ЛЕКЦИИ
ДЛЯ МОЛОДЫХ
УЧЕНЫХ

В.А.Малышев

Элементарное введение в математическую физику бесконечночастичных систем

ДУБНА

ЛЕКЦИИ ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

Выпуск

РЕДАКЦИ[illegible]

Д.В.Ширков – председатель
А.Н.Сисакян – зам.председателя
Г.М.Гавриленко – ученый секретарь
В.Г.Маханьков
В.А.Никитин
В.Р.Саранцева
С.Ю.Шмаков

Р17-83-363

В.А.Малышев

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ БЕСКОНЕЧНОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ

Дубна 1983

Малышев В.А. P17-83-363

Элементарное введение в математическую физику бесконечночастичных систем

Настоящие лекции содержат элементарное введение в конструктивную математическую физику бесконечночастичных систем и, в частности, в технику кластерных разложений, которая является в настоящее время основным инструментом исследования в этой области. "Элементарное введение" означает, что для понимания лекций необходим минимум знаний из теории вероятностей и функционального анализа; кроме того, все построения проиллюстрированы на примере простейшей нетривиальной модели - модели Изинга.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Malyshev V.A. P17-83-363

An Elementary Introduction to the Mathematical Physics of Infinite Particle Systems

These lecture notes contain an elementary introduction to the constructive mathematical physics of infinite particle systems, and, in particular, to the cluster expansion technique which is, at present, the main tool of approach to the subject - Elementary means that the reader is requested to have ouly a minimum amount of knowledge of probability theory and functional analysis and, besides, that all constructions are illustrated on the example of the simplest nontrivial model, the Ising model.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Перевод автора.

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ I. ГИББСОВСКОЕ ПОЛЕ

ЧАСТЬ П. ДИНАМИКА

Основные и КМШ-состояния. Физический гамильтониан. Характеризация равновесных состояний. Существование, единственность и кластерное разложение КМШ-состояний в высокотемпературной области. Модулярный оператор.

IO. Евклидов подход к изучению основных состояний

Модель Изинга с непрерывным временем. Термодинамический предельный переход для основных состояний. Кластерные оценки.

II. Картина квазичастиц

Одночастичные подпространства. Теория рассеяния.

ДОПОЛНЕНИЯ

I. Семиинварианты

П. Операторные алгебры. Алгебры матриц в задачах

Эта работа возникла на основе лекций, читавшихся автором на механико-математическом факультете МГУ, в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ и на различных школах и конференциях в 1978-83 годах.

В современной конструктивной математической физике бесконечночастичных систем можно выделить 4 основные проблемы:

I) построение конкретной модели в бесконечном объеме, что связано с обоснованием термодинамического предельного перехода и изучением свойств построенной модели;

2) в ряде случаев первая проблема из-за медленного убывания корреляций осложняется инфракрасной расходимостью;

3) ультрафиолетовая расходимость;

4) проблема асимптотической полноты или,что то же самое, обоснование квазичастичной картины вещества - "любое вещество есть совокупность невзаимодействующих квазичастиц".

Цель лекций - дать элементарное введение в I и 4 проблемы и в технику кластерных разложений, которая сейчас используется при штурме всех четырех проблем. Элементарность означает, во-первых, минимум знаний из теории вероятностей и функционального анализа - часто приходится видеть,как застревают во внутренних проблемах теории вероятностей и функционального анализа, так и не доходя до математической физики.

Во-вторых, элементарность означает выбор простейшей нетривиальной модели - модели Изинга.

Работа разделяется на две части: первая часть (лекции I-7) требует только знания элементов теории вероятностей. Вторая часть (лекции 8-II) посвящена различным понятиям, связанным с динамикой в состоянии,близком к равновесному.

В дополнении I излагаются необходимые сведения из теории семиинвариантов. В дополнении П - из теории C^*-алгебр, а также ряд задач, предлагавшихся на семинаре для студентов 2 курса.

Никаких исторических и библиографических ссылок не дается.

За этим мы отсылаем читателей к монографиям, оригинальным и обзорным работам, приведенным в списке литературы. Этот список не претендует на полноту и составлялся в основном из соображений, чтобы в каждой из перечисленных работ была дана полная библиография.

Автор благодарит своих коллег из МГУ и ОИЯИ, слушателей и учеников за ценные советы, помощь и внимание.

Часть I. Гиббсовское поле

1. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Модель Изинга. Неравенства Гриффитса. Существование термодинамического предела.

Рассмотрим решетку $\mathbb{Z}^\nu$ - множество точек $t=(t^1,\dots,t^\nu)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^\nu$ с целочисленными координатами. Пусть Λ - "куб" в $\mathbb{Z}^\nu$ с центром в начале координат, т.е. множество точек $\mathbb{Z}^\nu$, координаты которых по модулю не превосходят N, где N - некоторое целое положительное число.

Будем говорить, что задана конфигурация $\sigma^{(\Lambda)}$ в Λ, если каждой точке $t\in\Lambda$ приписано число σ_t, равное I или -I. Конфигураций всего $2^{|\Lambda|}$, $|\Lambda|$ - число точек в Λ.

Введем вероятности конфигураций

$$P_\Lambda(\sigma^{(\Lambda)}) = \frac{1}{Z_\Lambda}\exp(-\mathcal{U}_\Lambda); \tag{I.I}$$

$$\mathcal{U}_\Lambda = -\Big(h\sum_{t\in\Lambda}\sigma_t + \beta\sum_{\substack{\{t,t'\}\subset\Lambda\\ \rho(t,t')=1}}\sigma_t\sigma_{t'}\Big)$$

называется энергией конфигурации $\sigma^{(\Lambda)}=(\sigma_t)_{t\in\Lambda}$, $\rho(t,t')$ - -расстояние между точками t и t' в метрике $\rho(t,t') = \sum_{i=1}^{\nu}|t^i-t'^i|$. Такие (неупорядоченные) пары $\{t,t'\}$ называются парами ближайших соседей. В (I.I) h,β - вещественные параметры модели. Случай $\beta\geq 0$ соответствует так называемой ферромагнитной модели Изинга. Его в основном мы и будем рассматривать. Невинный нормирующий множитель Z_Λ выбирается из условия

$$\sum_{\sigma^{(\Lambda)}} P_\Lambda(\sigma^{(\Lambda)}) = 1.$$

Он называется статистической суммой, играет важнейшую роль в дальнейшем и равен, таким образом,

$$Z_\Lambda = \sum_{\sigma^{(\Lambda)}} \exp(-U_\Lambda),$$

где сумма по всем конфигурациям. Напомним, что U_Λ есть функция на множестве конфигураций в Λ.

Распределение вероятностей (I.I) называется гиббсовским распределением вероятностей в Λ, соответствующим модели Изинга. Если выбрать энергию взаимодействия U_Λ иначе, то получится другая модель.

Конфигурации теперь стали случайными, а σ_t - случайными величинами. При этом, например,

$$P_\Lambda(\sigma_t = 1) = \sum_{\sigma^{(\Lambda)}:\ \sigma_t = 1} P_\Lambda(\sigma^{(\Lambda)}).$$

Введем случайные величины

$$\sigma_T = \prod_{t \in T} \sigma_t, \quad T \subset \Lambda.$$

Математическое ожидание $M\sigma_T$ по распределению P_Λ далее удобно обозначать как $\langle \sigma_T \rangle_\Lambda$. Например,

$$\langle \sigma_t \rangle_\Lambda = P_\Lambda(\sigma_t = 1) - P_\Lambda(\sigma_t = -1),$$

$\langle \sigma_T \rangle_\Lambda$ называются корреляционными функциями (или моментами).

Задача I.I. Пусть дано множество $T = \{t_1, \dots, t_n\} \subset \Lambda$. Доказать, что "конечномерные распределения" $P_\Lambda(\sigma_{t_1} = \tilde{\sigma}_1, \dots, \sigma_{t_n} = \tilde{\sigma}_n)$ выражаются в виде линейных комбинаций $\langle \sigma_{T'} \rangle_\Lambda$, $T' \subseteq T$. Найти коэффициенты $c_{T'}$ в формуле

$$P_\Lambda(\sigma_{t_1} = \tilde{\sigma}_1, \dots, \sigma_{t_n} = \tilde{\sigma}_n) = \sum_{T' \subseteq T} c_{T'} \langle \sigma_{T'} \rangle_\Lambda. \qquad (I.2)$$

Указание. Рассмотреть

$$\langle \prod_{i=1}^{n} (\sigma_{t_i} + \tilde{\sigma}_i) \rangle_\Lambda.$$

Считается, что $\sigma_\emptyset = 1$.

Фиксируем теперь T и будем увеличивать Λ: $\Lambda \uparrow Z^\nu$, т.е. $N \to \infty$. Если мы сможем доказать существование $\lim \langle \sigma_T \rangle_\Lambda$, то можно сделать вывод, что корреляционные функции (и конечномерные распределения) почти не зависят от Λ при больших Λ.

Такой предельный переход называется термодинамическим предельным переходом (предел большого числа степеней свободы σ_t). В оставшейся части лекции мы докажем

Теорему I.I. Если $\beta \geq 0$, то для всех (конечных) T существует термодинамический предел корреляционных функций $\langle \sigma_T \rangle_\Lambda$.

Рассмотрим сначала крайний случай $\beta = 0$.

Задача I.2. Доказать, что при $\beta = 0$

$$\langle \sigma_T \rangle_\Lambda = \left(\frac{e^h - e^{-h}}{e^h + e^h} \right)^{|T|}$$

не зависят от Λ и, значит, термодинамический предел тривиальным образом существует. Случайные величины σ_t являются взаимно независимыми при конечных Λ и в пределе.

Докажем, что для $\beta > 0$ можно ограничиться случаем $h \geq 0$. Это вытекает из следующих соотношений.

Симметрия. Учтем зависимость от β и h, обозначив $P_\Lambda = P_{\Lambda,\beta,h}$. Для любой конфигурации $\sigma^{(\Lambda)}$ обозначим через $-\sigma^{(\Lambda)}$

конфигурацию, в которой в каждой точке изменены знаки. Такое преобразование является взаимно однозначным отображением множества конфигураций на себя. Тогда

$$P_{\Lambda,\beta,h}(\sigma^{(\Lambda)}) = P_{\Lambda,\beta,-h}(-\sigma^{(\Lambda)}), \tag{I.3}$$

$$Z_{\Lambda,\beta,h} = Z_{\Lambda,\beta,-h},$$

$$\langle\sigma_T\rangle_{\Lambda,\beta,h} = \begin{cases} \langle\sigma_T\rangle_{\Lambda,\beta,-h}, & \text{если } |T| \text{ четно,} \\ -\langle\sigma_T\rangle_{\Lambda,\beta,-h}, & \text{если } |T| \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В частности, при нечетном $|T|$

$$\langle\sigma_T\rangle_{\Lambda,\beta,0} = 0.$$

Задача I.3. Доказать свойства симметрии.

Для доказательства теоремы нам понадобятся два неравенства.

Лемма I.I. Пусть β, $h \geq 0$. Тогда имеют место

первое неравенство Гриффитса:

$$\langle\sigma_T\rangle_\Lambda \geq 0, \tag{I.4}$$

и второе неравенство Гриффитса:

$$\langle\sigma_T\sigma_{T'}\rangle_\Lambda - \langle\sigma_T\rangle_\Lambda\langle\sigma_{T'}\rangle_\Lambda \geq 0. \tag{I.5}$$

Нам эта лемма понадобится даже для более общей ситуации, когда Λ – произвольное конечное множество (не обязательно подмножество решетки) и энергия конфигурации $\sigma^{(\Lambda)}$ имеет вид

$$-\mathcal{U}_\Lambda = \Big(\sum_{t\in\Lambda} h_t\sigma_t + \sum_{\{t,t'\}\subset\Lambda} \beta_{tt'}\sigma_t\sigma_{t'}\Big). \tag{I.6}$$

Мы ввели много параметров $h_t \geq 0$, $\beta_{tt'} \geq 0$, где $\{t,t'\}$ – не обязательно ближайшие соседи.

Для доказательства (I.4) надо проверить

$$\sum_{\sigma^{(\Lambda)}} \sigma_T \exp(-\mathcal{U}_\Lambda) \geq 0.$$

Разложим экспоненту e^x в ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ и в каждом члене ряда раскроем скобки. Получим сумму членов вида

$$const \sum_{\sigma^{(\Lambda)}} \sigma_A,$$

где $const > 0$. Но ввиду

$$\sum_{\sigma_t=\pm 1} \sigma_t = 0 \tag{I.7}$$

последняя сумма есть нуль, если $A \neq \emptyset$. Таким образом, мы получаем сумму неотрицательных чисел, и (I.4) доказано.

Для доказательства (I.5) рассмотрим два независимых одинаковых экземпляра моделей с взаимодействием (I.6). Обозначим через σ_t, $\tilde{\sigma}_t$ величины, соответствующие этим двум экземплярам. Совместная вероятность конфигураций $\sigma^{(\Lambda)}$ и $\tilde{\sigma}^{(\Lambda)}$ запишется в виде

$$P_{\Lambda;\Lambda}(\sigma^{(\Lambda)},\tilde{\sigma}^{(\Lambda)}) = \frac{1}{Z_\Lambda^2}\exp\Big(\sum h_t(\sigma_t+\tilde{\sigma}_t) + \sum \beta_{tt'}\big(\sigma_t\sigma_{t'} + \tilde{\sigma}_t\tilde{\sigma}_{t'}\big)\Big). \tag{I.8}$$

Введем новые переменные

$$\xi_t = \sigma_t + \tilde{\sigma}_t, \quad \eta_t = \sigma_t - \tilde{\sigma}_t.$$

Тогда (I.8) перепишется в виде

$$\frac{1}{Z_\Lambda^2} \exp\left(\sum h_t \xi_t + \sum \frac{\beta_{tt'}}{2} (\xi_t \xi_{t'} + \eta_t \eta_{t'})\right). \quad (I.9)$$

Задача I.4. Доказать, что

$$\langle \xi_T \eta_{T'} \rangle \geq 0.$$

Указание. Заметить, что $\xi_t \eta_t = 0$, и повторить доказательство первого неравенства Гриффитса.

Заметим теперь, что

$$\langle \sigma_T \sigma_{T'} \rangle_\Lambda - \langle \sigma_T \rangle_\Lambda \langle \sigma_{T'} \rangle_\Lambda = \frac{1}{2} \langle (\sigma_T - \tilde{\sigma}_T)(\sigma_{T'} - \tilde{\sigma}_{T'}) \rangle_\Lambda,$$

так ввиду независимости

$$\langle \sigma_T \tilde{\sigma}_{T'} \rangle_\Lambda = \langle \sigma_T \rangle_\Lambda \langle \tilde{\sigma}_{T'} \rangle_\Lambda = \langle \sigma_T \rangle_\Lambda \langle \sigma_{T'} \rangle_\Lambda.$$

Если мы теперь сможем представить $\sigma_T - \tilde{\sigma}_T$ в виде многочлена от ξ_t, η_t с неотрицательными коэффициентами, то с учетом задачи I.4 второе неравенство Гриффитса будет доказано. Это представление осуществим индукцией по числу точек $|T|$. Для $|T| = 1$ имеем $\sigma_t - \tilde{\sigma}_t = \eta_t$. Индуктивный шаг проведем, используя два очевидных соотношения (через t здесь обозначается множество из одной точки t):

$$\sigma_{T \cup t} + \tilde{\sigma}_{T \cup t} = \frac{1}{2} [(\sigma_T + \tilde{\sigma}_T)(\sigma_t + \tilde{\sigma}_t) + (\sigma_T - \tilde{\sigma}_T)(\sigma_t - \tilde{\sigma}_t)],$$

$$\sigma_{T \cup t} - \tilde{\sigma}_{T \cup t} = \frac{1}{2} [(\sigma_T + \tilde{\sigma}_T)(\sigma_t - \tilde{\sigma}_t) + (\sigma_T - \tilde{\sigma}_T)(\sigma_t + \tilde{\sigma}_t)].$$

Вернемся теперь к доказательству теоремы I.I.

