ldots)_L) :, \tag{31}$$

поэтому при $\kappa \to 0$ получим

$$T^{\pm} =: \exp(\Gamma_{\pm}(Q_{\pm})) :, \tag{32}$$

где

$$Q_{\pm} = \sum (-i\varepsilon)^n (V\Gamma_{\pm}(V \ldots \Gamma_{\pm}(V\Gamma_{\pm}(V)) \ldots)_L.$$

Используя утверждения 1 и 2, имеем

$$H_0 T^{\pm} = T^{\pm} H_0 + : QT^{\pm} : \tag{33}$$

и

$$\varepsilon V T^{\pm} = \varepsilon : (V\!-\!\!\!\prec T^{\pm})T^{\pm} := \varepsilon : (VT^{\pm})_c T^{\pm} :=$$
$$= \varepsilon : (VT^{\pm})_L T^{\pm} : + \varepsilon : (VT^{\pm})_{0,0} T^{\pm} :=$$
$$=: \sum_{n=1}^{\infty} (-\varepsilon)^n (V\Gamma_{\pm}(V \ldots \Gamma_{\pm}(V\Gamma_{\pm}(V) \ldots)_L T^{\pm} : + (\Omega, \varepsilon(VT^{\pm})_{0,0}\Omega)T^{\pm},$$

где последнее равенство следует из соотношения (см. [42])

$$Q_{\pm} = \varepsilon V\!-\!\!\!\prec : \exp\{-\Gamma_{\pm}(Q_{\pm})\} : -$$
$$-\varepsilon(\Omega, V\!-\!\!\!\prec : \exp(-\Gamma_{\pm}(Q_{\pm})) : \Omega). \tag{34}$$

Из (33) и (34) получаем теорему 6 с

$$\lambda_\varepsilon = (\Omega, \varepsilon(VT^{\pm})_{0,0}\Omega) =$$
$$= \sum_{1}^{\infty} (-\varepsilon)^n (\Omega, (V\Gamma(V \ldots \Gamma(V\Gamma(V)) \ldots)_{0,0}\Omega), \tag{35}$$

где n—число операций Γ, и мы заменили $\Gamma_{\pm}$ на Γ, так как в (35) возможен ненулевой вклад лишь при отсутствии операторов уничтожения в силу того, что $a(f)\Omega = 0$ для всех $f \in \mathcal{H}$.

Замечание. Все эти утверждения можно доказать, и не переходя к операциям $\Gamma_{\pm}$, если использовать тождество

$$\frac{d}{dt} U^{(\kappa)}(t,s)_c = -i\varepsilon(V^{(\kappa)}(t) : \exp U^{(\kappa)}(t,s)_c :),$$
$$U^{(\kappa)}(t,t)_c = 1. \tag{36}$$

Определение. Определим S-*матрицу* (или *матрицу рассеяния*)

$$S = ZT_{+}^{*}T_{-} =: \exp(2\pi i \sum (-\varepsilon)^n \Delta(V\Gamma_{-}(V \ldots$$

$$\ldots\Gamma_-(V\Gamma_-(V)))\ldots)_L, \tag{37}$$

где операция Δ, примененная к моному Вика U_{mp}, означает замену его ядра U_{mp} ядром

$$U_{mp}(k_1,\ldots,k_{mp})\delta(E_c-E_A).$$

Из теоремы 6 следует, что S-матрица унитарна.

3. Доказательство теоремы 3. Разбиение на кластеры и разложение по модам. Рассмотрим сначала случай $\kappa=0, -\infty<s,t<\infty, \nu\geq 3$. Далее мы будем заниматься оценкой выражения

$$\int\limits_{\Delta_n^{s,t}}(V(t_1)\ldots V(t_n))_c dt_1\ldots dt_n \tag{38}$$

и покажем, что оно ограничено по модулю величиной $\mid t-s\mid c^n$, где c—константа, не зависящая от s,t,n. Из этой оценки мы выведем теорему 3.

Основная трудность в доказательстве этой оценки заключается в большом количестве диаграмм. Необходимые сокращения диаграмм мы будем производить во "временных кластерах или секторах".

Разбиения. Индексы $1,\ldots,n$ являются вершинами диаграмм. Любое подмножество $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k), \alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_k$, множества $(1,\ldots,n)$ определяет *разбиение* $(1,\ldots,n)$ на интервалы

$$I_1=[1,\alpha_1)=\{i:1\leq i\leq\alpha_1\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_k=[\alpha_{k-1},\alpha_k),\quad I_{k+1}=[\alpha_k,n].$$

Секторы. Любое разбиение α определяет подмножество Δ_α области $\Delta_n^{s,t}$, которое мы назовем *сектором.* Оно единственным образом задается следующими условиями:

а) если i,j принадлежат одному интервалу I_j разбиения α, то существует целое M такое, что

$$t_i,t_j\in[M,M+1)\overset{\text{def}}{=}\hat{I}_M,$$

б) если i,j принадлежат I_i и I_j соответственно, то t_i и t_j принадлежат различным $\hat{I}_M$ и $\hat{I}_L$, $M\neq L$.

Ясно, что $\bigcup_\alpha\Delta_\alpha=\Delta_n^{s,t}$. В дальнейшем мы будем называть I_j j-й группой сектора.

Подсекторы. *Подсектор* $\Delta_\alpha(M_1,\ldots,M_{k+1})$ сектора Δ_α определяется разбиением α и целыми числами $M_1<M_2<$ $<\ldots<M_{k+1}$. Это множество всех $(t_1,\ldots,t_n)$ таких, что, если $i\in I_j$, то $t_i\in[M_j,M_{j+1})$.

Моды. Выберем в пространстве $L_2(T^\nu)$ ортонормированный базис $\{e_N\}_{N\in Z^\nu}$, где $e_N=C\exp\{i(N,k)\}$, $k\in T^\nu$. Элементы этого базиса мы и назовем *модами.* Пусть

$$S\overset{\text{def}}{=}\bigcup_{i=1}^{d}\{f_{i,1},\ldots,f_{i,m_i+n_i}\}.$$

Зафиксируем некоторый подсектор $\Delta_\alpha(M_1,\ldots,M_{k+1})$. Если $t\in[M_1,M_1+1)$, то $t=M_1+\delta t$, $0\leq\delta t\leq 1$. Поэтому

$$V(t)=\sum_{i=1}^{d}a^*(e^{iM_2h}e^{i\delta th}f_{i,1})\ldots a(e^{iM_1h}e^{i\delta th}f_{i,m_i+n_i}). \tag{39}$$

Разложение по модам. Разложим векторы вида $e^{i\delta th}f$, $f\in S$, по базису $\{e_N\}$

$$e^{i\delta th}f=\sum_{N\in Z^\nu}c_{N,f}(\delta t)e_N. \tag{40}$$

Отметим, что для любого $\gamma>0$ существует константа $c(\gamma)$ такая, что равномерно по $f\in S, \mid\delta t\mid<1$ коэффициенты $c_{N,f}(\delta t)$ ряда (40) удовлетворяют неравенству

$$\mid c_{N,f}(\delta t)\mid\leq\frac{c(\gamma)}{\mid N\mid^\gamma},\quad\mid N\mid=\sum_{i=1}^{\nu}\mid N^{(i)}\mid. \tag{41}$$

Это неравенство доказывается интегрированием по частям. Мы выберем $\gamma>\nu+1$, так, чтобы было выполнено неравенство

$$\sum_{N\in Z^\nu}\mid c_{N,f}(\delta t)\mid<C<\infty, \tag{42}$$

где константа C не зависит от f и $\mid\delta t\mid<1$.

Для некоторого разбиения $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ обозначим $\mathcal{B}_\alpha$ следующее подмножество $[0,1]^n$:

$$\mathcal{B}_\alpha=\{(\delta t_1,\ldots,\delta t_n):0\leq\delta t_1<\ldots<\delta t_{\alpha_1-1},$$

$$0 \le \delta t_{\alpha_1} < \ldots < \delta t_{\alpha_2 - 1}, \ldots, 0 \le \delta t_{\alpha_k} < \ldots < \delta t_n\}.$$

Используя введенные обозначения, мы можем записать выражение (38) в виде

$$\sum_{\alpha} \sum_{M_1,\ldots,M_{k+1}} \int_{\mathcal{B}_\alpha} \prod_{i=1}^{n} d(\delta t_i) \sum_{\{N_i \cdot f_j\}} \sum_{G} W_G, \tag{43}$$

где, если рассматривать выражение (43) слева направо, мы имеем:

1) суммы по всем разбиениям;
2) суммы по всем подсекторам;
3) интегрирование внутри всех подсекторов;
4) суммы по всем модам;
5) суммы по всем допустимым диаграммам.

Диаграммы. *Диаграмма*—это граф с вершинами $1, 2, \ldots, n$. Каждой вершине инцидентны m_i правых отростков (им соответствуют операторы уничтожения) и n_i левых отростков (им соответствуют операторы рождения). Выбор мод соответствует тому, что каждому отростку ставится в соответствие элемент e_N базиса $\{e_N\}$. Каждый отросток занумерован индексом (v, p), где v—номер вершины, p—номер отростка в вершине v. Допустимой диаграммой является связный граф, образующийся спариванием некоторых их отростков (v_1, p_1) и $(v_2, p_2), v_1 < v_2$, если первый отросток—правый, а второй отросток—левый. Спаренные отростки являются ребрами допустимой диаграммы. Мы будем называть их внутренними (int). Неспаренные отростки назовем внешними ребрами (out).

Каждая диаграмма входит в выражение (43) со своим весом.

Вес диаграммы. Пусть зафиксированы разбиение $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, подсектор $(M_1, \ldots, M_{k+1})$, вектор $(\delta t_1, \ldots, \delta t_n)$, моды $N_{v,p}$. Введем функцию $M(v)$, $v = 1, \ldots, n$, $M(v) = M_i$, если $v \in I_i$, $i = 1, \ldots, k+1$. *Вес* диаграммы G—это следующее выражение:

$$W_G = (-1)^{\pi(G)} \prod_{int} (e^{ih(M(v)-M(v'))} e_{N_{v,p}},\ e_{N_{v',q}}) \times$$

$$\times c_{N_{v,p}}(\delta t_v) c_{N_{v',p}}(\delta t_{v'}) \prod_{out} a^{\#}(e^{iM(v)h} e_{N_{v,p}}), \tag{44}$$

где $a^{\#} = a^*$, если отросток (v, p)—правый и $a^{\#} = a$, если отросток (v, p)—левый.

Замечание. Рассмотрим диаграмму G, у которой внутреннее ребро (v, p, v', q) лежит целиком в интервале I_l для некоторого l. Выражение (44) показывает, что если при этом $N_{v,p} \neq$ $\neq N_{v',q}$, то $W_G = 0$, поскольку $M(v) = M(v')$ и $(e_{N_{v,p}}, e_{N_{v,q}}) = 0$. Этот факт позволит нам сократить большое число диаграмм.

Назовем подмножество вершин I_l диаграммы G l-й группой вершин. Пусть $A_l(B_l)$—множество ребер диаграммы (внешних и внутренних), выходящих из l-й группы вершин вправо (влево) и не спаривающих две вершины этой группы.

Зафиксируем сектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \Delta_\alpha(M_1, \ldots, M_{k+1})$, моды $\{N_{v,p}\}$. Для каждого $l = 1, \ldots, k+1$ обозначим $\mathcal{N}_l$ некоторое заданное множество мод $\mathcal{N}_l = \{e_1, \ldots, e_{i_l}\}$, моды отростков A_l есть в точности N_l.

Лемма 7. *а) Существует не более одной диаграммы G из $G(N_1, \ldots, N_{k+1})$ с ненулевым весом W_G.*

б) Для каждой такой диаграммы множества $\mathcal{N}_l$ содержат различные моды.

Доказательство леммы 7. Утверждения данной леммы являются очевидными следствиями того, что

$$\{a^{\#}(e^{iMh} e_{N_1}), a^{\#}(e^{iMh} e_{N_2})\} = 0, \tag{45}$$

если $N_1 \neq N_2$($\{\ ,\ \}$—антикоммутатор) и

$$(a^{\#}(e^{iMh} e_N))^2 = 0. \tag{46}$$

Если $I_l = \{i_1, \ldots, i_q\}$, то обозначим $V_{I_l} = V(t_{i_1}) \ldots V(t_{i_q})$.

Зафиксируем некоторое V_{I_l} и представим V_{I_l} в виде суммы по виковским мономам. Из соотношений (45) и (46) следует, что существует только одна ненулевая диаграмма, для которой моды правых свободных отростков совпадают с N_l, причем эти моды различны. Из этих замечаний и вытекают утверждения а) и б) леммы 7.

Вернемся к оценке выражения (43). Поскольку все суммы в нем, кроме сумм по модам, конечны, мы можем перенести суммирование по модам и интегрирование по $\mathcal{B}_\alpha$ налево. Из неравенства (41) и того, что $\mathcal{B}_\alpha \subset [0, 1]^N$, нам для доказательства теоремы 3 достаточно доказать равномерно по модам следующее неравенство:

$$\| \sum_{\alpha} \sum_{M_1,\ldots,M_{k+1}} \sum_{G} \tilde{W}_G \| \le c^n \mid t - s \mid, \tag{47}$$

где c не зависит от n, s, t, а также мод, а $\tilde{W}_G$ задается выражением вида (44), в котором убраны все $c_{N_{v,p}}(\delta t_v)$.

Пусть, далее, зафиксирован набор мод. Множества $N_1, \ldots, N_{k+1}$ мы можем выбрать не более чем $(2^{m_{\max}})^n$ способами, где $m_{\max}$—максимальное число операторов рождения в мономах Вика, входящих в V. Поэтому можно считать, что $N_1, \ldots, N_{k+1}$тоже фиксированы. В силу леммы 1 мы можем каждой допустимой диаграмме G поставить в соответствие связную диаграмму $\tilde{G}$ с $k+1$ вершиной $M_1, \ldots, M_{k+1}$ и суммарным числом ребер, не превосходящим $m_{\max}n$. При этом вес $\hat{W}_{\tilde{G}}$ диаграммы $\tilde{G}$ находится по формуле:

$$\hat{W}_{\tilde{G}} = \prod_{\text{int}} \mid (e^{ih(M(v)-M(v'))}e_{N_{v,p}},\ e_{N_{v',q}}) \mid, \tag{48}$$

причем

$$\| \tilde{W}_G \| < c_1^n \hat{W}_{\tilde{G}}, \tag{49}$$

где c_1—некоторая константа.

Для любых $M, N \in Z^\nu$ имеет место оценка

$$\left| \int\limits_{T^\nu} dk e_N(k) E_M(k) e^{ith(k)} \right| < \frac{c}{(1+\mid t \mid)^{\nu/2}}, \tag{50}$$

где c не зависит от M, N, t, откуда с учетом (49) и (50) следует

$$\| \tilde{W}_G \| \leq (\text{const})^n \prod_{\text{int}} \frac{1}{(\mid M_{l(v,p)} - M_{l(v',q)} \mid +1)^{\nu/2}}, \tag{51}$$

где $l(v,p)$—это номер группы α, к которой принадлежит вершина v.

Учитывая все сказанное выше, имеем

$$\| \sum_{\alpha} \sum_{M_1,\ldots,M_{k+1}} \sum_{G} \tilde{W}_G \| \leq$$

$$\leq (\text{const})^n \sum_{M_1,\ldots,M_{k+1}} \sum_{\tilde{G}} \prod \frac{1}{(\mid M_{l(v,p)} - M_{l(v',q)} \mid +1)^{\nu/2}}. \tag{52}$$

Зафиксируем M_1—целое, принадлежащее отрезку $[s, t]$.

Лемма 8. *Имеет место оценка*

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{M_2,\ldots,M_{k+1}} \sum_{\tilde{G}} \prod_{\text{int}} \frac{1}{(\mid M_{l(v,p)} - M_{l(v',q)} \mid +1)^{\nu/2}} \right| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{M=-\infty}^{\infty} \frac{c}{(1+M)^{\nu/2}} \right)^{nm_{\max}}. \tag{53}$$

Данный результат получается после применения к левой части (53) стандартной техники кластерных разложений (см. [26]). Суммирование по M_1 дает в оценке (47) множитель $\mid t-s \mid$. Доказательство теоремы 3 для случая $\kappa = 0$ закончено. Аналогично рассматривается случай $\kappa > 0$.

4. Асимптотическая полнота. Теперь мы можем неформально доказать теоремы 5 и 6, из которых следует асимптотическая полнота гамильтониана $H_0 + \varepsilon V$ при малых ε в случае, когда взаимодействие V поляризует вакуум, но является четным.

Доказательство теоремы 5. Докажем, что для $\psi = a^*(f_1)\ldots a^*(f_m)\Omega, \quad f_i \in C^\infty(T^\nu)$,

$$\lim_{\kappa\to 0} \sum_n (-i\varepsilon)^n \int\limits_{\pm\infty}^{0} dt \ldots \int\limits_{\pm\infty}^{0} dt_n (V^{(\kappa)}(t_1)\ldots V^{(\kappa)}(t_n))_L \psi \tag{54}$$

существует.

Рассмотрим n-й член ряда (54). Докажем сначала это утверждение для суммы по диаграммам из L, т. е. таких, что они имеют хотя бы одно внешнее ребро с оператором уничтожения. Для суммы по таким диаграммам, повторяя доказательство теоремы 3, получим оценку сверху $C^n\varepsilon^n$ равномерно по κ. Кроме того, легко видеть, что каждое слагаемое в этой сумме имеет предел при $\kappa \to \infty$.

Далее рассмотрим сумму по диаграммам без внешних ребер с оператором уничтожения. Они имеют внешние ребра с оператором рождения, которые дают вклад

$$\prod a^*(e^{it_v h-\kappa|t_v|}e_{N_{v,p}}) = \int \prod_{v,p} a^*(k_{v,p}) e^{it_v h-\kappa|t_v|} e_{N_{v,p}}(k_{v,p}) dk_{v,p}. \tag{55}$$

Сделаем замену $t'_1 = t_1, t'_2 = t_2 - t_1, \ldots, t'_n = t_n - t_{n-1}$ и проинтегрируем по t'_1. Заметим, что

$$\lim_{\kappa\to 0}\int\limits_{\pm\infty}^{0} dt_1'\exp\left\{it_1'\sum_{v,p}h(k_{v,p})-\kappa\mid t_1'\mid\right\}=\frac{1}{\sum_{v,p}h(k_{v,p})} \qquad (56)$$

принадлежит L_2, если $\mu \geq 0$. Поэтому можно разложить $(\sum\limits_{v,p} h(k_{v,p}))^{-1}$ по модам. Далее применим технику, развитую при доказательстве теоремы 3.

Замечание (об адиабатическом урезании). Выше мы рассмотрели волновые операторы, зависящие от двух параметров: параметра адиабатического урезания κ и времени t. При этом исследовались повторные пределы при $\kappa \to 0$, $t \to \to \infty$. Как вытекает из теорем 3–6, эти пределы существуют в смысле сходимости по норме в $\mathcal{F}_a$ (т. е. в сильном смысле). Возникает вопрос: какую роль играет адиабатическое урезание и нельзя ли обойтись без него? Отметим, что использование адиабатического урезания характерно для стационарной теории рассеяния.

Заметим также, что если существует предел без урезания

$$s-\lim_{t\to 0}U(0,t),$$

то существует и предел с адиабатическим урезанием

$$s-\lim_{\kappa\to 0}U^{(\kappa)}(0,\infty),$$

и они равны. Эта ситуация возникает, например, когда $V \in \in \mathfrak{A}$, $V\Omega = 0$.

Анализ доказательства теорем 3–6 показывает, что этим теоремам соответствуют аналогичные утверждения для соответствующих волновых операторов без адиабатического урезания. Только в этом случае нужно все пределы по норме (сильные пределы) заменить слабыми пределами; однако пока неясно, как это можно использовать для доказательства асимптотической полноты.

5. Существование возмущенного вакуумного вектора. В этом и последующем параграфе мы покажем, что динамика рассматриваемой ферми-системы не зависит существенно от химического потенциала μ. Результаты п. п. 2–4 показывают, что возмущенная система унитарно-эквивалентна "смещенной" свободной системе, если $\mu \geq 0$. Это условие существенно используется в доказательстве теорем 3–6.

Заметим, что если $\mu \geq 0$, то точка $\lambda_0 = 0$ дискретного спектра оператора $H_0 = d\Gamma(h)$ лежит вне или на границе непрерывной части спектра этого оператора. При "включении" взаимодействия εV она сдвигается в точку λ_ε.

Если $\mu < 0$, то дискретный спектр H_0 содержится внутри его непрерывного спектра. Оказывается, что и в этом случае собственное значение не исчезает, как этого можно было ожидать. Например, подобная ситуация возникает для модели взаимодействующего ферми-газа со спином, когда собственное значение, лежащее внутри непрерывного спектра, при включении взаимодействия ($\varepsilon \neq 0$) исчезает.

В данном пункте мы докажем существование собственного вектора возмущенного оператора при произвольном вещественном μ. Мы воспользуемся техникой оценок диаграмм, развитой в п. 2–4. Здесь сохраняются все обозначения этих пунктов.

Теорема 9. *Пусть одночастичный гамильтониан h имеет вид (3), $\mu \in R^1$, а оператор V вид (4). Тогда для достаточно малых ε оператор $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$ имеет собственный вектор Ω_ε.*

Доказательство. Можно показать, что аналогично теореме 6 для достаточно малых ε величина

$$Z^{-1} = \| \exp\{\sum(-\varepsilon)^n(\Gamma(V,\ldots,\Gamma(V))\ldots)_{CR}\}\Omega \|$$

конечна. С другой стороны, аналогично тому, как это делалось в п. 5, можно показать, что

$$Z^{-1} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mid(\Omega,U(0,t)\Omega)\mid^2} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mid(e^{iH_\varepsilon t}\Omega,\Omega)\mid^2}. \qquad (57)$$

Поэтому операторы

$$\frac{e^{itH_\varepsilon}}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega,\Omega)}$$

равномерно по t ограничены. Тем же методом, что и теорема 3, может быть доказана следующая лемма.

Лемма 10. *Для плотного в $\mathcal{F}_a$ множества D существует конечный предел*

$$\langle F\rangle = \lim_{t\to\infty}\frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega,F)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega,\Omega)},\quad F \in D. \qquad (58)$$

Как показывает следующая общая лемма, этот предел существует и конечен для любого $F \in \mathcal{F}_a$.

Лемма 11. *Пусть $\mathcal{H}$—сепарабельное гильбертово пространство, α_t—равномерно ограниченная функция, $\alpha : R \to \mathcal{H}$, т. е.*

$$\| \alpha_t \| < M < \infty. \tag{59}$$

Пусть для плотного в $\mathcal{H}$ множества векторов $\{F\}$ существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} (\alpha_t, F). \tag{60}$$

Тогда этот предел существует и конечен для всех $F \in \mathcal{H}$.

Гильбертово пространство слабо полно. Поэтому существует некоторый вектор Ω_ε такой, что для всех $F \in \mathcal{F}_a$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, F)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega, \Omega)} = (\Omega_\varepsilon, F). \tag{61}$$

Мы покажем, что Ω_ε—собственный вектор возмущенного оператора H_ε. Прежде всего, полагая в (61) $F = \Omega$, получим, что $(\Omega_\varepsilon, \Omega) = 1$, т. е. $\Omega_\varepsilon \neq 0$. Далее, для любого $s \in R$

$$\begin{aligned}(\Omega_\varepsilon, F) &= \lim_{t\to\infty} \frac{(e^{i(t+s)H_\varepsilon}\Omega, F)}{(e^{i(t+s)H_\varepsilon}\Omega, \Omega)} = \lim_{t\to\infty} \frac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega,\ e^{-isH_\varepsilon}F)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega,\ e^{-isH_\varepsilon}\Omega)} = \\ &= \lim\nolimits_{t\to\infty} \tfrac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega,\, e^{-isH_\varepsilon}F)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega,\, \Omega)} \tfrac{(e^{itH_\varepsilon}\Omega,\, \Omega)}{(e^{itH_\varepsilon}\Omega,\, e^{-isH_\varepsilon}\Omega)} = \\ &= \frac{(\Omega_\varepsilon, e^{-isH_\varepsilon}F)}{(\Omega_\varepsilon, e^{-isH_\varepsilon}\Omega)} = \frac{(e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, F)}{(e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, \Omega)},\end{aligned} \tag{62}$$

т. е. для любых $s \in R, F \in \mathcal{F}_a$ выполняется тождество

$$(\Omega_\varepsilon, F) = \frac{(e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, F)}{(e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, \Omega)},$$

или

$$(\Omega_\varepsilon, F)(e^{itH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, \Omega) = (e^{isH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon, F). \tag{63}$$

Дифференцируя обе части (63) по s и полагая $s = 0$ получаем

$$(\Omega_\varepsilon, F)(H_\varepsilon\Omega_\varepsilon, \Omega) = (H_\varepsilon\Omega_\varepsilon, F). \tag{64}$$

Поскольку (64) выполняется для любых $F \in \mathcal{F}_a$, то $H_\varepsilon\Omega_\varepsilon =$

$= (H_\varepsilon\Omega_\varepsilon, \Omega)\Omega_\varepsilon$, т. е. Ω_ε—собственный вектор H_ε. Теорема 9 полностью доказана.

6. Унитарная эквивалентность. Общий случай. Здесь мы рассмотрим дальнейшее обобщение результатов п. 1 на случай химического потенциала μ любого знака.

Докажем следующую теорему.

Теорема 12. *Пусть одночастичный гамильтониан h имеет вид (3), $\mu \in R^1$, а оператор V вид (4). Тогда сущетсвует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $| \varepsilon | < \varepsilon_0$ существует такое λ_ε, что операторы H_ε и $H_0 + \lambda_\varepsilon E$ унитарно-эквивалентны.*

Замечание. Основой доказательства теоремы 12 служат результаты предыдущего параграфа о существовании возмущенного собственного вектора.

Доказательство. Рассмотрим следующие две динамики в C^*-алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$:

$$\tau_t^0 = e^{itH_0} A e^{-itH_0},$$

$$\tau_t^{\varepsilon V} = e^{it(H_0+\varepsilon V)} A e^{-it(H_0+\varepsilon V)}.$$

По теореме 4.1 для достаточно малых ε существуют и обратимы морфизмы Меллера в C^*-алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$

$$\gamma_\pm(A) = s - \lim_{t\to\pm\infty} \tau_{-\tau}^{\varepsilon V}(\tau_t^0(A)),\ \ A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H}). \tag{64^a}$$

Пусть Ω_ε—возмущенный вакуумный вектор оператора $H_0 + \varepsilon V$, существующий в силу теоремы 9. Мы можем считать его нормированным, т. е. $\| \Omega_\varepsilon \| = 1$. Положим $\gamma \equiv \gamma_\pm$.

Лемма 13. *Для любого $f \in \mathcal{H}$ имеет место равенство*

$$(\gamma a(f))\Omega_\varepsilon = 0. \tag{65}$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{a}(f) = \gamma a(f)$. С одной стороны, имеем

$$\lim_{t\to\infty} \tau_{-\tau}^{\varepsilon V}(\tau_t^0(a(f))\Omega_\varepsilon = \tilde{a}(f)\Omega_\varepsilon. \tag{66}$$

С другой стороны, пользуясь тем, что Ω_ε—собственный вектор оператора $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$, имеем

$$\begin{aligned}\| \tau_{-\tau}^{\varepsilon V}(\tau_t^0(a(f))\Omega_\varepsilon \| &= \| e^{-itH_\varepsilon} a(e^{ith} f) e^{itH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon \| = \\ &= \| a(e^{ith} f) e^{itH_\varepsilon}\Omega_\varepsilon \| \to 0\end{aligned} \tag{67}$$

при $t \to +\infty$.

Действительно, пусть по норме $\Omega_\varepsilon^{(n)} \to \Omega_\varepsilon$ при $n \to \infty$, где $\Omega_\varepsilon^{(n)}$—конечная линейная комбинация векторов вида

$$a^*(f_1)a^*(f_2)\dots a^*(f_m)\Omega, f_i \in C_0^\infty(R^\nu).$$

Пусть $\| \Omega_\varepsilon^{(n)} - \Omega_\varepsilon \| < \delta$ при $n > N_0$. Тогда

$$\| a(e^{-ith}f)\Omega_\varepsilon \| \leq \| a(e^{-ith}f)\Omega_\varepsilon^{(n)} \| + \delta \| f \| . \qquad (68)$$

Пользуясь антикоммутационными соотношениями, мы можем "перетащить" оператор $a(e^{ith}f)$ через операторы $a^*(f_1)$ $a^*(f_2)\dots a^*(f_m)$ слева направо. После этого, $a(e^{ith}f)\Omega_\varepsilon^{(n)}$ будет содержать конечное число слагаемых, каждое из которых будет содержать множитель вида

$$(e^{ith}f, f_j). \qquad (69)$$

Из спектральной теории и теоремы Лебега (если воспользоваться абсолютной непрерывностью спектра h) следует, что выражение вида (69) стремится к нулю при $t \to \infty$. Отсюда в силу произвольности выбора δ следует утверждение леммы 13.

Из леммы 13 легко следует лемма 14.

Лемма 14. *Для любого $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ имеет место равенство*

$$(A\Omega, \Omega) = (\gamma(A)\Omega_\varepsilon, \Omega_\varepsilon). \qquad (70)$$

Определим оператор $U : \mathcal{F}_a \to \mathcal{F}_a$ следующим образом:

$$U(A\Omega) = \gamma(A)\Omega_\varepsilon. \qquad (71)$$

Оператор U сохраняет норму, так как

$$\| A\Omega \|^2 = (A^*A\Omega, \Omega) = (\gamma(A^*A)\Omega_\varepsilon, \Omega_\varepsilon) = \| \gamma(A)\Omega_\varepsilon \|^2 .$$

Поэтому он корректно определен и изометричен. Так как $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ неприводима в $\mathcal{F}_a$, то $\mathfrak{A}\,\Omega_\varepsilon = \mathcal{F}_a$ и, следовательно, образ оператора U совпадает со всем $\mathcal{F}_a$. Значит, оператор U унитарен.

Для любого $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{H})$ имеем

$$\begin{aligned} e^{it(H_0+\varepsilon V)}UA\Omega &= e^{it(H_0+\varepsilon V)}\gamma(A)\Omega_\varepsilon = \\ &= \tau_t^{\varepsilon V}\gamma(A)e^{it(H_0+\varepsilon V)}\Omega_\varepsilon = e^{it\lambda_\varepsilon}\gamma(\tau_t^0(A))\Omega_\varepsilon = \\ &= e^{it\lambda_\varepsilon}U\tau_t^0(A)\Omega = e^{it\lambda_\varepsilon}Ue^{itH_0}A\Omega. \qquad (72) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались сплетающим свойством морфизмов Меллера: $\tau_t^{\varepsilon V}\gamma = \gamma\tau_t^0$, и тем, что Ω_ε—собственный вектор оператора $H_0 + \varepsilon V$ с собственным значением λ_ε.

Из выражения (72) следует, что

$$e^{it(H_0+\varepsilon V)} = e^{it\lambda_\varepsilon}Ue^{itH_0}U^*$$

или

$$H_0 + \varepsilon V = U(H_0 + \lambda_\varepsilon E)U^*.$$

Теорема 12 полностью доказана.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 15. *Морфизмы Меллера $\gamma_\pm$, определяемые формулой (64ᵃ) унитарно-представимы (т. е. задаются внутренним автоморфизмом).*

Доказательство. Для любого $B \in \mathfrak{A}$ и оператора U, определяемого выражением (71),

$$\gamma(A)B\Omega_\varepsilon = \gamma(A\gamma^{-1}(B))\Omega_\varepsilon = UA\gamma^{-1}(B)\Omega = UAU^*B\Omega_\varepsilon.$$

И поскольку B произволен, то

$$\gamma(A) = UAU^*. \qquad (73)$$

§ 3. Ферми-газ, слабо взаимодействующий с частицей

В предыдущих параграфах, мы изучили малое возмущение свободной динамики идеального ферми-газа и показали, что при широких предположениях гамильтониан возмущенной динамики унитарно-эквивалентен либо исходному гамильтониану, либо его "сдвигу" на некоторую константу.

Здесь мы изучим малое возмущение свободной системы, состоящей из идеального ферми-газа и независимо движущейся частицы, и покажем, что для этого случая остаются верными результаты предыдущих параграфов.

1. Формулировка основной теоремы. Рассмотрим гильбертово пространство

$$K = \mathcal{F}_a(L_2(R^\nu)) \otimes L_2(R^\nu),$$

где $\mathcal{F}_a = \mathcal{F}_a(L_2(R^\nu))$—антисимметрическое фоковское пространство над $L_2(R^\nu)$, т. е. K есть пространство бесконечных последовательностей

$$\{F_0(y),\ F_1(x_1,y),\ F_2(x_1,x_2,y),\ldots,F_n(x_1,\ldots,x_n,y),\ldots\}, \qquad (1)$$

где $x_j, y \in R^\nu$ и функции F_n антисимметричны по x_j.

Пусть заданы самосопряженные операторы h_1, h_2, действующие в $L_2(R^\nu)$. В качестве свободного гамильтониана рассмотрим самосопряженный оператор

$$H_0 = d\Gamma(h_1)\otimes \mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes (h_2).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда каждый из h_j, $j=1,2$, равен $-\Delta$.

Пусть полный гамильтониан имеет вид

$$H = H_0 + \varepsilon V,\ \ \varepsilon \in R^1, \qquad (2)$$

где оператор V принадлежит одному из классов операторов A или B.

Пусть $f = a^*(\psi_r)\ldots a^*(\psi_1)\Omega\otimes\psi,\ \psi,\ \psi_j \in S(R^\nu)$, тогда $V \in A$ означает, что

$$Vf = \sum_{j=1}^{M}\int\limits_{R^\nu} dz \int\limits_{R^{\nu(m_j+n_j+1)}} dx_1\ldots dx_{m_j+n_j}dy_1 \times \qquad (3)$$

$$\times K_j(x_1-z,\ldots,x_{m_j}-z,x_{m_j+1}-z,\ldots,x_{m_j+n_j}-z,y_1-z,y_2-z)\times$$

$$\times a^*(x_1)\ldots a^*(x_m)a(x_{m_j+1})\ldots a(x_{m_j+n_j})a^*(\psi_r)\ldots a^*(\psi_1)\Omega\otimes\psi(y_1),$$

т. е. по переменным выделенной частицы V есть усредненный по сдвигам интегральный оператор; если же $V \in B$, то

$$Vf = \sum_{j=1}^{M}\int\limits_{R^\nu} dz \int\limits_{R^{\nu(m_j+n_j+1)}} dx_1\ldots dx_{m_j+n_j} \times \qquad (4)$$

$$\times K(x_1-z,\ldots,x_{m_j}-z,x_{m_j+1}-z,\ldots,x_{m_j+n_j}-z,y-z)\times$$

$$\times a^*(x_1)\ldots a^*(x_m)a(x_{m_j+1})\ldots a(x_{m_j+n_j})a^*(\psi_r)\ldots a^*(\psi_1)\Omega\otimes\psi(y),$$

т. е. по переменным выделенной частицы V есть усредненный по сдвигам оператор умножения; здесь $M < \infty$, $K_j \in S(R^{\nu(m_j+n_j+2)})$ в случае A, или $K_j \in S(R^{\nu(m_j+n_j+1)})$ в случае B, $x_p, y_s \in R^\nu$, $p = 1,\ldots,m_j+n_j$, $s = 1,2$.

Оператор V является ограниченным в K и мы считаем его самосопряженным. Тогда, если выполнены условия

$$m_j \geq 1,\ n_j \geq 1 \text{ и } m = \max_j m_j = \max_j n_j < \infty, \qquad (5)$$

H является симметрическим оператором на всюду плотном подпространстве D в K векторов вида

$$a^*(\psi_r)\ldots a^*(\psi_1)\Omega\otimes\psi,\ \ \psi,\ \psi_j \in S(R^\nu). \qquad (5^a)$$

В действительности известно, что H является в существенном самосопряженным оператором на D. Это будет следовать из сходимости полученных ниже разложений.

Определим обратные и прямые волновые операторы (при конечном t)

$$W_t = \exp\{-itH_0\}\exp\{itH\},$$

$$\hat W_t = \exp\{-itH\}\exp\{itH_0\}.$$

Теорема 1. *Если $\nu \geq 3$, выполнено условие* (5) *и V принадлежит A или B, то существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\nu,m,V)$ такое, что при $|\,\varepsilon\,| < \varepsilon_0$ существуют сильные пределы прямых*

$$\hat W_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty}\hat W_t$$

и обратных

$$W_\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} W_t$$

волновых операторов.

Замечание 1. Условия теоремы 1 в некотором смысле не улучшаемы. В размерности $\nu = 1,2$ даже для частиц во внешнем поле могут возникать связанные состояния для как угодно малых ε. При $m_{\min} = 0$, где $m_{\min} = \min m_j$, как мы уже видели, возникает “сдвиг” оператора H. Условия относительно гладкости ядер K_j могут быть ослаблены, но это не очень существенно.

Стандартным следствием теоремы 1 является

Следствие. *Операторы $W_+ = \hat W_+^*, W_- = W_-^*$ унитарны и осуществляют унитарную эквивалентность H и H_0, т. е., например,*

$$H = W_+^* H_0 W_+.$$

2. Ряд теории возмущений. Рассмотрим следующий ряд при $0 \le t < \infty$, $F \in D$:

$$F + \sum_{n=1}^{\infty} (i\varepsilon)^n \int\limits_{\Delta_t^n} V_{t_n} \dots V_{t_1} dt_1 \dots dt_n F, \tag{6}$$

где

$$V_t = \exp\{-itH_0\} V \exp\{itH_0\},$$

а Δ_t^n, напомним,—область

$$\Delta_t^n = \{0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n < t\} \subset R^n.$$

Основной результат, который мы докажем, состоит в следующем:

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $| \varepsilon | < \varepsilon_0$:*

1) норма n-го члена ряда (6) *оценивается сверху $(\varepsilon c_1)^n c_2(F)$, где c_1 не зависит от n, t, F, $c_2(F)$ не зависит от n и t;*

2) n-й член ряда (6) *при $t \to \infty$ имеет предел в топологии в K, задаваемой нормой.*

Из первого утверждения теоремы 2 стандартно следует, что ряд (6) равен $W_t F$, а из второго, что существуют обратные волновые операторы W_+.

Для прямых операторов $\hat{W}_+$, а также для операторов W_- и $\hat{W}_-$ все рассуждения аналогичны.

Замечание 2. При $\nu = 1, 2$ аналитичность по ε не может быть доказана даже для прямых волновых операторов, однако их существование (в случае любой размерности $\nu = 1, 2, 3, \dots$) может быть легко доказано методом Кука без предположения о малости ε.

Мы докажем теорему 2 для взаимодействий V из класса A. Для класса B доказательство аналогично: в формуле (11) (см. ниже) лишь несколько иначе выглядит функция $G_v(\bar{K}_v)$. Причем вначале теорема 2 будет доказана для некоторого плотного подмножества в A, а затем распространена на все взаимодействия из A.

Рассмотрим взаимодействия, которые в k-представлении имеют специальный вид

$$V = \sum_{j=1}^{M} \int\limits_{R^\nu} V_j^{(1)}(z) \otimes V_j^{(2)}(z) dz, \tag{7}$$

где

$$V_j^{(1)}(z) = \int \prod\nolimits_p e^{\pm i(z,k,j,p)} f_{j,p}(k_{j,p}) a^{\#}(k_{j,p}) dk_{j,p}, \tag{8}$$

для некоторых $f_{j,p} \in S(R^\nu)$, знак “$+$″ в $e^{\pm i(z,k,j,p)}$ соответствует тому, что $a^{\#}(k_{j,p})$—оператор рождения, а знак “$-$″ —оператору уничтожения: $\# = *$ при $p = 1, \dots, m_j$, порядок операторов рождения и уничтожения в произведении такой же, как в (4),

$$V_j^{(2)} \psi = (\psi, g_j) f_j, \ \psi \in L_2(R^\nu) \tag{9}$$

для некоторых $f_j, g_j \in S(R^\nu)$.

Выпишем более подробно n-й член ряда (6) для векторов вида (5^{a}):

$$\begin{gathered}
\sum_{\pi} \int\limits_{\Delta_t^n} dt_1 \dots dt_n \int\limits_{R^{\nu n}} dz_1 \dots dz_n \times \\
\times \int \prod_{v,p} f_{\pi(v),p}(k_{v,p}) a^{\#}(k_{v,p}) e^{\pm(it_v h_1(k_{v,p}))} \times \\
\times e^{\pm(iz_v, k_{v,p})} dk_{v,p} a^*(\psi_r) \dots a^*(\psi_1) \Omega \otimes \\
\otimes \int \prod_{v=1}^{n} e^{i(t_{v-1}-t_v)h_2(k_v) + i((z_{v-1}-z_v),k_v)} f_{\pi(v-1)}(k_v) \bar{g}_{\pi(v)} dk_v \times \\
\times e^{-it_n(h_2(k_{n+1} - i(z_n,k_{n+1})} f_{\pi(n)}(k_{n+1}),
\end{gathered} \tag{10}$$

где π—произвольная функция $(1, \dots, n) \to (1, \dots, M)$, $t_0 = z_0 = 0$, $f_{\pi(0)} = \psi$. Знак $\pm$ зависит от того, соответствует ли переменная $k_{v,p}$ оператору рождения или уничтожения (в первом случае— “$+$”, во втором—“$-$″).

Далее мы будем делать оценки равномерно по π, поэтому для краткости обозначений положим $\pi(v) = v$.

Проинтегрируем по пространственным переменным $z_1, \dots, z_n$, а затем избавимся от возникших δ-функций интегрированием по переменным $k_1, \dots, k_n$, “относящимся к частице”. Несложные выкладки приводят (10) к виду (обозначаем $G_v = f_{\pi(v-1)} \bar{g}_{\pi(v)}$)

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\Delta_t^n} dt_1 \dots dt_n \int \prod_{v,p} f_{v,p}(k_{v,p}) a^{\#}(k_{v,p}) \times \\
\times e^{\pm(ith_1(k_{v,p}))} dk_{v,p} \int \prod_{v=1}^{n} e^{i(t_{v-1}-t_v)h_2(k_v)} \times
\end{gathered}$$

$$\times G_v(k_v)\delta(\sum_p(\pm k_{v,p}) + k_v - k_{v+1})dk_v \times$$

$$\times a^*(\psi_r)\dots a^*(\psi_1)\Omega \otimes (e^{-ith_2(k_{n+1})}f_n(k_{n+1})) =$$

$$= \int\limits_{\Delta_t^n} dt_1 \dots dt_n \prod_{v,p} \int f_{v,p}(k_{v,p})a^{\#}(k_{v,p})\times \tag{11}$$

$$\times e^{\pm(it_v(k_{v,p}))}dk_{v,p} \prod_{v=1}^{n} e^{i(t_{v-1}-t_v)h_2(\bar{k}_v)G_v(k_v)} \times$$

$$\times a^*(\psi_r)\dots a^*(\psi_1)\Omega \otimes (e^{-it_nh_2(k_{n+1})}f_n(k_{n+1})),$$

где

$$\bar{k}_v = -\sum_{v'=v}^{n}(\sum_p(\pm k_{v',p}) + k_{n+1}$$

и знаки ± определяются аналогично (10).

3. Разложение по пересуммированным диаграммам. Подынтегральное выражение в правой части (11) имеет конечную норму, однако нам надо еще выполнить интегрирование по времени в бесконечном интервале. Для того, чтобы получить необходимое убывание по времени, заметим, что последнее произведение $\prod_{v,p}$ в правой части (11) есть произведение виковских мономов, нумеруемых диаграммами Фридрихса. Каждая диаграмма, как хорошо известно, имеет быстрое убывание по переменным t_v, но число диаграмм имеет факториальный рост по n. Поэтому необходимо добиться их взаимного сокращения. Мы используем другое разложение, но эквивалентное, конечно, некоторому частичному суммированию диаграмм.

Для этого выделим в каждой вершине v крайний справа оператор рождения $a(k_{v1})$ и будем, пользуясь антикоммутационными соотношениями

$$a(k_{v1})a^*(k_{v',j}) = -a^*(k_{v',j})a(k_{v1}) + \delta(k_{v1} - k_{v',j}), \tag{12}$$

переносить его вправо к вакуумному вектору Ω.

При каждой такой перестановке возникает один из двух членов в правой части (12). Если возник первый член, мы продолжаем перенос, если возникла δ-функция, т. е. спаривание, то скажем, что возникла линия $((v,1),(v',j))$ диаграммы. Таким образом, у нас возникает ровно n линий $((v-1),(v'(v),j(v)))$, $v = 1,\dots,n$. При этом, если спаривание возникло с оператором рождения из монома, образующего вектор,

$$a^*(\psi_r)\dots a^*(\psi_1)\Omega = \int \prod a^*(k_{v,j})\psi(k_{v,j})dk_{v,j})\Omega,$$

мы скажем, что $v'(v) = 0$. Здесь, конечно, все пары $(v'(v), j(v))$ попарно различны.

После этих операций в формуле (10) исчезнут соответствующие операторы рождения—уничтожения $a(k_{v1}), a^*_{k(v'(v),j(v))}$, но под интегралом появится

$$\sum_{\{v'(v),j(v)\}} \prod \delta(k_{v,1} - k_{v'(v),j(v)}),$$

где сумма $\sum$ берется по всем наборам попарно различных пар таких, что $v'(v) < v$. Эту сумму мы вынесем за знак интеграла и проинтегрируем по всем переменным $k_{v'(v),j(v)}, v = 1,\dots,n$. При этом все δ-функции исчезнут и, если положить

$$F = \sum_{v=1}^{n} f_{v,1}(k_{v,1})f_{v'(v),j(v)}(k_{v,1})G_v(\bar{k}_v),$$

то подынтегральное выражение примет вид

$$F \prod_{v,p}[f_{v,p}(k_{v,p})e^{\pm(ith_1(k_{v,p}))}a^{\#}(k_{v,p})]\times$$

$$\times \exp(-i\sum(t_v - t_{v-1})h_2(\bar{k}_v) + (t_v - t_{v'(v)})h_1(k_{v,1}))\times$$

$$\times\Omega \otimes (e^{-ith_2(k_{n+1})}f_n(k_{n+1})), \tag{13}$$

где в $\bar{k}_v$ все $k_{v'(v),j(v)}$ заменены на $k_{v,1}$, $\prod$ означает, что отсутствуют множители, соответствующие $v, 1$ и $(v'(v), j(v))$; $f_{0,p} = \psi_p$.

Рассмотрим граф G с вершинами $n, n-1, \dots, 1, 0$ и ребрами (линиями) $(v, v'(v))$. Заметим, что по построению этот граф связный.

4. Оценки по методу стационарной фазы и суммирование диаграмм. Выделим в (13) интеграл (напомним, что $h_1(k) = h_2(k) = (k)^2$)

$$\int F \exp(-i\sum_{v=1}^{n}[(t_v - t_{v-1})(\bar{k}_v)^2 +$$

$$+(t_v - t_{v'(v)})(k_{v,1})^2]\prod_{\nu=1}^{n} dk_{v,1} =$$

$$= \int F_1 \exp[-\frac{1}{2}(B\underline{\mathrm{k}}, \underline{\mathrm{k}}) + i(\underline{\mathrm{a}}, \underline{\mathrm{k}})]d\underline{\mathrm{k}}, \qquad (14)$$

где $\underline{\mathrm{k}} = (k_{1,1}, \dots, k_{n,1}), \underline{\mathrm{a}}$—вектор линейных комбинаций $k_{v,j}, j \neq$ $\neq 1$, получающийся из раскрытия скобок в $(\bar{k}_v)^2$.

Мы положили

$$-\frac{1}{2}(B\underline{\mathrm{k}}, \underline{\mathrm{k}}) = -[\sum_{v=1}^{n}(t_v - t_{v-1})(\bar{k}_v^{(1)})^2]-$$

$$-[\sum_{v=1}^{n}(1 + t_v - t_{v'(v)})(k_{v,1})^2] = -\frac{1}{2}(B_1\underline{\mathrm{k}}, \underline{\mathrm{k}}) - \frac{1}{2}(B_2\underline{\mathrm{k}}, \underline{\mathrm{k}}), \qquad (15)$$

$$F_1 = F\exp\{i\sum_{v=1}^{n}[(t_v - t_{v-1})(\bar{k}_v^{(2)})^2] + \sum_{v=1}^{n} k_{v,1}^2\},$$

а $\bar{k}_v^{(1)} = \bar{k}_v$, где все переменные, отличные от $k_{1,1}, \dots, k_{n,1}$, положены равными нулю; $\bar{k}^{(2)} = \bar{k}_v - \bar{k}^{(1)}$.

С помощью преобразования Фурье по переменным $(k_{1,1}, \dots, k_{n,1})$ выражение (14) приводится к виду

$$\frac{1}{(2\pi i)^{n\nu/2}(\mathrm{DetB})^{1/2}}\int \exp[i\frac{1}{2}(B^{-1}\underline{\kappa}, \underline{\kappa})]\tilde{F}_1(\kappa - a)d\underline{\kappa}, \qquad (16)$$

где $\kappa = (\kappa_{11}, \dots, \kappa_{n1})$.

Заметим, что (16) является функцией от параметров $k_{v,p}$, где $p \neq 1$ и $(v, p) = (v'(v), j(v))$.

Для оценки (16) используем следующие два утверждения.

Утверждение 3. *Так как матрицы* $B_1 \geq 0, B_2 \geq 0$, *то*

$$(\mathrm{Det}\, B)^{-1} < (\det B_2)^2 = \prod_{v=1}^{n} \frac{1}{(|t_v - t_{v'(v)}|+1)^{\nu/2}}. \qquad (17)$$

Утверждение 4. *Интеграл в* (16), *являющийся функцией от переменных* $k_{v,p}$ *таких, что* $j(v) \neq 1$, *и* $(v,p) \neq (v'(v), j(v))$ *принадлежит одновременно пространствам* $S(R^{\nu N})$ *и* $L_2(R^{\nu N})$, *где* N*—число переменных, причем его норма* $\| \|_{L_2}$ *ограничена величиной* $c_1(\psi)c_2^n$ *равномерно по* $\{t_v\}$, *где* $c_2 > 0$*—некоторая константа, не зависящая от* n.

Доказательство. Положим теперь

$$f_1 = \prod_{v=1}^{n} f_{v1}(k_{v,1})\exp\{ik_{v,1}^2\},$$

$$f_2 = \prod_{v}{}' f_{v'(v),j(v)}(k_{v,1}),$$

$$f_3 = \prod_{v}{}'' \psi_{j(v)}(k_{v,1}),$$

$$f_4 = \prod_{v=1}^{n} G_v(k_v),$$

где $\prod'$—произведение по всем v, которые “спариваются” не с нулевой вершиной, $\prod''$—произведение по тем вершинам, которые “спариваются” с нулевой вершиной.

Тогда

$$F_1 = f_1 f_2 f_3 f_4 \exp\{i\sum_{v=1}^{n}[(t_{v-1} - t_v)(\bar{k}_v^{(2)})^2]\},$$

$$\left|\int \exp[i\frac{1}{2}(B^{-1}\underline{\kappa}, \underline{\kappa})]\tilde{F}_1(\kappa - a)d\underline{\kappa}\right| \leq$$

$$\leq \| \tilde{F}_1 \|_1 \leq \| f_1 \widetilde{f_2 f_3} f_4 \|_1 = \| \tilde{f}_1 * (f_2\tilde{\ } f_3) * \tilde{f}_4 \|_1 \leq$$

$$\leq \| \tilde{f}_1 \|_1 \| f_2\tilde{\ } f_3 \|_1 \| \tilde{f}_4 \|_1 .$$

Здесь мы представили преобразование Фурье от произведения функций в виде свертки, а затем воспользовались неравенством Юнга. Оценим равномерно по $\{k_v^{(2)}, v = 1, \dots, n\}$ норму каждого сомножителя:

$$\| \tilde{f}_1 \|_1 = \prod_{v=1}^{n} \| f_{v,1}(k_{v,1})\exp\{ik_{v,1}^2\} \|_1,$$

$$\| f_2\tilde{\ } f_3 \|_1 = \prod_{v}{}' \| \tilde{f}_{v'(v),j(v)} \|_1 \prod_{v}{}'' \| \psi_{j(v)} \|_1,$$

$$\| \tilde{f}_4 \|_1 = \frac{1}{(2\pi)^{n\nu/2}}\int\left|\int \exp\{-i\sum_{v=1}^{n}(\kappa_v, k_{v,1})\}G_v(\bar{k}_v)\right|\prod_{v=1}^{n} d\kappa_v =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n\nu/2}} \int \mid \tilde{f}_4((D^{-1})^*\kappa) \det(D^{-1}) \mid \prod_{v=1}^{n} d\kappa_v =$$

$$= (\prod_{v=1}^{n} \int \mid \tilde{G}_v(\bar{\kappa}_v) \mid d\kappa_v), \tag{18}$$

$$(\det(D^{-1}))(\det(D)^*) = \prod_{v=1}^{n} \| \tilde{G}_v \|_1 \leq \prod_{v=1}^{n} \| \tilde{f}_v \|_1 \| \tilde{g} \|_1,$$

где D—матрица с постоянными коэффициентами такая, что $k = D\bar{k}$, где

$$\bar{k} = (\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n); k = (k_{1,1}, \ldots, k_{n,1}),$$

$$\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n); \bar{\kappa} = (\bar{\kappa}_1, \ldots, \bar{\kappa}_n),$$

$$\bar{\kappa} = (D^{-1})^* \kappa.$$

Так как D—треугольная матрица с единицами на диагонали, то из (18) получаем оценку

$$\| f_1 \widetilde{f_2 f_3} f_4 \|_1 < (C_f)^{4n} C_\psi^r,$$

где

$$C_f = \max_{v,j} \{ \| f_{v,j} \|_2, \| \tilde{f}_{v,j} \|_1, \| f_{v1} \exp\{-ik_{v,1}\} \|_1 \} > 1,$$

$$C_\psi = \max_j \{ \| \psi_j \|_2, \| \tilde{\psi}_j \|_1)\} > 1.$$

Воспользовавшись тем, что для любой функции $Q \in L_2$ имеет место оценка

$$\left\| \int Q(y_1, \ldots, y_N) a^{\#}(y_1) \ldots a^{\#}(y_N) dy_1 \ldots dy_N \right\| \leq \| Q \|_2$$

получаем утверждение 4 при $C_2 = (C_f)^{2m+2}$.

Из утверждений 3–4 следует, что n-й член ряда (6) оценивается как

$$C^n (\sum_{\{v(v), j(v)\}} \prod_v \frac{1}{(\mid t_v - t_{v'(v)} \mid + 1)^{\nu/2}}). \tag{19}$$

Для оценки суммарного вклада всех диаграмм следует воспользоваться леммой (6.1).

5. Двухчастичное взаимодействие. Здесь мы рассмотрим оператор H, сохраняющий число частиц, ограничение которого на $\mathcal{F}_A^{(N)}(L_2(R^\nu)) \otimes L_2(R^\nu)$ имеет вид

$$H_N = -\sum_{j=1}^{N} \Delta_{x_j} - \Delta_y + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} V(x_j - y) =$$

$$= H_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} V(x_j - y), \tag{20}$$

где $V \in S(R^\nu)$, $x_j, y \in R^\nu$.

Теорема 3. *Если $\nu \geq 3$, $V \in S(R^\nu)$, то существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\nu, V) > 0$, не зависящее от N, такое, что при всех N и $\mid \varepsilon \mid < \varepsilon_0$ система (20) асимптотически полна и H_N унитарно-эквивалентен свободному гамильтониану H_0.*

Отличие от предыдущих результатов состоит в том, что оператор взаимодействия в “представлении вторичного квантования” имеет вид

$$\varepsilon \int_{R^\nu} V(x - y) a^*(x) a(x) dx,$$

т. е. имеет дополнительную δ-функцию.

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство теорем 1–2 с изменениями, обусловленными отмеченным обстоятельством. Поэтому мы укажем лишь, какие изменения надо внести в доказательство.

Формально отличие состоит в том, что в выражении (7) $M = 1$, $m_j = n_j = 1$ и есть дополнительная δ-функция

$$V = \int_{R^\nu} V(x_1 - y) \delta(x_1 - x_2) a^*(x_1) a^*(x_2) dx_1 dx_2 \otimes \delta_y dy,$$

где δ_y есть δ-функция в точке y.

Пусть функция $V(x)$ имеет преобразование Фурье $\tilde{V}(k)$, тогда в k-представлении n-й член ряда (2.1) для векторов вида (5а) в данном случае имеет вид

$$\int_{\Delta_t^n} dt_1 \ldots dt_n \prod_v \left\{ \int \tilde{V}(k_{v,2} - k_{v,1}) \exp\{it_v[h(k_{v,1}) - h(k_{v,2})]\right\}, \tag{21}$$

$$a^*(k_{v,1}) a(k_{v,2}) dk_{v,1} dk_{v,2} a^*(\psi_r) \ldots a^*(\psi_1) \Omega \otimes$$

$$\otimes[\prod_{v=1}^{n}\int e^{i(t_{v-1}-t_v)h(k_v)}\delta(-k_{v,1}+k_{v,2}-k_v+k_{v+1})dk_v]dk_{n+1}\psi(k_1),$$

где $h(k)=k^2$.

Заметим, в данном случае отличие от (11) состоит в том, что все функции $f_v\equiv 1$, $g_v\equiv 1$ при $v=1,\dots,n$; $f_0=\psi$.

Избавляясь от δ-функций в (21), получаем

$$\int\limits_{\Delta_t^n} dt_1\dots dt_n\prod_{v}\left\{\int\tilde V(k_{v,2}-k_{v,1})\exp\{it_v[h(k_{v,1})-h(k_{v,2})]\right\}\times$$

$$\times a^*(k_{v,1})a(k_{v,2})dk_{v,1}dk_{v,2}, \tag{22}$$

$$a^*(\psi_{r_1})\dots a^*(\psi_1)\Omega\otimes\left[\prod_{v=1}^{n}\int e^{i(t_{v-1}-t_v)h(\bar k_v)}dk_{n+1}\psi(\bar k_1)\right],$$

где

$$\bar k_v=k_{v,1}-k_{v,2}+k_{n+1}.$$

Как и (11), выражение (22) можно представить в виде сумм по диаграммам Фридрихса. Обозначим $v'(v)$ номер вершины, которая спаривается с v-й вершиной. Положим, что $\psi_{j(v)}\equiv 1$, если $v'(v)\neq 0$. Тогда каждое слагаемое этой суммы имеет вид

$$\int F\{\prod_{v\in L_2}a^{\#}(k_{v,2})\}\{\prod_{j\in I}a^*(\psi_j)\}\Omega\otimes$$

$$\otimes e^{-it_nh(k_{n+1})}\psi(\bar k_1)\prod_{v=1}^{n}dk_{v,1}\prod_{v\in I_2}dk_{v,2}, \tag{23}$$

где

$$F=\{\prod_{v\in I_1}\tilde V(k_{v'(v),1}-k_{v,1})e^{-i(t_v-t_{v'(v)})h(k_{v,2})}\times$$

$$\times\psi_{j(v)}(k_{v,1})\}\left\{\prod_{v\in I_2}\tilde V(k_{v,2}-k_{v,1})e^{-i(t_v-t_{v'(v)})h(k_{v,1})\psi_{j(v)}(k_{v,1})}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\{i\sum_{v=1}^{n}[(t_{v-1}-t_v)h(\bar k_v))\right\}, \tag{24}$$

и I_1—множество вершин, с которыми есть спаривание, I_2—множество вершин, с которыми нет спаривания, и I—множество неспаренных отростков нулевой вершины.