Задача I.5. Вычислить производные (в модели I.6):

$$\frac{\partial}{\partial h_t} \langle \sigma_T \rangle_\Lambda = \langle \sigma_T \sigma_t \rangle_\Lambda - \langle \sigma_T \rangle_\Lambda \langle \sigma_t \rangle_\Lambda \geq 0, \quad (I.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{tt'}} \langle \sigma_T \rangle_\Lambda = \langle \sigma_T \sigma_t \sigma_{t'} \rangle_\Lambda - \langle \sigma_T \rangle_\Lambda \langle \sigma_t \sigma_{t'} \rangle \geq 0.$$

Заметим теперь, что распределение в Λ можно рассматривать как распределение в $\Lambda' \supset \Lambda$, если взять в Λ'

$$h_t = \begin{cases} 0, & t \bar{\in} \Lambda, \\ h, & t \in \Lambda, \end{cases} \qquad \beta_{tt'} = \begin{cases} \beta, & t, t' \in \Lambda, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, переход к большему объему эквивалентен увеличению h_t и $\beta_{tt'}$ в некоторых точках. Из задачи I.5 и второго неравенства Гриффитса следует, что при таком увеличении

$$\langle \sigma_T \rangle_\Lambda \leq \langle \sigma_T \rangle_{\Lambda'}.$$

Так как $|\langle \sigma_T \rangle_\Lambda| \leq 1$, то монотонная по Λ последовательность $\langle \sigma_T \rangle_\Lambda$ имеет предел. Теорема доказана.

Эти пределы обозначаются $\langle \sigma_T \rangle$ и называются предельными корреляционными функциями.

Задача I.6. Используя задачу I.I,доказать, что конечномерные распределения также имеют пределы и образуют согласованное семейство конечномерных распределений.

По теореме Колмогорова это определяет систему случайных величин σ_t на решетке Z^ν, называемую (предельным) гиббсовским случайным полем (модели Изинга).

Компактность. Доказательство существования предельной точки системы $\langle \sigma_T \rangle_\Lambda$ проводится несравненно проще. Система конечных множеств решетки счетна, и ее можно пронумеровать: $T_1, T_2, \ldots$. Выберем подпоследовательность $\Lambda_{1n} \subset \Lambda_{2n} \subset \ldots$ такую, что $\langle \sigma_{T_1} \rangle_{\Lambda_n}$ имеет предел $\langle \sigma_{T_1} \rangle$. Из нее выберем подпоследовательность такую, что $\langle \sigma_{T_2} \rangle_\Lambda$ имеет предел и т.д. (диагональный процесс). Полученная предельная система $\langle \sigma_T \rangle$ также определяет случайное поле.

2. Фазовые переходы I рода

Марковское свойство. Система условных вероятностей и граничные условия. Трансфер-матрица в размерности I. Аргумент Пайерлса.

Назовем границей ∂A множества $A \subset \mathbb{Z}^\nu$ множество точек, отстоящих от A на расстоянии I:

$$\partial A = \{ t : \rho(A, t) = 1 \} .$$

Рассмотрим модель Изинга в Λ: пусть $A, B \subset \Lambda$, причем $A \cap B = \emptyset$, $\partial A \subset B$. Обозначим кратко $P_\Lambda(\tilde\sigma^{(A)} / \tilde\sigma^{(B)})$ условную вероятность того, что σ_t, $t \in A$, имеют определенные значения $\tilde\sigma_t$ при условии, что $\sigma_{t'}$, $t' \in B$, имеют заданные значения $\tilde\sigma_{t'}$.

Лемма 2.I.

$$P_\Lambda(\tilde\sigma^{(A)} / \tilde\sigma^{(B)}) = P_\Lambda(\tilde\sigma^{(A)} / \tilde\sigma^{(\partial A)}) =$$

$$= \frac{\exp\left(-\mathcal{U}_A(\tilde\sigma^{(A)}) - \mathcal{U}_{A,B}(\tilde\sigma^{(A)}, \tilde\sigma^{(B)})\right)}{\sum\limits_{\sigma^{(A)}} \exp\left(-\mathcal{U}_A(\sigma^{(A)}) - \mathcal{U}_{A,B}(\sigma^{(A)}, \tilde\sigma^{(B)})\right)} . \qquad (2.\mathrm{I})$$

Первое равенство называется марковским свойством, второе – гиббсовским свойством (для данной модели).

Мы обозначили в (2.I) энергию взаимодействия между конфигурациями $\sigma^{(A)}$ и $\sigma^{(B)}$

$$\mathcal{U}_{A,B}(\sigma^{(A)}, \sigma^{(B)}) = -2\beta \sum_{\substack{t \in A,\, t' \in B \\ \rho(t,t')=1}} \sigma_t \sigma_{t'} .$$

Доказательство леммы проводится прямым вычислением. Обозначая $\sigma = \sigma^{(\Lambda-(A\cup B))}$, имеем

$$P_\Lambda(\tilde\sigma^{(A)} / \tilde\sigma^{(B)}) = \frac{P_\Lambda(\sigma^{(A)} = \tilde\sigma^{(A)}, \sigma^{(B)} = \tilde\sigma^{(B)})}{P_\Lambda(\sigma^{(B)} = \tilde\sigma^{(B)})} = (2.2)$$

$$= \Big[\sum_\sigma \exp\big(-\mathcal{U}_A(\tilde\sigma^{(A)}) - \mathcal{U}_{A,B}(\tilde\sigma^{(A)}, \tilde\sigma^{(B)}) - \mathcal{U}_{B,\Lambda-(A\cup B)}(\tilde\sigma^{(B)}, \sigma) -$$

$$- \mathcal{U}_{\Lambda-(A\cup B)}(\sigma)\big)\Big] \cdot \Big[\sum_{\sigma^{(A)}} \sum_\sigma \exp\big(-\mathcal{U}_A(\sigma^{(A)}) -$$

$$\mathcal{U}_{A,B}(\sigma^{(A)}, \tilde\sigma^{(B)}) - \mathcal{U}_{B,\Lambda-(A\cup B)}(\sigma^{(B)}, \sigma) - \mathcal{U}_{\Lambda-(A\cup B)}(\sigma)\big)\Big]^{-1} .$$

Отсюда, сокращая на $\sum\limits_\sigma$, получаем правую часть (2.I). Так как она не зависит от B, то получаем и первое равенство (2.I). Лемма доказана.

Мы видим, что условные вероятности (2.I), в отличие от безусловных, остаются постоянными при увеличении Λ и, значит, сохраняются в термодинамическом пределе.

Определение. Система случайных величин σ_t, $t \in Z^\nu$ (т.е. случайное поле) называется гиббсовским случайным полем (модели Изинга), если для любых конечных A и B, таких, что $A \cap B = \emptyset$ и $\partial A \subset B$, имеет место (2.I) (без индекса Λ). Это определение принадлежит Р.Л.Добрушину.

В лекции I мы построили для каждого β и h одно такое поле. Существуют ли другие? Значения (β, h), для которых гиббсовское поле не единственно, называются точками фазового перехода I рода.

Теорема 2.I. Если $\nu=1$, то гиббсовское поле единственно для всех (β, h).

При $\nu \geqslant 2$, если $h \neq 0$ или $h=0$ и β мало, то гиббсовское поле единственно.

Если $\nu \geqslant 2$, $h=0$ и β достаточно велико, то гиббсовское поле неединственно.

В этой лекции мы докажем первую и третью части теоремы. Вторая часть доказывается в конце лекции 5.

Оказывается, что любое гиббсовское поле можно построить термодинамическим предельным переходом, если несколько обобщить понятие гиббсовского распределения в Λ.

Фиксируем конфигурацию $\tilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)}$ на $\partial\Lambda$ и определим гиббсовское распределение в Λ с данными граничными условиями $\tilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)}$:

$$P_{\Lambda,\tilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)}}(\sigma^{(\Lambda)}) = \frac{1}{Z_{\Lambda,\tilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)}}} \exp\left(-U_{\Lambda}(\sigma^{(\Lambda)}) - U_{\Lambda,\partial\Lambda}(\sigma^{(\Lambda)},\tilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)})\right) \qquad (2.3)$$

Обобщим (2.3): обозначим через $q^{(\partial\Lambda)}$ произвольное распределение вероятностей на множестве конфигураций $\tilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)}$ на границе и положим

$$P_{\Lambda,q^{(\partial\Lambda)}}(\sigma^{(\Lambda)}) = M_{q^{(\partial\Lambda)}} P_{\Lambda,\tilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)}}(\sigma^{(\Lambda)}), \qquad (2.4)$$

где математическое ожидание берется по распределению $q^{(\partial\Lambda)}$.

Задача 2.I. Проверить, что для распределений (2.4) имеют место марковское свойство и формула (2.I).

Пусть теперь дана последовательность кубов $\Lambda_n \uparrow Z^{\nu}$ и для каждого куба Λ_n определено "граничное условие" $q^{(\partial\Lambda_n)}$. Из задачи 2.I следует, что если предел конечномерных распределений $P_{\Lambda_n, q^{(\partial\Lambda_n)}}(\sigma_{t_1}=\tilde{\sigma}_1,\dots,\sigma_{t_k}=\tilde{\sigma}_k)$ существует, то он определяет гиббсовское поле.

Наоборот, имеет место

Лемма 2.2. Произвольное гиббсовское поле может быть получено таким способом.

Доказательство тривиально: рассмотрим для данного куба Λ_n распределение $q^{(\partial\Lambda_n)}$ на границе, индуцированное распределением данного гиббсова поля. Безусловные конечномерные распределения для всех достаточно больших Λ_n совпадают с распределениями данного гиббсова поля и поэтому остаются постоянными при $\Lambda_n \uparrow Z^{\nu}$.

Часто удобно использовать другие граничные условия:

1) случаи лекции I называются пустыми граничными условиями;

2) периодические граничные условия, при которых куб Λ сворачивается в тор, т.е. отождествляются соответствующие точки противоположных граней Λ, а взаимодействие определяется так же, как в лекции I, но с метрикой тора.

Обратимся теперь к одномерному случаю ($\nu=1$) и докажем первую часть теоремы 2.I. Более того, мы вычислим все корреляционные функции в явном виде. Пусть для простоты формул $h=0$. Матрица

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} e^{\beta} & e^{-\beta} \\ e^{-\beta} & e^{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,-1} \\ t_{-1,1} & t_{-1,-1} \end{pmatrix} \qquad (2.5)$$

называется трансфер-матрицей. Рассмотрим два двумерных вектора:

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение (e, f) двух векторов вводится как сумма $e_1 f_1 + e_2 f_2$ произведений их компонент.

Рассмотрим одномерную модель Изинга в $\Lambda = [-N, N]$ с пустыми граничными условиями. Выберем точки $t_1, t_2 \in \Lambda$; пусть N_1 – расстояние t_1 от левого конца Λ, N_2 – точки t_2 от правого конца Λ, N_{12} – расстояние между t_1 и t_2.

Лемма 2.3.

$$Z_\Lambda = (\mathcal{T}^{2N} e, e), \tag{2.6}$$

$$P_\Lambda(\sigma_{t_1} = 1, \sigma_{t_2} = 1) = \frac{(\mathcal{T}^{N_1} e, e^+)(e^+, \mathcal{T}^{N_{12}} e^+)(e^+, \mathcal{T}^{N_2} e)}{(\mathcal{T}^{2N} e, e)}.$$

Эти формулы соответствуют в более сложных моделях формулам Фейнмана-Каца-Нельсона.

Доказательство. Статистическая сумма есть сумма по "путям", т.е. конфигурациям $(\sigma_{-N}, \sigma_{-N+1}, \ldots, \sigma_{N-1}, \sigma_N)$. Каждому такому пути соответствует матричный элемент $t_{\sigma_{-N}\sigma_{-N+1}} t_{\sigma_{-N+1}\sigma_{-N+2}} \cdots t_{\sigma_{N-1}\sigma_N}$. Аналогично доказывается вторая формула.

Пусть теперь e_1 и e_2 – два нормированных собственных вектора с собственными значениями $\lambda_1 > |\lambda_2| > 0$. Можно разложить по ним e^+ и e:

$$e = c_1 e_1 + c_2 e_2, \quad e^+ = c_1^+ e_1 + c_2^+ e_2.$$

Мы имеем

$$(e, \mathcal{T}^{2N} e) \sim c_1^2 \lambda_1^{2N}. \tag{2.7}$$

Поэтому

$$\lim_{N\to\infty} P_\Lambda(\sigma_{t_1} = 1, \sigma_{t_2} = 1) = \frac{(c_1^+)^2}{\lambda_1^{N_{12}}} (\mathcal{T}^{N_{12}} e^+, e^+). \tag{2.8}$$

Задача 2.2. Доказать, что предел любого конечномерного распределения существует, не зависит от граничных условий, и найти его. Это завершает доказательство первой части теоремы 2.1.

Задача 2.3. Доказать, что система случайных величин σ_t в пределе $N \to \infty$ образует стационарную цепь Маркова.

Указание. Проверить соотношение

$$P(\tilde\sigma_t / \tilde\sigma_{t-1}, \ldots \tilde\sigma_{t-k}) = P(\tilde\sigma_t / \tilde\sigma_{t-1}).$$

Задача 2.4. Найти стационарные вероятности и матрицу переходных вероятностей этой цепи Маркова.

Мы видим, что в одномерном случае ситуация достаточно проста, и не будем больше к нему возвращаться.

Доказательство третьей части теоремы 2.I.

Рассмотрим модель Изинга в Λ с (+)-граничными условиями. Это значит, что $\tilde\sigma_t \equiv 1$ при $t \in \partial\Lambda$. Обозначим соответствующее распределение в Λ через $P_{\Lambda,+}$.

Лемма 2.4. Равномерно по Λ

$$P_{\Lambda,+}(\sigma_0 = -1) \leqslant \rho(\beta), \tag{2.9}$$

где функция $\rho(\beta) \to 0$ при $\beta \to \infty$.

Докажем третью часть теоремы 2.I, используя эту лемму. Пользуясь диагональным процессом, описанным в конце лекции I, построим гиббсовское поле выбором подпоследовательности Λ_n с (+)-граничными условиями. С учетом (2.9) для него

$$P(\sigma_0 = -1) \leqslant \rho(\beta).$$

Рассмотрим теперь (–) - граничные условия, т.е. $\sigma_t \equiv -1$, $t \in \partial\Lambda$. Ввиду симметрии при $h=0$ имеет место (доказать!) неравенство

$$P_{\Lambda,-}(\sigma_0 = 1) \leqslant \rho(\beta).$$

Строим аналогично предельное поле для этого случая. Для него

$$P(\sigma_0 = 1) \leq P(\beta).$$

Для достаточно больших β $P(\beta) < \frac{1}{2}$. Поэтому два построенных гиббсовских поля различны.

Для доказательства леммы 2.4 важную роль играют контуры (мы будем считать $\nu = 2$, предоставляя читателю сделать обобщение на $\nu > 2$). Удобно ввести двойственную решетку $\widetilde{Z}^2$, являющуюся решеткой Z^2, смещенной на вектор $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ребрами решетки назовем (замкнутые) отрезки между ближайшими соседями.

Рассмотрим модель Изинга в Λ с (+)-граничными условиями. Каждой конфигурации $\sigma^{(\Lambda)}$ сопоставим набор $\gamma = \gamma(\sigma^{(\Lambda)})$ пар ближайших соседей (t, t'), для которых $\sigma_t \neq \sigma_{t'}$ (т.е. $\sigma^{(\Lambda)}$ в точках пары имеют разные знаки).

Каждой такой паре (t, t') поставим в соответствие единственное ребро двойственной решетки, пересекающее ребро между t и t' в его середине. Эту совокупность ребер $\widetilde{Z}^2$ также обозначим как γ.

Задача 2.5. Для любой $\sigma^{(\Lambda)}$ γ представляют собой набор связных замкнутых ломаных в R^2 (связных компонент γ), которые мы будем называть (связными) контурами. Точнее говоря, на $\widetilde{Z}^2$ нет вершин, где сходится нечетное число ребер γ.

Условимся скруглять правый верхний и левый нижний углы в вершине $\widetilde{Z}^2$, где сходятся 4 ребра γ.

Тогда связные компоненты (контуры) $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \subset \gamma$ не будут иметь самопересечений.

Докажем, что для любого набора γ связных ломаных без самопересечений (с нашим условием на скругление углов) существует (единственная) конфигурация $\sigma^{(\Lambda)}$, такая, что $\gamma = \gamma(\sigma^{(\Lambda)})$. Назовем внешними контурами те из $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, которые не содержатся внутри никакого другого контура из γ. Начнем строить $\sigma^{(\Lambda)}$,

положив $\sigma_t = 1$ в точках t, лежащих вне всех внешних контуров. В точках t, лежащих внутри одного внешнего контура, но вне любого другого контура, положим $\sigma_t = -1$. Далее по индукции определяем конфигурацию внутри контуров, лежащих внутри ровно одного контура и т.д.

Таким образом, мы получили взаимно однозначное соответствие между конфигурациями $\sigma^{(\Lambda)}$ и наборами контуров $\gamma = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$. При этом $(h = 0)$

$$U_{\Lambda, t}(\sigma^{(\Lambda)}) = 2\beta|\gamma| - \beta|\widetilde{\Lambda}|; \tag{2.10}$$

$$Z_{\Lambda, +} = \exp(\beta|\widetilde{\Lambda}|) \sum_{\gamma} \exp(-2\beta|\gamma|),$$

где $|\gamma|$ – число ребер γ (длина γ), $|\widetilde{\Lambda}|$ – число ребер $\widetilde{Z}^2$, лежащих полностью внутри куба $\Lambda \cup \partial\Lambda$.

Лемма 2.5. Вероятность того, что связная замкнутая ломаная Γ присутствует в наборе $\gamma = \gamma(\sigma^{(\Lambda)})$, допускает оценку

$$P_{\Lambda, +}(\Gamma) \leq e^{-2\beta|\Gamma|}. \tag{2.11}$$

Доказательство.

$$P_{\Lambda, +}(\Gamma) = \sum_{\gamma : \Gamma \in \gamma} P_{\Lambda, +}(\gamma) = \frac{\sum_{\gamma : \Gamma \in \gamma} e^{-2\beta|\Gamma|}}{\sum_{\gamma} e^{-2\beta|\gamma|}} =$$

$$= \frac{e^{-2\beta|\Gamma|} \sum' e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum_{\gamma} e^{-2\beta|\gamma|}} \leq e^{-2\beta|\Gamma|}, \tag{2.12}$$

где в сумме $\sum'$ – суммирование по всем γ, не содержащим Γ и не содержащим Γ_i, пересекающихся с Γ.

Задача 2.6. Число контуров Γ длины n, выходящих из заданной вершины, не превосходит $4 \cdot 3^{n-1}$.

Число контуров Γ длины n, охватывающих данную точку, не превосходит $4n\cdot 3^{n-1}$.

Теперь мы можем закончить доказательство леммы 2.4. Очевидно,

$$P_{\Lambda,+}(\sigma_0=-1)\le\sum_{\Gamma}P_{\Lambda,+}(\Gamma)=\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{|\Gamma|=n}P_{\Lambda,+}(\Gamma)\le$$

$$\le\sum_{n=4}^{\infty}4n\,3^{n-1}e^{-2\beta n},$$

где $\sum_{\Gamma}$ берется по всем Γ, охватывающим 0. Последний ряд сходится при $\beta>\frac{1}{2}\ln 3$, и его сумма $\rho(\beta)$ стремится к нулю при $\beta\to\infty$.

Приведенное доказательство было намечено Пайерлсом и сделано строгим Гриффитсом и Добрушиным.

Задача 2.7. Рассмотрим какое-нибудь предельное гиббсовское поле, построенное по (+) - граничным условиям.

Доказать, что вероятность того, что заданную точку охватывает бесконечное число контуров, равна 0.

Указание: использовать лемму Бореля-Кантелли.

Доказать, что равна нулю и вероятность наличия бесконечной последовательности вложенных друг в друга контуров.

3. Метод кластерных разложений

Четыре области кластерных разложений. Кластерное представление статистической суммы. Корреляционные уравнения и их решение. Явный вид членов разложения.

Мы уже знаем о существовании предельных гиббсовских полей, имеем их полное описание в одномерном случае и пример неединственности. Теперь мы переходим к мощному методу - методу кластерных разложений, являющемуся основным в математической статистической физике

и квантовой теории поля (с его помощью в некоторых случаях возможно полное изучение гиббсовского поля в любой размерности). Целью этого метода является разложение корреляционных функций в сходящиеся ряды, причем все их члены выписываются в явном виде.

С помощью кластерных разложений могут быть досконально изучены следующие области параметров:

I. β мало (высокотемпературная область).

II. $|h|$ велико (область малых интенсивностей, $z=e^{-|h|}$).

III. $h=0$, β велико (низкотемпературная область фазовых переходов I рода).

IV. β велико.

Замечание. Далее с помощью аналитического продолжения эти результаты распространяются на более широкую область.

Случаи I-III исследуются единообразным методом. Случай IV особый, он рассматривается в конце следующей лекции.

Первым шагом в методе кластерных разложений является

Кластерное представление статистической суммы.

Будем говорить, что статистические суммы Z_Λ допускают кластерное представление, если каждому $\Gamma\subset Z^\nu$ соответствует некоторое число K_Γ, причем

1) для всех конечных $B\subset Z^\nu$

$$Z_B=\sum K_{\Gamma_1}\cdots K_{\Gamma_n},\tag{3.1}$$

где сумма-по всем неупорядоченным наборам $\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_n\}$, таким, что $\Gamma_i\subset B$, $\rho(\Gamma_i,\Gamma_j)\ge d$ при $i\ne j$;

2) существует достаточно малое $\lambda>0$ и для всех $t\in Z^\nu$ выполнена "кластерная оценка"

$$\sum_{\Gamma:\ t\in\Gamma,\ |\Gamma|=n}|K_\Gamma|\le\lambda^n.\tag{3.2}$$

Часто удобно, а иногда и необходимо, рассмотреть некоторое счетное множество T с метрикой ρ, причем каждому конечному $M \subset T$ ставится в соответствие "его носитель" $\widetilde{M} \subset \mathbb{Z}^\nu$. При этом пусть $\widetilde{M} \uparrow \mathbb{Z}^\nu$, если $M \uparrow T$, и $\widetilde{M}_1 \subset \widetilde{M}_2$, если $M_1 \subset M_2$. Числа K_Γ отвечают множествам $\Gamma \subset T$.

Пусть выполнены условия:

I') для всех конечных $M \subset T$

$$Z_{\widetilde{M}} = \sum K_{\Gamma_1} \cdots K_{\Gamma_n}, \qquad (3.\mathrm{I}')$$

где сумма-по всем $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$, таким, что $\Gamma_i \subset M$,

$$\rho(\Gamma_i, \Gamma_j) \geq d \qquad \text{при} \quad i \neq j, \quad |\Gamma_i| \geq 2;$$

2') аналог 2) для всех $t \in T$.

Множества Γ, для которых $K_\Gamma \neq 0$, будем называть **кластерами.**

Как выбрать малый параметр λ, множество T, d и получить разложение (3.I) в каждом отдельном случае, подсказывает интуиция.

Перейдем к этим случаям.

I. Высокотемпературная область. Мы знаем из задачи I.2, что при $\beta = 0$ мы имеем независимое случайное поле. Естественно считать (для конечного Λ это очевидно), что для малых β поле будет близким к независимому. Поэтому, взяв за параметр малости β, разложив экспоненту в ряд по β и объединяя члены с одинаковыми носителями, можно надеяться получить (3.2). Технически это удобно сделать так. Обозначим $\langle \cdot \rangle_0$ среднее по независимому полю (определяемому значением h). Тогда

$$\langle \sigma_T \rangle_\Lambda = \frac{\langle \sigma_T \exp(\beta \sum_\Lambda \sigma_t \sigma_{t'}) \rangle_0}{\langle \exp(\beta \sum_\Lambda \sigma_t \sigma_{t'}) \rangle_0}. \qquad (3.3)$$

Поэтому можно считать

$$Z_\Lambda = \langle \exp(\beta \sum_\Lambda \sigma_t \sigma_{t'}) \rangle_0 \qquad (3.4)$$

новой статистической суммой, совпадающей со старой с точностью до постоянного множителя, не зависящего от конфигурации. Если $h = 0$, то этот множитель равен $2^{|\Lambda|}$.

Обозначая теперь через A множества, состоящие из двух ближайших соседей, T – множество всех пар ближайших соседей, получим

$$Z_\Lambda = \langle \exp(\beta \sum_{A \subset \Lambda} \sigma_A) \rangle_0 = \langle \prod_{A \subset \Lambda} \exp(\beta \sigma_A) \rangle_0 = \qquad (3.5)$$

$$= \langle \prod_A (1 - (1 - \exp(\beta \sigma_A))) \rangle_0 =$$

$$= \langle \sum (1 - \exp(\beta \sigma_{A_1})) \cdots (1 - \exp(\beta \sigma_{A_n})) \rangle_0,$$

где сумма-по всем наборам $\gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$, в том числе и пустому. Назовем γ связным, если его нельзя разбить на два поднабора γ' и γ'', таких, что $\rho(\bigcup_{\gamma'} A_i, \bigcup_{\gamma''} A_j) > 0$. Связные наборы $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ будем называть кластерами и положим

$$K_\Gamma = \langle \prod_{A \subset \Gamma} (1 - \exp(\beta \sigma_A)) \rangle_0. \qquad (3.6)$$

Тогда в (3.5) γ можно единственным образом разбить на кластеры $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, и, пользуясь независимостью случайных величин $\prod_{A \in \Gamma_i} (1 - \exp(\beta \sigma_A))$ для различных i, мы получаем представление (3.I).

Для доказательства кластерной оценки докажем

Лемму 3.I. Число кластеров Γ из n множеств, $|\Gamma| = n$, таким, что $\tilde{\Gamma} = \bigcup_{A_i \in \Gamma} A_i$ содержит заданную точку $t \in Z^{\nu}$, не превосходит C^n, где C зависит только от ν.

Доказательство. Нетрудно доказать, что существует путь по ребрам Γ (ребро отождествляется с парой A), проходящий через все ребра, причем не более двух раз через каждое ребро. Число таких путей из точки t – не более $C^n = (2\nu)^{2n}$. Лемма доказана.

Замечая теперь, что для малых β

$$|1 - e^{\beta \sigma_A}| \leq 2\beta, \tag{3.7}$$

и полагая $\lambda = (2\nu)^2 \cdot 2\beta$, мы получаем кластерную оценку (3.2).

Ш. Область фазовых переходов 1 рода, $h=0$, (+)- граничные условия.

В этом случае T есть множество ребер двойственной решетки. Кластером Γ будем называть контур, определенный в лекции 2. Поэтому с точностью до множителя

$$Z_\Lambda = \sum_{\gamma} e^{-2\beta|\gamma|},$$

и мы получаем (3.I) с

$$K_\Gamma = e^{-2\beta|\Gamma|},$$

причем параметром малости здесь является $e^{-2\beta}$.

Наиболее вероятная конфигурация здесь $\sigma_t \equiv 1$, когда $\gamma = \emptyset$, и мы делаем разложение по числу отклонений от $\gamma = \emptyset$.

П. h велико. Граничные условия пустые или (+)-граничные условия.

Пусть, например, h положительно и велико в сравнении с β. Тогда каждый (–) даст малый множитель $z = e^{-h}$ в статистическую сумму.

Умножим статсумму на $\exp(-h|\Lambda| - \beta|\tilde{\Lambda}|)$. Тогда

$$Z_\Lambda = \sum_{\sigma^{(\Lambda)}} \exp(-2\beta|\gamma| - 2h|X|) = \tag{3.8}$$

$$= \sum_X \exp(-2\beta|\gamma| - 2h|X|),$$

Здесь $X = X(\sigma^{(\Lambda)})$ – множество точек $t \in \Lambda$, где $\sigma_t = -1$, $\gamma = \gamma(\sigma^{(\Lambda)})$ – то же, что и в лекции 2. Здесь T такое же, как в области I.

Сопоставим с X набор $\Gamma = \Gamma(X)$ пар ближайших соседей, пересекающихся с X. Набор Γ_i назовем кластером, если он есть $\Gamma(X)$ для некоторого X. Нетрудно доказать, что для всех X $\Gamma(X)$ есть объединение допустимых кластеров и что любое объединение кластеров с непересекающимися носителями есть $\Gamma(X)$ для некоторого X. Положим $K_\Gamma = 0$, если Γ не есть кластер, и

$$K_\Gamma = \exp(-2\beta|\partial\Gamma| - 2h|X|),$$

если $\Gamma = \Gamma(X)$, где $\partial\Gamma$ – множество пар Γ, не принадлежащих X (наглядно $\partial\Gamma$ есть контур вокруг Γ). Нетрудно убедиться в выполнимости (3.I) и (3.2).

Получение кластерного представления статистических сумм такое простое здесь, в других случаях может быть существенно сложнее и потребовать большого искусства. Сейчас мы покажем, что если это представление получено, то мы можем получить сходящийся ряд для любой физической величины. Мы начнем с величин

$$f_B^{(\Lambda)} = \frac{Z_{\Lambda - B}}{Z_\Lambda}, \quad B \subset \Lambda.$$

Эти специальные корреляционные функции допускают следующие интерпретации:

I) $$f_B^{(\Lambda)} = \langle \exp(U_B + U_{B,\Lambda-B}) \rangle_0 ;$$

2) в области III это есть вероятность того, что любая пара ближайших соседей в B имеет одинаковый знак.

Мы рассмотрим только случай $T=Z^\nu$ и $d=1$, предоставляя читателю очевидные обобщения.