Рассмотрим функцию F_1 от переменных $\{k_{v,1},v=1,\dots,n\}$ и $\{k_{v,2},v\in I_2\}$, где

$$F_1=\left\{\prod_{v\in I_1}\tilde V(k_{v'(v),1}-k_{v,1})\psi_{j(v)}(k_{v,1})\right\}\left\{\prod_{v\in I_2}\tilde V(k_{v,2}-k_{v,1})\psi_{j(v)}(k_{v,1})\right\}.$$

Как и в (15), сделаем преобразование Фурье в (23). Остается только доказать аналог утверждения 4 для функции

$$F_2(k_{v,2},v\in I_2,k_{n+1})=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n\nu/2}}\int\left|(\int\exp(-i\sum_{v=1}^{n}(x_v,k_{v,1}))F_1(k)\prod_{v=1}^{n}dk_{v,1}\right|\prod_{v=1}^{n}dx_v. \tag{25}$$

Утверждение 6. *Функция $F_2(k_{v,2},v\in I_2,k_{n+1})$ принадлежит $L_2(R^{\nu N})$, где N—число переменных $\{k_{v,2},v\in I_2\},k_{n+1}$ и ее L_2-норма допускает оценку*

$$\| F_2 \|< C^nC(\psi),$$

где $C>0$—некоторая константа, не зависящая от $n,\psi,\psi_1,\dots$ $\dots,\psi_r$, а $C(\psi)$ зависит только от $\psi,\psi_1,\dots,\psi_r$.

Доказательство. Положим $k=(k_{1,1},\dots,k_{n,1})$, $x=$ $=(x_1,\dots,x_n)$. Разбивая для каждой из компонент переменной $k_{v,1}=(k_{v,1}^{(1)},\dots,k_{v,1}^{\nu})$ внутренний интеграл на зоны $(\mid x_v^{(i)}\mid\geq 1)$ и $(\mid x_v^{(i)}\mid< 1)$ и интегрируя в первом случае по частям два раза по $k_{v,1}^{(1)}$, получаем оценку

$$F_2(k_{v,2},v\in I_2,k_{n+1})\leq \tag{26}$$

$$\leq C^n\int\int\prod_{v=1}^{n}\frac{1}{(\mid x_v\mid+1)^{2\nu}}\left|\frac{\partial^{2\nu n}F_1(k)}{\partial^2k_{11}^{(1)}\dots\partial^2k_{n,1}^{(v)}}\right|,$$

$$\prod_{v=1}^{n}dk_{v,1}\prod_{v=1}^{n}dx_v\leq C^n\int\left|\frac{\partial^{2\nu n}F_1(k)}{\partial^2(k^{(1)})\dots\partial^2(k^{(v)})}\right|\prod_{v=1}^{n}dk_{v,1},$$

где $\mid x_v\mid=\mid x_v^{(1)}\mid+\mid x_v^{(\nu)}\mid$.

Заметим, что $\psi(\bar k_1)$ зависит не более чем от $2r+1$ переменных, так как

$$\bar k_1=-\sum_{v\in I}k_{v,2}+k_{n+1}+\sum_{v\in I_3}k_{v,1},$$

где I_3 есть множество вершин, которые соединяются ребрами с нулевой вершиной. Поэтому, раскрывая производную в (26), мы получим не более чем $C^n(2r)^{2r}$ слагаемых, причем от функций V, ψ_1, ψ_r возникнут производные не выше порядка 4ν, а от функции ψ порядка $2r\nu$.

Следовательно,

$$| F_2(k_{v,2}, v \in I_2, k_{n+1}) |< C^n \sum_j \int | F_1^j(k) | \prod_{v=1}^n dk_{v,1}, \qquad (27)$$

где $F_1^{(j)}$ имеет такой же, как F_1, вид, но вместо v, ψ_j, ψ стоят производные порядка не выше описанного. Отсюда

$$|| F_2 ||< C^n \sum_j \sum_i \int \left(\int | F_1^{(j)}(k) | \prod_{v=1}^n dk_{v,1} \times \right.$$

$$\left. \times \int | F_1^{(i)}(k') | \prod_{v=1}^n dk'_{v,1} \right) \prod_{v \in I_2} dk_{v,2} dk_{n+1}. \qquad (28)$$

Каждый интеграл в (28) легко оценить, если сначала воспользоваться теоремой Фубини, затем оценкой $| V^{(i)}(k_{v,2} - k'_{v,1}) |< \bar{C}$ при $v \in I_2$, $| \psi(\bar{k}'_1) |< C(\psi)$, и, делая очевидную замену переменных, получим требуемую оценку.

Замечание. Результат этого пункта остается верным и для симметрического фоковского пространства. Действительно, рассмотрим сохраняющий число частиц оператор H, ограничение которого на $\mathcal{F}_s^N(L_2(R^\nu)) \otimes L_2(R^\nu)$ имеет вид

$$H_N = -\sum_{i=1}^N \Delta x_i - \Delta y + \varepsilon \sum_{i=1}^N V(x_i - y), \qquad (29)$$

где $\mathcal{F}_s^N(L_2(R^\nu)) \subset \mathcal{F}_s(L_2(R^\nu))$ есть N-частичное подпространство симметрического фоковского пространства, $V \in S(R^\nu)$, x_i, $y \in R^\nu$.

Теорема 4. *Если $\nu \geq 3, V \in S(R^\nu)$, то существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(v, V) > 0$, не зависящее от N, такое, что при всех N и $| \varepsilon |< \varepsilon_0$ система (29) асимптотически полна и оператор H_N унитарно эквивалентен свободному гамильтониану H_N^0.*

Отличие доказательства теоремы 4 от теоремы 3 состоит только в том, что бозевские операторы рождения и уничтожения $a^\#(f)$, являясь неограниченными во всем $\mathcal{F}_s(L_2(R^\nu))$, ограничены на каждом подпространстве $\mathcal{F}_s^r$ L_2-нормой f, умноженной на $(r+1)^{1/2}$. В нашем случае мы получаем всегда ровно r неспаренных операторов рождения, что позволяет для каждого r оценить норму их произведения независимо от N.

6. Случай одночастичных операторов h_1 и h_2 общего вида. Здесь мы укажем результат, касающийся асимптотической полноты для операторов

$$H = H_0 + \varepsilon V,$$

где H_0 по-прежнему имеет вид

$$H_0 = d\Gamma(h_1) \otimes \mathbf{1} + 1 \otimes h_2$$

и операторы h_1 и h_2 не обязательно совпадают с оператором Лапласа, как это было во всех предыдущих теоремах. А именно, мы предположим, что после преобразования Фурье операторы $h_i, i = 1, 2$, являются операторами умножения на гладкие функции $\tilde{h}_1$ и $\tilde{h}_2$, у которых имеется конечное число критических точек и все эти точки морсовского типа (см. [3]). Однако эта общность заставляет нас расплачиваться некоторыми ограничениями, накладываемыми на оператор взаимодействия

$$V = \sum_{i=1}^M \int dx_1 \ldots dx_{m_i+n_i} K_i(x_1, \ldots, x_{m_i+n_i}, y) \times$$

$$\times a^*(x_1) \ldots a^*(x_{m_i}) a(x_{m_i+1}) \ldots a(x_{m_i+n_i}),$$

где K_i—гладкие ядра, инвариантные при сдвигах всех аргументов.

В приводимой ниже теореме существенно, что размерность $\nu > 4$ и вакуум не только не поляризуется оператором V:

$$m = \min m_i = \min n_i > 0,$$

но и “не поляризуется достаточно сильно”, а именно

$$m > \frac{\nu + 2}{\nu - 4}.$$

Итак, верна теорема.

Теорема 5. *При выполнении всех перечисленных выше условий при всех достаточно малых ε существуют прямой и* *обратный морфизмы Меллера* $W_\pm$ *и* $\hat{W}_\pm$ *для операторов* H_0 *и* $H_0+\varepsilon U$.

Доказательство этой теоремы также использует всю сложную технологию предыдущих доказательств (понятие разбиения, сектора и диаграммы). Для простоты рассмотрим случай, когда

$$V=\int\limits_{R^\nu} V_2^{(1)}\otimes V_z^{(2)}dz=\int V_z dz,$$

где

$$V_z^{(1)}=a^*(f_1(\cdot-z))\dots a^*(f_m(\cdot-z))a(f_m(\cdot-z))a(f_1(\cdot-z)),\quad (30)$$

$$V_z^{(2)}g=(g,f(\cdot-z))f(\cdot-z),$$

$$\tilde{f},\tilde{f}_i\in C_0^\infty(R^\nu).$$

Рассмотрим оценку для n-го члена ряда (6)

$$A_n(t,\psi)=\int\limits_{\Delta_n^t}\int_{(R^\nu)^n} V_{z_1}(t_1)\dots V_{z_n}(t_n)\times$$

$$\times\psi^{(1)}\otimes\psi^{(2)}dz_1\dots dz_n dt_1\dots dt_n,\qquad (31)$$

где $\psi=\psi^{(1)}\otimes\psi^{(2)}$. Мы воспользуемся следующим неравенством для $u\in C_0^\infty\,(R^\nu,\operatorname{supp}u\subset[-R,R]^\nu)$:

$$\left|\int\limits_{R^\nu} e^{i(x,k)+ith(k)}u(k)dk\right|<C(u)I(t,x),\qquad (31^a)$$

где

$$I(t,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+\mid t\mid)^{\nu/2}}, & \mid x\mid\le M\mid t\mid,\\ \dfrac{c(d)}{(1+\mid t\mid+\mid x\mid)^d}, & \mid x\mid> M\mid t\mid,\end{cases}\qquad (32)$$

$$M=\max_{x\in\operatorname{supp}u}\mid\nabla h\mid,$$

для любого $d\ge 1, c(d)$ зависит от d. Используя (31) и (32), нетрудно доказать, что

$$\|\ V_{z_1}^{(1)}(t_1)\dots V_{z_n}^{(1)}(t_n)\psi^{(1)}\ \|<$$

$$<c(V^{(1)},d)^n c(V^{(1)},d,\psi)\prod_{i=1}^n I(t_i-t_{i-1},z_i-z_{i-1}),\qquad (33)$$

где $t_0=0, z_0=0$. Из (30) и (33) следует оценка (при $d=2\nu$)

$$\|\ A_n(t,\psi)\ \|<c^n c(\psi)\int\limits_{\Delta_n^t} A_n^{(1)}(t_1,\dots,t_n,\psi^{(1)})\times$$

$$\times\prod\frac{1}{(1+\mid t_i-t_{i-1}\mid)^{\nu/2}}dt_1\dots dt_n,\qquad (34)$$

где

$$A_n^{(1)}(t_1,\dots,t_n,\psi^{(1)})=\qquad (35)$$

$$=\operatorname*{supp}_{z_1,\dots,z_n}\ \|\ V_{z_1}^{(1)}(t_1)\dots V^{(1)}z_n(t_n)\psi^{(1)}\ \|,$$

и константа c зависит от $\nu, V^{(1)}, R=R(V^{(2)})$, где R таково, что $\operatorname{supp}\tilde{f}\in[-R,R]^\nu$.

Далее совершим разложение (35) в сумму диаграмм Фридрихса вместе с частичным пересуммированием этих диаграмм, отличным от того, как это делалось прежде.

Введем разбиения и секторы аналогично п. 3 § 2. Число различных секторов не превосходит 2^n, поэтому мы зафиксируем некоторый сектор $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ и крайние правые точки его интервалов: $\Gamma_1,\dots,\Gamma_k$, где $\Gamma_1=1,\Gamma_i=\alpha_{i-1}+1, i=2,\dots,k$. Все операторы уничтожения в вершинах $\Gamma_i, i=1,\dots,k$, мы пронесем вправо к вакуумному вектору с помощью канонических антикоммутационных соотношений. В результате этого "протаскивания" возникнут линии диаграмм с "пропагатором"

$$(e^{it_jh_1}f_q^{(j)}(x_j),e^{it_ih_1}f_p^{(i)}(x_i)),\qquad (36)$$

который, подобно (31^a), может быть оценен величиной $\dfrac{C(R^{(1)})}{(1+\mid t_i-t_{i-1}\mid)^{\nu/2}}$, где $R^{(1)}=R^{(1)}(V^{(1)})$ таково, что $\operatorname{supp}\tilde{f}_q\subset$ $\subset\ [-R^{(1)},R^{(1)}]^\nu$ для $q=1,\dots,n$.

Мы получим графы с $(n+1)$-й вершиной, $n,\dots,1,0$. Граф назовем допустимым, если:

1) из любой вершины $i\in I$ выходит не менее m линий вправо (они возникают в результате "протаскивания" операторов уничтожения из вершины $i\in I$ к вакуумному вектору);

2) из любой вершины i выходит не более m линий влево (они возникают в результате "спаривания" с операторами рождения в вершине i).

Так как $\| a^{\#}(f) \| = \| f \|$ для любого f, то выражение (34) может быть оценено величиной

$$c^n c(\psi) \sum_{\alpha} \sum_{G} \int \prod_{(i,j)\in G} \frac{1}{(1+|\, t_i - t_{i-1}\,|)^{\nu/2}} \times$$

$$\times \prod_{v=j}^{n} |\, t_v - t_{v-1}\,|^{\nu/2}\, dt_1 \dots dt_n < \qquad (37)$$

$$< c^n c(\psi) \sum_{\alpha} \sum_{G} \int \prod_{(i,j)\in G} \frac{1}{(1+|\, t_i - t_{i-1}\,|)^{\nu/2(1-\frac{1}{m})}} dt_1 \dots dt_n,$$

где сумма $\sum\limits_{G}$ берется по всем допустимым графам для сектора α.

Лемма 9. *При $\beta = (\nu/2)(1 - \frac{1}{m}) > 2$ имеет место оценка*

$$\sum_{\alpha} \sum_{G} \int \prod_{(i,j)\in G} \frac{1}{(1+|\, t_i - t_{i-1}\,|)^{\beta}} dt_1 \dots dt_n < C^n,$$

где C не зависит от n.

Доказательство леммы см. в [48].

Из этой леммы и оценки (37) следует теорема 5.

§ 4. Предел слабого взаимодействия для квантовой шредингеровской частицы, взаимодействующей с ферми-газом

При взаимодействии частицы с ферми-газом его можно рассматривать как "тепловой резервуар" для частицы и рассматривать ее движение на фоне этого резервуара. Точно это означает следующее. Взаимодействие частицы с газом порождает возмущенную динамику τ_t^ε(ε—параметр взаимодействия) в алгебре $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_s \otimes \mathfrak{A}_R$, где $\mathfrak{A}_s$— некоторая C^*-алгебра, описывающая частицу, а $\mathfrak{A}_R$— C^*-алгебра (алгебра КАС), описывающая резервуар. С помощью этой динамики и некоторого равновесного состояния ω для резервуара можно задать следующее

семейство отображений γ_t^ε алгебры $\mathfrak{A}_s$ в себя:

$$\gamma_t^\varepsilon(B) = \omega(\tau_t^\varepsilon(\tau_{-t}^0(B) \otimes \mathbf{1})),$$

где τ_t^0—свободная динамика в $\mathfrak{A}_s, A \in \mathfrak{A}_R$. Семейство отображений $\gamma_t^\varepsilon : \mathfrak{A}_s \to \mathfrak{A}_s$, называемое иногда *редуцированной динамикой частицы*, уже не образует, вообще говоря, группу (и даже полугруппу) преобразований. Однако с помощью некоторого предельного перехода, называемого *пределом слабого взаимодействия*:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon^2 t \to s}} \gamma_t^\varepsilon(B) = T_s(B) \qquad (1)$$

можно добиться того, чтобы отображения $T_s : \mathfrak{A}_s \to \mathfrak{A}_s$ задавали полугруппу. В этом параграфе мы исследуем существование предела (1) в некоторых ситуациях.

1. Редуцированная динамика и предел слабого взаимодействия. Пусть $\mathcal{H}_s = L_2(R^\nu)$, $\nu \geq 3$, $\mathcal{H}_R = \mathcal{F}_a(\mathcal{H}_s)$—фоковское антисимметрическое пространство над $\mathcal{H}_s$, $\mathrm{Com}(\mathcal{H}_s)$— алгебра компактных операторов в $\mathcal{H}_s$, $\mathfrak{A}_s$—C^*-алгебра компактных операторов в $\mathcal{H}_s$ с присоединенной единицей, $\mathfrak{A}_R$—C^*-алгебра, порожденная операторами рождения-уничтожения $\{a(f), a^*(f),\ f \in \mathcal{H}_s\}$ в $\mathcal{H}_R$. Самосопряженный оператор

$$H_0 = H_s \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_R, \qquad (2)$$

где $H_s = -\Delta$—оператор Лапласа в $\mathcal{H}_s$ и $H_R = d\Gamma(H_s)$— вторичноквантованный оператор Лапласа в $\mathcal{H}_R$, определяет на C^*-алгебре $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_s \otimes \mathfrak{A}_R$ свободную динамику

$$\tau_t^0(A) = \exp\{itH_0\} A \exp\{-itH_0\}, \quad A \in \mathfrak{A}, \quad t \in R.$$

Пусть ω_β—КМШ-состояние на алгебре $\mathfrak{A}_R$ при обратной температуре β относительно динамики τ_t^0, являющейся квазисвободным состоянием (см. гл. 2). Рассмотрим взаимодействие $\mathbb{V}$

$$\mathbb{V} = \sum_{j=1}^{\nu} p_j \otimes V_j, \qquad (3)$$

где $p = (p_1, \dots, p_\nu) = i\nabla$—оператор импульса в $\mathcal{H}_s$

$$V_j = \sum_{k=1}^{M_j} : a^*(f_{j,1}^{(k)}) \dots a^*(f_{j,m_j}^{(k)}) a(f_{j,m_j+1}^{(k)}) \dots a(f_{j,m_j+n_j}^{(k)}) :, \qquad (4)$$

$$\tilde{f}_{j,i}^{(k)} \in C_0^\infty(R^\nu),\ \ 1 \le j \le \nu,$$

$$1 \le i \le m_j + n_j,\ \ 1 \le k \le M_j,\ \ M_j < \infty,$$

и : :—виковские скобки относительно квазисвободного калибровочно-инвариантного состояния ω_β (см. гл. 2). Обозначим

$$I = \{f_{j,i}^{(k)} \in C_0^\infty(R^\nu), 1 \le j \le \nu, 1 \le i \le m_j + n_j, 1 \le k \le M_j\}$$

множество всех функций, с помощью которого определяется $\mathbb{V}$.

Замечание. Выбор $\mathbb{V}$ в специальном виде (4) не случаен и соответствует перенормировке взаимодействия V_j. Если виковские скобки опустить в (4), то предел слабого взаимодействия может не существовать.

Положим $m_{\max} = \max\limits_j(m_j + n_j)$, $m_{\min} = \min\limits_j(m_j + n_j)$.

Пусть D_0—линейная оболочка функций $f \in \mathcal{H}_s$ таких, что $f \in C_0^\infty(R^\nu), \mathcal{F}_0$—подпространство в $\mathcal{H}_R$, порожденное векторами вида

$$a^*(f_1) \dots a^*(f_k)\Omega, f_j \in D_0, j = 1, \dots, k,$$

где Ω—вакуумный вектор.

Оператор $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon\mathbb{V}$, $\varepsilon \in R$, самосопряжен в существенном на $D_0 \otimes \mathcal{F}_0$ и определяет на $\mathfrak{A}$ возмущенную динамику

$$\tau_t^{\varepsilon\mathbb{V}}(A) = \exp\{itH_\varepsilon\} A \exp\{-itH_\varepsilon\},\ \ A \in \mathfrak{A},\ \ t \in R. \qquad (5)$$

Пусть $A \otimes B \in \mathfrak{A}$. Полагая $\omega(A \times B) = A\omega_\beta(B)$ и продолжая отображение ω по линейности и непрерывности на всю алгебру $\mathfrak{A}$, определим $\gamma_t^\varepsilon : \mathfrak{A}_s \to \mathfrak{A}_s$ следующим образом:

$$\gamma_t^\varepsilon(A) = \omega(\tau_t^{\varepsilon\mathbb{V}} \tau_{-t}^0(A \otimes \mathbf{1})),\ \ A \in \mathfrak{A}_s.$$

Нас в этой главе будет интересовать доказательство существования предела слабого взаимодействия:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0,\, t \to \infty \\ \varepsilon^2 t \to s}} \gamma_t^\varepsilon(A) = T_s(A),\ \ A \in \mathfrak{A}_s,\ \ s \ge 0, \qquad (6)$$

где T_s—квантовая динамическая полугруппа на $\mathfrak{A}_s$. Для этого достаточно доказать существование предела в левой части (6) для всех $A \in \mathfrak{A}_s^0$ при $0 < s < s_A$, где $\mathfrak{A}_s^0 \subseteq \mathfrak{A}_s$— плотная подалгебра и $s_A > 0$.

2. Существование предела слабого взаимодействия. Пусть $\mathfrak{A}_{s,r}^0$— подалгебра в $\mathfrak{A}_s$, порожденная единичным оператором и проекторами вида $(g, \cdot)f, \tilde{f}, \tilde{g} \in C_0^\infty$, $\operatorname{supp}\tilde{f} \subseteq S_r, \operatorname{supp} g \subseteq S_r$, S_r—сфера радиусом r в R^ν. Положим

$$\mathfrak{A}_s^0 = \bigcup_{r>0} \mathfrak{A}_{s,r}^0.$$

Определим корреляционные функции $\{g_{ij}, 1 \le i, j \le \nu\}$ следующим образом:

$$g_{ij}(s) = \omega_\beta(V_{i,s} V_j), \qquad (7)$$

$$V_{k,s} = \exp\{isH_R\} V_k \exp\{-isH_R\}. \qquad (8)$$

Из определения оператора V_k и свойств КМШ-состояния ω_β следует:

а) $|\, g_{ij}(s) \,| < \mathrm{const}(1 + |\, s \,|)^{-\nu m_{\min}}$; (9)

б) если $\alpha_{ij} = \int\limits_0^\infty g_{ij}(s)ds$, то

$$\operatorname{Im}\alpha_{ij} = \operatorname{Im}\alpha_{ji},\ \ 1 \le i, j \le \nu; \qquad (10)$$

в) матрица $\{\operatorname{Re} a_{ij},\ 1 \le i, j \le \nu\}$ неотрицательно определена над $\mathbb{C}^\nu$.

Пусть $Q = \{Q_{ij}, 1 \le i, j \le \nu\}$—положительный квадратный корень из матрицы $\{\operatorname{Re}(a_{ij} - a_{ji})\}$. Для $u = (u_1, \dots, u_\nu) \in R^\nu$ и $p = (p_1, \dots, p_\nu)$ положим

$$P = \sum_{i,j=1}^{\nu} \operatorname{Im}\alpha_{ij} p_i p_j,$$

$$(u, Qp) = \sum_{i,j=1}^{\nu} Q_{ij} u_i p_j, \qquad (11)$$

$$u^2 = \sum_{i=1}^{\nu} u_i^2.$$

Теорема 1. *Существует квантово-динамическая полугруппа $\{T_s, s \geq 0\}$ на $\mathfrak{A}_s$ такая, что для любого $A \in \mathfrak{A}_s^0$ существует s_A и*

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0, t\to\infty \\ \varepsilon^2 t = s}} \gamma_t^\varepsilon(A) = T_s(A)$$

равномерно по $s \in [0, s_A]$. Если $A \in \mathfrak{A}_{s,r}^0$, то s_A зависит только от r; генератор L полугруппы T_s имеет вид (при $A \in \mathfrak{A}_s^0$)

$$L(A) = -\sum_{k,l=1}^{\nu} \left\{ \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\alpha_{k,l} + \alpha_{l,k})[p_k, [p_k, A] + i \mathrm{Im}\, \alpha_{kl}[p_k p_l, A] \right\}, \quad (12)$$

а сама полугруппа действует на $\mathfrak{A}_s$ следующим образом:

$$T_s(A) = (2Pt)^{-\nu/2} \int e^{-(u^2/(2t)^\nu)} \times$$

$$\times \exp\{itp + i(u, Qp)\} A \exp\{-itp - i(u, Qp)\} du. \quad (13)$$

Доказательство. Мы только наметим основные этапы доказательства этой теоремы.

При $A \in \mathfrak{A}_{s,r}^0$ мы можем выписать сходящийся ряд для $\gamma_t^\varepsilon(A)$:

$$\gamma_t^\varepsilon(A) = A + \sum_{n=1}^{\infty} (i\varepsilon)^n \int_{\Delta_n^t} \omega_\beta(\mathbb{V}_{t_n}, [\mathbb{V}_{t_{n-1}}, \ldots$$

$$\ldots [\mathbb{V}_{t_1}, A \otimes \mathbf{1}] \ldots] dt_1 \ldots dt_n, \quad (14)$$

где

$$\mathbb{V}_s = \exp\{isH_0\} \mathbb{V} \exp\{-isH_0\} = \sum_{j=1}^{\nu} p_j \otimes V_{j,s}.$$

Основой доказательства теоремы 1 является следующая оценка n-го члена $I_n^t(A)$ ряда (14):

$$\| I_n^t(A) \| \leq c^n \mid \varepsilon \mid^n t^{[n/2]} C(A), \quad (15)$$

где [ ] обозначает целую часть числа, константа $c > 0$ не зависит от n, а $C(A)$ зависит от A.

Основные трудности получения оценки (15) заключается в том, что после раскрытия коммутантов нужно уметь оценивать выражения вида

$$\int_{\Delta_n^t} \omega_\beta(V_{i_1, t_{i_1}} \ldots V_{i_n, t_{i_n}}) dt_1 \ldots dt_n, \quad (16)$$

где $\pi : (1, \ldots, n) \to (i_1, \ldots, i_n)$ есть некоторая перестановка. Сопоставив каждому V_{i,t_i} вершину с номером i, мы можем представить подынтегральное выражение в виде суммы диаграмм, которые мы будем называть допустимыми. Каждое ребро допустимой диаграммы вносит мультипликативный вклад в вес диаграммы

$$r_{ij}(t_i - t_j) = \omega_\beta(a^{\#}(f_{t_i}) a^{\#}(g_{t_j})),$$

где $f, g \in \mathcal{J}$. Заметим, что две вершины могут соединять несколько ребер. Очевидно, что все $r_{ij} \in L_1(R)$. Допустимые диаграммы обладают тем свойством, что у них отсутствуют петли. Это прямо следует из свойств виковских скобок. Среди допустимых диаграмм много несвязных диаграмм.

Для случая $m_{\max} = m_{\min} = 2$ доказательство оценки (15) просто, если, проводя дополнительные ребра и делая каждую допустимую диаграмму связной, воспользоваться леммой 6.1.

Случай $m_{\max} > 2$ значительно труднее и требует привлечения техники, сочетающей технику оценок из § 2 и § 3.

На алгебре $\mathfrak{A}_s$ существует состояние ρ_0, инвариантное относительно любой квантово-динамической полугруппы

$$\rho_0(a\mathbf{1} + B) = a, \ a \in \mathbb{C}, \ B \in \mathrm{Com}(\mathcal{H}_s).$$

Теорема 2. *Если оператор $\mathbb{V} \neq 0$, то ρ_0 является единственным инвариантным состоянием для полугруппы T_s (см.* [15]).

Замечание. Теорема 1 верна для взаимодействий $\mathbb{V}$ вида

$$\mathbb{V} = \sum_{j=1}^{\nu} f_j(p_j) \otimes V_j,$$

где V_j имеет вид (4) и $f_j \in C^\infty(R^\nu)$ ограничены сверху и снизу некоторым полиномом.

ГЛАВА 5

МЕТОД ЯДЕР БЕТЕ—СОЛПИТЕРА (УРАВНЕНИЕ ДАЙСОНА)

В гл. 3 был изложен общий метод исследования старших ветвей спектра трансфер-матрицы гиббсовского поля на решетке Z^{ν}, принимающего значения из некоторого компактного множества S (называемый иногда “московским методом”). Здесь мы приведем другой способ изучения одночастичного спектра трансфер-матрицы, пригодный также и в случае некомпактного пространства S. Этот метод, условно называемый методом ядер Бете—Солпитера, позволяет также исследовать и связанные состояния в двух-, трех- и т. д. частичных подпространствах, но здесь мы коснемся этого лишь бегло. Отметим, что хотя метод ядер Бете—Солпитера применим к большему классу моделей, чем “московский метод”, он менее информативен, чем этот последний: получая сведения, скажем, об одночастичном спектре трансфер-матрицы, мы мало что знаем о свойствах самого одночастичного подпространства.

С тем, чтобы пояснить сущность метода, а также связать его с построениями 3-й главы, мы опишем его сначала на примере трансфер-матрицы изинговского поля на решетке $Z^{\nu+1}$ (это поле вводилось в § 2 гл. 2, а его трансфер-матрица в п. 1 §4 гл. 3). Затем мы применим этот метод к изучению одночастичных ветвей спектра трансфер-матрицы гиббсовского поля на решетке $Z^{\nu+1}$, принимающего произвольные вещественные значения (этот случай пока не поддается изучению с помощью “московского метода”).