Возьмем произвольную точку $t\in\Lambda$. Тогда

$$Z_\Lambda = \sum_{t\in \Gamma_1\cup\ldots\cup\Gamma_n} K_{\Gamma_1}\cdot\ldots\cdot K_{\Gamma_n} + \sum_{t\in \Gamma_1\cup\ldots\cup\Gamma_n} K_{\Gamma_1}\cdot\ldots\cdot K_{\Gamma_n}$$

или

$$Z_\Lambda = Z_{\Lambda\setminus\{t\}} + \sum_{\Gamma:\, t\in\Gamma} K_\Gamma Z_{\Lambda-\Gamma} . \qquad (3.9)$$

Задача 3.I. Доказать, что (3.I) имеет место тогда и только тогда, когда (3.9) выполнено для всех Λ и всех $t\in\Lambda$.

Часто кластерное представление удобно писать в виде (3.9).

Пусть $t\in B\subset\Lambda$. Подставляя в (3.9) $(\Lambda-B)\cup\{t\}$ вместо Λ и деля на Z_Λ, получим

$$f_B^{(\Lambda)} = f_{B\setminus\{t\}}^{(\Lambda)} - \sum_{\Gamma:\, t\in\Gamma\subset(\Lambda-B)\cup\{t\}} K_\Gamma f_{B\cup\Gamma}^{(\Lambda)} . \qquad (3.10)$$

Чтобы число неизвестных $2^{|\Lambda|}-1$ в (3.I0) равнялось числу уравнений, мы для каждого непустого $B\subset Z^\nu$ выделим точку $t_B\in B$ и будем рассматривать (3.I0) только для таких пар (B,t_B).

Тогда (3.I0) есть система линейных уравнений в $(2^{|\Lambda|}-1)$--мерном пространстве $\mathcal{B}^{(\Lambda)}$ векторов $f^{(\Lambda)} = (f_B^{(\Lambda)})$, компоненты которых пронумерованы непустыми подмножествами Λ. Введем в $\mathcal{B}^{(\Lambda)}$ норму

$$\| f^{(\Lambda)} \| = \sup_{B\subset\Lambda} \left[\frac{1}{2^{|B|}} \left| f_B^{(\Lambda)} \right| \right]. \qquad (3.11)$$

Система (3.I0) может быть переписана в операторном виде

$$[E-(R+K)]\, f^{(\Lambda)} = \delta_1 , \qquad (3.12)$$

где $\delta_1 = (\delta_{|B|,1})$ - вектор с компонентами, равными I при $|B|=1$ и 0 в остальных случаях; E - единичная матрица, $R=(r_{B_1B_2})$ - матрица "сдвига", где

$$r_{B_1B_2} = \begin{cases} 1 , & \text{если } B_2 = B_1 - \{t_{B_1}\} , \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$K=(K_{B_1B_2})$ -матрица, которая вектор $f^{(\Lambda)}=(f_B^{(\Lambda)})$ переводит в вектор $\psi^{(\Lambda)} = (\psi_B^{(\Lambda)})$, причем

$$\psi_B^{(\Lambda)} = -\sum K_\Gamma f_{B\cup\Gamma}^{(\Lambda)} ,$$

где суммирование то же, что и в (3.I0).

Задача 3.2. Доказать, что $\|R\| = \frac{1}{2}$ и что $\|K\|\to 0$, если $\lambda\to 0$. Для последней оценки использовать кластерную оценку и формулу

$$\|K\| \le \sup \sum_{B_1,B_2} |K_{B_1B_2}|\, 2^{|B_2|-|B_1|} \le \qquad (3.13)$$
$$\le \sup_t \sum_{\Gamma:\, t\in\Gamma} 2^{|\Gamma|} |K_\Gamma| .$$

Таким образом, $\|R+K\|<1$ для достаточно малых λ (оценить-для каких!). Поэтому можно обратить матрицу $E-(R+K)$ в (3.I2) и получить решение в виде

$$f^{(\Lambda)} = (E-(R+K))^{-1}\delta_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(R+K)^n\delta_1 = \tag{3.14}$$
$$= \sum R^{m_1}K^{\ell_1}R^{m_2}K^{\ell_2}\ldots R^{m_p}K^{\ell_p}\delta_1,$$

где в последней сумме-суммирование по всем $p \geq 0$ и всем $m_1 \geq 0$, $\ell_1, m_2, \ldots, \ell_{p-1}, m_p > 0$, $\ell_p \geq 0$. Полезно дать явную формулу для $f_B^{(\Lambda)}$. Для этого обозначим через G множество всех конечных непустых подмножеств Z^ν. Элементы G будем считать вершинами дерева, в котором между B_1 и $B_2 \in G$ есть ребро, если $B_1 = B_2 \setminus \{t_{B_2}\}$, или наоборот. Для любого $B \in G$ точно $|B|-1$ вершин лежит ниже B.

Путем γ в G будем называть произвольную последовательность $\gamma = (B_1, \ldots, B_s)$ элементов G. Путь будем называть допустимым, если $|B_s| = 1$, $B_1 = B$ и если для всех $i = 2, \ldots, s$ либо

$$B_i = B_{i-1} \setminus \{t_{B_{i-1}}\},$$

либо

$$B_i = B_{i-1} \cup \Gamma \quad \text{для некоторого}$$
$$\Gamma, \quad t_{B_{i-1}} \in \Gamma \subset Z^\nu \setminus (B_{i-1} \setminus t_{B_{i-1}}).$$

В первом случае будем ребру $(i-1, i)$ пути приписывать число I, во втором – $(-K_\Gamma)$. Вкладом K_γ пути γ назовем произведение вкладов ребер $K_\gamma = (-K_{\Gamma_{i_1}})\ldots(-K_{\Gamma_{i_\ell}})$.

Теорема 3.I.

$$f_B^{(\Lambda)} = 1 + \sum K_\gamma, \tag{3.15}$$

где сумма-по всем допустимым путям длины $S > |B-1|$, лежащим в Λ, т.е. все $B_i \subset \Lambda$. При этом ряд $\sum |K_\gamma|$ сходится.

Доказательство. Член 1 получается из единственного допустимого пути длиной $|B|-1$. Формула (3.15) следует из (3.14), если пройти путь в обратном порядке (или из схемы метода последовательных приближений для (3.10) при прохождении пути в прямом порядке). Если выбрать знаки K_Γ так, чтобы $(-K_\Gamma) \geq 0$, то все члены в (3.15) положительны,и в то же время оценка нормы остается прежней. Поэтому имеет место абсолютная сходимость.

Обозначив

$$b_R(f_B^{(\Lambda)}) = \sum_{\gamma:\, R = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_s} K_\gamma, \tag{3.16}$$

мы имеем

$$f_B^{(\Lambda)} = 1 + \sum_R b_R(f_B^{(\Lambda)}). \tag{3.17}$$

Нам важны только следующие свойства чисел $b_R(f_B^{(\Lambda)})$:

$$b_R(f_B^{(\Lambda)}) = 0, \text{ если } R \cap B = \emptyset; \tag{3.18}$$

если $R, B \subset \Lambda \subset \Lambda'$, то

$$b_R(f_B^{(\Lambda)}) = b_R(f_B^{(\Lambda')}), \tag{3.19}$$

ряд

$$\sum |b_R(f_B^{(\Lambda)})| < C, \tag{3.20}$$

и C не зависит от Λ.

4. Кластерные разложения (продолжение)

Единственность и аналитичность в областях I, П. Разложение в области фазовых переходов. Область IУ: скачок намагниченности.

Ввиду свойства (3.I9) чисел $b_R(f_B^{(\Lambda)})$ они одинаковы для всех Λ (лишь бы $B \cup R \subset \Lambda$), и мы обозначим их общее значение: $b_R = b_R(f_B)$.

Лемма 4.I. Существует

$$f_B = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu} f_B^{(\Lambda)} = \sum b_R(f_B), \tag{4.I}$$

причем последний ряд абсолютно сходится. Кроме того,

$$|f_B| \leq c^{|B|}. \tag{4.2}$$

Доказательство (4.I) непосредственно следует из (3.I9) и (3.20). Оценка (4.2) следует из первого равенства (3.I4) и определения нормы.

Теорема 4.I. Для достаточно малых β предел f_B существует и одинаков для всех граничных условий, причем

$$|f_B - f_B^{(\Lambda)}| \leq |B|\, 4^{|B|} (c\beta)^{\rho(B,\partial\Lambda)}. \tag{4.3}$$

Последняя формула следует из оценки

$$b_R(f_B) = c^{|B|} (c\beta)^{\sum d_{R_i}}, \tag{4.3'}$$

где R_i 1-связные компоненты R, d_R - мощность наименьшего кластера Γ, покрывающего R (см. также лекцию 5).

Для доказательства достаточно заметить, что взаимодействие $U_{\Lambda,\tilde{\sigma}(\partial\Lambda)}$

ичается от U_Λ только на сумму вида

$$\beta \sum_{t:\,\rho(t,\partial\Lambda)=1} \pm \sigma_t .$$

азательство (4.3) предоставляется читателю.

Перейдем теперь к произвольным корреляционным функциям. Кластерное представление ненормированной корреляционной функ- - так мы будем называть представление вида

$$\langle \sigma_B e^{-U_\Lambda} \rangle_0 = \sum_{\Gamma;\,\Gamma_1,\dots,\Gamma_n} K_\Gamma(\sigma_B) K_{\Gamma_1} \cdots K_{\Gamma_n} \equiv \tag{4.4}$$

$$\equiv \sum_\Gamma K_\Gamma(\sigma_B)\, Z_{\Lambda-(B\cup\Gamma)},$$

где сумма-по всем Γ , пересекающимся с B , и всем наборам $\{\Gamma_1,\dots,\Gamma_n\}$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $\Gamma \cap \Gamma_i = \emptyset$. При этом должна быть выполнена кластерная оценка

$$\sum_{\Gamma:\,|\Gamma|=n} |K_\Gamma(\sigma_B)| \leq c(\sigma_B)\,\lambda^n \tag{4.5}$$

(мы рассматриваем только случай $T = \mathbb{Z}^\nu$ и $d=1$. Обобщение тривиально).

Из (4.4) имеем, деля на Z_Λ,

$$\langle \sigma_B \rangle_\Lambda = \sum_\Gamma K_\Gamma(\sigma_B)\, f_{B\cup\Gamma}^{(\Lambda)}. \tag{4.6}$$

Теорема 4.2. Предельные корреляционные функции в области I

$$\langle \sigma_B \rangle = \lim_\Lambda \langle \sigma_B \rangle_\Lambda = \sum_K K_\Gamma(\sigma_B)\, f_{B\cup\Gamma} \tag{4.7}$$

существуют, не зависят от граничных условий, причем ряд в (4.7) абсолютно сходится.

Доказательство сходимости следует из леммы 4.I. Обозначив

$$b_R^{(\Lambda)}(\sigma_B) = \sum_{\Gamma, R' : \Gamma \cup R' = R} K_\Gamma(\sigma_B)\, b_R\left(f^{(\Lambda)}_{B\cup\Gamma}\right), \tag{4.8}$$

мы получим кластерное разложение

$$\langle \sigma_B \rangle = \sum_R b_R(\sigma_B) \tag{4.9}$$

с теми же свойствами, что и раньше.

Задача 4.1. Выписать для $b^{(\Lambda)}(\sigma_B)$ аналоги свойств (3.18)–(3.20).

Мы займемся теперь следующим вопросом: как зависят f_A и $\langle\sigma_B\rangle$ от параметров взаимодействия (в данном случае от β): непрерывно, гладко или аналитично. Если вдоль некоторой кривой в пространстве параметров взаимодействия в некоторой точке имеется разрыв k-той производной какой-либо $\langle\sigma_B\rangle$, то говорят, что для этих значений параметров имеет место фазовый переход $(k+1)$-го рода. Как это определение согласуется с данным в лекции 2 определением фазового перехода I рода, мы увидим в конце этой лекции.

Теорема 4.3. В некоторой окрестности $\beta = 0$ f_A (и $\langle\sigma_B\rangle$) аналитически зависят от β.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится теорема Витали. Пусть $f_n(z)$ – последовательность аналитических в области $\mathcal{D}$ комплексной плоскости функций, причем

1) $$|f_n(z)| \leq const$$

равномерно по n и $z \in \mathcal{D}$,

2) $f_n(z)$ имеет предел при $n\to\infty$ для некоторого множества $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, имеющего хотя бы одну предельную точку внутри $\mathcal{D}$.

Тогда: I) $f_n(z)$ имеет предел для всех $z \in \mathcal{D}$;

2) эта сходимость равномерна на любом замкнутом подмножестве $\mathcal{D}$;

3) предел $f(z) = \lim\limits_n f_n(z)$ является аналитической функцией в $\mathcal{D}$.

В следующей лекции нам понадобится обобщение на случай нескольких переменных.

Пусть $f_n(z_1,\dots,z_k)$ – последовательность аналитических в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^k$ функций, причем

I) $$|f_n(z_1,\dots,z_k)| \leq const$$

равномерно по n в $\mathcal{D}$;

2) пусть $\mathcal{D}_0$ есть область единственности для $\mathcal{D}$, т.е. две аналитические функции в $\mathcal{D}$, равные на $\mathcal{D}_0$, равны в $\mathcal{D}$. Пусть f_n имеет предел на $\mathcal{D}_0$. Тогда имеют место те же утверждения, что и в теореме Витали.

В частности, если $R^k = \{(z_1,\dots,z_k) : \operatorname{Im} z_1 = \dots = \operatorname{Im} z_k = 0\}$ и $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \cap R^k$ – область в $\mathbb{R}^k$, то $\mathcal{D}_0$ есть область единственности для $\mathcal{D}$.

Для доказательства теоремы 4.3 возьмем в качестве $\mathcal{D}$ в комплексной плоскости β достаточно малую окрестность нуля. Тогда каждое K_γ в (3.16) аналитически продолжается в $\mathcal{D}$ с сохранением кластерной оценки. В качестве $\mathcal{D}_0$ возьмем отрезок вещественной оси, лежащий в $\mathcal{D}$. Условие I теоремы Витали следует из кластерных оценок. Условие 2–из теоремы 4.I. Теорема 4.3 доказана.

Мы предоставляем читателю доказать аналоги теорем 4.I–4.3 для областей II и III, а именно: две следующие теоремы.

Теорема 4.4. Если $h = 0$, β достаточно велико и рассматриваются (+)-граничные условия, то термодинамический предел существует и корреляционные функции являются аналитическими функциями β.

Замечание. Мы не можем доказать единственности в этом случае (мы знаем, что её нет), так как у нас нет кластерного разложения для любых граничных условий.

Теорема 4.5. Для любого β_0 существует такое $h_0(\beta_0)$, что гиббсовское поле единственно и все корреляционные функции являются аналитическими по β и h в области $|h| \geqslant h_0(\beta_0)$, $|\beta| < \beta_0$.

Достаточно заметить, что граничный член во взаимодействии не зависит от h. Остальное доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 4.2.

Перейдем теперь к области IУ.

Теорема 4.6. Пусть $h \geqslant 0$ и мы рассматриваем (+)-граничные условия. Тогда для достаточно больших $\beta > 0$ корреляционные функции

$$\langle \sigma_B \rangle_+ = \lim_{\Lambda} \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda,+} \tag{4.10}$$

существуют и являются гладкими функциями h.

Для доказательства мы используем более слабый вариант кластерной техники, который не позволяет доказать аналитичности.