§1. Уравнение Дайсона и метод ядер Бете—Солпитера для изинговского поля

1. Уравнение Дайсона и одночастичный спектр. Пусть $\{\sigma(x), x = (\bar{x}, x^{(0)}) \in Z^{\nu} \times Z^1, \sigma(x) = \pm 1\}$ — заданное на $(\nu+1)$-мерной решетке $Z^{\nu+1}$ гиббсовское изинговское поле при малых значениях параметра β (см. гл. 2, § 5). Рассмотрим ковариацию этого поля

$$s_2(x,y) = s_2(x-y) = \langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle \equiv$$

$$\equiv \langle \sigma(x)\sigma(y) \rangle - \langle \sigma(x) \rangle \langle \sigma(y) \rangle = \langle \sigma(x)\sigma(y) \rangle \qquad (1)$$

(поскольку для изинговского поля $\langle \sigma(x) \rangle = 0$ при всех $x \in Z^{\nu+1}$). Усреднение $\langle\ \rangle$ берется по распределению этого поля в пространстве $\Omega = \{-1, 1\}^{Z^{\nu+1}}$. Очевидно, что для $x = (\bar{x}, x^{(0)})$

$$s_2(x) = (U_{\bar{x}} \mathcal{J}^{|x^{(0)}|} \sigma(0), \sigma(0))_{\mathcal{H}}, \qquad (2)$$

где $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$—скалярное произведение в физическом гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (состоящем, напомним, из функционалов, зависящих лишь от значений поля $\{\sigma(\bar{x}, 0)\}$ на нулевом слое: $\{x = (\bar{x}, x^{(0)}), x^{(0)} = 0\}$), $\{U_s, s \in Z^{\nu}\}$— унитарное представление группы сдвигов, действующее в $\mathcal{H}$, а $\mathcal{J}$ обозначает трансфер-матрицу поля. Воспользуемся далее разложением

$$\sigma(0) = h_1 + h_2, \qquad (3)$$

где $h_1 \in \mathcal{H}_1$—проекция функционала $\sigma(0) \in \mathcal{H}$ на одночастичное инвариантное подпространство трансфер-матрицы $\mathcal{J}$, а $h_2 \in \tilde{\mathcal{H}}_1$—проекция $\sigma(0)$ на ортогональное дополнение к $\mathcal{H}_1$ (см. гл. 3, § 4). Из построений гл. 3 вытекает, что h_1 и h_2—функционалы с быстро (экспоненциально) убывающей зависимостью от значений конфигурации $\sigma = \{\sigma(\bar{x}), x \in Z^{\nu}\}$ в далеких от нуля точках

$$| h_1(\sigma_1) - h_2(\sigma_2) | < \lambda^d, \qquad (4)$$

где σ_1 и σ_2—две конфигурации, совпадающие в d-окрестности $0 : \sigma_1(\bar{x}) = \sigma_2(\bar{x})$, если $| \bar{x} | \leq d$ и $0 < \lambda < 1$ (аналогичная оценка верна и для h_2). Как показано в гл. 3, спектр трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ в инвариантном подпространстве $\tilde{\mathcal{H}}_1$ заключен в промежутке

$$\mathrm{sp}(\mathcal{J}/\tilde{\mathcal{H}}_1) \subset [-C\beta^2, C\beta^2], \qquad (5)$$

где C—некоторая константа. Отсюда и из (4) следует, что

$$|\,(U_{\bar{x}}\mathcal{J}^{|x^{(0)}|}h_2, h_2)\,| < B\lambda^{|\bar{x}|}(C\beta^2)^{|x^{(0)}|}, \qquad (6)$$

B—константа. Далее, как показано в § 7 гл. 3, пространство $\mathcal{H}_1$, можно унитарно отобразить на пространство $L_2(T^\nu, dp)$ (T^ν—ν-мерный тор) так, что операторы $\{U_s\,|_{\mathcal{H}_1},\ s \in Z^\nu\}$ перейдут в операторы умножения на функции $\{\exp\{i(s;p),\ p \in T^\nu\}$, а оператор $\mathcal{J}\,|_{\mathcal{H}_1}$—в оператор умножения на некоторую гладкую (аналитическую) функцию $\varepsilon(p)$, причем

$$c_2\beta < \varepsilon(p) < c_1\beta, \qquad (7)$$

$c_1 > c_2 > 0$—некоторые константы. При этом изоморфизме $\mathcal{H}_1 \leftrightarrow L_2(T^\nu, dp)$ функционал $h_1 \in \mathcal{H}_1$ перейдет в гладкую (аналитическую) функцию $\varphi_0(p)$ на T^ν. Таким образом,

$$(U_{\bar{x}}, \mathcal{J}^{|x^{(0)}|}h_1, h_1)_{\mathcal{H}} = \int\limits_{T^\nu} |\,\varphi_0(p)\,|^2\, \varepsilon^{|x^{(0)}|}(p)e^{i(p,\bar{x})}dp. \qquad (8)$$

Рассмотрим теперь преобразование Фурье функции $s_2(x) = s_2(\bar{x}, x^{(0)})$—так называемую функцию Грина

$$\tilde{s}_2(p,k) = \sum_{(\bar{x},x^{(0)})\in Z^{\nu+1}} s_2(\bar{x}, x^{(0)})e^{-i(p,\bar{x})}e^{-ikx^{(0)}} =$$

$$= \tilde{s}_2'(p,k) + \tilde{s}_2''(p,k),\ p \in T^\nu,\ k \in T^1, \qquad (9)$$

где $\tilde{s}_2'(p,k)$ и $\tilde{s}_2''(p,k)$ являются преобразованиями Фурье от функций $(U_{\bar{x}}, \mathcal{J}^{|x^{(0)}|}h_1, h_1)$ и $(U_{\bar{x}}, \mathcal{J}^{|x^{(0)}|}h_2, h_2)$ соответственно. Из оценки (6) следует, что функция $\tilde{s}_2''(p,k)$ при каждом фиксированном $p \in T^\nu$ аналитична по переменной k в полосе

$$|\operatorname{Im} k\,| < |\ln C\beta^2\,| = 2\,|\ln\beta\,| + \text{const}. \qquad (10)$$

Из представления (8) и оценки (7) вытекает, что функция $\tilde{s}_2'(p,k)$ при фиксированном p является мероморфной функцией в полосе (10) и имеет два полюса первого порядка в точках

$$k_\pm = \pm i\ln\varepsilon(p). \qquad (11)$$

Таким образом, нахождение и исследование $\varepsilon(p)$ сводится к изучению полюсов функции Грина $\tilde{s}_2(p,k)$ (относительно переменной k) с наименьшей мнимой частью.

В описываемом нами методе полюсы (11) функции $\tilde{s}_2(p,k)$ находятся с помощью специального уравнения относительно функции $s_2(x)$, называемого *уравнением Дайсона*:

$$s_2(x-y) = I(x-y)+$$

$$+\operatorname{sh}\beta \sum_{\substack{(x',y')\in Z^{\nu+1}\\ |x'-y'|=1}} I(x-y')s_2(x'-y),\ x,y \in Z^{\nu+1}. \qquad (12)$$

Вывод уравнения Дайсона для корреляционных функций s_2 гиббсовских полей довольно общего вида будет изложен в следующих параграфах. Там же мы подробно опишем и функцию $I(x)$, входящую в уравнение (12). Здесь лишь вкратце скажем, что вывод уравнения (12) основан на общем кластерном разложении s_2, подробно изложенном в книге [26]. А именно, $s_2(x-y)$ представляется в виде суммы вкладов от некоторого множества связных диаграмм (графов), содержащих точки x и y. При этом сумма по так называемым одночастично-неприводимым диаграммам, т. е. диаграммам, в которых существует по крайней мере два непересекающихся пути, идущих от x к y, и образует функцию $I(x-y)$ (подробнее см. ниже). Из определения $I(x)$ следует, что

$$I(x) < \bar{c}(C\beta^2)^{|x|}, \qquad (13)$$

и, следовательно, преобразование Фурье этой функции

$$\tilde{I}(p,k) = \sum_{(x,x^0)\in Z^{\nu+1}} I(\bar{x}, x^{(0)})e^{-i(p,\bar{x})}e^{ik|x^{(0)}|},\ (p,k) \in T^\nu \times T^\nu,$$

при любом фиксированном $p \in T^\nu$ аналитически продолжается по переменной k в полосу (10). Переходя к преобразованию Фурье в уравнении (12), мы получим, что $(p = (p^{(1)}, \ldots, p^{(\nu)}))$

$$\tilde{s}_2(p,k) = \tilde{I}(p,k) + \operatorname{sh}\beta\tilde{I}(p,k)(\sum_{j=1}^{\nu}\cos p^{(j)} + \cos k)\tilde{s}_2(p,k).$$

Отсюда функция Грина

$$\tilde{s}_2(p,k) = \tilde{I}(p,k)[1 - \operatorname{sh}\beta\tilde{I}(p,k)(\sum_{j=1}^{\nu}\cos p^{(j)} + \cos k)]^{-1}. \qquad (14)$$

Таким образом, у функции $\tilde{s}_2(p,k)$ при фиксированном $p \in T^\nu$

имеются полюсы в полосе (10), совпадающие с нулями уравнения

$$1 - \operatorname{sh}\beta\tilde{I}(p,k)(\sum_{j=1}^{\nu}\cos p^{(j)} + \cos k) = 0. \qquad (15)$$

Подробный анализ этого уравнения, проведенный в общем случае в следующих параграфах, подтверждает уже известный нам факт: у функции $\tilde{s}_2(p,k)$ в полосе (10) имеется два полюса, лежащих в точках $k_\pm = i\varepsilon(p)$ на мнимой оси.

2. Ядро Бете—Солпитера и связанные двухчастичные состояния трансфер-матрицы. Описанный выше прием может быть соответствующим образом обобщен для нахождения двухчастичных связанных состояний трансфер-матрицы модели Изинга. Напомним, что они определяются следующим образом (см. § 4 и § 7 гл. 3). Разложим все физическое гильбертово пространство $\mathcal{H}$ в прямой интеграл

$$\mathcal{H} = \int_{T^\nu} \mathcal{H}(P)dP \qquad (16)$$

пространств $\{\mathcal{H}(P), P \in T^\nu\}$, собственных относительно группы трансляций $\{U_s, s \in Z^\nu\}$ с собственными значениями $\{\exp\{i(s,P)\}, P \in T^\nu\}$. При этом трансфер-матрица $\mathcal{J}$, коммутирующая с группой $\{U_s, s \in Z^\nu\}$, также представлена в виде прямого интеграла

$$\mathcal{J} = \int_{T^\nu} \mathcal{J}(\mathcal{P})[\mathcal{P} \qquad (17)$$

операторов $\{\mathcal{J}(P), P \in T^\nu\}$, действующих соответственно в пространствах $\mathcal{H}(P)$. Далее напомним, что при малых β в пространстве $\mathcal{H}$ существует кроме одночастичного пространства $\mathcal{H}_1$ еще и двухчастичное инвариантное относительно $\mathcal{J}$ в U_s подпространство $\mathcal{H}_2$, так что верно разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \tilde{\mathcal{H}}_2, \qquad (18)$$

где $\mathcal{H}_0 = \{\mathrm{const}\}$, $\mathcal{H}_1$ определено выше, а $\tilde{\mathcal{H}}_2 = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2)^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{J}$. При этом спектр

$$\operatorname{sp}(\mathcal{J}\ |_{\mathcal{H}_2}) \subset [-C\beta^3, C\beta^3], \qquad (19)$$

где C—некоторая константа.

Пространство $\mathcal{H}_2$ и оператор $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2/\mathcal{H}_2$, действующий в нем, также допускают разложения

$$\mathcal{H}_2 = \int_{T^\nu} \mathcal{H}_2(P)dP, \ \ \mathcal{J}_2 = \int_{T^\nu} \mathcal{J}_2(P)dP, \qquad (20)$$

аналогичные разложениям (16) и (17),

$$\mathcal{H}_2(P) \subset \mathcal{H}(P), \ \ \mathcal{J}_2(P) = \mathcal{J}(P)/\mathcal{H}_2(P).$$

Как показано в § 6 гл. 2, спектр оператора $\mathcal{H}_2(P)$ состоит из непрерывной (лебеговой) части, заполняющей отрезок значений функции

$$\varepsilon_P(p) = \varepsilon(p)\varepsilon(P-p), \ \ p \in T^\nu, \qquad (20^a)$$

где $\varepsilon(p)$ определено выше, и еще, может быть, конечного числа собственных значений $\tilde{\varepsilon}_1(P), \dots, \tilde{\varepsilon}_s(P)$ с собственными векторами $\varphi_P^{(1)}, \varphi_P \in \mathcal{H}_2(P)$, называемыми связанными состояниями (с полным квазиимпульсом P). Существуют ли в модели Изинга на решетке $Z^{\nu+1}$ при малых значениях β связанные состояния в какой-нибудь области значения полного квазиимпульса P, в общем случае неизвестно. Известно (из явных вычислений Онзагера и Кауфман, см. [47^a]), что при $\nu = 1$ связанных состояний нет и, по-видимому, их нет (при малых β) для $\nu > 2$ (см. § 7 гл. 3). Не исключено, что в случае $\nu = 2$ связанные состояния существуют. Однако, поскольку дальнейшие построения применимы к более или менее произвольной модели, а модель Изинга выбрана в качестве простейшей иллюстрации, мы предположим, отвлекаясь от фактической стороны дела, что в пространстве $\mathcal{H}(P)$ для некоторой области $G \subseteq T^\nu$ значений P существует единственное связанное состояние $\bar{\varphi}_P$ с собственным значением $\bar{\varepsilon}(P)$, расположенным справа от непрерывного спектра

$$\bar{\varepsilon}(P) > \max_{p \in T^\nu} \varepsilon_P(p). \qquad (21)$$

Нахождение и изучение этого собственного значения $\bar{\varepsilon}(P)$ может быть проведено с помощью исследования некоторых аналитических свойств следующей корреляционной функции:

$$s_4(T,T') = \langle\tilde{\sigma}_T, \tilde{\sigma}_{T'}\rangle = \langle\sigma_T\sigma_{T'}\rangle - \langle\sigma_T\rangle\langle\sigma_{T'}\rangle,$$

где $T = (x_1, x_2), T' = (x'_1, x'_2) \subset Z^{\nu+1}$ для двухточечных подмножеств решетки $Z^{\nu+1}$, а

$$\sigma_T = \sigma(x_1)\sigma(x_2), \quad \tilde{\sigma}_T = \sigma_T - \langle \sigma_T \rangle.$$

С помощью разложения монома $\langle \sigma_T \sigma_{T'} \rangle$ (см. [26]) получим, что

$$s_4(T, T') = s_2(x_1 - x'_1)s_2(x_1 - x'_2) +$$

$$+ s_2(x_1 - x'_2)s_2(x_2 - x'_1) + s^c_4(T, T'), \tag{22}$$

где $s_2(x - y)$—корреляционная функция, введенная выше, а $s^c_4(T, T')$— "связная часть"—семиинвариант

$$s^c_4(T, T') = \langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x'_1}, \sigma_{x'_2} \rangle \tag{23}$$

значений поля в точках x_1, x_2, x'_1, x'_2. С помощью обычных кластерных оценок семиинвариантов гиббсовских полей (см. [26]) находим, что

$$| s^c_4(T, T') | < (C\beta)^{d_{T^\nu T'}}, \tag{24}$$

где $d_B, B \subset Z^{\nu+1}$,—длина наименьшего связного графа, построенного на точках множества B (см. гл. 3), а C—константа. Обозначим $\bar{C}^{(2)}_{Z^{\nu+1}} \subset C^{(2)}_{Z^{\nu+1}}$ совокупность "одновременных" двухточечных множеств $T = ((\bar{x}_1, x^{(0)}_1), (\bar{x}_2, x^{(0)}_2))$, т. е. таких, что $x^{(0)}_1 = x^{(0)}_2$. Пусть $l_2(\bar{C}^{(2)}_{Z^{\nu+1}}) = l_2$— гильбертово пространство функций $f = (f(T), T \in \bar{C}^{(2)}_{Z^{\nu+1}})$, а R—оператор, задаваемый формулой

$$(Rf)(T) = \sum_{T' \in \bar{C}^{(2)}_{Z^{\nu+1}}} s_4(T, T')f(T'), \ f \in l_2. \tag{25}$$

Заметим, что в силу представления (22) оценки (24) и оценки $| s_2(x - y) | < (C\beta)^{|x-y|}$ вытекают из представления (2), оператор R является кластерным (с параметром кластерности $C\beta$).

Совершим теперь преобразование Фурье функций из l_2, т. е. рассмотрим функции

$$f(p_1, p_2, k) = \sum_{T = \{(\bar{x}_1, x^{(0)}), (\bar{x}_2, x^{(0)})\}} f(T)e^{-i(\bar{x}_1, p_1) - i(\bar{x}_2, p_2) - ikx^{(0)}}. \tag{26}$$

Легко проверить, что эта функция симметрична по переменным p_1, p_2 и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{p_1 + p_2 = P} f(p_1, p_2, k)dp_1dp_2 = 0 \tag{27}$$

при любых $P \in T^\nu$ и $k \in T^1$. Пространство таких функций обозначим $\tilde{L}_2$. Оператор R перейдет после преобразования Фурье в оператор $\tilde{R}$ в L_2 с ядром

$$\tilde{R}(p_1, p_2, k; p'_1, p'_2, k') = \tilde{s}_2(p_1, k)\tilde{s}_2(p_2, k)\times$$

$$\times\delta(p_1 - p'_1)\delta(p_2 - p'_2)\delta(k - k') + \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)\delta(k - p')\times$$

$$\times\tilde{S}^c_4(p_1, p_2; p'_1, p'_2, k), \tag{28}$$

где $\tilde{S}^c_4(p_1, p_2; p'_1, p'_2, k)$—гладкая функция, определенная на многообразии $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$, а $\tilde{s}_2(p, k)$—преобразование Фурье $s_2(x)$ (функция Грина). Из этой формулы видно, что при разложении пространства $\tilde{L}_2$ в прямой интеграл

$$\tilde{L}_2 = \int\limits_{T^\nu \times T^1} \tilde{L}_2(P, k)dPdk \tag{29}$$

пространств $\tilde{L}_2(P, k)$, состоящих из функций $f(p), p \in T^\nu$, таких, что $f(p) = f(P - p)$ и $\int f(p)dp = 0$, оператор $\tilde{R}$ представится в виде прямого интеграла

$$\tilde{R} = \int\limits_{T^\nu \times T^1} \tilde{R}(P, k)dPdk, \tag{30}$$

где $\tilde{R}(P, k)$ действуют в $\tilde{L}_2(P, k)$ с помощью формулы

$$(\tilde{R}(P, k)f)(p) = \tilde{s}_{P,k}(p)f(p) + \int \tilde{s}^c_{P,k}(p, p')f(p')dp'. \tag{31}$$

Здесь

$$\tilde{s}_{P,k}(p) = \tilde{s}_2(P, k)\tilde{s}(P - p, k)$$

и

$$\tilde{s}^c_{P,k}(p, p') = \tilde{s}_4(p, P - p; p', P - p'; k).$$

Связь между операторами $\tilde{R}(P, k)$ с собственными значениями (21) $\{\bar{\varepsilon}(P), P \in G\}$ устанавливается следующей леммой.

Лемма. *Для любого фиксированного $P \in G$ операторнозначная функция $\tilde{R}(P, k)$ переменного k мероморфна в полосе*

$$|\operatorname{Im} k| < \min_{p_1+p_2=P}\{|\ln\varepsilon(p_1)| + |\ln\varepsilon(p_2)|\} \tag{32}$$

и имеет в этой полосе два полюса в точках

$$\bar{k}_\pm = \pm\,|\ln\bar{\varepsilon}(P)| \tag{33}$$

($\varepsilon(p)$, напомним,—функция, задающая одночастичную ветвь спектра $\mathcal{J}$).

Доказательство. Обозначим $T_{\bar{y}} \subset \bar{C}^{(2)}_{Z^{\nu+1}}$ множество вида

$$T_{\bar{y}} = ((\bar{0},0),(\bar{y},0)),\ \ \bar{y}\in Z^\nu,$$

и напишем разложения

$$\tilde{\sigma}_{T\bar{y}} = h^{(1)}_{T\bar{y}} + h^{(2)}_{T\bar{y}},\ \ \tilde{\sigma}_{T\bar{y}'} = h^{(1)}_{T\bar{y}'} + h^{(2)}_{T\bar{y}'}, \tag{34}$$

где $h^{(1)}_{T\bar{y}}, h^{(1)}_{T\bar{y}'} \in \mathcal{H}_2$, $h^{(2)}_{T\bar{y}}, h^{(2)}_{T\bar{y}'} \in \bar{\mathcal{H}}_2$ (проекции векторов $\tilde{\sigma}_{T\bar{y}}$ и $\tilde{\sigma}_{T\bar{y}'}$ на подпространстве $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ равны нулю).

Таким образом,

$$\langle\tilde{\sigma}_{T\bar{y}}, \tilde{\sigma}_{T\bar{y}'+(\bar{\xi},\xi^0)}\rangle = (U_{\bar{\xi}}\mathcal{J}^{|\xi^{(0)}|}\tilde{\sigma}_{T\bar{y}}, \tilde{\sigma}_{T\bar{y}'})_{\mathcal{H}} =$$

$$= (U_{\bar{\xi}}\mathcal{J}^{|\xi^{(0)}|}h^{(1)}_{T\bar{y}}, h^{(1)}_{T\bar{y}'})_{\mathcal{H}} + (U_{\bar{\xi}}\mathcal{J}^{|\xi^{(0)}|}h^{(2)}_{T\bar{y}}, h^{(2)}_{T\bar{y}'})_{\mathcal{H}} =$$

$$= \int\limits_{T^\nu} e^{i(P,\bar{\xi})}(\mathcal{J}_2^{|\xi^{(0)}|}(P)h^{(1)}_{T\bar{y}}(P), h^{(1)}_{T\bar{y}'}(P))_{\mathcal{H}(P)}dP +$$

$$+ \int\limits_{T^\nu} e^{i(P,\bar{\xi})}(\mathcal{J}_2^{|\xi^{(0)}|}(P)h^{(2)}_{T\bar{y}}(P), h^{(2)}_{T\bar{y}'}(P))_{\mathcal{H}(P)}dP.$$

Здесь $h^{(i)}_{T\bar{y}}(P), h^{(i)}_{T\bar{y}'}(P), i = 1,2$, компоненты векторов $h^{(i)}_{T\bar{y}}, h^{(i)}_{T\bar{y}'}, i = 1,2$, в разложении в прямой интеграл (20). Легко подсчитать, что ядро оператора $\tilde{R}(P,k)$

$$\tilde{R}_{P,k}(p,k') = \sum_{\xi,\xi^0,\bar{\xi},\bar{\xi}'}\langle\tilde{\sigma}_{T\bar{y}}, \tilde{\sigma}_{T\bar{y}'+(\bar{\xi},\xi^0)}\rangle\times$$

$$\times e^{-i(\bar{\xi},P)-ik\xi^0}e^{i(\bar{y},p)-i(\bar{y}',p')} =$$

$$= \sum_{\bar{y},\bar{y}',\xi^{(0)}}(\mathcal{J}_2^{|\xi^{(0)}|}(P)h^{(1)}_{T\bar{y}}(P), h^{(1)}_{T\bar{y}'}(P))_{\mathcal{H}_2(P)}e^{i(\bar{y},p)-i(\bar{y}',p')}e^{-ik\xi^0} +$$

$$+ \sum_{\bar{y},\bar{y}',\xi^{(0)}}(\mathcal{J}_2^{|\xi^{(0)}|}(P)h^{(2)}_{T\bar{y}}(P), h^{(2)}_{T\bar{y}'}(P))_{\mathcal{H}(P)}e^{i(\bar{y},p)-i(\bar{y}',p')}e^{-ik\xi^0}.$$

Как следует из оценки (19), второе слагаемое (при фиксированном P) аналитически продолжается относительно переменной k в полосу $|\operatorname{Im} k| < 3\,|\ln\beta| + \mathrm{const}$. Далее, разложив вектор $h^{(1)}_{T\bar{y}}(P)$

$$h^{(1)}_{T\bar{y}}(P) = C_{\bar{y}}(P)\bar{\varphi}_P + \hat{h}^{(1)}_{T\bar{y}}(P),$$

где $\bar{\varphi}_P$—собственный вектор $\mathcal{J}_2(P)$ с собственным значением $\bar{\varepsilon}(P)$, а $\hat{h}^{(1)}_{T\bar{y}}(P)\perp\bar{\varphi}_P$, и записав аналогичное разложение для $h^{(1)}_{T\bar{y}'}(P)$, мы получим, что

$$\sum_{\xi^{(0)}}(\mathcal{J}_2^{|\xi^{(0)}|}(P)h^{(1)}_{T\bar{y}}(P), h^{(1)}_{T\bar{y}'}(P))_{\mathcal{H}_2(P)}e^{-ik\xi^0} =$$

$$= \sum_{\xi^{(0)}} C_{\bar{y}}(P)\bar{C}_{\bar{y}'}(P)(\bar{\varepsilon}_1(P))^{|\xi^{(0)}|}(P)e^{-ik\xi^0} +$$

$$+ \sum_{\xi^{(0)}}(\mathcal{J}_2^{|\xi^{(0)}|}(P)\hat{h}^{(1)}_{T\bar{y}}(P), \hat{h}^{(1)}_{T\bar{y}'}(P))_{\mathcal{H}_2(P)}e^{-ik\xi^0}.$$

Второе слагаемое аналитично по k в полосе (32), а первое имеет полюсы в точках (33). Лемма доказана.

Для непосредственного нахождения полюсов (33) используют следующий прием. Рассмотрим в l_2 оператор $\tilde{R}^0$ с ядром

$$s_4^0(T,T') = s_2(x_1 - x_1')s_2(x_2 - x_2') + s_2(x_1 - x_2')s_2(x_2 - x_1').$$

Снова переходя к преобразованию Фурье, можем разложить оператор $\tilde{R}^0$ в прямой интеграл операторов $\tilde{R}^0(P,k)$, которые задаются ядрами

$$\tilde{R}^0_{P,k}(p,p') = \tilde{s}_{P,k}(p)\delta(p-p') + s^{0,c}_{P,k}(p,p').$$

Воспользовавшись построениями § 7 гл. 3, нетрудно показать, что $\tilde{R}^0(P,k)$ при фиксированном P аналитически продолжается в полосу (32). Кроме того, можно показать, что операторы $\tilde{R}(P,k)$ и $\tilde{R}^0(P,k)$ обратимы и их разность

$$(\tilde{R}^0(P,k))^{-1} - (\tilde{R}(P,k))^{-1} = K(P,k), \tag{35}$$

является интегральным оператором с гладким ядром $K_{P,k}(p,p')$ аналитическим по переменной k в полосе (32). Из определения (37) следует, что

$$\tilde{R}(P,k) = \tilde{R}^0(P,k) + \tilde{R}(P,k)K(P,k)\tilde{R}^0(P,k),$$

и, следовательно,

$$\tilde{R}(P,k) = (E + K(P,k)\tilde{R}^0(P,k))^{-1}\tilde{R}^0(P,k).$$

Из этой формулы видно, что полюсы (33) $\tilde{R}(P,k)$ совпадают с нулями детерминанта Фредгольма: $\mathrm{Det}(E+K(P,k)\tilde{R}^0(P,k)) = 0$. Ядро $K_{P,k}(p,p')$ называется ядром Бете—Солпитера и может быть представлено в виде ряда по некоторым диаграммам подобно функции $\tilde{I}$, входящей в уравнение Дайсона.

Отыскание связанных состояний в трех-, четырехчастичных и т. д. k-частичных инвариантных подпространствах трансфер-матрицы связано с исследованием ковариаций поля более высокого порядка, которое следует той же схеме, что и в случае двухчастичных связанных состояний. При этом естественно возникает ядро Бете—Солпитера более высокого порядка (см. книгу [12]).

§ 2. Одночастичный спектр трансфер-матрицы гиббсовского поля с неограниченным спином (описание модели и результатов)

В предыдущем параграфе мы видели, что в случае изинговского поля преобразование Фурье $\tilde{s}_2(p,k)$ его ковариации продолжается в виде мероморфной функции от переменной k в некоторую полосу в комплексной плоскости и полюсы $\tilde{s}_2(p,k)$ в этой полосе очень просто связаны с одночастичным спектром трансфер-матрицы. Оказывается, что подобная картина верна и для более широкого класса гиббсовских решетчатых полей. Мы опишем ее в этом параграфе.

Рассмотрим гиббсовскую перестройку свободной (независимой) меры

$$\mu_0 = \lambda_0^{Z^{\nu+1}}, \tag{1}$$

где λ_0—некоторая вероятностная мера на числовой оси R^1. Мы предположим, что перестройка μ_1 задается с помощью взаимодействия

$$U_\Lambda(\xi) = \beta \sum_{x,x'\in\Lambda} \Phi(\xi(x),\xi(x')),\ \xi = \{\xi(x),\ x\in\Lambda\},\ \xi(x)\in R^1, \tag{2}$$

где $\Lambda \subset Z^{\nu+1}$—ограниченное множество, а сумма (2) берется по всем парам соседних точек $x, x' \in \Lambda$. Функция $\Phi(\xi_1,\xi_2)$— вещественная неотрицательная симметрическая функция вещественных переменных ξ_1, ξ_2 с конечными моментами

$$\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} \Phi^n(\xi_1,\xi_2)d\lambda_0(\xi_1)d\lambda_0(\xi_2) < n,\ n = 1,2,\ldots \tag{3}$$

Как следует из результатов книги [26] (см. § 2 гл. 4), при достаточно малых β существует предельная гиббсовская перестройка

$$\mu = \lim_{\Lambda\uparrow Z^{\nu+1}} \mu_\Lambda. \tag{4}$$

При этом случайное поле $\{\xi(x), x\in Z^{\nu+1}\}$ со значениями в R^1 на решетке $Z^{\nu+1}$ и распределением вероятностей μ является марковским.