Сначала дадим "вероятностную" интерпретацию чисел K_Γ. Для любого набора $\gamma = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ непересекающихся кластеров введем его "вероятность" (корреляционную функцию):

$$P(\gamma) = Z_\Lambda^{-1} \sum_{\gamma' : \gamma \subset \gamma'} K(\gamma'), \quad K(\gamma') = \prod_{\Gamma \in \gamma'} K_\Gamma . \tag{4.11}$$

Для $\Gamma \in \gamma$ введем "вероятность" $P(\gamma; \Gamma)$ того, что все кластеры из γ кроме Γ, присутствуют и нет ни одного кластера, пересекающегося с Γ:

$$P(\gamma; \Gamma) = Z_\Lambda^{-1} \sum K(\gamma'),$$

где сумма-по соответствующим γ'. Тогда

$$K_\Gamma = \frac{P(\gamma)}{P(\gamma; \Gamma)} . \tag{4.12}$$

Если все K_Γ положительны, то $P(\gamma)$ и $P(\gamma;\Gamma)$ – настоящие вероятности.

В условиях теоремы (4.6) каждой конфигурации вновь отвечает набор контуров $\sigma^{(\Lambda)}\{\Gamma_i(\sigma^{(\Lambda)})\}$. Назовем кластером в $\sigma^{(\Lambda)}$ произвольный внешний контур Γ (т.е. не содержащийся внутри другого контура $\sigma^{(\Lambda)}$) вместе со своей внутренностью Γ. Через $P(\gamma)$ обозначим вероятность набора $\gamma = (\Gamma^1, \dots, \Gamma^k)$ внешних контуров, а через $\hat{P}(\gamma, \Gamma)$ – вероятность того, что все внешние контуры, кроме Γ, присутствуют, причем нет внешних контуров, охватывающих или пересекающихся с Γ. Обозначим

$$\hat{K}_\Gamma = \frac{P(\gamma)}{\hat{P}(\gamma, \Gamma)} = e^{-\beta|\Gamma|} \frac{Z_{\Gamma,-}}{Z_{\Gamma,+}} , \tag{4.13}$$

где $Z_{\Gamma,\pm}$ – статистические суммы в $\mathring{\Gamma} \setminus \partial_i \mathring{\Gamma}$ ($\partial_i \mathring{\Gamma}$ – внутренняя граница $\mathring{\Gamma}$, т.е. $\{t : t \in \mathring{\Gamma}, \rho(t, Z^\nu \setminus \mathring{\Gamma}) = 1\}$) с (+)- или (−) – граничными условиями соответственно.

Лемма 4.2. При $h \geqslant 0$ для любого конечного B

$$\frac{Z_{B,-}}{Z_{B,+}} \leqslant 1 . \tag{4.14}$$

Доказательство. При $h = 0$ $Z_{B,-} = Z_{B,+}$ в силу симметрии. Но

$$\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{Z_{B,-}}{Z_{B,+}} \right) = \frac{Z_{B,-}}{Z_{B,+}} \sum_{t \in B} \left(\langle \sigma_t \rangle_{B,-} - \langle \sigma_t \rangle_{B,+} \right) \leqslant 0 \tag{4.15}$$

по второму неравенству Гриффитса (аналогично (I.10)).По формуле включения-исключения

$$\widehat{P}(\gamma;\Gamma) = \sum_{\gamma'} (-1)^{|\gamma'|} P([\gamma - \{\Gamma\}] \cup \gamma'), \quad (4.16)$$

где сумма-по всем наборам внешних контуров γ' (включая пустой), таким, что каждый $\Gamma' \in \gamma'$ пересекается или охватывает Γ, но не пересекается и не охватывает другие наборы из γ.
Из последней формулы и первого равенства (4.13) имеем набор соотношений

$$P(\gamma) = \widehat{K}_\Gamma \left(\sum_{\gamma'} (-1)^{|\gamma'|} P([\gamma - \{\Gamma\}] \cup \gamma') \right), \quad (4.17)$$
$$P(\emptyset) = 1.$$

Выделим для каждого γ некоторый $\Gamma = \Gamma(\gamma) \in \gamma$ и будем рассматривать (4.17) только для пар γ, $\Gamma = \Gamma(\gamma)$. Впервые система уравнений такого типа выписана Минлосом и Синаем.

Рассмотрим банахово пространство $\mathcal{B}^{(\Lambda)}$ векторов $P = (P(\gamma))$, компоненты которых пронумерованы наборами γ внешних контуров γ в Λ, и введем норму

$$\| P \| = \sum_{\gamma} | D^{|\widetilde{\gamma}|} P(\gamma) |, \quad (4.18)$$

где D – достаточно большая константа.

Задача 4.2. Доказать, что оператор, определяемый системой (4.17), является сжимающим в $\mathcal{B}^{(\Lambda)}$. Получить аналогично предыдущей лекции ряд для $P(\gamma)$ как сумму по некоторым путям. Закончить доказательство теоремы 4.6.

В условиях теоремы 4.6 существует предельное гиббсовское поле. Действительно, можно записать явную формулу для конечномерных распределений через вероятности $P(\gamma)$ и известные условные вероятности. Например,

$$P(\sigma_t = -1) = \sum_{\Gamma} P(\Gamma)\, P(\sigma_t = -1/\Gamma),$$

где сумма-по всем внешним контурам, охватывающим t.

Важная нерешенная проблема: является ли $P(\Gamma)$ аналитической по h при $h=0$, т.е. допускает ли $P(\Gamma)$ аналитическое продолжение в окрестность точки $h=0$ (при фиксированном, достаточно большом $\beta>0$).

В следующей главе мы докажем аналитичность по h при $h \neq 0$ и единственность поля при $h \neq 0$.

Ввиду этого и теоремы 4.6 имеем

$$\lim_{h \to +0} \langle \sigma_t \rangle_{\beta, h} = \langle \sigma_t \rangle_{+, \beta, 0}.$$

В силу симметрии

$$\lim_{h \to -0} \langle \sigma_t \rangle_{\beta, h} = \langle \sigma_t \rangle_{-, \beta, 0}.$$

Поэтому "намагниченность" $\langle \sigma_t \rangle$ имеет скачок в точке $h=0$ (для достаточно больших β), равный разности намагниченностей для гиббсовских полей с $h=0$, $(+)$- и $(-)$ – граничными условиями. Мы видим, что фазовый переход первого рода проявляется также в отсутствии непрерывности первой корреляционной функции.

5. Теоремы Янга-Ли и аналитическое продолжение

Свободная энергия. Аналитичность при $h \neq 0$. Аналитическое продолжение кластерного разложения в область $h \neq 0$.

Здесь мы докажем

Теорему 5.1. Корреляционные функции гиббсовского поля, построенного в лекции 1, аналитичны по h при $h \neq 0$.

В указанном доказательстве важно понятие свободной энергии. Свободной энергией в объеме Λ с граничными условиями $\tilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)}$ назовем

$$F_{\Lambda,\tilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)}} = \frac{1}{|\Lambda|} \ln Z_{\Lambda,\tilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)}}.$$

Теорема 5.2. Предельная свободная энергия

$$F = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^\nu} F_\Lambda$$

существует (при любых β, h) и не зависит от граничных условий.

Доказательство. Разобьем куб Λ на 2^k конгруэнтных кубов Λ_i' и рассмотрим разность

$$F_{\Lambda,\tilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)}} - F_{\Lambda'} = \frac{1}{|\Lambda|} \ln Z_{\Lambda,\tilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)}} - \frac{1}{|\Lambda|} \ln \sum_{\sigma^{(\Lambda)}} e^{-\mathcal{U}}$$

где $F_{\Lambda'}$ – свободная энергия в (любом из) Λ_i' с пустыми граничными условиями, $\widehat{\mathcal{U}}_\Lambda$ – взаимодействие в Λ с "отключенным" взаимодействием между различными Λ_i'.

Модуль разности в последней формуле равен

$$\frac{1}{|\Lambda|} \left| \int_0^\beta d\beta' \frac{\partial}{\partial\beta'} \left[\ln \sum_{\sigma^{(\Lambda)}} \exp\Big(-\widehat{\mathcal{U}}_\Lambda - \beta\sum_{i<j} \mathcal{U}_{\Lambda_i',\Lambda_j'} - \beta'\mathcal{U}_{\Lambda,\partial\Lambda}\Big)\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{|\Lambda|} \left| \int_0^\beta d\beta' \sup \Big| \sum_{i<j} \mathcal{U}_{\Lambda_i',\Lambda_j'} + \mathcal{U}_{\Lambda,\partial\Lambda}\Big|\right| \leq \mathrm{const}\, \frac{|\partial\Lambda'|}{|\Lambda'|}$$

Применяя критерий Коши, получаем доказательство.

Теорема 5.3 (Янг–Ли). Пусть $\beta \geq 0$, $h_t = x_t + iy_t$, где x_t и y_t вещественны. При этих условиях при $x_t > 0$

$$Z_\Lambda = \sum_{\sigma^{(\Lambda)}} \exp\Big(\beta \sum_{|t-t'|=1} \sigma_t \sigma_{t'} + \sum h_t \sigma_t\Big)$$

не равна нулю.

Доказательство. Мы докажем, что все производные $|Z_\Lambda|^2$ по x_t в точке $x_t = 0$ неотрицательны при всех значениях $\beta \geq 0$ и y_t. Разлагая экспоненту в ряд по x_t, мы получим отсюда доказательство теоремы. Введем, как в лекции I, независимую копию, получим, как в (I.9),

$$|Z_\Lambda|^2 = \sum_{\sigma^{(\Lambda)},\tilde{\sigma}^{(\Lambda)}} \exp\Big(\beta\sum(\xi_t\xi_{t'} + \zeta_t\zeta_{t'}) + \sum x_t\xi_t + \sum y_t\zeta_t\Big) \geq 0. \quad (5.1)$$

Любая производная по x_t от этого выражения имеет вид

$$\sum \xi_B \exp\Big(\beta\sum(\xi_t\xi_{t'} + \zeta_t\zeta_{t'}) + \sum x_t\xi_t + i\sum y_t\zeta_t\Big),$$

где сумма-по некоторым наборам B индексов t. Пусть $\tilde{B}$ – подмножество Λ, состоящее из точек, содержащихся в B. Так как $\xi_t\zeta_t = 0$, то в $\sum_t \zeta_t\zeta_{t'}$ и $i\sum y_t\zeta_t$ мы можем ограничиться суммированием по $t, t' \in \Lambda\setminus\tilde{B}$. Разложим $\exp(\beta\sum\xi_t\xi_{t'})$ в ряд. При этом возникнут два рода членов:

$$\sum \xi_C \exp\Big(\beta\sum_{t,t'\in\Lambda\setminus\tilde{B}}(\xi_t\xi_{t'} + \zeta_t\zeta_{t'}) + i\sum_{t\in\Lambda-\tilde{B}} y_t\zeta_t\Big).$$

В одних $\tilde{C} \subset \tilde{B}$, и их неотрицательность следует из (5.I). В других $\tilde{C} \not\subset \tilde{B}$. С ними мы поступаем аналогично, разлагая в ряд $\exp\big(\beta\sum_{\tilde{C}-\tilde{B}}\xi_t\xi_{t'}\big)$ и т.д. по индукции.

Теорема 5.4. Для любого фиксированного $\beta \geq 0$ и h, $\mathrm{Re}\, h \neq 0$, существует предел свободной энергии

$$F = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}^\nu} F_\Lambda,$$

который является аналитической функцией h.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $Z_\Lambda^{1/|\Lambda|}$ (мы рассматриваем ветвь, положительную на вещественных h). Чтобы при–

менить теорему Витали, нам осталось доказать, что она равномерно ограничена.

Но

$$|Z_\Lambda^{1/|\Lambda|}(\beta,h)| \le \max\left(1,\ Z^{1/|\Lambda|}(\beta, \mathrm{Re}\,h)\right) \le \mathrm{const}.$$

Поэтому предел $\rho(h) = \lim Z_\Lambda^{1/|\Lambda|}$ существует и является аналитической функцией h, нигде не равной нулю. Действительно, если бы $\rho(h_0)=0$, то в достаточно малой окрестности h_0 нашлись бы точка h_1 и такое достаточно большое Λ, что $Z_\Lambda(\beta, h_1)=0$, что невозможно. Поэтому, взяв ту ветвь логарифма, которая вещественна на вещественной оси, мы получим доказательство теоремы.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 5.I.

Выделим попарно различные точки $t_1,\dots,t_p\in\Lambda$ и рассмотрим набор

$$h_t = \begin{cases} h_i, & t=t_i,\ i=1,\dots,p,\ \mathrm{Re}\,h_t\ne 0,\\ h & \text{для остальных } t,\ \mathrm{Re}\,h_t\ne 0.\end{cases}$$

Тогда для заданных $\beta>0$, h, $\mathrm{Re}\,h\ne 0$, имеем

$$\langle \sigma_{t_1}^{N_1},\dots,\sigma_{t_p}^{N_p}\rangle_\Lambda = \frac{\partial^{N_1}\dots\partial^{N_p}}{\partial h_1^{N_1}\dots\partial h_p^{N_p}} \ln Z_\Lambda(\beta,h_1,\dots,h_p,h)\Big|_{h_i=h} \qquad (5.2)$$

$$= \frac{N_1!\dots N_p!}{(2\pi i)^p}\oint\limits_{|h_i-h|=\varepsilon} \frac{\ln Z_\Lambda}{(h_1-h)^{N_1+1}\dots(h_p-h)^{N_p+1}}\, dh_1\dots dh_p,$$

где ε выбрано достаточно малым. Представим Z_Λ в виде

$$Z_\Lambda = e^{h_1}P_\Lambda(h_2,\dots,h_p,h)+e^{-h_1}Q_\Lambda(h_2,\dots,h_p,h) = e^{-h_1}P_\Lambda\left(e^{2h_1}+\frac{Q_\Lambda}{P_\Lambda}\right). \qquad (5.3)$$

Лемма 5.I.

$$|\langle\sigma_{t_1}^{N_1},\dots,\sigma_{t_p}^{N_p}\rangle_\Lambda| \le C^{N_1+\dots+N_p} N_1!\dots N_p!$$

Доказательство. Интеграл в правой части (5.2) переписывается в виде

$$\frac{N_1!\dots N_p!}{(2\pi i)^p}\oint \frac{-h_1+\ln P_\Lambda+\ln\left(e^{2h_1}+\frac{Q_\Lambda}{P_\Lambda}\right)}{(h_1-h)^{N_1+1}\dots(h_p-h)^{N_p+1}}\, dh_1\dots dh_p,$$

Первый член, очевидно, имеет требуемую оценку. Второй равен нулю, а третий переписывается, если воспользоваться

$$\oint\frac{f(z)}{z^n}\,dz = \frac{1}{(n-1)}\oint\frac{f'(z)}{z^{n-1}}\,dz,$$

следующим образом:

$$\frac{(N_1-1)!\,N_2!\dots N_p!}{(2\pi i)^p}\oint\frac{dh_1\dots dh_p}{(1-e^{2\tilde h-2h})(h_1-h)^{N_1}(h_2-h)^{N_2+1}\dots(h_p-h)^{N_p+1}},$$

где мы положили

$$e^{2\tilde h_1} = -\frac{Q_\Lambda}{P_\Lambda}$$

и по теореме 5.3 должно быть $\mathrm{Re}\,\tilde h_1=0$.