Пусть φ_1, φ_2—две произвольные вещественные ограниченные функции, определенные на вещественной оси R^1. Рассмотрим корреляцию

$$s_{\varphi_1,\varphi_2}(x) = \langle\varphi_1(\xi(0)),\varphi_2(\xi(x))\rangle =$$

$$= \langle\varphi_1(\xi(0))\varphi_2(\xi(x))\rangle - \langle\varphi_1(\xi(0))\rangle\langle\varphi_2(\xi(x))\rangle, \tag{5}$$

где среднее $\langle\ \rangle = \langle\ \rangle_\mu$ берется по распределению μ. Пусть, далее,

$$\tilde{s}_{\varphi_1,\varphi_2}(p,k) = \sum_{x=(\bar{x},x^{(0)})\in Z^{\nu+1}} s_{\varphi_1,\varphi_2}(x)e^{i(p,\bar{x})+ikx^{(0)}}$$

—преобразование Фурье $s_{\varphi_1,\varphi_2}(x)$—назаваемое обычно функцией Грина.

Рассмотрим далее интегральный оператор $\hat{\Phi}$ в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ с ядром $\Phi(u,v)$

$$(\hat{\Phi}f)u = \int\limits_{R^1} \Phi(u,v)f(v)d\lambda_0(v). \tag{6}$$

Этот оператор симметричен и компактен в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ (в силу условия (3)). Введем оператор $M = (E-P)\hat{\Phi}(E-P)$, где P—проектор в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ на подпространство констант. Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N, \ldots$—система ортонормированных собственных векторов оператора M с ненулевыми собственными значениями $\mu_1, \ldots, \mu_N : |\ \mu_1\ |>|\ \mu_2\ |> \ldots >|\ \mu_N\ |> \ldots$ (мы предполагаем, что все μ_i однократны). Рассмотрим два случая:

1) число собственных значений μ_i конечно: $i = 1, \ldots, N$,

2) их число бесконечно: $i = 1, \ldots, N, \ldots$.

Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 1. *В случае 1) для произвольных ограниченных функций φ_1, φ_2 и достаточно малых β функция $\tilde{s}_{\varphi_1,\varphi_2}(p,k)$ при любом фиксированном $p \in T^\nu$ как функция переменного k продолжается до мероморфной функции в полосе*

$$|\ \mathrm{Im}\, k\ |< 2\ |\ \ln c_1\beta\ |, \tag{7}$$

где константа $c_1 = c_1(\Phi, \lambda_0, \nu)$ не зависит от β. При этом функция Грина $\tilde{s}_{\varphi_1,\varphi_2}(p,k)$ имеет в полосе (7) $2N$ полюсов, расположенных на мнимой оси,

$$k_j^0 = \pm i \ln |\ \varepsilon_j(p)\ |,\ j = 1, \ldots, N, \tag{8}$$

где $\varepsilon_j(p)$—некоторые функции $p \in T^\nu$, причем

$$|\ \varepsilon_j(p) - \mu_j\beta\ |< c_2\beta^2 \tag{9}$$

и константа $c_2 = c_2(\Phi, \lambda_0, \nu)$ не зависит от β.

Теорема 2. *В случае 2) для любого N найдется такое $\beta_0 = \beta_0(N) > 0$, что при всех $0 < \beta < \beta_0(N)$ функция $\tilde{s}_{\varphi_1,\varphi_2}(p,k)$ продолжается по переменной k в полосу*

$$|\ \mathrm{Im}\, k\ |< \ln \frac{2}{(|\ \mu_N\ | + |\ \mu_{N+1}\ |)p} \tag{10}$$

и имеет в ней полюсы в точках (8), причем по-прежнему выполнена оценка (9).

Свяжем теперь описанные нами полюсы $\tilde{s}_{\varphi_1,\varphi_2}(p,k)$ со спектром трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ нашего поля. Обозначим Φ_φ функционал

$$\Phi_\varphi(\xi) = \varphi(\xi(0)) - \langle\varphi(\xi(0))\rangle, \tag{11}$$

где φ—произвольная ограниченная функция, определенная на R^1. Очевидно, что

$$s_{\varphi_1,\varphi_2}(\bar{x}, x^{(0)}) = (U_{\bar{x}}\mathcal{J}^{|x^{(0)}|}\Phi_{\varphi_1}, \Phi_{\varphi_2})_{\mathcal{H}}, \tag{12}$$

где $\{U_{\bar{x}},\ \bar{x} \in Z^\nu\}$—унитарная группа пространственных трансляций, действующая в $\mathcal{H}_{\text{физ}} = \mathcal{H}$. Как и выше, напишем разложение

$$\mathcal{H} = \int \mathcal{H}(p)dp,\ \ \mathcal{J} = \int \mathcal{J}(p)dp, \tag{13}$$

где $\mathcal{H}(p)$—собственные подпространства для группы $\{U_{\bar{x}},\ \bar{x} \in \in\ Z^\nu\}$ с собственными значениями $\exp\{i(p,\bar{x})\}$. Тогда правая часть (12) примет вид

$$(U_{\bar{x}}\mathcal{J}^{|x^{(0)}|}\Phi_{\varphi_1}, \Phi_{\varphi_2})_{\mathcal{H}} =$$

$$= \int\limits_{T^\nu} e^{i(p,\bar{x})}(\mathcal{J}^{|x^{(0)}|}(p)\Phi_{\varphi_1}(p), \Phi_{\varphi_2}(p))_{\mathcal{H}_p}dp = \tag{14}$$

$$= \int\limits_{T^\nu} e^{i(p,\bar{x})} \int_{-1}^{1} u^{|x^{(0)}|} d\rho^{(p)}_{\varphi_1,\varphi_2}(\mu),$$

где $\Phi_{\varphi_i}(p) \in \mathcal{H}(p)$, $i = 1, 2$,—компонента вектора Φ_{φ_i} в разложении (13), а

$$\rho^{(p)}_{\varphi_1,\varphi_2}(\mu) = (E_p(\mu)\Phi_{\varphi_1}(p), \Phi_{\varphi_2}(p))_{\mathcal{H}(p)} \tag{15}$$

—спектральная мера, соответствующая элементам $\Phi_{\varphi_1}(p)$, $\Phi_{\varphi_2}(p)$ и порожденная спектральным семейством проекторов $\{E_p(\mu)\}$ для самосопряженного оператора $\mathcal{J}(p)$, действующего в пространстве $\mathcal{H}(p)$. Из представлений (12), (14) и (15) получаем, что

$$\tilde{s}(p,k) = \int\limits_{-1}^{1} (\sum_{x^0 \in Z^1} u^{|x^{(0)}|} e^{-ikx^{(0)}}) d\rho^{(p)}_{\varphi_1,\varphi_2}(\mu) =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (1 + \frac{\mu}{e^{ikx^{(0)}} - \mu} + \frac{\mu}{e^{-ikx^{(0)}} - \mu}) d\rho^{(p)}_{\varphi_1,\varphi_2}(\mu).$$

Из полученной формулы и теорем 1 и 2 следует, что при любых φ_1 и φ_2 и любом фиксированном p носитель меры $\rho^{(p)}_{\varphi_1,\varphi_2}(\mu)$ сосредоточен в точках $\varepsilon_1(p), \ldots, \varepsilon_N(p)$, а также внутри отрезка

$$|\ \mu\ |< C_1\beta^2 \tag{16}$$

в случае 1) или

$$| \mu |< \frac{| \mu_{N+1} | + | \mu_N |}{2}\beta \tag{17}$$

в случае 2).

Если мы обозначим $\hat{\mathcal{H}}(p) \subset \mathcal{H}(p)$ минимальное замкнутое инвариантное относительно $\mathcal{J}(p)$ подпространство, содержащее функционалы $\Phi_\varphi(p)$, то из полученного результата видно, что в пространстве $\hat{\mathcal{H}}(p)$ существует N собственных векторов $\psi_1(p), \ldots, \psi_N(p)$ трансфер-матрицы с собственными значениями $\varepsilon_1(p), \ldots, \varepsilon_N(p)$, а в ортогональном дополнении к этим векторам спектр $\mathcal{J}(p)$ заключен в отрезках (16) или (17). Очевидно, что пространства

$$\mathcal{H}_j = \int \{C\psi_j(p)\} dp \subset \mathcal{H}, \ \ j = 1, \ldots, N,$$

где $\{C\psi_j(p)\}$—одномерные подпространства, натянутые на $\psi_j(p)$, являются одночастичными инвариантными подпространствами оператора $\mathcal{J}$ и группы $\{U_{\bar{x}}, \bar{x} \in Z^\nu\}$.

Замечание. По-видимому, во всем ортогональном дополнении к сумме пространств $\mathcal{H}_j$ спектр трансфер-матрицы $\mathcal{J}$ также имеет порядок $O(\beta^2)$ (в случае 1). Иными словами, это означает, что минимальное замкнутое инвариантное подпространство трансфер-матрицы $\mathcal{J}$, содержащее все функционалы $\{U_{\bar{x}}\Phi_\varphi\}$, содержит спектральное подпространство $E([-1,1]\backslash[-C\beta^2, C\beta^2])\mathcal{H}$ где $\{E(\Delta), \Delta \subset [-1,1]\}$—отрезок)—спектральное семейство проекторов $\mathcal{J}$. Существует более общая гипотеза. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что минимальное инвариантное подпространство $\mathcal{J}$, содержащее мономы вида

$$U_{\bar{x}_1}\Phi_{\varphi_1}U_{\bar{x}_2}\Phi_{\varphi_2}\ldots U_{\bar{x}_n}\Phi_{\varphi_n}, \tag{18}$$

содержит $E([-1,1]\backslash[-\varepsilon,\varepsilon])\mathcal{H}$ (полнота полиномиальных состояний). Этот вопрос, а также проблема нахождения двух-, трех- и т. д. k-частичных подпространств трансфер-матрицы связаны с изучением корреляций мономов вида (18) (т. е. корреляционных функций поля более высокого порядка, как это объяснялось в предыдущем параграфе). При этом естественно возникают ядра Бете—Солпитера, с помощью которых находятся и изучаются связанные состояния в k-частичных пространствах. Эта программа в некоторых своих частях была выполнена применительно к моделям квантового непрерывного эвклидова поля $p(\varphi_2)$ (см. книгу [12]).

§ 3. Кластерное разложение ковариационных операторов

Остальная часть этой главы посвящена доказательству теорем 1 и 2. В этом параграфе мы установим нужное нам кластерное разложение для корреляции $s_{\varphi_1,\varphi_2}(x)$, в следующем выведем уравнение Дайсона, аналогичное уравнению (12.1) из § 1; наконец, с помощью этого уравнения в последнем параграфе мы доказываем обе эти теоремы 1 и 2.

Итак, займемся кластерным разложением корреляции $s_{\varphi_1,\varphi_2}(x)$ при малых β. Для этого рассмотрим граф $\mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ с вершинами в точках решетки $Z^{\nu+1}$, где ребрами являются всевозможные пары соседних точек (x, x') решетки $Z^{\nu+1}$. Для каждого связного конечного подграфа $\Gamma \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ определим величины

$$K_\Gamma = \langle \prod_{(y,y')\in\Gamma} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y), \xi(y'))\} - 1)\rangle_0,$$

$$K_\Gamma(x;\varphi) = \langle\varphi(\xi(x)) \prod_{(y,y')\in\Gamma} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y), \xi(y'))\} - 1)\rangle_0,$$

$$(\langle \ \rangle_0 = \langle \ \rangle_{\mu_0}),$$

и

$$K_\Gamma(x_1, x_2; \varphi_1, \varphi_2) = \langle\varphi_1(\xi(x_1))\varphi_2(\xi(x_2))\times$$

$$\times \prod_{(y,y')\in\Gamma} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y), \xi(y'))\} - 1)\rangle_0,$$

x, x_1, $x_2 \in \tilde{\Gamma}$, φ, φ_1, φ_2—ограниченные функции. Здесь и всюду далее $\tilde{\Gamma}$ мы обозначаем множество вершин графа Γ.

Тогда (см. книгу [26]) при достаточно малых $\beta > 0$

$$\langle\varphi_1(\xi(0)), \varphi_2(\xi(x))\rangle_\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\{ \sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n}{}' \frac{1}{n!}\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n)\times$$

$$\times K_{\Gamma_0}(0, x; \varphi_1, \varphi_2)K_{\Gamma_1}\ldots K_{\Gamma_n} + \sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n+1}}{}'' \frac{1}{n!}\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_{n+1})\times$$

$$\times K_{\Gamma_0}(0,\varphi_1)K_{\Gamma_1}\dots K_{\Gamma_n}K_{\Gamma_{n+1}}(x,\varphi_2), \qquad (1)$$

где в $\sum'$ суммирование идет по всем упорядоченным наборам конечных связных графов $\Gamma_0,\dots,\Gamma_n \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ таких, что $0, x \in \tilde{\Gamma}_0$ и граф $\Gamma_0 \bigcup \dots \bigcup \Gamma_n$ связен; в $\sum''$ суммирование идет по всем упорядоченным наборам конечных связных графов $\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1} \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ таких, что $0 \in \tilde{\Gamma}_0, x \in \tilde{\Gamma}_{n+1}$ и граф $\Gamma_0 \bigcup \dots \bigcup \Gamma_{n+1}$ связен, и для любых $\Gamma_0,\dots,\Gamma_n$

$$\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_n) = \sum_G{}^{(\text{св})}(-1)^{|G|},$$

где суммирование идет по всем связным графам G с множеством вершин $\{0,\dots,n\}$ и ребрами $(i,j), 0 \le i < j \le n$, где $(i,j) \in G$ только в том случае, если $\tilde{\Gamma}_i \bigcap \tilde{\Gamma}_j \neq \emptyset$, $|\,G\,|$—число ребер графа G.

Доказательство абсолютной сходимости ряда (1) при достаточно малых β прямо следует общей теории кластерных разложений для корреляционных функций (см. [26], гл. 3) с использованием кластерных оценок, полученных в [26], §2 гл. 4, а также оценок, которые легко следуют из положительности Φ:

$$|\,K_\Gamma(x;\varphi)\,| < \|\,\varphi\,\|_{L_2}|\,K_{\Gamma'}\,|, \qquad (2)$$

где $\|\ \|_{L_2}$ означает норму в $L_2(R^1, d\lambda_0)$, а граф $\Gamma' \subset \Gamma$ содержит все ребра графа Γ, за исключением тех, которые выходят из вершины $x \in \tilde{\Gamma}$, и

$$|\,K_\Gamma(x_1,x_2;\varphi_1,\varphi_2)\,| \le \|\,\varphi_1\,\|_{L_2}\|\,\varphi_2\,\|_{L_2}|\,K_{\Gamma''}\,|, \qquad (3)$$

где $\Gamma'' \subset \Gamma$—граф, содержащий все ребра графа Γ, за исключением тех, которые выходят из вершин $x_1 \in \tilde{\Gamma}$ и $x_2 \in \tilde{\Gamma}$.

Зафиксируем $\beta_0 > 0$ такое, что при всех $\beta \in (0, \beta_0)$, ряд (1) абсолютно сходится.

Всюду далее мы будем предполагать, что $0 < \beta < \beta_0$.

Для функции $\varphi_{\text{св}}(\dots)$ далее нам понадобится следующая оценка:

$$|\,\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_n)\,| \le |\,\mathcal{J}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_n)\,| \qquad (4)$$

для любых $\Gamma_0,\dots,\Gamma_n \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$, где $\mathcal{J}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_n)$—множество всех деревьев с вершинами $\{0,1,\dots,n\}$ и ребрами (i,j), $0 \le i < j \le n$, где $\tilde{\Gamma}_i \bigcap \tilde{\Gamma}_j \neq \emptyset$. Для величин K_Γ, где $\Gamma \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$, $|\,\Gamma\,| < \infty$, в [26], §2 гл. 4 была получена оценка

$$|\,K_\Gamma\,| < (c\beta)^{\gamma|\Gamma|}, \qquad (5)$$

где $\gamma = \frac{1}{\nu+1}, c > 0$—некоторая константа.

Из (2), (3), (4) и (5), в частности, следует, что при достаточно малых $\beta > 0, \beta < \beta_0$

$$|\,\langle\varphi_1(\xi(0)), \varphi_2(\xi(x))\rangle\,| \le \|\,\varphi_1\,\|_{L_2}\|\,\varphi_2\,\|_{L_2}\, c_2(c_1\beta)^{\gamma|x|}, \qquad (6)$$

где $c_1, c_2 > 0$—некоторые константы, для любых φ_1, φ_2 (см. [26], § 3, гл. 3).

Рассмотрим ситему ковариационных операторов $\hat{S}_x, x \in Z^{\nu+1}$ в $L_2(R^1, d\lambda_0)$, где для каждого $x \in Z^{\nu+1}$ оператор $\hat{S}_x$ определяется равенством

$$\langle\varphi_1, S_x\varphi_2\rangle = \langle\varphi_1(\xi(0)), \overline{\varphi_2(\xi(x))}\rangle, \ \ \varphi_1, \varphi_2 \in L_2(R^1, d\lambda_0),$$

($(\cdot,\cdot)$—скалярное произведение в $L_2(R^1, d\lambda_0)$).

Легко видеть, что для каждого $x \in Z^{\nu+1}$ оператор $\hat{S}_x$ самосопряжен, и в силу (6)

$$\|\,\hat{S}_x\,\| < \text{const}(c_1\beta)^{\gamma|x|}.$$

Выпишем кластерное разложение для операторов $\hat{S}_x, x \in Z^{\nu+1}$. Для этого рассмотрим для каждого конечного связного графа $\Gamma \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ условные математические ожидания по свободной мере μ_0

$$k_\Gamma(x;u) = \langle \prod_{(y,y')\in\Gamma} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y),\xi(y'))\} - 1) \mid \xi(x) = u\rangle_0$$

и

$$k_\Gamma(x,x';u,u') =$$

$$= \langle \prod_{(y,y')\in\Gamma} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y),\xi(y'))\} - 1) \mid \xi(x) = u, \xi(x') = u'\rangle_0.$$

Легко видеть, что в силу условия $\Phi(u,v) > 0$

$$k_\Gamma(x;\cdot) \in L_2(R^1, d\lambda_0),$$

$$k_\Gamma(x,x';\cdot,\cdot) \in L_2(R^1, d\lambda_0 \times d\lambda_0) \text{ при } x \neq x'.$$

Положим также

$$k_\Gamma(x,x';u,u') = \delta_{uu'}k_\Gamma(x;u),$$

где $\delta_{uu'}$—δ-функция в пространстве $L_2(R^1, d\lambda_0)$:

$$\int\limits_{R^1} \delta_{u,u'}\psi(u')d\lambda_0(u') = \int\limits_{R^1} \delta_{u',u}\psi(u')d\lambda_0(u') = \psi(u).$$

Пусть $\hat{k}_\Gamma(x, x')$—интегральный оператор в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ с ядром

$$k_\Gamma(x, x'; u, u'), \quad u, u' \in R^1,$$

и пусть $\hat{k}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(x, x')$—интегральный оператор в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ с ядром $k_{\Gamma_1}(x; u)k_{\Gamma_2}(x'; u')$. Тогда из (1) при достаточно малых $\beta > > 0$, $\beta < \beta_0$ для любого $x \in Z^{\nu+1}$ получим, что

$$\hat{S}_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ {\sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n}}' \varphi_{\text{св}}(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n)\hat{k}_{\Gamma_0}(0, x)K_{\Gamma_1} \ldots K_{\Gamma_n} + \right.$$

$$\left. + {\sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n+1}}}'' \varphi_{\text{св}}(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_{n+1})K_{\Gamma_1} \ldots K_{\Gamma_n}\hat{k}_{\Gamma_0,\Gamma_{n+1}}(0, x) \right\}, \tag{7}$$

или для ядра $S_x(u, u')$, $u, u' \in R^1$, интегрального оператора $\hat{S}_x$, $x \in Z^{\nu+1}$,

$$S_x(u, u') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ {\sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n}}' \varphi_{\text{св}}(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n)k_{\Gamma_0}(0, x; u, u')K_{\Gamma_1} \ldots K_{\Gamma_n} + \right.$$

$$\left. + {\sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n+1}}}'' \varphi_{\text{св}}(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_{n+1})k_{\Gamma_0}(0, u)K_{\Gamma_1} \ldots K_{\Gamma_n}k_{\Gamma_{n+1}}(x, u') \right\}, \tag{8}$$

где суммирование такое же, как и в (1).

Далее нам понадобятся следующие оценки для функций

$$k_\Gamma(x, x'; \cdot, \cdot), k_\Gamma(x; \cdot), \Gamma \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1}), \ x, x' \in \tilde{\Gamma}.$$

Утверждение 1. *Найдется такое* $b_1 > 0$, *что*

1) *для любого конечного графа* $\Gamma \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ *выполнены неравенства*

$$\| k_\Gamma(x, x'; \cdot, \cdot) \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)} < (b_1\beta)^{|\Gamma|}$$

для всех $x, x' \in \tilde{\Gamma}$, $x \neq x'$,

$$\| k_\Gamma(x, \cdot) \|_{L_2(R^2, d\lambda_0)} < (b_1\beta)^{|\Gamma|}$$

для любого $x \in \tilde{\Gamma}$ *и*

$$\sup_{u \in R^1} | k_\Gamma(x, u) | < (b_1\beta)^{|\Gamma| - 2(\nu+1)}$$

для любого $x \in \tilde{\Gamma}$;

2) *для любых конечных графов* $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ *и любых* $x_1 \in \in \tilde{\Gamma}_1$ *и* $x_2 \in \tilde{\Gamma}_2$, $| x_1 - x_2 | = 1$,

$$\| k_{\Gamma_1}(x_1; \cdot) \otimes k_{\Gamma_2}(x_2; \cdot)(\exp\{\cdot\beta\Phi(\cdot, \cdot)\} - 1) \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)} \leq$$

$$\leq (b_1\beta)^{|\Gamma_1| + |\Gamma_2| + 1},$$

где

$$(k_{\Gamma_1}(x_1; \cdot) \otimes k_{\Gamma_2}(x_2; \cdot))(u_1, u_2) = k_{\Gamma_1}(x_1; u_1)k_{\Gamma_2}(x_2; u_2), u_1, u_2 \in R^1.$$

Доказательство. Для доказательства заметим, что

$$\| k_\Gamma(x, \cdot) \|_{L_2(R^2, d\lambda_0)} \leq \| k_\Gamma(x, x'; \cdot, \cdot) \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)} \leq$$

$$\leq (\langle \prod_{(y,y') \in \Gamma} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y), \xi(y'))\} - 1)^4 \rangle_0)^{1/4},$$

$$\sup_{u \in R^1} | k_\Gamma(x, u) | \leq \text{const}(\langle {\prod_{(y,y') \in \Gamma}}' (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y), \xi(y'))\} - 1)^2 \rangle_0)^{1/2},$$

где в $\prod'$ произведение идет по всем тем ребрам $(y, y') \in \Gamma$, которые не входят в точку $x \in \tilde{\Gamma}$, и

$$\| (k_{\Gamma_1}(x_1; \cdot) \otimes k_{\Gamma_2}(x_2; \cdot))(\exp\{-\beta\Phi(\cdot, \cdot)\} - 1) \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)} \leq$$

$$\leq (\langle \prod_{(y,y') \in \Gamma_1} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y), \xi(y'))\} - 1)^4 \rangle_0)^{1/4} \times$$

$$\times (\langle (\exp\{-\beta\Phi(\xi(x_1), \xi(x_2))\} - 1)^4 \rangle_0)^{1/4} \times$$

$$\times (\langle \prod_{(y,y') \in \Gamma} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y), \xi(y'))\} - 1)^4 \rangle_0)^{1/4}.$$

Таким образом, для доказательства утверждения 1 достаточно показать, что для любого конечного связного графа $\Gamma \subset \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$

$$(\langle \prod (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y), \xi(y'))\} - 1)^4 \rangle_0)^{1/4} \leq (b_1\beta)^{|\Gamma|}, \tag{9}$$

где $b_1 = \mathrm{const} > 0$.

Для доказательства неравенства (9) удобно ввести понятие размерности графа $\Gamma \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$.

Определение 1. Будем говорить, что граф $\Gamma \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ *имеет размерность, равную* n, $0 \le n \le \nu+1$, если n есть наименьшее из всех m, $0 \le m \le \nu+1$, для которых граф Γ гомеоморфен $\Gamma' \subset \mathcal{L}(Z^m)$.

Для доказательства (9) рассмотрим следующую лемму.

Лемма 1. *Для любого конечного графа* $\Gamma \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ *имеет место неравенство*

$$(\langle \prod_{(y,y')\in\Gamma} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y),\xi(y'))\} - 1)^{2^m}\rangle_0)^{2^{-m}} \le$$

$$\le \prod_{(y,y')\in\Gamma} ((\langle(\exp\{-\beta\Phi(\xi(y),\xi(y'))\} - 1)^{2^{m+n}}\rangle_0)^{2^{-m-n}}.$$

Доказательство леммы 1. Приведем доказательство этой леммы индукцией по числу $n = 1, \ldots, \nu+1$. В случае, когда граф $\Gamma \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1}), \mid \Gamma \mid < \infty$ имеет размерность $n = 1$, доказательство очевидно. Действительно, пронумеруем вершины графа Γ в порядке соединения их ребрами. Пусть $\tilde{\Gamma} = (y_1, \ldots, y_{|\tilde{\Gamma}|}), \Gamma = \{(y_1, y_2), \ldots, (y_{|\tilde{\Gamma}|-1}, y_{|\tilde{\Gamma}|})\}$. Здесь точки $y_1, \ldots, y_{|\tilde{\Gamma}|}$ попарно различны, и

$$\mid y_{j+1} - y_j \mid = 1, j = 1, \ldots, \mid \tilde{\Gamma} \mid -1.$$

Легко видеть, что

$$(\langle \prod_{j=1}^{|\tilde{\Gamma}|-1} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y_j),\xi(y_{j+1}))\} - 1)^{2^m}\rangle_0)^{2^{-m}} \le$$

$$\le (\langle \prod_j{}^{(1)} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y_j),\xi(y_{j+1}))\} - 1)^{2^{m+1}}\rangle_0)^{2^{-m-1}} \times$$

$$(\langle \prod_j{}^{(2)} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y_j),\xi(y_{j+1}))\} - 1)^{2^{m+1}}\rangle_0)^{2^{-m-1}} \le$$

$$\le \prod_{j=1}^{|\tilde{\Gamma}|-1} ((\langle(\exp\{-\beta\Phi(\xi(y_j),\xi(y_{j+1}))\} - 1)^{2^{m+1}}\rangle_0)^{2^{-m-1}},$$

где в $\prod^{(1)}$ произведение берется по всем нечетным $j : 1 \le j \le \le \mid \tilde{\Gamma} \mid -1$, а в $\prod^{(2)}$—по всем четным $j : 1 \le j \le \mid \tilde{\Gamma} \mid -1$. Таким образом, в случае $n = 1$ лемма 1 доказана.

Пусть $n > 1$, и пусть граф $\Gamma \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ имеет размерность, равную n. Разобьем его на подграфы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ так, чтобы любые два графа из $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ не имели бы общих ребер, любые два графа из $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ с четными номерами так же, как и любые два графа с нечетными номерами, не имели бы общих вершин и размерность каждого из графов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ была бы меньше n.

В случае $n = 2$ это можно сделать, например, разрезав каждый узел решетки Z^2 на два узла, где один соединяет правое и верхнее ребро, а другой— левое и нижнее. При этом граф $\Gamma' \subset \mathcal{L}(Z^2)$, гомеоморфный графу Γ, распадается на некоторое число подграфов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ размерностью 1, где для каждого $j = 1, \ldots, k$ граф Γ_j может иметь общие вершины лишь с графом Γ_{j-1} при $j > 1$ и с Γ_{j+1} при $j < k$.

Аналогично в случае $n > 2$ разрежем каждый узел Z^n, соединяющий ребра $(y - e_j, y)$, $(y, y + e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, где $e_j = = (e_j^{(1)}, \ldots, e_j^{(n)}), e_j^i = \delta_{ij}, j = 1, \ldots, n$, на два узла, где один соединяет ребра $(y - e_j, y), j = 1, \ldots, n$, а другой—ребра $(y, y + e_j), j = 1, \ldots, n$. При этом граф $\Gamma' \subset \mathcal{L}(X^n)$, гомеоморфный графу Γ, распадается на некоторое число подграфов размерностью $< n, \Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_N$, где для каждого $j, 1 \le j \le N$, граф Γ'_j может иметь общие вершины лишь с графом Γ'_{j-1} при $j > 1$ и с Γ'_{j+1} при $j < N$.