Отсюда требуемая оценка следует очевидным образом, где C зависит от ε, т.е. от $|\mathrm{Re}\,h|$.

Ввиду леммы 5.I все корреляционные функции равномерно ограничены в области $|\mathrm{Re}\,h|\ge\varepsilon$, и мы по теореме Витали имеем доказательство теоремы 5.I.

Теорема 5.5. Для произвольных $\beta > 0$ и произвольного $h \neq 0$ имеет место оценка

$$|\langle \sigma_{t_1}^{,k_1}, \ldots, \sigma_{t_n}^{,k_n} \rangle| \leq c^{k_1+\ldots+k_n} e^{-|h| d_X} k_1! \ldots k_n!$$

для некоторого $c > 0$, зависящего только от β, h и ν, $X = \{t_1, \ldots, t_n\}$, d_X – наименьшая мощность кластера Γ (связного множества ребер решетки Z^ν), такого, что $X \subset \widetilde{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} h < 0$, положим $z = e^h$. Мы знаем, что для малых z корреляционные функции, а значит, и семиинварианты аналитичны по z и, следовательно, разлагаются в сходящийся ряд:

$$\langle \sigma_{t_1}^{,k_1}, \ldots, \sigma_{t_n}^{,k_n} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m. \tag{5.4}$$

Но ввиду доказанной аналитичности при $|z| \neq 1$ ряд (5.4) сходится фактически при $|z| < 1$, т.е. $\operatorname{Re} h < 0$. Воспользовавшись теоремой 5.4, имеем

$$|b_m| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1-\varepsilon} \frac{\langle \sigma_{t_1}^{,k_1}, \ldots, \sigma_{t_n}^{,k_n} \rangle}{z^{m+1}} dz \right| \leq$$
$$\leq (1-\varepsilon)^{-m} c^{k_1+\ldots+k_n} k_1! \ldots k_n! \tag{5.5}$$

Поэтому если мы докажем, что $b_m = 0$ при $m < d_X$, то теорема будет следовать из (5.4) и (5.5). Поясним идею доказательства этого факта на примере семиинварианта $\langle \sigma_{t_1}, \sigma_{t_2} \rangle$. Мы знаем, что имеют место кластерные разложения

$$\langle \sigma_{t_1} \rangle = \sum_{t_1 \in R} b_R^{(1)} z^{|R|}, \quad \langle \sigma_{t_2} \rangle = \sum_{t_2 \in R} b_R^{(2)} z^{|R|},$$

$$\langle \sigma_{t_1} \sigma_{t_2} \rangle = \sum_{t_1, t_2 \in R} b_R^{(1,2)} z^{|R|},$$

где суммы в первом и во втором случаях-по всем 1-связным R, а в третьем – по R, разбивающимся на не более чем две связные компоненты. Из формул для b_R следует, что если R состоит ровно из двух 1-связных компонент R_1 и R_2, то

$$b_R^{(1,2)} = b_{R_1}^{(1)} b_{R_2}^{(2)}.$$

Поэтому в семиинварианте

$$\langle \sigma_{t_1} \sigma_{t_2} \rangle - \langle \sigma_{t_1} \rangle \langle \sigma_{t_2} \rangle$$

члены степени по z, меньшей $d_{\{t_1, t_2\}}$, сокращаются.

Задача 5.1. Доказать это в общем случае, для чего воспользоваться результатами дополнения I. 9.

Единственность при $h \neq 0$.

Закончим доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим произвольные граничные условия $\widetilde{\sigma}^{(\partial\Lambda)}$ в Λ. Тогда

$$\langle \sigma_T \rangle_{\Lambda, \widetilde{\sigma}(\partial\Lambda)} = \frac{1}{\langle \exp(\beta \sum \sigma_t \widetilde{\sigma}_t) \rangle_\Lambda} \langle \sigma_T \exp(\beta \sum_{\substack{t' \in \partial\Lambda \\ \rho(t,t')=1}} \sigma_t \sigma_{t'}) \rangle_\Lambda,$$

где $\langle \cdot \rangle$ означает среднее при пустых граничных условиях. Аналогично (I.10) имеем

$$\langle \sigma_T \rangle_{\Lambda, \widetilde{\sigma}(\partial\Lambda)} - \langle \sigma_T \rangle_\Lambda = \int_0^1 d\beta' \frac{\partial}{\partial \beta'} \langle \sigma_T \rangle_{\Lambda, \sigma(\partial\Lambda)} =$$
$$= \int_0^1 d\beta' \sum_{t : \rho(t, \partial\Lambda)=1} \langle \sigma_T, \sum_{t' : \rho(t,t')=1} \sigma_t \widetilde{\sigma}_{t'} \rangle_\Lambda. \tag{5.6}$$

Воспользуемся оценкой

$$|\langle \sigma_T, \sigma_t \rangle_\Lambda| \le c\, z^{\rho(T,t)}, \tag{5.7}$$

следующей из теоремы 5.5, дополнения I.7 или получаемой аналогично теореме 5.5.

Подставляя (5.7) в (5.6), мы получаем при $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu$ по критерию Коши доказательство теоремы 2.I.

6. Убывание корреляций

Свойства убывания корреляций. Сильные оценки семиинвариантов. Сходимость ренормгруппы.

Перечислим некоторые важнейшие характеристики случайного поля в порядке их усиления.

Случайное поле σ_t называется

I° эргодическим, если для любых T_1, T_2 имеет место

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{t\in\Lambda} \langle \sigma_{T_1}\, \sigma_{T_2+t} \rangle \to \langle \sigma_{T_1}\, \sigma_{T_2} \rangle;$$

2° перемешивающим, если для любых T_1, T_2 имеет место

$$\langle \sigma_{T_1}\, \sigma_{T_2+t} \rangle \xrightarrow[|t|\to\infty]{} \langle \sigma_{T_1} \rangle \langle \sigma_{T_2} \rangle;$$

3° ℓ-кратно перемешивающим, если для любых $T_1, \dots, T_\ell$

$$\langle \sigma_{T_1+t_1} \cdots \sigma_{T_\ell+t_\ell} \rangle \to \langle \sigma_{T_1} \rangle \cdots \langle \sigma_{T_\ell} \rangle,$$

если $\min\limits_{i<j} \rho(T_i+t_i,\ T_j+t_j) \to \infty$;

4° имеющим сильное экспоненциальное убывание корреляций, если для всех $T=\{t_1,\dots,t_n\}$ и некоторого $\lambda<1$

$$|\langle \sigma_{t_1}^{,k_1}, \dots, \sigma_{t_n}^{,k_n} \rangle| \le c(k_1,\dots,k_n)\, \lambda^{d_T};$$

5° полем с максимальной оценкой 4°, если

$$c(k_1,\dots,k_n) = c^{k_1+\dots+k_n}\, k_1!\dots k_n!$$

где c зависит только от ν;

6° полем с равномерно сильным экспоненциальным убыванием, если для любых попарно различных $T_1,\dots,T_n$

$$|\langle \sigma_{T_1}^{,k_1}, \dots, \sigma_{T_n}^{,k_n} \rangle| \le k_1!\dots k_n!\; c^{\sum_{i=1}^n (k_i + d_{T_i})} \times$$
$$\times\, \lambda^{d\{T_1,\dots,T_n\}},$$

где $c>0$, $\lambda<1$ не зависят от k_i, T_i, а число $d_{\{T_1,\dots,T_n\}}$ – длина наименьшего связного дерева с вершинами $1,\dots,n$, в котором длина d_{ij} между вершинами i и j определяется как $d_{ij} = \rho(T_i, T_j)$.

Задача 6.I. Доказать, что I° эквивалентно обычному определению эргодичности (см.[5]). Доказать, что из каждого свойства выводится предыдущее. Никакие два из этих свойств неэквивалентны.

Здесь мы докажем его для малых β.

Лемма 6.I. Для любых $k_1, \dots, k_n$ и любых попарно различных A_i

$$|\langle \sigma_{A_1}^{,k_1}, \dots, \sigma_{A_n}^{,k_n} \rangle_0| \le c^{k_1+\dots+k_n}\, k_1!\dots k_n! \tag{6.I}$$
$$|A_i| \le 2$$

для некоторой константы c, зависящей только от ν.

Доказательство. Положим $\Lambda = \bigcup_{i=1}^n A_i$ и рассмотрим модель с взаимодействием $U_\Lambda = -\sum \lambda_i \sigma_{A_i}$,

где $|\lambda_i| \le \lambda$, λ достаточно мало.

Рассмотрим для $0 \le t \le 1$

$$f(t) = \ln \langle \exp(-t\mathcal{U}_\Lambda) \rangle_0 .$$

Тогда

$$f(1) = \int_0^1 \frac{d f(t)}{dt}\, dt = \int_0^1 \sum \lambda_i \langle \sigma_{A_i} \rangle_{\Lambda, t}\, dt. \quad (6.2)$$

Из результатов лекции 4 следует, что $\langle \sigma_{A_i} \rangle_{\Lambda,t}$ являются аналитическими функциями от $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ в области $|\lambda_i| < \lambda$ для достаточно малых λ. Поэтому для доказательства (6.I) достаточно воспользоваться неравенствами Коши. Лемма доказана.

Теорема 6.I. Для достаточно малых β и любых

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad k_1, \dots, k_n > 0$$

$$|\langle \sigma_{x_1}^{,k_1}, \dots, \sigma_{x_n}^{,k_n} \rangle| \leqslant (c\beta)^{d_X} k_1! \dots k_n! \quad (6.3)$$

где C зависит только от ν.

Доказательство. Пусть для простоты обозначений $h=0$. Мы имеем

$$\langle \sigma_{x_1}^{,k_1}, \dots, \sigma_{x_n}^{,k_n} \rangle = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial \lambda_1^{k_1} \dots \partial \lambda_n^{k_n}} \ln \langle e^{\sum \lambda_i \sigma_{x_i}} \rangle \Big|_{\lambda_i = 0} . \quad (6.4)$$

Но

$$\ln \langle e^{\sum \lambda_i \sigma_{x_i}} \rangle_\Lambda = -\ln Z_\Lambda + \ln \langle e^{-\mathcal{U}_\Lambda + \sum \lambda_i \sigma_{x_i}} \rangle_0$$

При дифференцировании первый член пропадет. Второй член разложим в ряд по $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta$:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \langle (-\mathcal{U}_\Lambda + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_{x_i})^{,\ell} \rangle_0 . \quad (6.5)$$

Коэффициент этого ряда при $\lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n}$ равен

$$\sum_{\ell > k = k_1 + \dots + k_n} \frac{1}{(\ell-k)!\, k_1! \dots k_n!} \langle \sigma_{x_1}^{,k_1}, \dots, \sigma_{x_n}^{,k_n}, (-\mathcal{U}_\Lambda)^{,\ell-k} \rangle_0 .$$

Из (6.4) и последней формулы получаем

$$\langle \sigma_{x_1}^{,k_1}, \dots, \sigma_{x_n}^{,k_n} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} \sum_{A_1} \dots \sum_{A_m} , \quad (6.6)$$

$$\langle \sigma_{x_1}^{,k_1}, \dots, \sigma_{x_n}^{,k_n}, \sigma_{A_1}, \dots, \sigma_{A_m} \rangle_0 .$$

Среди $A_1, \dots, A_m$ могут быть одинаковые множества. Пусть все $B_1, \dots, B_p$ — различные. Пусть B_i встречается среди $A_1, \dots, A_m$ m_i раз.

Для того чтобы семиинвариант под знаком суммы был отличен от нуля, необходимо, чтобы набор $\Gamma = (B_1, \dots, B_p)$ был кластером и $X \subset \widetilde{\Gamma}$. Воспользовавшись (6.I), получим оценку модуля правой части (6.6):

$$\sum_{m=d_X}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} \sum_{\Gamma} c^{k_1+\dots+k_n+m_1+\dots+m_p} k_1! \dots k_n!\, m_1! \dots m_p! \times \quad (6.6a)$$

$$\times C_m^{m_1} C_{m-m_1}^{m_2} \dots C_{m-m_1-\dots-m_{p-1}}^{m_p} ,$$

где сумма — по всем кластерам Γ, таким, что $X \subset \widetilde{\Gamma}$, $|\Gamma| = p$. Число таких кластеров не более C^p. Из последней формулы, сокращая факториалы, получим теорему 6.I.

Ренормгруппа.

Пусть σ_t — некоторое случайное поле. Пусть $F(\sigma_{t_1}, \dots, \sigma_{t_n})$ — некоторый функционал от случайных величин $\sigma_{t_1}, \dots, \sigma_{t_n}$. Введем новое случайное поле для некоторого целого $a > 0$:

$$(R\sigma)_t = F(\sigma_{t_1 + at}, \dots, \sigma_{t_n + at}) .$$

Далее полагаем

$$(R^2\sigma)_t = F\left((R\sigma)_{t_1+at},\dots,(R\sigma)_{t_n+at}\right)$$

и т.д.; можно ввести $(R^n\sigma)_t$.

Наиболее известной является ренормгруппа Каданова, где $(R\sigma)_0=\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{t\in\Lambda}\sigma_t$ для некоторого куба Λ с длиной стороны (число точек на ребре) a. Эта ренормгруппа (зависящая от выбора a) обладает свойством

$$R_{a_1}R_{a_2} = R_{a_1a_2}, \quad R_{a^N} = (R_a)^N. \tag{6.7}$$

Для ренормгруппы Каданова обозначим

$$\xi_t^{(N)} = \frac{(R_N\sigma)_t - \langle (R_N\sigma)_t\rangle}{\sqrt{D(R_N\sigma)_t}}. \tag{6.8}$$

Теорема 6.2. Пусть $h\neq 0$ либо β мало. При $N\to\infty$ распределение поля ξ_t стремится к распределению независимого гауссова поля.

Доказательство. Очевидно,

$$\langle \xi_t^{(N)}\rangle = 0, \quad D\xi_t^{(N)} = 1.$$

Мы докажем, что все семиинварианты

$$\langle \xi_{t_1}^{(N)},\dots,\xi_{t_n}^{(N)}\rangle \to 0 \tag{6.9}$$

при $n\geqslant 3$ и $N\to\infty$. Отсюда будет следовать результат. Докажем сначала, что

$$D(R_N\sigma)_t \sim D_0|\Lambda|, \tag{6.10}$$

где

$$D_0 = \sum_{t\in Z^\nu}\langle\sigma_0,\sigma_t\rangle > 0. \tag{6.11}$$

Действительно, из второго неравенства Гриффитса мы знаем, что все члены ряда (6.11) неотрицательны, а $\langle\sigma_0,\sigma_0\rangle = D\sigma_0 > 0$. Из (6.11) нетрудно вывести (6.10), если воспользоваться оценкой

$$\langle\sigma_0,\sigma_t\rangle \leqslant c\lambda^{|t|}, \quad 0<\lambda<1.$$

Из сильных оценок семиинвариантов можно, очевидно, вывести

$$\langle (R_N\sigma)_{t_1},\dots,(R_N\sigma)_{t_n}\rangle = O(|\Lambda|). \tag{6.12}$$

Отсюда и следует (6.9). Теорема доказана.

Задача 6.2. Доказать для $h=0$, больших β, (+)-граничных условий (немаксимальную) сильную оценку 4°.

Указание. Выразить семиинвариант через контурные корреляционные функции f_B и получить максимальную сильную оценку для f_B.