Разбиение графа Γ на подграфы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ определяется согласно гомеоморфизму

$$\rho : \Gamma \to \Gamma',$$

$$\rho : \Gamma_j \to \Gamma'_j, j = 1, \ldots, N.$$

Легко видеть, что для любого $m \in Z_+, m \ge 1$,

$$(\langle \prod_{(y,y')\in\Gamma} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y),\xi(y'))\} - 1)^{2^m}\rangle_0)^{2^{-m}} \le$$

$$\le (\langle \prod_j^{(1)} \prod_{(y,y')\in\Gamma_j} (\exp\{-\beta\Phi(\xi(y),\xi(y'))\} - 1)^{2^{m+1}}\rangle_0)^{2^{-m-1}} \times$$

$$\times(\langle\prod_j^{(2)}\prod_{(y,y')\in\Gamma_j}(\exp\{-\beta\Phi(\xi(y),\xi(y'))\}-1)^{2^{m+1}}\rangle_0)^{2^{-m-1}}=$$

$$=\prod_{j=1}^{N}(\langle\prod_{(y,y')\in\Gamma_j}(\exp\{-\beta\Phi(\xi(y),\xi(y'))\}-1)^{2^{m+1}}\rangle_0)^{2^{-m-1}}, \qquad (10)$$

где произведение $\prod^{(1)}$ идет по всем графам из $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_N$ с нечетными номерами, а $\prod^{(2)}$—по всем графам из $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_N$ с четными номерами.

Из (10) индукцией по числу n получим утверждение леммы 1 для любого $n\in Z_+, n\geq 1$. Лемма 1 доказана.

Теперь для того, чтобы завершить доказательство утверждения 1 достаточно воспользоваться леммой 1 и неравенством

$$(\langle(\exp\{-\beta\Phi(\xi(y),\xi(y'))\}-1)^{2^{n+2}}\rangle_0)^{2^{-n-2}}\leq b_1\beta,$$

$$1\leq n\leq\nu+1,$$

где

$$b_1=\max_{k=1,\ldots,\nu+3}(\langle(\Phi(\xi(y),\xi(y')))^{2^k}\rangle_0)^{2^{-k}},$$

которое выполнено в силу условий $\Phi(u,v)\geq 0$ и (3.2). Утверждение 1 доказано.

В качестве следствия из утверждения 1 получим следующее утверждение.

Утверждение 2. *Для любого $x\in Z^{\nu+1}$ при достаточно малых $\beta>0$*

$$\|\hat{S}_x\|<c_2(b_2\beta)^{|x|},$$

где

$$|x|=\sum_{j=1}^{\nu+1}|x^{(j)}|,\ x=(x^{(1)},\ldots,x^{(\nu+1)}),$$

b_2, c_2*—некоторые положительные константы.*

Доказательство. Заметим, что для любого конечного графа $\Gamma\subset\mathcal{L}(Z^{\nu+1})$

$$K_\Gamma=\langle k_\Gamma(x;\xi(x))\rangle_0, x\in\tilde{\Gamma},$$

и, следовательно, в силу утверждения 1

$$|K_\Gamma|\leq(b_1\beta)^{|\Gamma|}. \qquad (11)$$

Доказательство утверждения 2 теперь, с использованием оценок (4) и (11) и утверждения 1, проводится стандартным образом.

§4. Уравнения Дайсона для ковариационных операторов

Утверждение 1. *При достаточно малом β, $0<\beta<\beta_1$, операторы $\hat{S}_x$ удовлетворяют системе уравнений*

$$\hat{S}_x=I_x+\sum_{\substack{y,y'\in Z^{\nu+1}\\|y-y'|=1}}I_y\hat{F}\hat{S}_{x-y'}, \qquad (1)$$

где $\hat{F}$—интегральный оператор в $L_2(R,d\lambda_0)$ с ядром $F(u,v)=$ $=\exp\{-\beta\Phi(u,v)\}-1$, $u,v\in R^1$, и $\{I_y, y\in Z^{\nu+1}\}$— линейные ограниченные самосопряженные операторы в $L_2(R,d\lambda_0)$, удовлетворяющие следующим условиям:

а) для всех $y\in Z^{\nu+1}$, $y\neq 0$, I_y—интегральный оператор в $L_2(R,d\lambda_0)$ с ядром $I_y(u,v)$ таким, что

$$I_y(\cdot,\cdot)\in L_2(R,d\lambda_0\times d\lambda_0), \qquad (2)$$

$$\|I_y(\cdot,\cdot)\|_{L_2(R,d\lambda_0\times d\lambda_0)}\leq c_3(b_3\beta)^{2|y|},$$

где c_3, b_3—некоторые положительные константы,

б) при $y=0$ $I_0=I_0'+I_0''+P_0$, где I_0'—оператор умножения на ограниченную функцию $I_0'(u)$

$$I_0'(\cdot):R\to R$$

и

$$\|I_0'F\|<(b_3\beta)^2, \qquad (3)$$

I_0''—интегральный оператор в $L_2(R,d\lambda_0)$ с ядром $I_0''(u,v)$,

$$I_0''(\cdot,\cdot)\in L_2(R,d\lambda_0\times d\lambda_0)$$

и

$$\|I_0''\|\leq b_3\beta, \qquad (4)$$

P_0—ортогональный проектор в $L_2(R,d\lambda_0)$ на подпространство, ортогональное подпространству констант в $L_2(R,d\lambda_0)$:

$$P_0f=f-\langle f\rangle_0,\ f\in L_2(R,d\lambda_0),$$

в) для любого $y \in Z^{\nu+1}$

$$I_y\mathbf{1} = 0, \ \mathbf{1} \in L_2(R, d\lambda_0), \ \mathbf{1}(u) = 1, \ u \in R.$$

Доказательство. Здесь мы будем рассматривать всевозможные графы с ребрами из $\mathcal{L}(Z^{\nu+1})$, где допускается существование кратных ребер. Обозначим множество всех таких конечных связных графов $\mathfrak{A}$.

Определение 1. Произвольный конечный связный граф $D \in \mathfrak{A}$, у которого выделены две вершины $y, y' \in \tilde{D}$($\tilde{D}$— множество вершин графа D), назовем *диаграммой* и обозначим $D(y, y')$. При этом $D(y, y') \neq D(y', y)$. Вершину y диаграммы $D(y, y')$ назовем первой, вершину y'—последней.

Для каждой диаграммы $D(y, y')$ определим интегральный оператор $R_{D(y,y')}$ в $L_2(R, d\lambda_0)$ с ядром

$$R_{D(y,y')}(u,v) = \sum_n \{ \sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_n}{}' \frac{1}{n!} \varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_n) \times$$

$$\times k_{\Gamma_0}(y,y';u,v) K_{\Gamma_1} \dots K_{\Gamma_n} + \sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1}}{}'' \frac{1}{n!} \times$$

$$\times \varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1}) k_{\Gamma_0}(y;u) K_{\Gamma_1} \dots K_{\Gamma_n} k_{\Gamma_{n+1}}(y';v)\}, \quad . \qquad (5)$$

где в $\sum'$ суммирование идет по всевозможным упорядоченным наборам связных графов $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n$ с ребрами кратности единица, где $y \in \tilde{\Gamma}_0, y' \in \tilde{\Gamma}_0$, и объединение $\Gamma_0 \bigcup \dots \bigcup \Gamma_n$ с учетом кратности ребер есть $D, | \Gamma_j | \geq 1$ при $1 \leq j \leq n$ и Γ_0 может состоять из одной только вершины, если $y = y'$, и аналогично в $\sum''$ суммирование по всевозможным упорядоченным наборам графов $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{n+1}$ с ребрами кратности единица, где $y \in \tilde{\Gamma}_0, y' \in \tilde{\Gamma}_{n+1}$, объединение графов $\Gamma_0 \bigcup \dots \bigcup \Gamma_{n+1}$ с учето кратности ребер есть $D, | \Gamma_j | \geq 1$, $j = 1, \dots, n$, и Γ_0, Γ_{n+1} могут состоять из одной вершины y и y' соответственно.

Лемма 1. 1) *При* $y \neq y', y, y' \in Z^{\nu+1}, R_{D(y,y')}(\cdot,\cdot) \in$ $\in L_2(R, d\lambda_0 \times d\lambda_0)$ *для любой диаграммы* $D(y,y')$, *и для любого* $N \in Z_+$

$$\sum_{D(y,y')}^{(N)} \| R_{D(y,y')} \| \leq c_4(b_4\beta)^N, \qquad (6)$$

где в $\sum^{(N)}$ *суммирование идет по всевозможным диаграммам*

$D(y,y')$ *с фиксированными вершинами* y *и* y', *где число ребер графа* $D(y,y')$ *с учетом их кратности равно*

$$| D |= N,$$

c_4, b_4*—некоторые положительные константы.*

2) *При* $y = y', y \in Z^{\nu+1}$, *для любой диаграммы* $D(y,y)$

$$R_{D(y,y)} = R'_{D(y,y)} + R''_{D(y,y)},$$

где $R'_{D(y,y)}$*—оператор умножения в* $L_2(R, d\lambda_0)$ *на ограниченную функцию* $r_{D(y,y)}(\cdot) : R^1 \to R^1, R''_{D(y,y)}$*—интегральный оператор в* $L_2(R, d\lambda_0)$ *с ядром* $R''_{D(y,y)}(u,v) \in L_2(R, d\lambda_0 \times d\lambda_0)$ *и*

$$\sum_{D(y,y)}^{(N)} \sup_{u \in R^1} | r_{D(y,y)}(u) |< c_4(b_4\beta)^{N-2(\nu+1)}, \qquad (7)$$

$$\sum_{D(y,y)}^{(N)} \| R''_{D(y,y)} \| \leq c_4(b_4\beta)^N, \qquad (8)$$

для любого $N \in Z_+$.

3) *Для любых* $y, y' \in Z^{\nu+1}$, $| y - y' |= 1$, $N_1, N_2 \in Z_+$

$$\sum_{D_1(y,y)}^{(N_1)} \sum_{D_2(y',y')}^{(N_2)} \| R'_{D_1(y,y)} \hat{F} \hat{R}'_{D_2(y',y')} \| \leq c_4(b_4\beta)^{N_1+N_2+1}, \qquad (9)$$

где $\hat{F}$*—интегральный оператор в* $L_2(R^1, d\lambda_0)$ *с ядром*

$$\exp\{-\beta\Psi(u,v)\} - 1.$$

4) *Для любой диаграммы* $D(y,y')$, $y, y' \in Z^{\nu+1}$,

$$R_{D(y,y')}\mathbf{1} = 0.$$

Доказательство леммы 1. Пусть $R'_{D(y,y)}$–оператор умножения в $L_2(R^1, d\lambda)$ на функцию

$$r_{D(y,y)}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_n}{}' \varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_n) k_{\Gamma_0}(y;u) K_{\Gamma_1} \dots K_{\Gamma_n},.$$

а $R''_{D(y,y)}$—интегральный оператор в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ с ядром

$$R''_{D(y,y)}(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1}}{}'' \varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1}) k_{\Gamma_0}(y;u) \times$$

$$\times K_{\Gamma_1}\ldots K_{\Gamma_n} k_{\Gamma_{n+1}}(y';v),$$

где суммирование в $\sum'$ и в $\sum''$ такое же, как и в (5). Все суммы здесь конечны и функция $k_\Gamma(y;v)$ ограничена для любого конечного $\Gamma\subset\mathcal{L}(Z^{\nu+1})$, и $y\in\tilde{\Gamma}$, (см. утверждение 1.3), следовательно, функции $r_{D(y,y)}(\cdot)$ и $R''_{D(y,y)}(\cdot,\cdot)$ ограничены, и операторы $R'_{D(y,y)}$ и $R''_{D(y,y)}$ в $L_2(R^1,d\lambda_0)$ определены. В силу (5) $R_{D(y,y)}=R'_{D(y,y)}+R''_{D(y,y)}$.

Для доказательства оценок (6), (7) (8) и (9) воспользуемся утверждением 1.3 и оценками (4.3) и (11.3). Пусть $y\neq y'$; тогда

$$\sum_{D(y,y')}^{(N)}\| R_{D(y,y')}\|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n}(N)}{}' \mid\mathcal{J}(\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n)\mid(b_1\beta)^N+\right.$$

$$\left.+\sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n+1}(N)}{}''\mid\mathcal{J}(\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n+1})\mid(b_1\beta)^N\right\},\qquad(10)$$

где b_1—константа из утверждения 1.3, $\mathcal{J}(\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n)$— множество всех деревьев с вершинами $\{0,\ldots,n\}$ и ребрами $(i,j),0\leq\leq i<j\leq n$, где $\tilde{\Gamma}_i\bigcap\tilde{\Gamma}_j\neq\emptyset$, и суммирование в $\sum'_{(N)}$ идет по всем таким упорядоченным наборам конечных связных графов $\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n\subset\mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ (возможно, совпадающим), что $y,y'\in\tilde{\Gamma}_0$, граф $\Gamma_0\bigcup\ldots\bigcup\Gamma_n$ связен и $\mid\Gamma_j\mid\geq 1, j=1,\ldots,n$,

$$\sum_{j=1}^{n}\mid\Gamma_j\mid=N,$$

а в $\sum''_{(N)}$ суммирование идет по всем таким упорядоченным наборам конечных связных графов $\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n+1}\subset\mathcal{L}(Z^{\nu+1})$, что $y\in\in\tilde{\Gamma}_0, y'\in\tilde{\Gamma}_{n+1}$, граф $\Gamma_0\bigcup\ldots\bigcup\Gamma_{n+1}$ связен, $\mid\Gamma_j\mid\geq 1, j=1,\ldots,n$, и Γ_0,Γ_{n+1} могут состоять из одной вершины y и y' соответственно и $\mid\Gamma_0\mid+\ldots+\mid\Gamma_{n+1}\mid=N$. Аналогично

$$\sum_{D(y,y)}^{(N)}\sup_{u\in R}\mid r_{D(y,y)}(u)\mid\leq\qquad(11)$$

$$\leq\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n}(N)}{}'\mid\mathcal{J}(\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n)\mid(b_1\beta)^{\sum_{j=1}^{n}|\Gamma_j|}(b_1\beta)^{|\Gamma_0|-2(\nu+1)},$$

где суммирование в $\sum'_{(N)}$ такое же, как и в (10);

$$\sum_{D(y,y)^{(N)}}{}''\| R''_{D(y,y)}\|\leq$$

$$\leq\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n+1}(N)}{}''\mid\mathcal{J}(\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n+1})\mid(b_1\beta)^N,\qquad(12)$$

где суммирование в $\sum''_{(N)}$ такое же, как и в (10), и для $y,y'\in\in Z^{\nu+1}$, $\mid y-y'\mid=1$;

$$\sum_{D(y,y)}^{(N_1)}\sum_{D(y',y')}^{(N_2)}\| R'_{D_1(y,y)}\hat{F}R'_{D_2(y',y')}\|\leq$$

$$\leq\sum_{n_1\geq 0}\frac{1}{n_1!}\sum_{n_2\geq 0}\frac{1}{n_2!}\sum_{\Gamma^1_0,\ldots,\Gamma^1_{n_1}(N_1)}{}'\mid\mathcal{J}(\Gamma^1_0,\ldots,\Gamma^1_{n_1})\mid\times$$

$$\times\sum_{\Gamma^2_0,\ldots,\Gamma^2_{n_2}(N_2)}{}''\mid\mathcal{J}(\Gamma^2_0,\ldots,\Gamma^2_{n_2})\mid(b_1\beta)^{N_1+N_2+1},\qquad(13)$$

где суммирование в $\sum'_{(N_1)}$ по $\Gamma^1_0,\ldots,\Gamma^1_{n_1}\subset\mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ и в $\sum'_{(N_2)}$ по $\Gamma^2_0,\ldots,\Gamma^2_{n_2}\subset\mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ такое же, как и в (10).

Теперь доказательство оценок (6), (7), (8) и (9) из (10)–(13) стандартно (см. [26]).

Первые три утверждения леммы 1 доказаны.

Докажем четвертое. Оно непосредственно следует из (5). Действительно, для любого $\psi\in L_2(R^1,d\lambda_0)$ из (5) получим, что

$$(\psi,R_{D(y,y')}\mathbf{1})=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\{\sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n}{}'\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n)\times$$

$$\times K_{\Gamma_1}\ldots K_{\Gamma_n}k_{\Gamma_0}(y,y';\psi,\mathbf{1})+\sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n+1}}{}''\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n+1})\times$$

$$\times K_{\Gamma_1}\ldots K_{\Gamma_{n+1}}k_{\Gamma_0}(y;\psi)\}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\{\sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n}{}'\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\ldots,\Gamma_n)\times$$

$$\times k_{\Gamma_0}(y;\psi)K_{\Gamma_1}\ldots K_{\Gamma_n}+$$

$$+\sum_{\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n+1}}{}''\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\ldots,\Gamma_{n+1})k_{\Gamma_0}(y;\psi)K_{\Gamma_1}\ldots K_{\Gamma_{n+1}}\},$$

поскольку $k_{\Gamma_0}(y,y';\psi,\mathbf{1}) = k_{\Gamma_0}(y;\psi)$ для любого конечного графа $\Gamma\subset\mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ и $\psi\in L_2(R^1,d\lambda_0)$. Напомним, что все суммы здесь так же, как и в (5), конечны. Разобьем сумму $\sum''$ на две части:

$$\sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1}}{}'' = \sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1}:|\tilde\Gamma_{n+1}=1}{}'' + \sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1}:|\tilde\Gamma_{n+1}>1}{}''$$

(суммирование в $\sum''$ здесь определяется так же, как и в (5)) и покажем, что

$$\sum_{n\ge0}\frac{1}{n!}\{\sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_n}{}'\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_n)k_{\Gamma_0}(y;\psi)K_{\Gamma_1}\dots K_{\Gamma_n}+$$

$$+\sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1}:|\tilde\Gamma_{n+1}>1}{}''\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1})k_{\Gamma_0}(y;\psi)K_{\Gamma_1}\dots K_{\Gamma_n}\} =$$

$$= -\sum_{n\ge0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_n,\Gamma_{n+1}=\{y'\}}\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1})k_{\Gamma_0}(y;\psi)K_{\Gamma_1}\dots K_{\Gamma_n}. \quad (14)$$

Для этого заметим, что если граф Γ_{n+1} в $\sum''$ состоит из одной только вершины $\tilde\Gamma_{n+1}=\{y'\}$, то $y'\in\tilde\Gamma_0\bigcup\dots\bigcup\tilde\Gamma_n$ и граф $\Gamma_0\bigcup\dots\bigcup\Gamma_n$ связен, и более того, если из $\Gamma_0,\dots,\Gamma_n$ ровно m графов содержат вершину y' ($0\le m\le n$), то

$$\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1}) = -m\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_n). \quad (15)$$

Для доказательства (15) достаточно рассмотреть

$$\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_{n+1}) = \sum_G{}^{(1)}(-1)^{|G|}+\sum_G{}^{(2)}(-1)^{|G|},$$

где в $\sum^{(1)}$ суммирование по всем связным графам G с множеством вершин $\{0,\dots,n+1\}$ с ребрами $(i,j), 0\le i<j\le n$, где $\tilde\Gamma_i\bigcap\tilde\Gamma_j\ne\emptyset$, таким, что из вершины $n+1$ выходит ровно одно ребро, а в $\sum^{(2)}$ суммирование по всем остальным связным графам G с вершинами $\{0,\dots,n+1\}$ с ребрами (i,j), где $\tilde\Gamma_i\bigcap\tilde\Gamma_j\ne\emptyset, 0\le i<j\le n+1$. Легко видеть, что в случае, когда $|\tilde\Gamma_{n+1}|=1$ и среди $\Gamma_0,\dots,\Gamma_n$ ровно m графов содержат вершину y', справедливы раветства:

$$\sum_G{}^{(1)}(-1)^{|G|} = -m\sum_G{}^{\text{св}}(-1)^{|G|} = -m\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_n)$$

и

$$\sum_G{}^{(2)}(-1)^{|G|}=0.$$

Таким образом, правая часть (14) равна

$$\sum_{n\ge0}\frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{n+1}\sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_n}{}^{(m)}\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0,\dots,\Gamma_n)k_\Gamma(\psi;y)K_{\Gamma_1}\dots K_{\Gamma_n}, \quad (16)$$

где суммирование в $\sum^{(m)}, m=1,\dots,n+1$, идет по всевозможным упорядоченным наборам конечных связных графов $\Gamma_0,\dots,\Gamma_n\subset\mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ (возможно совпадающих) таким, что $y\in\tilde\Gamma_0, y'\in\tilde\Gamma_0\bigcup\dots\bigcup\tilde\Gamma_n$ и объединение $\Gamma_0,\dots,\Gamma_n$ с учетом кратности ребер есть D (диаграмма $D(y,y')$ фиксирована), $|\Gamma_j|\ge 1, j=1,\dots,n$, Γ_0 может состоять из одной вершины y, и ровно m графов из $\Gamma_0,\dots,\Gamma_n$ содержат вершину y'. Заметим теперь, что

$$\sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_n}{}' + n\sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_n:|\Gamma_n\ge1}{}'' = \sum_{m=1}^{n+1} m\sum_{\Gamma_0,\dots,\Gamma_n}{}^{(m)},$$

где суммирование в $\sum'$ и в $\sum''$ такое же, как и в (5), только всегда $|\Gamma_n|\ge1$. Отсюда в силу (16) получим (15). Лемма 1 доказана.

Определение 2. Назовем диаграмму $D(y,y')$ *одночастично неприводимой*, если либо $y=y'$, либо граф D содержат по крайней мере два пути, которые соединяют вершины y и y' и которые либо не имеют общих ребер, либо кратность каждого их общего ребра в D больше единицы.

Заметим, что, если диаграмма $D(y,y')$ не является одночастично неприводимой, то в D найдется ребро кратности единица $(y_1,y_1')\in D$, удалив которое мы получим два непересекающиеся графа D_1 и D_2

$$D = D_1\bigcup\{(y_1,y_1')\}\bigcup D_2,$$

где $y,y_1\in\tilde D_1, y',y_1'\in\tilde D_2$.

В этом случае мы будем говорить, что ребро (y_1,y_1') *разбивает* диаграмму $D(y,y')$ на две непересекающиеся диаграммы $D_1(y,y_1)$ и $D(y_1',y')$.

Лемма 2. *Пусть ребро* $(y_1, y_1') \in D$, $D \in \mathfrak{A}$, *разбивает диаграмму* $D(y, y')$, $y \neq y'$, *на две непересекающиеся диаграммы*

$$D_1(y, y_1) \text{ и } D_2(y_1', y').$$

Тогда

$$R_{D(y,y')} = R_{D_1(y,y_1)} \hat{F} R_{D_2(y_1',y')}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n \subset \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ таковы, что объединение $\Gamma_0 \bigcup \ldots \bigcup \Gamma_n$ с учетом кратности ребер есть D, и для некоторого j, $0 \leq j \leq n, (y_1, y_1') \in \Gamma_j$. Тогда $\Gamma_j = \Gamma_j' \bigcup \Gamma_j'' \bigcup \{(y_1, y_1')\}$, где графы $\Gamma_j', \Gamma_j'' \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ не имеют общих вершин, каждый из них связен, и $y_1 \in \Gamma_j' \subset D_1, y_1' \in \Gamma_j'' \subset D_2$. Заметим, что, если $j = 0$ и $y, y' \in \tilde{\Gamma}_0$, то

$$\hat{k}_{\Gamma_0}(y, y') = \hat{k}_{\Gamma_0'}(y, y_1) \hat{F} \hat{k}_{\Gamma_0''}(y_1', y'),$$

и аналогично

$$k_{\Gamma_j}(y; u) = \int\limits_{R^2} k_{\Gamma_j'}(y, y_1; u, u_1) F(u_1, u_1') k_{\Gamma_j''}(y_1'; u_1') d\lambda_0(u_1) d\lambda(u_1'),$$

если $y \in \tilde{\Gamma}_j'$,

$$k_{\Gamma_j}(y'; u') = \int\limits_{R^2} k_{\Gamma_j'}(y_1; u_1) F(u_1, u_1') k_{\Gamma_j''}(y_1', y'; u_1', u') d\lambda_0(u_1) d\lambda(u_1'),$$

если $y \in \tilde{\Gamma}_j''$, и

$$K_{\Gamma_j} = \int\limits_{R^2} k_{\Gamma_j'}(y_1; u_1) F(u_1, u_1') k_{\Gamma_j''}(y_1'; u_1') d\lambda_0(u_1) d\lambda(u_1').$$

Таким образом, для доказательства леммы 2 осталось показать, что, если $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n \subset \mathcal{L}(Z^{\nu+1})$ таковы, что объединение $\Gamma_0 \bigcup \ldots \bigcup \Gamma_n$ с учетом кратности ребер есть D и $(y_1, y_1') \in \Gamma_j$ для некоторого j, $0 \leq j \leq n$, то

$$\varphi_{\text{св}}(\Gamma_0, \ldots, \Gamma_n) = \varphi_{\text{св}}(\Gamma_j', \Gamma_i \subset D_1, i \neq j, 0 \leq i \leq n) \times$$

$$\times \varphi_{\text{св}}(\Gamma_j'', \Gamma_i \subset D_1, i \neq j, 0 \leq i \leq n).$$

Для этого достаточно заметить, что, если объединение $\Gamma_0 \bigcup \ldots \ldots \bigcup \Gamma_n$ с учетом кратности ребер есть D и $(y_1, y_1') \in \Gamma_j$ для некоторого $j, 0 \leq j \leq n$, то любой граф G с множеством вершин $\{0, 1, \ldots, n\}$ и ребрами $(i, j), 0 \leq i < j \leq n$, где $\tilde{\Gamma}_i \bigcap \tilde{\Gamma}_j \neq \emptyset$, можно представить как объединение двух связных графов G_1 и G_2, которые имеют единственную общую вершину j и $i \in G_l$ в том и только в том случае, если $\Gamma_i \in D_l, i = 0, \ldots, n, i \neq j, l = 1, 2$. Лемма 2 доказана.

Заметим теперь, что в утверждении леммы 2 ребро $(y_1, y_1') \in \in D$ можно выбрать таким образом, чтобы диаграмма $D_1(y, y_1)$ была одночастично неприводимой. Повторяя теперь предыдущие рассуждения для диаграммы $D_2(y_1', y')$ и далее, мы таким образом выделим ребра $(y_1, y_1'), \ldots, (y_k, y_k') \in D$, которые разбивают диаграмму $D(y, y')$ на одночастично неприводимые части

$$D_1(y, y_1), D_2(y_1', y_2), \ldots, D_{k+1}(y_k', y'),$$

и, применяя последовательно лемму 2, получим следующее выражение для $R_{D(y,y')}$:

$$R_{D(y,y')} = R_{D_1(y,y_1)} \hat{F} R_{D_2(y_1',y_2)} \hat{F} \ldots \hat{F} R_{D_{k+1}(y_k',y')}. \tag{17}$$

Заметим теперь, что в силу (8.3) и (15) для любого $x \in Z^{\nu+1}$

$$\hat{S}_x = \sum_{D(0,x)} R_{D(0,x)},$$

где суммирование идет по всем диаграммам $D(0, x)$. Подставляя сюда выражение (17) для $R_{D(0,x)}$, получим, что

$$\hat{S}_x = \sum_{D(0,x)}{}^{(1)} R_{D(0,x)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(y_1,y_1'),\ldots,(y_k,y_k')}{}^{(2)} \times$$

$$\times \sum_{D_1(0,y_1),\ldots,D_{k+1}(y_k',x)}{}^{(3)} R_{D_1(0,y_1)} \hat{F} R_{D_2(y_1',y_2)} \cdots$$

$$\ldots \hat{F} R_{D_{k+1}(y_k',x)} \prod_{1 \leq i < j \leq k+1} (1 + \chi(D_i, D_j)), \tag{18}$$

где в $\sum^{(1)}$ суммирование идет по всем одночастично неприводимым диаграммам $D(0, x)$, в $\sum^{(2)}$—по всевозможным упорядоченным наборам пар точек $(y_1, y_1'), \ldots, (y_k, y_k'), y_j, y_j' \in Z^{\nu+1}$,

$| y_j - y'_j |= 1,\ j = 1,\dots,k$ (возможно совпадающих), в $\sum^{(2)}$—по всем одночастично неприводимым диаграммам $D_1(0,y_1)$, $D_2(y'_1,y_2),\dots,D_{k+1}(y'_k,x)$ и

$$\chi(D_i,D_j) = -1,\ \text{если}\ \tilde{D}_i \bigcup \tilde{D}_j \neq \emptyset,$$

$$\chi(D_i,D_j) = 0,\ \text{если}\ \tilde{D}_i \bigcup \tilde{D}_j = \emptyset.$$

Используя разложение до диаграммам (18), выведем теперь уравнения Дайсона.

Пусть $g(D_1,\dots,D_{k+1}), D_1,\dots,D_{k+1} \in \mathfrak{A}$—граф с вершинами $\{1,\dots,k+1\}$ с ребрами $(i,j), 1 \leq i < j \leq k+1$, где $(i,j) \in g(D_1,\dots,D_{k+1})$ в том и только в том случае, если $\tilde{D}_i \bigcup \tilde{D}_j \neq \emptyset, 1 \leq i < j \leq k+1$. Тогда

$$\prod_{1\leq i<j\leq k+1} (1+\chi(D_i,D_j)) = \sum_{G\leq g(D_1,\dots,D_{k+1})} (-1)^{|G|},$$

где сумма берется по всем подграфам $G \leq g(D_1,\dots,D_{k+1})$ с множеством вершин $\{1,\dots,k+1\}$, $| G |$—число ребер графа G.

Определение 3. Назовем граф G с множеством вершин $\{1,\dots,n\}$ *разделимым*, если G состоит из двух непересекающихся частей G_1 и G_2, где для некоторого $j, 1 \leq j < n$,

$$\tilde{G}_1 = \{1,\dots,j\},\ \ \tilde{G}_2 = \{j+1,\dots,n\}.$$

В противном случае будем говорить, что граф G *неразделим* (граф G, состоящий из одной только вершины, $n = 1$, считается неразделимым).

Положим

$$\varphi_H(D_1,\dots,D_{k+1}) = \sum_G{}^{(H)}(-1)^{|G|},$$

где сумма берется по всем неразделимым подграфам $G \subseteq g(D_1,\dots,D_{k+1})$ с множеством вершин $\{1,\dots,k+1\}$, если граф $g(D_1,\dots,D_{k+1})$ неразделим, и $\varphi_H(D_1,\dots,D_{k+1}) = 0$, если граф $g(D_1,\dots,D_{k+1})$ разделим. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{G\subseteq g(D_1,\dots,D_{k+1})} (-1)^{|G|} = \varphi_H(D_1,\dots,D_{k+1}) +$$

$$+\sum_{n=1}^{k}\varphi_H(D_1,\dots,D_n) \sum_{G\subseteq g(D_{n+1},\dots,D_{k+1})} (-1)^{|G|}. \tag{19}$$

Определим операторы $I_y, y \in Z^{\nu+1}$, положив при $y \neq 0$

$$I_y = \sum_{D(0,y)}{}^{(1)} R_{D(0,y)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(y_1,y'_1),\dots,(y_k,y'_k)}{}^{(2)} \times$$

$$\sum_{D_1(0,y_1),\dots,D_{k+1}(y'_k,y)}{}^{(3)} \varphi_H(D_1,\dots,D_{k+1})$$

$$R_{D_1(0,y_1)}\hat{F}R_{D_2(y'_1,y_2)}\dots\hat{F}R_{D_{k+1}(y'_k,y)}, \tag{20}$$

и

$$I'_0 = \sum_{D(0,0)}{}^{(1)} R'_{D(0,0)},$$

$$I''_0 = \sum_{D(0,0)}{}^{(1)} R''_{D(0,0)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(y_1,y'_1),\dots,(y_k,y'_k)}{}^{(2)} \sum_{D_1(0,y_1),\dots,D_{k+1}(y'_k,0)}{}^{(3)} \varphi_H(D_1,\dots,D_{k+1}) \times$$

$$\times R_{D_1(0,y_1)}\hat{F}R_{D_2(y'_1,y_2)}\dots\hat{F}R_{D_{k+1}(y'_k,0)},$$

где суммирование в $\sum^{(2)}$ и $\sum^{(3)}$ такое же, как и в (18), а в $\sum^{(1)}$ суммирование идет по всем диаграммам $D(0,0)$, состоящим более чем из одной вершины, $| \tilde{D} |> 1$.

Сходимость каждого ряда здесь по норме в пространстве линейных ограниченных операторов в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ следует из леммы 1 и из утверждения следующей леммы.

Лемма 3. *Для любых* $D_1,\dots,D_k \in \mathfrak{A}$

$$| \varphi_H(D_1,\dots,D_k) |< q_1^k,$$

где q_1*—некоторая положительная константа.*

Доказательство. Определим понятие минимального неразделимого графа с множеством вершин.

Определение 4. Неразделимый граф G с множеством вершин $\{1,\dots,k\}$ назовем *минимальным*, если, удалив из G любое его ребро, мы получим разделимый граф.

Сопоставим каждому неразделимому графу G с множеством вершин $\{1, \dots, k\}$ последовательность всех его ребер

$$\{(i_1, j_1), \dots, (i_{|G|}, j_{|G|})\} = G,$$

где $i_s < j_s, s = 1, \dots, | G |$, и $i_s \le i_{s+1}, s = 1, \dots, | G | -1, i_1 = 1$. Заметим, что для минимального графа такая последовательность определяется однозначно и удовлетворяет условию

$$i_{s+1} < j_s, s = 1, \dots, | G | -1$$

и

$$j_{s-1} < i_{s+1}, s = 2, \dots, | G | -1.$$

Зададим на множестве минимальных графов с вершинами $\{1, \dots, k\}$ следующий порядок.

Пусть $\{(i_1, j_1), \dots, (i_{|G|}, j_{|G|})\}$— последовательность ребер минимального графа G, а $\{(i'_1, j'_1), \dots, (i'_{|G|}, j'_{|G|})\}$— последовательность ребер минимального графа G'. Положим

$$G < G',$$

если для некоторого $s, 1 \le s \le \min\{| G |, | G' |\}(i_m, j_m) = (i'_m, j'_m)$ при $1 \le m < s$, если $s > 1$, и либо $j_s > j'_s$, либо $j_s = j'_s$, но $i_s < i'_s$. Легко видеть, что все минимальные графы сравнимы.

Занумеруем согласно введенному порядку все минимальные графы с множеством вершин $\{1, \dots, k\}$, содержащиеся в $g(D_1, \dots, D_k), G_1, \dots, G_N, G_i < G_j, 1 \le i < j \le N$.

Обозначим $G_j, j = 1, \dots, N$ множество всех неразделимых графов $G \subseteq g(D_1, \dots, D_k)$ с множеством вершин $\{1, \dots, k\}$, каждый из которых содержит j-й минимальный неразделимый граф G_j, но не содержит ни одного из предыдущих минимальных неразделимых графов $G_i, 1 \le i < j$. Положим

$$\sigma_j(D_1, \dots, D_k) = \sum_{G \in G_j} (-1)^{|G|}.$$

Тогда

$$\varphi_H(D_1, \dots, D_k) = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(D_1, \dots, D_k).$$

Выпишем в явном виде величины

$$\sigma_j(D_1, \dots, D_k),\ j = 1, \dots, N.$$

Пусть $\{(i_1, j_1), \dots, (i_{|G_l|}, j_{|G_l|})\}$ — последовательность ребер минимального графа G_l, $1 \le l \le N$. Выделим все ребра $(i, j) \in g(G_1, \dots, G_k)\backslash G_l$ такие, что для некоторого $m, 1 \le m \le$ $\le l, i \le j_{m-1}$ и либо $j > j_m$, либо $j = j_m$, но $i < i_m$. Обозначим множество выделенных таким образом ребер $O(G_l)$. Заметим, что если $G \in G_l, 1 \le l \le N$, то G не содержит ребер из $O(G_l)$, поскольку в противном случае $G \supset G_m$ для некоторого $1 \le m < l$. И, обратно, если $G \bigcap O(G_l) = \emptyset$ и $G_l \subset G$, то $G \in G_l$. Таким образом,

$$\sigma_j(D_1, \dots, D_k) = (-1)^{|G_j|} \sum_G (-1)^G, j = 1, \dots, N,$$

где суммирование идет по всевозможным графам $G \subset g(D_1, \dots$ $\dots, D_k)\backslash(O(G_j) \bigcup G_j)$, и, следовательно, $\sigma_j(D_1, \dots, D_k) = 0$, если $g(D_1, \dots, D_k)\backslash(O(G_j) \bigcup G_j) \neq \emptyset$, и $\sigma_j(D_1, \dots, D_k) = (-1)^{|G_j|}$, если $g(D_1, \dots, D_k) = O(G_j) \bigcup G_j$. Таким образом, $\varphi_H(D_1, \dots, D_k)$ не превосходит по абсолютной величине числа минимальных неразделимых подграфов $g(D_1, \dots, D_k)$ с вершинами $\{1, \dots, k\}$. Легко видеть, что число минимальных неразделимых графов с множеством вершин $\{1, \dots, k\}$ не превосходит 4^k. Лемма 3 доказана.

Завершим теперь доказательство утверждения 1.

Покажем, что для любого $y \in Z^{\nu+1}$ оператор I_y самосопряжен. Действительно, $\hat{F}^* = \hat{F}$ в силу симметрии функции Φ : $\Phi(u, v) = \Phi(u, v)$, и из (5) следует, что $R^*_{D(y,y')} = R_{D(y,y')}$ для любой диаграммы $D(y, y')$; таким образом, $I^*_y = I_{-y} = I_y$. Далее, по определению $I_0 = I'_0 + I''_0 + P_0$, где P_0—ортогональный проектор в $L_2(R^1, d\lambda_0)$

$$P_0 f = f - \langle f \rangle_0,\ \ f \in L_2(R^1, d\lambda_0),$$

I'_0—оператор умножения в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ на функцию

$$I'_0 = \sum_{D(0,0)}^{(1)} r'_{D(0,0)}(u),$$

где суммирование идет по всем диаграммам $D(0,0)$, состоящим более чем из одной вершины: $| \tilde{D} |> 1$. Ограниченность этой функции следует из (7). I''_0 и I_y при $y \neq 0, y \in Z^{\nu+1}$—операторы Гильберта—Шмидта в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ (операторы с ядром из $L_2(R^1, d\lambda_0 \times d\lambda_0)$).

Оценка (3) легко следует из (9) и из леммы 3. Для доказательства (2) и (4) заметим, что для любых $y_j, y_j' \in Z^{\nu+1}$, $| y_j - y_j' |= 1,\ j = 1, \ldots, k$ и любых $N_1, \ldots, N_{k+1} \in Z_+$ в силу (6), (8) и (9)

$$\sum\nolimits^{(N_1,\ldots,N_{k+1})} \| R_{D_1(0,y_1)} \hat{F} R_{D_2(y_1',y_2)} \ldots \hat{F} R_{D_{k+1}(y_k',y)} \| \leq$$

$$\leq (b'\beta)^{k+N_1+\ldots,N_{k+1}}, \tag{21}$$

где b'—некоторая положительная константа и суммирование идет по всем таким одночастично неприводимым диаграммам $D_1(0, y_1), D_2(y_1', y_2), \ldots, D_{k+1}(y_k', y)$ таким, что $| D_j |= N_j,\ j = 1, \ldots, k+1$. Из (21), (8) и леммы 3 следует (4).

Для доказательства (2) заметим, что, если диаграммы

$$D_1(0, y_1), D_2(y_1', y_2), \ldots, D_{k+1}(y_k', y),$$

где $| y_j - y_j' |= 1, j = 1, \ldots, k$—одночастично неприводимы и граф $g(D_1, \ldots, D_{k+1})$ неразделим, то $\sum\limits_{j=1}^{k+1} | D_j | + k \geq 2 | y |$. Отсюда в силу (21) следует (2).

Пункт в) в утверждении 1 автоматически следует из четвертого утверждения леммы 1.

Сами уравнения Дайсона (1) легко следуют из разложения по диаграммам (18) и (20) в силу (19).

Утверждение 1 доказано.

§ 5. Аналитическая структура функций Грина

Здесь мы докажем теорему 1 и теорему 2, сформулированные в § 2. Для этого воспользуемся утверждением 1.4

Пусть β достаточно мало, $0 < \beta < \beta_1$, β_1—константа из утверждения 1.4. Рассмотрим преобразование Фурье операторов $\hat{S}_x$

$$\underline{\mathrm{S}}(p, k) = \sum_{x=(\bar{x},x^{(0)})\in Z^{\nu+1}} e^{-(p,\bar{x})-ikx^{(0)}} \hat{S}_x,$$

$$(p, k) \in T^\nu \times T^1,$$

$$(p, \bar{x}) = \sum_{j=1}^{\nu} p^{(j)} x^{(j)}, p = (p^{(1)}, \ldots, p^{(\nu)}),$$

$$\bar{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(\nu)}).$$

В силу утверждения 2.3 при любом фиксированном $p \in T^\nu$ и любом k из полосы $| \operatorname{Im} k |< \ln(b_2\beta)^{-1}$ (b_2—константа из утверждения 2.3) $\underline{\mathrm{S}}(p, k)$ есть линейный ограниченный оператор в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ такой, что

$$\underline{\mathrm{S}}(p, k)\mathbf{1} = 0, \tag{1}$$

поскольку по определению $\hat{S}_x \mathbf{1} = 0$ для любого $x \in Z^\nu$, и $\underline{\mathrm{S}}^*(p, k) = \underline{\mathrm{S}}(p, \bar{k})$ в силу очевидной симметрии: $S_x^* = S_{-x} = S_x,\ x \in Z^{\nu+1}$. Аналогично для преобразования Фурье $I_x,\ x = (\bar{x}, x^{(0)}) \in Z^{\nu+1}$,

$$\underline{\mathrm{I}}(p, k) = \sum_{x\in\in Z^{\nu+1}} e^{-(p,\bar{x})-ikx^{(0)}} I_x$$

в силу утверждения 4.1, при любом фиксированном $p \in T^\nu$ и любом k из полосы $| \operatorname{Im} k |< \ln(b_3\beta)^{-2}$($b_3$—константа из утверждения 4.1) есть линейный ограниченный оператор в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ такой, что

$$\underline{\mathrm{I}}(p, k)\mathbf{1} = 0,\ \ \underline{\mathrm{I}}^*(p, k) = \underline{\mathrm{I}}(p, \bar{k}), \tag{2}$$

и

$$\underline{\mathrm{I}}(p, k) = P_0 + I_0' + \underline{\mathrm{I}}''(p, k), \tag{3}$$

где $P_0 f = f - \langle f \rangle_0, f \in L_2(R^1, d\lambda_0)$, I_0'—оператор умножения на ограниченную функцию

$$I_0' : R^1 \to R^1,$$

$\underline{\mathrm{I}}''(p, k)$—оператор Гильберта—Шмидта в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ с ядром

$$\underline{\mathrm{I}}''(u, u'; p, k) = I_0''(u, u') + \sum_{\substack{x\in\in Z^{\nu+1} \\ x\neq 0}} e^{-(p,\bar{x})-ikx^{(0)}} I_x(u, u').$$

Пусть $\mathcal{H} \subset L_2(R^1, d\lambda_0)$—подпространство, порожденное функциями $f - \langle f \rangle_0, f \in L_2(R^1, d\lambda_0)$. В силу (1) и (2) $\mathcal{H}$ инвариантно относительно и $\underline{\mathrm{S}}(p, k)$, и $\underline{\mathrm{I}}(p, k)$:

$$\underline{\mathrm{S}}(p, k) = P_0 \underline{\mathrm{S}}(p, k) P_0,$$

$$\underline{\mathrm{I}}(p, k) = P_0 \underline{\mathrm{I}}(p, k) P_0,$$

где P_0—ортогональный проектор в $L_2(R^1, d\lambda_0)$ на $\mathcal{H}$. Далее мы будем рассматривать $\underline{S}(p,k)$ и $\underline{I}(p,k)$ как операторы в $\mathcal{H}$.

Равенство (3) тогда перепишется в виде

$$\underline{I}(p,k) = E + P_0 I_0' + P_0 \underline{I}''(p,k),$$

где E—единичный оператор в $\mathcal{H}$.

Лемма 1. *Для любого $h > 0$ можно указать такие $\beta_2 > > 0$, $\beta_2 h < 1$ и $\kappa_1 > 0$, что для любого $\beta, 0 < \beta < \beta_2$, любого k из полосы $\mid \operatorname{Im} k \mid < \ln(h\beta)^{-1}$ и любого $p \in T^\nu$ выполнены неравенства*

$$\| \underline{I}(p,k)\hat{F} \| < \kappa_1 \beta, \ \| (\underline{I}(p,k) - E)\hat{F} \| < \kappa_1 \beta^2, \tag{4}$$

где $\| \cdot \|$—норма в пространстве линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$.

Доказательство. Первое неравенство здесь автоматически следует из второго, поскольку

$$\| \hat{F} \| \leq \| (e^{-\beta\Phi} - 1) \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)} \leq \beta \| \Phi \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)} .$$

Для доказательства второго неравенства воспользуемся оценками из утверждения 1.4. Рассмотрим

$$\| (\underline{I}(p,k) - E)\hat{F} \| \leq \| I_0' \hat{F} \| + \| I_0'' \hat{F} \| + \sum_{\substack{x \in \in Z^{\nu+1} \\ x \neq 0}} \mid e^{-ikx^{(0)}} \mid \| I_x \hat{F} \| .$$

Отсюда в силу (2.4), (3.4) и (4.4) при достаточно малых $\beta > 0$

$$\| (\underline{I}(p,k) - E)\hat{F} \| \leq (b_3\beta)^2 + b_3\beta^2 \| \Phi \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)} + $$
$$+ \sum_{\substack{x \in \in Z^{\nu+1} \\ x \neq 0}} \beta (b_3\beta)^{2|x|} e^{x^{(0)} \operatorname{Im} k} \| \Phi \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)},$$

и при $\mid \operatorname{Im} k \mid < \ln(h\beta)^{-1}$, $h > 0$,

$$\| (\underline{I}(p,k) - E)\hat{F} \| \leq (b_3\beta)^2 + b_3\beta^2 \| \Phi \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)} + $$
$$+ \sum_{\substack{x \in \in Z^{\nu+1} \\ x \neq 0}} \beta \left(\frac{b_3\beta}{h}\right)^{|x_0|} (b_3\beta)^{2|x|} \| \Phi \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)},$$

где b_3—константа из утверждения 1.4. Из последнего неравенства следует второе неравенство в (4) при $0 < \beta < hb_3^{-2}$. Лемма 1 доказана.

Перейдем в (1.4) к преобразованию Фурье:

$$\underline{S}(p,k) = \underline{I}(p,k) + 2\left(\sum_{j=1}^{\nu} \cos p^{(j)} + \cos k\right) \underline{I}(p,k) \hat{F} \underline{S}(p,k), \tag{5}$$

или

$$\left(E - 2\left(\sum_{j=1}^{\nu} \cos p^{(j)} + \cos k\right) \underline{I}(p,k) \hat{F}\right) \underline{S}(p,k) = \underline{I}(p,k). \tag{5^a}$$

При любом фиксированном $p \in T^\nu$, $\underline{S}(p,k)$ и $\underline{I}(p,k)$ есть функции от k со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов в $L_2(R^1, d\lambda_0)$, где первая определена и аналитична в полосе $\mid \operatorname{Im} k \mid < \ln(b_3\beta)^{-1}$, а вторая—в полосе

$$\mid \operatorname{Im} k \mid < \ln(b_3\beta)^{-2} \tag{6}$$

(b_2—константа из утверждения 2.3, b_3—константа из утверждения 1.4). Далее мы будем считать, что $p \in T^\nu$ фиксировано. Рассмотрим оператор

$$\underline{B}(p,k) = E - 2\left(\sum_{j=1}^{\nu} \cos p^{(j)} + \cos k\right) \underline{I}(p,k) \hat{F}.$$

Из аналитичности $\underline{I}(p,k)$ в полосе (6) следует, что, если оператор $\underline{B}(p,k) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ обратим при $k = k_0$, $\mid \operatorname{Im} k_0 \mid < \ln(b_3\beta)^{-2}$, то в силу (5^a) операторнозначная функция $\underline{S}(p,k)$ аналитична в точке $k = k_0$, из аналитичности $S(p,k)$ в точке $k = k_0$ следует аналитичность в этой точке функции Грина

$$\tilde{s}_{\varphi_1,\varphi_2}(p,k) = \sum_{x \in Z^{\nu+1}} e^{i(p,\bar{x}) + ikx^{(0)}} (\varphi_1, S_x \varphi_2) = (\varphi_1, \underline{S}(p,k)\varphi_2),$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2(R^1, d\lambda_0)$, а $(\cdot,\cdot)$—скалярное произведение в $L_2(R^1, d\lambda_0)$. Оператор $\underline{B}(p,k)$ при любом k из полосы (6) имеет дискретный спектр, что следует из компактности оператора $\hat{F}$. Следовательно, оператор $\underline{B}(p,k)$ обратим в том и только в том случае, когда множество его собственных значений отделено от нуля.

Пусть $0 \leq \operatorname{Im} k < \ln(b_3\beta)^{-2}$ (при $\operatorname{Im} k < 0$ все аналогично). Рассмотрим в $\mathcal{H}$ оператор

$$\underline{B}_0(k) = E - \beta e^{-ik} P_0 \hat{\Phi} P_0.$$

Лемма 2. *Для любого $h > 0$ найдутся такие β_3, $\beta_3 h < 1$ и $\kappa_2 > 0$, что для любого β, $0 < \beta < \beta_3$, и любого k из полосы*

$$0 \leq | \operatorname{Im} k | < \ln(h\beta)^{-1},$$

$$\| \underline{B}(p,k) - \underline{B}_0(k) \| < \kappa_2 \beta.$$

Доказательство этой леммы легко следует из леммы 1. Действительно,

$$\| \underline{\mathrm{B}}(p,k) - \underline{\mathrm{B}}_0(k) \| < (2\nu + | e^{ik} |) \, \| \underline{\mathrm{I}}(p,k)\hat{F} \| +$$

$$+ | e^{ik} | \, \| (\underline{\mathrm{I}}(p,k) - E)\hat{F} \| + | e^{ik} | \, \| e^{-\beta\Phi} - 1 + \beta\Phi \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)} \, .$$

Первое слагаемое здесь в силу (4) не превосходит $(2\nu + 1)\kappa_1\beta$, второе в силу (4) не превосходит $\frac{\kappa_1\beta}{h}$, а третье не превосходит

$$\frac{1}{h\beta} \left\| \Phi^2 \int\limits_0^{\beta} d\beta' \int\limits_0^{\beta'} d\beta'' e^{-\beta''\Phi} \right\|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)} \leq$$

$$\leq \frac{\beta}{2h} \| \Phi^2 \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)},$$

в силу условия $\Phi \geq 0$. Лемма 2 доказана.

Рассмотрим собственные значения оператора $P_0 \hat{\Phi} P_0$:

$$\mu_1, \ldots, \mu_N, \ldots, \quad \mu_j \in R^1, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Пусть $| \mu_1 | \geq | \mu_2 | \geq \ldots \geq | \mu_N | \geq 0$. По условию $\mu_i \neq \mu_j$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$. Положим $h = \frac{1}{2}(| \mu_N | + | \mu_{N+1} |)$.

Лемма 3. *Можно указать такие $\beta_4 > 0$ и $\kappa_3 > 0$, что для любого β, $0 < \beta < \beta_4$, и для любого k из полосы*

$$0 < \operatorname{Im} k < \ln \frac{1}{h\beta},$$

удовлетворяющего условию

$$| e^{-ik} - \frac{1}{\mu_i \beta} | > \frac{\kappa_3}{| \mu_N |}, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{7}$$

оператор $\underline{B}(p,k)$ обратим.

Доказательство. Оператор $\underline{\mathrm{B}}_0(k)$ обратим для любого k из полосы $0 < \operatorname{Im} k < \ln \frac{1}{h\beta}$, за исключением тех точек k, для которых $| e^{-ik} - \frac{1}{\mu_i \beta} | = 0$, $j = 1, \ldots, N$. При этом $\| (\underline{\mathrm{B}}_0(k))^{-1} \| = \max\limits_{j=1,\ldots,N} | 1 - \beta e^{-ik} \mu_j |^{-1}$. Пусть $0 < \operatorname{Im} k < \ln \frac{1}{h\beta}$ и $1 - \beta e^{-ik} \mu_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, N$. Рассмотрим представление

$$\underline{\mathrm{B}}(p,k) = \underline{\mathrm{B}}_0(k)[E + \underline{\mathrm{B}}_0^{-1}(k)(\underline{\mathrm{B}}(p,k) - \underline{\mathrm{B}}_0(k))].$$

Для доказательства леммы 3 достаточно показать, что

$$\| \underline{\mathrm{B}}_0^{-1}(k)(\underline{\mathrm{B}}(p,k) - \underline{\mathrm{B}}_0(k)) \| < 1, \tag{8}$$

если $\beta > 0$ достаточно мало и

$$| e^{-ik} - \frac{1}{\mu_i \beta} | > \frac{\kappa_3}{| \mu_N |}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

где κ_3—некоторая положительная константа.

В силу леммы 2 найдутся такие $\beta_3 > 0$ и $\kappa_2 > 0$, что для любого $\beta > 0, \beta < \beta_3$, и любого k из полосы $0 < \operatorname{Im} k < \ln \frac{1}{h\beta}$

$$\| \underline{\mathrm{B}}(p,k) - \underline{\mathrm{B}}_0(k) \| < \kappa_2 \beta. \tag{9}$$

Положим $\kappa_3 = 2\kappa_2$; тогда для любого k из полосы $0 < \operatorname{Im} k < \ln \frac{1}{h\beta}$, удовлетворяющего условию (7),

$$\| \underline{\mathrm{B}}_0(k) \| < \left(\frac{\kappa_3}{| \mu_N |} \right)^{-1} \max_{j=1,\ldots,N} (\beta \, | \mu_j |)^{-1} = \frac{1}{2\kappa_2 \beta}. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получим (8). Лемма 3 доказана.

Пусть константа $\kappa_3 > 0$ из леммы 3 фиксирована и $\kappa_2 = \kappa_3/2$. Рассмотрим теперь случай, когда при некотором j, $1 \leq j \leq N$,

$$| e^{-ik} - \frac{1}{\mu_i \beta} | < \frac{\kappa_3}{| \mu_N |}.$$

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_N$—собственные векторы оператора $P_0 \hat{F} P_0$ в $\mathcal{H}$, соответствующие собственным значениям $\mu_1, \ldots, \mu_N$. Обозначим $\mathcal{H}_j^1$ подпространство в $\mathcal{H}$, порожденное вектором ψ_j, и $\mathcal{H}_j^2$ ортогональное дополнение к $\mathcal{H}_j^1$ в $\mathcal{H}$. Тогда $\mathcal{H} = \mathcal{H}_j^1 \oplus \mathcal{H}_j^2$ операторы $\underline{\mathrm{B}}(p,k)$ и $\underline{\mathrm{B}}_0(k)$ можно записать в виде операторных матриц

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathrm{B}}_j^{11}(p,k) & \underline{\mathrm{B}}_j^{12}(p,k) \\ \underline{\mathrm{B}}_j^{21}(p,k) & \underline{\mathrm{B}}_j^{22}(p,k) \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathrm{B}}_{0j}^{11}(k) & \underline{\mathrm{B}}_{0j}^{12}(k) \\ \underline{\mathrm{B}}_{0j}^{21}(k) & \underline{\mathrm{B}}_{0j}^{22}(k) \end{pmatrix}$$

соответственно, где

$$\underline{B}_j^{ml}(p,k) : \mathcal{H}_j^l \to \mathcal{H}j^m,$$

$$\underline{B}_{0j}^{ml}(k) : \mathcal{H}_j^l \to \mathcal{H}j^m, m, l \in \{1,2\}.$$

Легко видеть, что $\underline{B}_{0j}^{12}(k) = 0, \underline{B}_{0j}^{21}(k) = 0$ и $\underline{B}_{0j}^{11}(k) = (1-\mu_j\beta e^{-ik})E$. Покажем, что оператор $\underline{B}_j^{22}(p,k)$ при достаточно малых $\beta > 0$ обратим. Действительно, при достаточно малых

$$\| (\underline{B}_{0j}^{22}(p,k))^{-1} \| < \frac{1}{\kappa_3\beta}, \qquad (11)$$

поскольку при достаточно малых $\beta > 0$ для всех $l \neq j, 1 \leq l \leq N$,

$$| e^{-ik} - \frac{1}{\mu_l\beta} | > \frac{\kappa_3}{| \mu_N |}.$$

Более того,

$$\| \underline{B}_j^{22}(p,k) - \underline{B}_{0j}^{22}(k) \| < \| \underline{B}(p,k) - \underline{B}_0(k) \| < \kappa_2\beta, \qquad (12)$$

где κ_2—константа из леммы 2: $\kappa_2 = \frac{1}{2}\kappa_3$. Из (11) и (12) следует обратимость оператора $\underline{B}_j^{22}(p,k)$ и оценка для нормы обратного оператора

$$\| (\underline{B}_j^{22}(p,k))^{-1} \| < \frac{2}{\kappa_3\beta} \qquad (13)$$

для любого k такого, что $| e^{-ik} - \frac{1}{\mu_j\beta} | > \frac{\kappa_3}{|\mu_N|}$. Из обратимости оператора $\underline{B}_j^{22}(p,k)$ следует, что оператор $\underline{B}(p,k)$ обратим в том и только в том случае, когда

$$\underline{B}_j^{11}(p,k) - \underline{B}_j^{12}(p,k)(\underline{B}_j^{22}(p,k))^{-1}\underline{B}_j^{21}(p,k) \neq 0.$$

Лемма 4. *При достаточно малых $\beta > 0, 0 < \beta < \beta_4$, где β_4—некоторая положительная константа, для любого $j = 1, \ldots, N$ уравнение*

$$\underline{B}_j^{11}(p,k) - \underline{B}_j^{12}(p,k)(\underline{B}_j^{22}(p,k))^{-1}\underline{B}_j^{21}(p,k) = 0 \qquad (14)$$

при любом фиксированном $p \in T^\nu$ имеет единственное решение в области

$$\{k \in \mathbb{C} : | e^{-ik} - \frac{1}{\mu_j\beta} | < \frac{\kappa_3}{| \mu_N |},$$

$$\operatorname{Im} k \in (0, \ln\frac{1}{h\beta}), \ \operatorname{Re} k \in [0, 2\pi]\}. \qquad (15)$$

Доказательство. Действительно,в силу леммы 2

$$\| \underline{B}_j^{12}(p,k) \|, \| \underline{B}_j^{21}(p,k) \|, | \underline{B}_j^{11}(p,k) - \underline{B}_{0j}^{11}(k) | < \frac{1}{2}\kappa_3\beta,$$

и, следовательно, в силу (13) для любого k из области (15) при достаточно малых $\beta > 0$

$$| \underline{B}_j^{11}(p,k) - \underline{B}_j^{12}(p,k)(\underline{B}_j^{22}(p,k))^{-1}\underline{B}_j^{21}(p,k) - \underline{B}_{0j}^{11}(k) | < \kappa_3\beta.$$

Таким образом, при достаточно малых $\beta > 0$ для всех k таких, что $| e^{-ik} - \frac{1}{\mu_j\beta} | = \frac{\kappa_3}{|\mu_N|}$,

$$| \underline{B}_{0j}^{11}(k) | > | \underline{B}_j^{11}(p,k) - \underline{B}_{0j}^{11}(k) - \underline{B}_j^{12}(p,k)(\underline{B}_j^{22}(p,k))^{-1}\underline{B}_j^{21}(p,k) | .$$

Применяя теперь теорему Руше [31], получим утверждение леммы 4.