Максимальной сильной оценки 4° в этом случае быть не может [12].

Все результаты в области $h=0$ и промежуточных β получены следующими двумя способами:

1) при $\nu=2$, $h=0$, модель Изинга допускает явное решение для всех β;

2) используются различные корреляционные неравенства.

Из результатов для любой размерности, полученных методом корреляционных неравенств, отметим доказательство существования "критической точки" и доказательство сходимости некоторой ренормгруппы к гауссовому полю при $\nu\geqslant 5$ [M.Aizenmann. Comm.Math.Phys., 1982, 86.].

7. Трансфер-матрица

Стохастическая полугруппа в физическом гильбертовом пространстве. Базис. Кластерность трансфер-матрицы. Рефлексивная положительность.

В лекции 2 мы уже рассматривали ненормированную трансфер-матрицу в случае $\nu=1$. Нормированная трансфер-матрица есть стохастический (переходный) оператор некоторого довольно сложного марковского процесса, который мы сейчас построим. Рассмотрим для простоты модель Изинга с $h=0$ и малым β на $\mathbb{Z}^\nu = \{x=(x^0,\dots,x^{\nu-1})\}$. Обозначим $\mathbb{Z}_0^{\nu-1}$ ($\mathbb{Z}_1^{\nu-1}$) подмножества (слои) $\mathbb{Z}^\nu$, равные $\{x: x^0=0\}$ и $\{x: x^0=1\}$ соответственно.

Определим для всех конечных $T, T' \subset \mathbb{Z}_0^{\nu-1}$ скалярное произведение

$$(\sigma_T, \sigma_{T'}) \stackrel{def}{=} \langle \sigma_T \sigma_{T'} \rangle . \tag{7.1}$$

Оно по линейности распространяется на линейное пространство $\mathcal{L}$ конечных линейных комбинаций случайных величин σ_T. Пополнив $\mathcal{L}$ по этому скалярному произведению, получим гильбертово пространство (на нулевом слое $\mathbb{Z}_0^{\nu-1}$), называемое физическим гильбертовым пространством $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{физ}$.

Определим на $\mathcal{H}$ линейный оператор $\mathcal{T}$, задав его матричные элементы:

$$(\sigma_T, \mathcal{T}\sigma_{T'}) \stackrel{def}{=} \langle \sigma_T \sigma_{T'+\vec{e}_0} \rangle , \tag{7.2}$$

где $\vec{e}_0 = (1,0,\dots,0) \in \mathbb{Z}^\nu$, $T'+\vec{e}_0$ – сдвиг T' на вектор $\vec{e}_0$. Формула (7.2) определяет линейный ограниченный оператор со следующими свойствами:

$$\|\mathcal{T}\| = 1 , \qquad \mathcal{T}1 = 1 . \tag{7.3}$$

Второе равенство очевидно, а сжимаемость ($\|\mathcal{T}\| \le 1$) следует из неравенства Шварца:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^* . \tag{7.4}$$

Это следует из равенства

$$\langle \sigma_T \sigma_{T'+e_0} \rangle = \langle \sigma_{T'} \sigma_{T+e_0} \rangle . \tag{7.5}$$

Если 0 не есть собственное значение $\mathcal{T}$, то существует (неограниченный) самосопряженный оператор H, такой, что

$$\mathcal{T}^2 = e^{-2H} . \tag{7.6}$$

При этом

$$H \ge 0 \tag{7.7}$$

называется физическим гамильтонианом.

Базис в $\mathcal{H}_{физ}$

Пусть $x \in \mathbb{Z}_0^{\nu-1}$. Обозначим P_x ортогональный проектор на линейное подпространство $\mathcal{H}_{физ}$, порожденное всеми σ_T, $T \subset T_x = \mathbb{Z}_{0,x}^{\nu-1} = \{x' \in \mathbb{Z}_0^{\nu-1}: x' < x$ в лексикографическом упорядочении$\}$. Известно, что $P_x\sigma_x$ совпадает с условным математическим ожиданием $M(\sigma_x \mid \sigma_{x'}, x'<x)$ и является функцией от конфигурации $\sigma^{(T_x)}$.

Положим

$$\hat{\sigma}_x = \frac{\sigma_x - P_x\sigma_x}{\sqrt{P_x[(\sigma_x - P_x\sigma_x)^2]}} . \tag{7.8}$$

Лемма 7.1. Случайные величины 1 и $\hat{\sigma}_T = \prod_{x\in T} \hat{\sigma}_x$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}_{физ}$.

Ортогональность и нормированность следуют непосредственно из свойств условных математических ожиданий

$$\langle \hat{\sigma}_T \rangle = \langle P_x \hat{\sigma}_T \rangle , \tag{7.9}$$

$$P_x\left(\hat\sigma_T\left(P_{x'}\hat\sigma_{T'}\right)\right) = \left(P_{x'}\hat\sigma_{T'}\right)\left(P_x\hat\sigma_T\right), \text{ если } x'<x.$$

Задача 7.I.

Доказать полноту: показать, что систему уравнений (7.8) относительно σ_t при заданных $\hat\sigma_t$ можно решить методом последовательных приближений.

Матричные элементы $\mathcal{T}$ в этом базисе

Разложим матричные элементы по семиинвариантам:

$$(\hat\sigma_T, \mathcal{T}\hat\sigma_{T'}) = \langle \hat\sigma_T\, \hat\sigma_{T'+e_0}\rangle = \sum \langle\hat\sigma_{A_1}'\rangle\dots\langle\hat\sigma_{A_k}'\rangle, \qquad (7.10)$$

где сумма-по всем разбиениям $\{A_1,\dots,A_k\}$ множества $T\cup(T'+e_0)$.

Лемма 7.2. Если либо $A\cap T=\emptyset$, либо $A\cap(T'+e_0)=\emptyset$, то

$$\langle\hat\sigma_A'\rangle = 0.$$

Таким образом, в (7.I0) сумма – только по разбиениям, в которых все элементы пересекаются с T и с $T'+e_0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $A\subset \mathbb{Z}_0^{\nu-1}$. Из леммы 7.1 следует, что все моменты $\langle\hat\sigma_A\rangle = 0$, если $A\subset\mathbb{Z}_0^{\nu-1}$, $A\ne\emptyset$. Поэтому и все семиинварианты равны нулю.

Теорема 7.I. Имеет место кластерная оценка, если $A\subset \mathbb{Z}_0^{\nu-1}\cup\mathbb{Z}_1^{\nu}$:

$$|\langle\hat\sigma_A'\rangle| \le (c\beta)^{d_A}. \qquad (7.II)$$

Докажем сначала две леммы.

Лемма 7.3.

$$\hat\sigma_t = \sum_{A\subset \mathbb{Z}^{\nu-1}_{0,t}} c_{t,A}\,\sigma_A, \qquad (7.I2)$$

причем

$$|c_{t,A}| \le (c_\beta)^{d\{t\}\cup A}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала

$$P_x\sigma_x = \lim_{\Lambda\uparrow \mathbb{Z}^\nu} P_x^{(\Lambda)}\sigma_x,$$

где $P_x^{(\Lambda)}$ – условное математическое ожидание по гиббсовскому распределению в Λ при заданных значениях $\sigma_{t'}=\hat\sigma_{t'}$, $t'\in\Lambda\cap\mathbb{Z}^{\nu-1}_{0,x}$. По определению,

$$P_x^{(\Lambda)}\sigma_x = \frac{\langle\sigma_x\exp(-\beta\sum\sigma_t\sigma_{t'} - \beta\sum\sigma_t\tilde\sigma_{t'})\rangle_0}{\langle\exp(-\beta\sum\sigma_t\sigma_{t'}-\beta\sum\sigma_t\sigma_{t'})\rangle_0},$$

где $t,\ t_1\in\Lambda\setminus\mathbb{Z}^{\nu-1}_{0,x}$, $t'\in\Lambda\cap\mathbb{Z}^{\nu-1}_{0,x}$, $|t-t_1|=1$, $|t-t'|=1$.

Так же, как в лекциях 2,3, мы можем получить тогда кластерное разложение для $P_x\sigma_x$. В нем K_Γ являются числами, если $\Gamma\cap\mathbb{Z}^{\nu-1}_{0,x}=\emptyset$, и функциями от $\tilde\sigma_{t'}$, если $t'\in\Gamma\cap\mathbb{Z}^{\nu-1}_{0,x}$. Кластерные оценки выполнены равномерно по $\tilde\sigma_{t'}$. Тогда из теоремы 4.I следует, что

$$P_x\sigma_x = \sum\tilde c_{x,A}\,\sigma_A,$$

где $A \neq \emptyset$ и $|\widetilde{c}_{x,A}| \leq (c\beta)^{d_{A\cup\{x\}}}$.

Аналогично получим

$$P_x(\widehat{\sigma}_x)^2 = 1 + \sum_{A\neq\emptyset} c'_{x,A}\sigma_A,$$

$$|c'_{x,A}| \leq (c\beta)^{d_{A\cup\{x\}}}.$$

С помощью этих формул и простых вычислений с рядами мы получаем доказательство леммы 7.3.

Лемма 7.4. Рассмотрим взаимодействие вида

$$U_\Lambda = -\sum_{\substack{|t-t'|=1\\ t,t'\in\Lambda}} \beta_{tt'}\sigma_t\sigma_{t'} - \sum_{\substack{t\in\Lambda\\ A\subset\Lambda}} \delta_{t,A}\sigma_A.$$

Тогда существует такое $\lambda_0>0$, не зависящее от λ, что

$$\ln Z_\Lambda = \ln\langle e^{-U_\Lambda}\rangle_0$$

аналитична по $\beta_{tt'}$, $\delta_{t,A}$ в области

$$|\beta_{tt'}| < \lambda_0, \quad |\delta_{t,A}| < \lambda_0^{d_{\{t\}\cup A}} \equiv \frac{1}{2}\widehat{K}_{t,A}. \qquad (7.13)$$

Доказательство. Получим кластерное представление Z_Λ. Для удобства обозначений будем считать $\beta_{tt'}\equiv 0$.

Обозначим для $\Gamma\subset\Lambda$

$$K_{t,A} = \exp(\delta_{t,A}\sigma_A) - 1,$$

$$K_\Gamma = \sum_{\varsigma}\langle\prod_{(t,A)\in\varsigma} K_{t,A}\rangle_0,$$

где сумма по всем неупорядоченным наборам попарно различных пар $\varsigma = \{(t_1,A_1),\dots,(t_n,A_n)\}$, таким, что набор $\{\{t_1\}\cup A_1,\dots,\{t_n\}\cup A_n\}$ связан. Кластерное разложение Z_Λ с так выбранными K_Γ получается так же, как (3.5). Докажем кластерную оценку (3.2).

Докажем сначала, что

$$\sum_{\substack{\Gamma:\,0\in\Gamma\\ |\Gamma|=n}} |K_\Gamma| \leq \sum_{\varsigma:\,0\in\widetilde{\varsigma}}\ \prod_{(t,A)\in\varsigma}\widehat{K}_{t,A}. \qquad (7.14)$$

Обозначим через G_n сумму тех членов в ряду

$$\sum_{p=1}^{\infty}\Big(\sum_A \widehat{K}_{0,A}\Big)^p = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{A_1}\dots\sum_{A_p}\widehat{K}_{0,A_1}\dots\widehat{K}_{0,A_p}, \qquad (7.15)$$

для которых $\sum_{k=1}^{p} |\{0\}\cup A_k| \geq n$. Из (7.13) нетрудно видеть, что

$$G_n \leq \sum_{p=1}^{n} 2^{p-1}\lambda_0^n + \sum_{p=n+1}^{\infty}\Big(\sum_A \widehat{K}_{0,A}\Big)^p \leq \mathrm{const}(2\lambda)^n. \qquad (7.16)$$

Поэтому для доказательства кластерной оценки надо показать, что правая часть (7.14) не превосходит $4^n G_n$. Для этого рассмотрим следующий алгоритм построения всех членов правой части (7.14). На первом шаге выберем произвольно пару $t_1=0$, A_1. Пометим некоторые точки A_1. На втором шаге выберем пару A_1, A_2 так, что либо $t_2=0$, либо t_2 есть первая в лексикографическом порядке помеченная точка A_1. A_2 выберем произвольно. Пометим некоторые точки $A_2\setminus A_1$. Пусть на k-том шаге мы уже выбрали k пар $(t_1,A_1),\dots,(t_k,A_k)$. На $(k+1)$ шаге выберем либо $t_{k+1}=t_k$, либо следующую в лексикографическом порядке помеченную точку $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Каждому построенному таким образом члену $K_{t_1, A_1}, \ldots, K_{t_p, A_p}$ в правой части (7.14) поставим в соответствие член $K_{o, A_1 - t_1} \ldots K_{o, A_p - t_p}$ ($A - t$ - сдвиг A на вектор t) в правой части (7.15). Так как на каждом шаге есть только две возможности выбора точки и каждая точка может быть помечена или нет, то каждый член в правой части (7.15) окажется сопоставленным не более чем 2^{p+n} членом правой части (7.14). Кластерная оценка доказана.

Отсюда получаем аналитичность, повторяя рассуждения леммы 6.1.

Задача 7.2. Вывести равномерное экспоненциальное убывание корреляций (свойство 6^0 предыдущей лекции) для модели Изинга в высокотемпературной области.

Задача 7.3. Закончить доказательство теоремы 7.1. Здесь мы дадим другую конструкцию физического гильбертова пространства и трансфер-матрицы, связанную со свойством рефлексивной положительности.

Пусть $\Theta : Z^{\nu} \to Z^{\nu}$ - отражение относительно оси $x^0 = 0$, т.е. $\Theta(x^0, \ldots, x^{\nu-1}) = (-x^0, x^1, \ldots, x^{\nu-1})$. Тем же значком Θ мы будем обозначать действие Θ на случайные величины:

$$\Theta(\sigma_T) = \sigma_{\Theta T} \quad \text{,если} \quad T \subset \mathbb{Z}^{\nu}_{+} = \{ (x^0, \ldots, x^{\nu-1}) : x^0 \geq 0 \}.$$

Очевидно, что для независимого трансляционного инвариантного поля

$$\langle P(\Theta P) \rangle \geq 0, \qquad (7.17)$$

если P - многочлен от σ_T, $T \subset \mathbb{Z}^{\nu}_{+}$. Обозначим через $\mathcal{L}_{+}$ пространство таких многочленов. Поэтому и для модели Изинга выполнено свойство (7.17), которое называется рефлексивной положительностью. Действительно, возьмем куб Λ, симметричный относительно Θ, и запишем

$$\langle P(\Theta P) \exp(-U_{\Lambda}) \rangle_0 = \langle F(\Theta F) \rangle_0,$$

где

$$F = P \exp\left(\beta \frac{1}{2} \sum_{t, t' \in \mathbb{Z}^{\nu-1}_0} \sigma_t \sigma_{t'} + \beta \sum_{t' \in \mathbb{Z}^{\nu}_{+} - \mathbb{Z}^{\nu}_0} \sigma_t \sigma_{t'}\right).$$

Тогда (7.17) сохраняется и в пределе $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^{\nu}$.

Введем на $\mathcal{L}_{+}$ скалярное произведение

$$(f, g)_{+} = \langle f(\Theta g) \rangle. \qquad (7.18)$$

Возьмем фактор-пространство $\mathcal{L}_{+}$ по линейному подпространству векторов f с нулевой нормой $(f, f)_{+} = 0$ и пополним полученное пространство до гильбертова пространства $\mathcal{H}_{+}$.