Утверждение теоремы 2.2 теперь следует из леммы 3 и леммы 4, поскольку решение уравнения (14) есть полюс функции Грина

$$S_{\psi_j,\psi_j}(p,k) = \sum_{x=(\bar{x},x^{(0)})\in Z^{\nu+1}} e^{-(p,\bar{x})-ikx^{(0)}} \langle \psi_j(\xi(0), \overline{\psi_j(\xi(x))}) \rangle.$$

Для доказательств теоремы 1.2 рассмотрим следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть $\mu_k = 0$ при всех $k > N, k \in Z_+$,*

$$| \mu_1 | \geq | \mu_2 | \geq \ldots \geq | \mu_N | > 0.$$

Тогда найдутся такие $\beta_5 > 0$ и $q, 0 < q < 1$, что для любого $\beta > 0$, $\beta < \beta_5$ и для любого k такого, что

$$\ln\frac{2}{| \mu_N | \beta} < | \operatorname{Im} k | < \ln\left(\frac{q}{\beta b_3}\right)^2,$$

где b_3—константа из утверждения 1.4, оператор $\underline{B}(p,k)$ обратим.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{Im} k > 0$, (в случае $\operatorname{Im} k < 0$ все аналогично). Достаточно показать, что при достаточно малых $\beta > 0$ для любого k

$$\ln \frac{2}{\mid \mu_N \mid \beta} < \operatorname{Im} k < \ln \frac{q^2}{(\beta b_3)^2},$$

где q—некоторая положительная константа, $\dfrac{2b_3\beta}{\mid \mu_N \mid} \leq q^2 < 1$, выполнено неравенство

$$\| \beta e^{-ik} P_0 \hat{\Phi} P_0 \| = \mid \mu_N \beta e^{-ik} \mid >$$

$$> 1 + \| B(p,k) - E + \beta e^{-ik} P_0 \hat{\Phi} P_0 \| . \qquad (16)$$

Действительно, пусть $\mid e^{-ik} \mid = \left(\dfrac{q}{\beta b_3}\right)^2 > \dfrac{2}{\mid \mu_N \mid \beta}$, $0 < q < 1$; тогда

$$\| (I(p,k) - E)\hat{F} \| < \| (I'_0 + I'')F \| + \sum_{\substack{x \in Z^{\nu+1} \\ x \neq 0}} \left(\frac{q}{\beta b_3}\right)^{2x^{(0)}} \| I_x \hat{F} \|$$

и в силу утверждения 4.1

$$(b_3\beta)^2 + b_3\beta^2 + \beta \sum_{\substack{x \in Z^{\nu+1} \\ x \neq 0}} \left(\frac{q}{\beta b_3}\right)^{2x^{(0)}} (b_3\beta)^{2|x|} \leq$$

$$\leq (b_3\beta)^2 + b_3\beta^2 + \frac{(1+(b_3\beta)^2)^\nu}{(1-(b_3\beta)^2)^\nu} \beta \sum_{x^0} \left(\frac{q}{\beta b_3}\right)^{2x^{(0)}} (b_3\beta)^{2|x^0|} +$$

$$+ \frac{2\nu(b_3\beta)^2}{1-(b_3\beta)^2} \frac{(1+(b_3\beta)^2)^{\nu-1}}{(1-(b_3\beta)^2)^{\nu-1}} \beta \sum_{x^0 \in Z^1} q^{2x^{(0)}} (b_3\beta)^{2|x^0| - 2x^0}.$$

Заметим, что при достаточно малых β

$$\sum_{x^0} q^{2x^{(0)}} (b_3\beta)^{2(|x^0| - x^0)} < \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{b_3^2\beta^3 \mid \mu_N \mid}{1 - b_3^2\beta^3 \mid \mu_N \mid},$$

поскольку $q^2 > \dfrac{b_3\beta}{\mid \mu_N \mid}$, и при достаточно малых $\beta > 0$

$$b_3^2\beta^3 \mid \mu_N \mid < 1.$$

Таким образом, при $\mid e^{-ik} \mid = \left(\dfrac{q}{\beta b_3}\right)^2 > \dfrac{2}{\mid \mu_N \mid \beta}$, $0 < q < 1$,

$$\| (I(p,k) - E)\hat{F} \| < c_1\beta^2 + c_2 q^2 \beta, \qquad (17)$$

где c_1, c_2—некоторые положительные константы и, следовательно,

$$\| \underline{I}(p,k)\hat{F} \| < c_1\beta^2 + c_2 q^2 \beta + \beta \| \hat{\Phi} \| . \qquad (18)$$

Оценим теперь в случае $\mid e^{-ik} \mid = \left(\dfrac{q}{\beta b_3}\right)^2 > \dfrac{2}{\mid \mu_N \mid \beta}$, $0 < q < 1$,

$$\| B(p,k) - E - \beta e^{-ik} P_0 \hat{\Phi} P_0 \| < (2\nu + 1) \| \underline{I}(p,k)\hat{F} \| +$$

$$+ \frac{q^2}{\beta b_3^2} (\| (I(p,k) - E)\hat{F} \| + \| e^{-\beta\Phi} - 1 + \beta\Phi \|_{L_2(R^2, d\lambda_0 \times d\lambda_0)}).$$

При достаточно малых $\beta > 0$ первое слагаемое здесь в силу (18) не превосходит $\operatorname{const}\beta$, второе в силу (17) не превосходит $\operatorname{const} q^4\beta^{-1}$, третье в силу условия $\Phi \geq 0$ не превосходит $\operatorname{const}\beta^2$. Таким образом, в случае $\mid e^{-ik} \mid = \left(\dfrac{q}{\beta b_3}\right)^2 > \dfrac{2}{\mid \mu_N \mid \beta}$, $0 < q < 1$, при достаточно малых $\beta > 0$

$$\| B(p,k) - E - \beta e^{-ik} P_0 \hat{\Phi} P_0 \| < \operatorname{const} q^4 \beta^{-1}.$$

С другой стороны,

$$\| \beta e^{-ik} P_0 \hat{\Phi} P_0 \| = \mid \mu_N \mid \frac{q^2}{b_3^2 \beta}$$

и, следовательно, можно указать $q_0 > 0$, $\dfrac{2b_3^2}{\mid \mu_N \mid} \leq q_0 < 1$, такое, что для любого q, $\dfrac{2b_3^2}{\mid \mu_N \mid} \leq q < q_0$, при любых достаточно малых $\beta > 0$ в случае $\mid e^{-ik} \mid = \left(\dfrac{q}{\beta b_3}\right)^2$ выполнено неравенство (16).

Отсюда следует, что оператор $\underline{B}(p,k)$ обратим для любого k из полосы

$$\ln \frac{2}{\mid \mu_N \mid \beta} \leq \operatorname{Im} k \leq \ln \left(\frac{q_0}{\beta b_3}\right)^2 .$$

Аналогично рассматривается случай

$$-\ln\left(\frac{q_0}{\beta b_3}\right)^2 \leq \operatorname{Im} k \leq -\ln\frac{2}{|\mu_N|\beta}.$$

Лемма 5 доказана.

Из лемм 3, 5 следует утверждение теоремы 1.2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ПРИМЕЧАНИЯ

Во вводной гл. 0 излагается хорошо известный материал, те или иные части которого можно найти в книгах Д. Рюэля [37], Дж. Глимма, А. Джаффе [12], У. Брателли, Д. Робинсона [7,49], М. Рида, Б. Саймона [36], а также в обзоре Р. Л. Добрушина, Я. Г. Синая, Ю. М. Сухова [14].

Часть гл. 1 является чисто учебной (§§ 2 и 3, см. соответствующий материал в книгах Ж. Диксмье [13] и Ф. А. Березина [5]). Другая часть носит иллюстративный характер: в § 1 дается краткое изложение работ Я. Г. Синая [39] и Р. Л. Добрушина, И. Фритца [50] по динамике одномерного газа, в § 4 строится динамика для неидеального непрерывного ферми-газа методом, близким к методу Робинсона [37], и, наконец, § 5 посвящен простому примеру так называемых линейных динамик в алгебре КАС и алгебре Вейля (см. книгу [5]). Существенно новые результаты содержатся в § 6 и § 7. В § 6 строится стохастическая динамика и ее равновесные состояния для марковского поля с непрерывным временем. Эти построения навеяны идеями "стохастического квантования" (см. обзор А. А. Мигдала [29]). Изложение следует работе И. А. Игнатюк, В. А. Малышева, В. Сидоравичюса [19]. § 7, где подробно изучается динамика для одного специального класса марковских полей с локальным взаимодействием, следует работе В. А. Малышева, Е. Н. Петровой, Е. Скаччиателли [56].

Гл. 2 написана главным образом в учебных целях и содержит, за некоторыми исключениями, известный материал, надлежащим образом обработанный. Новым является материал § 3 (см. статью Д. Д. Ботвича [47]), § 4, а также п. 4 из § 5 (отступление; см. статью И. А. Кашапова, В. А. Малышева [52]).

В гл. 3 излагаются основы довольно сильного метода по изучению нижних ветвей спектра гамильтонианов решетчатых моделей квантовых полей (так называемый "московский метод"). Его начало восходит к работе Р. А. Минлоса, Я. Г. Синая [31], в которой была введена идея построения мультипликативного базиса и в зачаточной форме понятие кластерного оператора. Доказательства в этой работе отсутствуют. Центральным понятием гл. 3 является понятие кластерного оператора, введенное в работе Ф. Г. Абдулла-Заде, Р. А. Минлоса, С. К. Погосяна [1], а затем подробно исследованное в работах В. А. Малышева, Р. А. Минлоса [27, 54, 55], В. А. Малышева [25], И. А. Кашапова, В. А. Малышева [52], Х. Желондека [17]. Изложенные в гл. 3 применения этого метода к модели случайного блуждания, а также к решетчатой модели квантовой электродинамики содержатся соответственно в работах К. Болдригини, Р. А. Минлоса и А. Пеллегринотти [47^{б}] и Р. А. Минлоса, Е. А. Жижиной [57^{а}]. Другие многочисленные применения метода к различным конкретным моделям приведены в обзоре Р. А. Минлоса [57] на эту тему, где имеется обширная библиография.

Наконец, в гл. 4 изложены недавние результаты по асимптотической полноте слабовозмущенного ферми-газа (либо с помощью малого самодействия, либо с помощью взаимодействия с некоторой инородной частицей).

Эти результаты следует считать продолжением и строгим обоснованием работ К. Фридрихса [42] и К. Хеппа [44] на эту тему. Приводимые результаты содержатся в серии работ Д. Д. Ботвича, В. А. Малышева и А. Ш. Домненкова. Наше изложение следует работам В. В. Айзенштадта, Д. Д. Ботвича, В. А. Малышева [2], Д. Д. Ботвича, В. А. Малышева [6], а также работе Д. Д. Ботвича,А. Ш. Домненкова, В. А. Малышева [48]. В обзоре [2] дается обширная библиография по этой теме.

Гл. 5 представляет собой введение в альтернативный метод изучения спектра трансфер-матрицы, условно называемый методом ядер Бете—Солпитера. Этот метод преимущественно используется в работах западных ученых. В §1 дается краткое пояснение этого метода для случая модели Изинга вместе с сопоставлением его с результатами, изложенными в гл. 3. Главная часть этой главы, касающаяся исследования одночастичного спектра трансфер-матрицы гиббсовских полей с неограниченным спином с помощью уравнения Дайсона, взята из диссертации И. А. Игнатюк [19$^{\text{а}}$]. Хотя существует много журнальных публикаций, в которых применяется метод ядер Бете—Солпитера, он почти не освещен в монографической литературе. Краткий его обзор можно найти в книге [12], где приведена большая библиография.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдулла–Заде Ф. Г., Минлос Р. А., Погосян С. К. Кластерные оценки для гиббсовских случайных полей и некоторые их применения // Многокомпонентные случайные системы.—М. : Наука, 1978. С. 5–30.

2. Айзенштадт В. В., Ботвич Д. Д., Малышев В. А. Ограниченные возмущения свободной динамики квантовых систем // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Серия Теория вероятностей, мат. статистика, теорет. кибернетика. 1990. Т. 27. С. 3–78.

3. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн–Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Ч. 1.: М.: Наука, 1982.

4. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.—М. : Гостехиздат, 1953.

5. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.—М. : Наука, 1965.

6. Ботвич Д. Д., Малышев В. А. Доказательство асимптотической полноты по числу частиц // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 24, N 1. С. 132–145.

7. Брателли У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. Т. 1.—М.: Мир, 1982.

8. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.—М.: Наука, 1986.

9. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращения и группы Лоренца.—М.: Физматгиз, 1958.

10. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.—М.: Физматгиз, 1958.

11. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов: В 3 т.—М.: Наука, 1971. Т. 1: 1973. Т. 2; 1975. Т. 3.

12. Глимм Дж., Джаффе А. Квантовая физика—подход с точки зрения континуальных интегралов.—М.: Мир, 1984.

13. Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления.—М.: Наука, 1974.

14. Добрушин Р. Л., Синай Я. Г., Сухов Ю. М. Динамические системы статистической механики // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Серия Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 2. Динамические системы.—М., 1985. С. 235–284.

15. Домненков А. Ш. Марковский предел для частицы, взаимодействующей с газом // Теорет. и мат. физ. 1989. Т. 79, N 2. С. 263–271.

16. Дуб Д. Ж. Вероятностные процессы.—М.: ИЛ, 1956.

17. Желондек Х. Существенный спектр N-частичного аддитивного кластерного оператора // Теор. и мат. физика. 1982. Т. 53, N 2. С. 216–226.

18. Жижина Е. А., Минлос Р. А. Асимптотика убывания корреляций для гиббсовских спиновых полей // Теорет. и мат. физ. 1988. Т. 77, N 1. С. 3–12.

19^{a} Игнатюк И. А. Убывание корреляций марковских процессов на счетном произведении пространств. Диссертация МГУ, 1990 г.

19. Игнатюк И. А., Малышев В. А., Сидоравичюс В. Сходимость метода стохастического квантования. I, II // Теория вероятностей и ее приложения. 1992. Ч. I. Т. 37. Вып. 2. С. 241–253. Ч. II. Т. 37. Вып. 4. С. 621–647.

20. Кириллов А. А. Элементы теории представлений.—М.: Наука, 1972.

21. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.—М.: Наука, 1980.

22. Лакаев С. И. Некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса // Труды семинара им. Петровского. 1986. Т. 11. С. 210–238.

23. Лейтес Д. А. Введение в теорию супермногообразий // УМН. 1982. N 1. С. 3–58.

24. Лигетт Т. Марковские процессы с локальным взаимодействием.—М.: Мир, 1989.

25. Малышев В. А. Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля // УМН. 1980. Т. 35, N 2. С. 3–53.

26. Малышев В. А., Минлос Р. А. Гиббсовские случайные поля.— М.: Наука, 1985.

27. Малышев В. А., Минлос Р. А. Кластерные операторы // Труды семинара имени И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 63–80.

28. Маматов Ш. С., Минлос Р. А. Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора // Теор. и мат. физика. 1989. Т. 79, N 2. С. 163–179.

29. Мигдал А. А. Стохастическое квантование теории поля // УФН. 1986. Т. 149, N 1. С. 3–44.

30. Минлос Р. А. Лекции по статистической физике // УМН. 1968. Т. 23, вып. 1. С. 133–190.

31. Минлос Р. А., Синай Я. Г. Изучение спектра стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа // Теорет. и мат. физ. 1970. Т. 2. С. 230–243.

32. Минлос Р. А., Эшкараев Ч. Тензорные случайные поля, удовлетворяющие аксиомам Нельсона // Вестник Моск. Университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1983. N 1. С. 14–18.

33. Молчан Г. М. Характеризация гауссовых полей с марковским свойством // ДАН СССР. 1971. Т. 197, N 4. С. 228–232.

34. Петрина Д. Я., Герасименко В. И. Математическое описание эволюции состояния бесконечных систем классической статистической механики // УМН. 1983. Т. 38, N 5. С. 3–58.

35. Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев В. А. Математические основы классической статистической механики.—Киев: Наукова думка, 1985.

36. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: В 4 т.—М.: Мир, 1977–1982.

Т. 1. Функциональный анализ.—1977.

Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность.—1978.

Т. 3. Теория рассеяния.—1982.

Т. 4. Анализ операторов.—1982.

37. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты.—М.: Мир, 1971.

38. Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля.—М.: Мир, 1976.

39. Синай Я. Г. Построение динамики в одномерных системах статистической механики // Теор. и матем. физика. 1972. Т. 11. N 2. С. 248–258.

40. Спицер Ф. Принципы случайного блуждания.—М.: Мир, 1969.

41. Фадеев Л. Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра // Труды матем. ин-та АН СССР.—М.: Наука. 1964. Т. 73. С. 292-313.

42. Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве— М.: Мир, 1969.

43. Хаитов А. Предельная эквивалентность термодинамических ансамблей в случае одномерных классических. Ч. 1 // Труды Моск. матем. общества.— 1973.—Т. 28.—С. 215–260.

44. Хепп К. Теория перенормировок.—М.: Наука, 1974.

45. Чжун Кай-Лай. Однородные цепи Маркова.—М.: Мир, 1964,

46. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля.—М.: Мир, 1976.

47^{а} Хуанг К. Статистическая механика.—М.: Мир, 1966 г.

47^{б} Boldrighini C., Minlos R. A., Pellegrinotti A. Central limit theorem for the random walk of one and two particles in random environment with mutual interaction. In "Probability contributions to statistical physics". Ed. R. L. Dobrushin. Amer. Math. Soc. (in press)

47. Botvich D. D. Spectral properties a CNS-hamiltonian in quasi-free state // Lect. Notes Math. 1983. V. 1021. P. 65–71.

48. Botvich D. D., Domnenkov A. Sh., Malyshev V. A. Example of asymptotic completness in translation invariant systems with nonbounded number of particles // Acta Applicandal Mathematical. 1991. V. 22, N 1. P. 117–137.

49. Bratteli O. Robinson D. W. Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II.—Berlin: Springer-Verlag, 1981.

50. Dobrushin R.L., Fritz J. Non-equilibrium dynamics of onedimensional infinite particle systems with hard-core interection // Commun. Math. Phys. 1977. V. 557 P. 275–292.

51. Domnenkov A. Sh., Malyshev V. A. Example of asymptotic completeness for traslation invariant infinite particle system // Comm. Math. Phys. 1988. V. 117, N 3. P. 316–322.

52. Kashapov I. A., Malyshev V. A. Complete cluster expansion and spectrum of hamiltonian for fermion lattice models // Selecta Math. Sovietica. 1983–84. V. 3. P. 151–181.

53. Klein A., Landau L.
Stochastic processes associated with KMS states // J. Funct. Anal. 1981. V. 42, N 3. P. 368–428;
Periodic Gaussian osterwalder–Shalder positive processes and two-sided Markov propety on the circle // J. Funct. Anal. 1981. V. 44, N 2. P. 121–137;
Construction of a Unique self-adjont generator for a Symmetric local semigroup // Pacific J. Math. 1981. V. 94. N 2. P. 341–368.

54. Malyshev V. A., Minlos R. A. Multiplicative and additive cluster expansion for the evolution of quantum spin systems in the ground state // Phys. Lett. 1981. V. 86A. P. 405–406.

55. Malyshev V. A., Minlos R. A. Invariant subspaces of clustering operators. I // J. of Stat. Phys. 1979. V. 21, N 3. P. 231–242; II // Commun. Math. Phys. 1981. V. 82. P. 211–226.

56. Malyshev V. A., Petpova E. N., Scacciatelli E. Marginally closed processes with a local interaction
Stochastic processes and applications. 1992. N. 43. P. 47–63.

57^{а} Minlos R. A., Zhizhina E. A. Meson states in lattice QCD // In "Many-particle hamiltonians: spectra and scattering". Ed. R. A. Minlos. Amer. Math. Soc. 1991. Ser. "Advances in Soviet Math." V. 5. P. 113–138.

57. Minlσs R. A. Spectral expansion of the transfer matrices of Gibbs Fields // Math. Phys. Reviews. Ed. S. P. Novikov. Soviet Scientific reviews. 1988. V. 7. P. 235–280.

58. Nelson E. The free Markoff field // J. Funct. Anal. 1973. V. 12, N 2. P. 211–217.

59. Shpohn H. Large scale dynamics of interaction particles. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg. N. 4. 1991.

1*. Ахмитзянов Р. Р., Малышев В. А., Петрова Е. Н. Кластерное разложение гиббсовского возмущения безмассового гауссовского поля // Теорет. и мат. физика. 1984. Т. 58. N 2. С. 292–298.

2*. Домненков А. Ш., Малышев В. А. Трансляционно-инвариантное взаимодействие квантовой частицы с ферми-газом // ДАН СССР. 1989. Т. 304. N 2. С. 326–330.

3*. Игнатюк И. А., Малышев В. А. Локально взаимодействующие процессы с некомпактным множеством состояний // Тезисы 1-го Бернуллиевского конгресса. Ташкент. 1986.

4*. Игнатюк И. А., Малышев В. А. Локально взаимодействующие процессы с некомпактным множеством значений // Вестник Московского Университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1987. N 2. P. 3–6.

5*. Игнатюк И. А., Малышев В. А. Кластерное разложение для локально взаимодействующих цепей Маркова // Вестник Московского Университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1988. N 5. P. 3–7.

6*. Игнатюк И. А., Малышев В. А. Процессы с локальным взаимодействием и сети связи // Пробл. передачи инф. 1989. Т. 25. N 1. P. 65-77.

7*. Игнатюк И. А., Малышев В. А., Турова Т. С. Устойчивость бесконечных систем стохастических уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика.–ВИНИТИ. 1990. Т. 27. С. 3–78.

8*. Малышев В. А. Возмущения гиббсовских случайных полей // Тезисы 4-го Международного Симпозиума по теории информации. Ленинград. 1976. Т. 11. С. 101–102.

9*. Малышев В. А. Некоторые комбинаторные проблемы статистической физики // Комбинаторный и асимптотический анализ.– Красноярск. Гос. Унив. 1977. N 2. С. 11–16.

10*. Малышев В. А. Возмущения гиббсовских случайных полей // Многокомпонентные случайные системы.–М.: Наука, 1978. С. 258–276.

11*. Малышев В. А. Решетчатые гамильтоновы системы // УМН. 1977. Т. 32. N 5. С. 215–216.

12*. Малышев В. А. Солитонные секторы в решетчатых моделях с непрерывным временем // Функц. анализ и его прилож. 1979. Т/ 13. N 1. P. 31–41.

13*. Малышев В. А. Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля
УМН. 1980. Т. 35. N. 2. С. 3–53.

14*. Малышев В. А. Семиинварианты нелокальных функционалов гиббсовских случайных полей // Матем. заметки. 1983. Т. 34. N 3. С. 443-452.

15*. Малышев В. А. Элементарное введение в математическую физику бесконечночастичных систем.–Дубна. 1983.

16*. Малышев В. А. Алгебра конструктивной математической физики // УМН. 1990. Т. 45. N 5. P. 141–170.

17*. Малышев В. А., Минлос Р. А. Существование одночастичных подпространств для некоторых стохастических операторов // Тезисы 2-й Международной конференции по вероятности. Вильнюс. 1977. С. 7–10.

18*. Малышев В. А., Минлос Р. А. Изучение спектра стохастических операторов для гиббсовских полей // УМН. 1978. Т. 33, N 2. С. 230–231.

19*. Малышев В. А., Минлос Р. А. Вероятностный метод исследования спектров многочастичных гамильтонианов // Тезисы 5-го Международного Симпозиума по теории информации. Тбилиси. 1979. V. 2. P. 60–61.

20*. Малышев В. А., Минлос Р. А. Спектр трансфер-матрицы гиббсовского случайного поля при низких температурах // Тезисы 3-й Международной конференции по вероятности. Вильнюс. 1981. С. 21–22.

21*. Малышев В. А., Минлос Р. А. Квазичастицы и стохастические операторы // 4-й советско-японский симпозиум по теории вероятностей. Тбилиси. 1982. V. 11. P. 86–87.

22*. Малышев В. А., Петрова Е. Н. Гиббсовские перестройки двумерного калибровочного поля // Тезисы 5-го Международного Симпозиума по теории информации. Тбилиси. 1979. V. 2. P.60–61.

23*. Малышев В. А., Петрова Е. Н. Преобразования двойственности гиббсовских случайных полей // Теор. вер. Мат. стат. Теор. кибернет.–Итоги науки и техн.–М.: ВИНИТИ. 1981. С. 3–51.

24*. Малышев В. А., Петрова Е. Н. Обобщенные контурные поля // Тезисы 3-й Международной конференции по вероятности. Вильнюс. 1981. С. 22–23.

25*. Малышев В. А., Минлос Р. А., Петрова Е. Н., Терлецкий Ю. А. Обобщенные контурные модели // Теор. вер. Мат. стат. Теор. кибернет.–Итоги науки и техники. Т. 19–М.: ВИНИТИ. 1982. С. 3–54.

26*. Малышев В. А., Подорольский В. А., Турова Т. С. Эргодичность бесконечных систем стохастических уравнений // Матем. заметки. 1989. V. 45. N 4. P. 78–88.

27*. Малышев В. А., Синай Я. Г. О некоторых работах по эргодической теории и математическим проблемам статистической механики на кафедре теории вероятности МГУ // Теор. вер. и ее применения. 1989. Т. 34 С. 215–222.

28*. Малышев В. А., Терлецкий Ю. А. Предельная теорема для некоммутативных полей // Вестник Москов. Университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1978. N 3. С. 47–51.

29*. Aizenstadt V. V., Malyshev V. A. Spin interacting with an ideal Fermi gas // Journal of Statistical Physics. 1987. V. 48. N 1/2. P. 51–68.

30*. Akhmitzyanov R. R., Malyshev V. A., Petrova E. N. Cluster expansion for unbounded infinite potential // In "Stat. Physics and Dynamical Systems". Progress in Physics. Birkhauser. 1985. V. 10. P. 221–234.

31*. Berezner S., Malyshev V. A., Krutina M. Exponential convergence of one-dimensional Toom's probabilistic cellular automata // Journal of Statistical Physics. 1993. V. 73. N 5/6. P. 927–944.

32*. Boldrighini B., Ignatyuk I. A., Malyshev V. A. Pellegrinotti A. Random walk in dynamic environment with mutual influence // Stochastic processes and their applications. 1992. V. 41. P. 157–177.

33*. Botvich D. D., Malyshev V. A. Asymptotic completeness and all that for infinite number of fermions // In: Advances of Soviet Mathematics. 1990. V. 3. P. 1-82. 1990 Providence, AMS Publications(with D.D.Botvich).

34*. Botvich D. D., Malyshev V. A. Unitary equivalence of temperature dynamics of ideal and locally perturbed Fermi gas // Commun. Math. Phys. 1983. V. 91. N 4. C. 301–312.

35*. Botvich D. D., Malyshev V. A., Manita A. D. Translation Invariant Quantum Master Equation // Helvetica Physica Acta. 1991. V. 64. P. 1072–1092.

36*. Ignatyuk I. A., Malyshev V. A., Molchanov S. A. Moment-closed processes with local interaction // Selecta Mathematica Sovietica. 1989. V. 8. N 4. P. 351–384.

37*. Malyshev V. A. One particle ground states and scattering for Markov processes // Lecture Notes Math. 1978. V. 653, P. 173–193.

38*. Malyshev V. A. Uniform cluster estimates for lattice models // Comm. Math. Phys. 1979. V. 64. P. 131-157.

39*. Malyshev V. A. Complete cluster expansions for weakly coupled Gibbs random fields // In "Multicomponent random systems". Adv. Prob. 1981. V. 6. P. 505–530.

40*. Malyshev V. A. Convergence in the linked cluster theorem for many body fermion systems // Commun. Math. Phys. 1988. V. 119. P. 501–508.

41*. Malyshev V. A. Equivalences of C*-dynamical systems // In "Dynamical Systems and Ergodic Theory". Banach Center Publ. Warszawa. 1989. V. 23. P. 391–397.

42*. Malyshev V. A., Manita A. D., Petrova E. N., Scacciatelli E. Hydrodynamics of Weakly Perturbed Voter Model // CARR Reports in Mathematical Physics. 1993. N 17. P 1–51.

43*. Malyshev V. A., Nickolaev I. Uniqueness of Gibbs random fields via cluster expansions // J. Statist. Phys. 1984. V. 35. N 3. P. 375-379.

44*. Malyshev V. A., Nickolaev I., Terletzki Y. A. Temperature dynamics of the locally perturbed classical ideal gas // J. Statist. Phys. 1985. V. 40. N 1/2. P. 133–146.

45*. Malyshev V. A., Tirozzi B. Renormalisation group convergence for small perturbations of Gaussian random fields with slowly decaying correlations // J. Math. Phys. 1981. V. 82. N 9. P. 2020–2025.

Научное издание

Мадышев Вадим Александрович
Минлос Роберт Адольфович
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В
БЕСКОНЕЧНОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМАХ
Редактор *В. В. Абгарян*
Художественный редактор *Л. Н. Романенкова*
Корректор *Н. Н. Журавлева*
ИБ N 41603

ЛР N 020297 от 27.11.91. Сдано в набор 20.12.93.
Подписано к печати 25.03.94. Формат 60 × 90/16. Бум. тип. N 2.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 27,0. Усл. кр.-отт. 27,0.
Уч.-изд. л. 26,13. Тираж 1000 экз. Заказ N . С-046.

Издательская фирма
"Физико-математическая литература"
ВО "Наука"
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с оригинал-макета в типографии
Волжского полиграфобъединения
Волгоградского упрполиграфиздата
404100 г. Волжский, ул. XIX Партсъезда, 31