Определим оператор $\mathcal{T}_{+} : \mathcal{H}_{+} \to \mathcal{H}_{+}$,

$$\mathcal{T}_{+} \sigma_T = \sigma_{T + e_0}, \quad T \subset \mathbb{Z}^{\nu}_{+}.$$

Задача 7.4. Доказать, что полученное определение корректно, т.е. $\mathcal{T}_{+}$ сохраняет нулевую норму.

Задача 7.5. $\mathcal{H}_{+}$ отождествляется с $\mathcal{H}$ посредством отображения $\sigma_T \to P_0 \sigma_T$, где P_0 - ортогональный проектор (условное математическое ожидание) в пространстве со скалярным произведением $(\sigma_T, \sigma_{T'}) = \langle \sigma_T \sigma_{T'} \rangle$ на нулевой слой (т.е. на $\mathcal{H}$).

При этом

$$P_0 \mathcal{T}_{+} P_0 = \mathcal{T}. \qquad (7.19)$$

Часть II. Динамика

8. Квазилокальная структура: алгебры и динамика

Некоммутативная теория вероятностей. Квазилокальность. Алгебры: спиновая, КАС, ККС. Динамика и группа симметрии. Теорема Робинсона.

Замкнутая физическая система в состоянии,близком к равновесию, задается набором $(\mathfrak{A}, \alpha_g, \rho)$, где $\mathfrak{A}$ – C^*-алгебра с 1 (алгебра наблюдаемых), G – группа (группа симметрии), α_g – представление группы G в группу $*$ – автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$ – непрерывное в сильном или слабом смысле, $\rho = \langle \cdot \rangle$ – состояние на $\mathfrak{A}$ – инвариантное относительно α_g.

Интерпретация (некоммутативная теория вероятностей).

Некоторые самосопряженные элементы $A = A^* \in \mathfrak{A}$ соответствуют физическим наблюдаемым, $\langle A \rangle$ – измеряемое среднее значение A в состоянии $\langle \cdot \rangle$, $\mathcal{D}(A) = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$ – дисперсия A, $\langle A^n \rangle$ – моменты, $f_A(\lambda) = \langle e^{i\lambda A} \rangle$ – характеристическая функция, последней единственным образом соответствует некоторая функция распределения $F_A(x)$, интерпретируемая как вероятность того, что измеряемое значение величины A будет меньше x.

Аналогично, если $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ коммутируют между собой, то для них определяется совместная функция распределения. Если же A_1 и A_2 не коммутируют, то запрещается говорить об их совместном распределении. Этот факт отражает неравенство (соотношение неопределенностей)

$$\mathcal{D}(A_1)\mathcal{D}(A_2) \geqslant |\langle [A_1, A_2] \rangle| \tag{8.1}$$

для любого состояния $\langle \cdot \rangle$ (вывести из неравенства Шварца). Заметим, что для коммутирующих A_1 и A_2 всегда найдется состояние, для которого $\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A_2) = 0$.

Если $\mathfrak{A}$ коммутативна, то она изоморфна алгебре непрерывных функций на компакте Ω по теореме Гельфанда, $\langle \cdot \rangle$ определяет по теореме Рисса обычное математическое ожидание по некоторой вероятностной мере, а α_g индуцируется [5] группой сохраняющих эту меру преобразований Ω. Иначе говоря, сюда включается классическая теория вероятностей и теория динамических систем.

C^*- алгебры; примеры

I. Частица на R^1 с одной (внешней) степенью свободы. В квантовой механике хорошо известны самосопряженные операторы в $L_2(R^1)$ координаты $q = x$ и импульса $p = i\frac{d}{dx}$. Для любых вещественных α, β можно определить операторы Вейля

$$W(\alpha, \beta) = e^{i\alpha q + i\beta p}.$$

Пусть $\mathfrak{A}_1(\mathbb{R}^1)$ – C^*-алгебра, порожденная операторами Вейля.

Задача 8.1. Доказать, что

$$W(\alpha_1, \beta_1)\, W(\alpha_2, \beta_2) = W(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)\, e^{i(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)}. \tag{8.2}$$

Задача 8.2. Алгебра фон Неймана $W_1(R^1)$, порожденная $\mathfrak{A}(R^1)$ в $L_2(R^1)$, совпадает с $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^1))$.

II. Алгебра внутренних степеней свободы частицы является обычно матричной алгеброй $\mathfrak{M}_n$.

III. Алгебры, соответствующие системам с несколькими степенями свободы, получаются как тензорные произведения алгебр. Например, частица в R^3 с внутренними степенями свободы соответствует

$$\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{M}_n \text{ или } W_1 \otimes W_1 \otimes W_1 \otimes \mathfrak{M}_n = \\ = \mathcal{B}(L_2(R^3)) \otimes \mathfrak{M}_n.$$

В случае бесконечного (континуального) числа степеней свободы это дело более тонкое. Руководящим здесь является то требование, что наблюдаемые, соответствующие разным (пространственным) степеням свободы, коммутируют (т.е. совместно измеримы).

Определение (квазилокальная структура)

$\mathfrak{A}$ обладает квазилокальной структурой (над R^ν или $\mathbb{Z}^\nu$), если для любого ограниченного открытого подмножества $\alpha \subset R^\nu$ или $\mathbb{Z}^\nu$ задана C^* – подалгебра $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathfrak{A}$, причем

1. $\alpha \geq \beta \Rightarrow \mathfrak{A}_\alpha \geq \mathfrak{A}_\beta$;

2. $\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha}$, т.е. замыкание локальной алгебры $\mathfrak{A}^\circ = \bigcup_\alpha \mathfrak{A}_\alpha$ по норме;

3. $\mathfrak{A}_\alpha$ имеют общую единицу;

4. существует $*$-автоморфизм σ алгебры $\mathfrak{A}$, $\sigma^2 = 1$, такой, что при $\alpha \cap \beta = \varnothing$

$$[\mathfrak{A}^e_\alpha, \mathfrak{A}^e_\alpha] = 0, \quad [\mathfrak{A}^e_\alpha, \mathfrak{A}^e_\beta] = 0,$$

$$\{\mathfrak{A}^\circ_\alpha, \mathfrak{A}^\circ_\beta\} = 0, \tag{8.3}$$

где $\mathfrak{A}^e_\alpha$ - подалгебра четных $(\sigma A = A)$ элементов $\mathfrak{A}_\alpha$, $\mathfrak{A}^\circ_\alpha$ - - подмножество нечетных $(\sigma A = -A)$ элементов $\mathfrak{A}_\alpha$.

IV. Спиновая алгебра

Пусть каждой точке $x \in \mathbb{Z}^\nu$ соответствует алгебра матриц $\mathfrak{A}_x \cong \mathfrak{M}_n$ (внутренние степени свободы). Положим для конечных $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$

$\mathfrak{A}_\Lambda = \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathfrak{A}_x$ и будем считать $\mathfrak{A}_\Lambda$, вложенный в $\mathfrak{A}_{\Lambda'}$ при $\Lambda \subset \Lambda'$, следующим образом:

$$A \to A \otimes 1_{\Lambda' \setminus \Lambda} \in \mathfrak{A}_{\Lambda'}, \quad A \in \mathfrak{A}_\Lambda, \quad 1_{\Lambda' \setminus \Lambda} \text{ - единица}$$

в $\mathfrak{A}_{\Lambda' \setminus \Lambda}$.

Положим $\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_\Lambda \mathfrak{A}_\Lambda}$. Очевидно, что этим в $\mathfrak{A}$ задана квазилокальная структура с $\sigma \equiv 1$.

V. Алгебра КАС (канонических антикоммутационных соотношений)

Рассмотрим $\mathcal{F}_-(\ell_2(\mathbb{Z}^\nu))$ и рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}$, порожденную всеми $a_x \stackrel{def}{=} a(\delta_x)$, где

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y, \end{cases} \in \ell_2(\mathbb{Z}^\nu),$$

$\mathfrak{A}_\Lambda$ натянута на a_x, $x \in \Lambda$. Положим $\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_\Lambda \mathfrak{A}_\Lambda}$. Снова получим квазилокальную структуру, если положить $\sigma(a_x) = -a_x$. Тогда $\mathfrak{A}^e$ порождается четными мономами от операторов рождения-уничтожения.

VI. Алгебра ККС (канонических коммутационных соотношений)

Рассмотрим C^*-алгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{F}_+(L_2(R^\nu, dx)))$, порожденную всеми $a(f)$, где f имеет компактный носитель $\operatorname{supp} f$, $\mathfrak{A}_\Lambda$ порождается $a(f)$ с $\operatorname{supp} f \subset \Lambda$, $\sigma \equiv 1$.

Задача 8.3. Если рассмотреть C^*-алгебру, порожденную всеми $a(f)$, $f \in L_2(R^\nu, dx)$, то получится строго большая алгебра.

Задача 8.4. Доказать изоморфизм спиновой алгебры $(n=2)$ и алгебры КАС.

Указание. Спиновые алгебры для разных ν изоморфны (без сохранения квазилокальной структуры). То же самое верно для алгебр КАС. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\nu = 1$.

Провести доказательство, используя дополнение П, задачи 17-18.

Динамика и группа симметрии на спиновой алгебре

Роль пространства здесь играет $\mathbb{Z}^\nu$, и мы будем искать представление группы $G = \mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{R}$ пространственно-временных трансляций. Представление α_x группы $\mathbb{Z}^\nu$ строится очевидным образом: пусть φ_x - некоторый изоморфизм $\mathfrak{A}_x$ на $\mathfrak{M}_n$. Определим для всех x и $y \in \mathbb{Z}^\nu$ $\alpha_x : \mathfrak{A}_y \to \mathfrak{A}_{y+x}$ формулой $\varphi^{-1}_{x+y}\varphi_y$. Очевидным образом α_x продолжается на все $\mathfrak{A}$.

Для построения временной эволюции α_t, $t \in \mathbb{R}$, рассмотрим бесконечный набор $\Phi = (\Phi_A \in \mathfrak{A}_A,\ |A| < \infty,\ A \subset \mathbb{Z}^\nu$ различны) и определим формальный гамильтониан, т.е. формальную сумму вида

$$H_f = \sum \Phi_A. \tag{8.4}$$

Примером может быть гамильтониан квантовой модели Изинга (модели Изинга в трансверсальном поле)

$$H_f = -\lambda_1 \sum_{|t-t'|=1} \sigma_t^3 \sigma_{t'}^3 - \lambda_2 \sum_t \sigma_t^1, \quad \lambda_i > 0, \qquad (8.5)$$

где $\quad \sigma_t^i \in \mathfrak{A}_t \cong \mathfrak{M}_2 .$

Мы будем предполагать, что

1) (трансляционная инвариантность) если $\Phi_A \in \Phi$, то $\alpha_x(\Phi_A) \in \Phi$ для всех x ;

2) (финитность) для любого x число A, таких, что $\Phi_A \neq 0, x \in A$, конечно.

Заметим, что H_f определяет дифференцирование алгебры локальных наблюдаемых $\mathfrak{A}^\circ = \bigcup_\Lambda \mathfrak{A}_\Lambda$; если $B \in \mathfrak{A}^\circ$, то

$$[H_f, B] = \sum [\Phi_A, B],$$

где в сумме только конечное число членов отлично от нуля. Обозначим

$$H_\Lambda = \sum_{A \subset \Lambda} \Phi_A .$$

Теорема 8.1. Для всех $B \in \mathfrak{A}^\circ$ существует

$$\alpha_t(B) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu} e^{iH_\Lambda t} B e^{-iH_\Lambda t}, \qquad (8.6)$$

где $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu$ означает произвольную расширяющуюся последовательность кубов Λ .

Доказательство. $B_t = e^{iH_\Lambda t} B e^{-iH_\Lambda t}$ удовлетворяет уравнению Гейзенберга:

$$\frac{dB_t}{dt} = i[H_\Lambda, B_t], \qquad B_0 = B$$

или

$$B_t = B_0 + i\int_0^t [H_\Lambda, B_s]\, ds . \qquad (8.7)$$

Итерируя (8.7), получим ряд Дайсона-Швингера:

$$B_t = B_0 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(it)^n}{n!} [H_\Lambda, \ldots, [H_\Lambda, [H_\Lambda, B]] \ldots]. \qquad (8.8)$$

Заметим, что n -кратный коммутатор в правой части (8.8) равен сумме членов вида

$$[\Phi_{A_n}, \ldots, [\Phi_{A_2}, [\Phi_{A_1}, B]] \ldots];$$

отличными от нуля могут быть только члены, где для всех k

$A_k \cap (A_{k-1} \cup \ldots \cup A_1 \cup A_0) \neq 0$, $\qquad B \in \mathfrak{A}_{A_0}$. Но

$|A_{k-1} \cup \ldots \cup A_0| \leq |A_0| + c(k-1)$, где $c = \max(|A| : \Phi_A \neq 0)$.

Поэтому выбор A_k возможен не более, чем $\mathrm{const}\,(|A_0| + c(k-1))$ способами. Поэтому число членов не превосходит $C^n n!$ для некоторой константы C , а норма каждого члена ограничена

$$\|B\| (\max \|\Phi_A\|)^n .$$

Поэтому для достаточно малых $|t| < t_0$ ряд (8.8) сходится равномерно по Λ к ряду

$$\alpha_t(B) = B_0 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(it)^n}{n!} [H_f, \ldots, [H_f, [H_f, B]] \ldots]. \qquad (8.9)$$

Отсюда следует, что для $\quad |t'|, |t''|, |t'+t''| < t_0$

$$\alpha_{t''}(\alpha_{t'}(B)) = \alpha_{t'+t''}(B). \qquad (8.10)$$

Так как α_t сохраняет норму B , то можно продолжить α_t по непрерывности на все $\mathfrak{A}$ для $|t| < t_0$ с сохранением (8.10). Пусть теперь t - любое, а N таково, что $\frac{t}{N} \in (-t_0, t_0)$. Положим $\alpha_t = (\alpha_{\frac{t}{N}})^N$. Это дает унитарную группу автоморфизмов (проверить корректность).

Задача 8.5. Доказать, что $\alpha_t\alpha_x = \alpha_x\alpha_t$. Поэтому мы построили представление группы $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{R}$.

Задача 8.6. Для $\nu = 1$ ряд (8.9) абсолютно сходится для всех t.

Для алгебры КАС и трансляционно-инвариантного финитного H_f то же рассуждение строит представление группы $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{R}$, если каждый Φ_A есть сумма четных мономов от операторов рождения-уничтожения.

9. Квазилокальная структура: состояния

Основные и КМШ-состояния. Физический гамильтониан. Характеризация этих состояний. Существование, единственность и кластерное разложение КМШ-состояний в высокотемпературной области. Модулярный оператор.

Пусть задана динамика α_t на $\mathfrak{A}$. Для данного состояния $\langle\cdot\rangle$ основным объектом изучения являются временные корреляционные функции

$$\langle \alpha_{t_1}(A_1)\ldots\alpha_{t_n}(A_n)\rangle = \Gamma_{A_1,\ldots,A_n}(t_1,\ldots,t_n).$$

Обычно рассматривается два типа равновесных состояний.

Определение 9.1. Состояние $\langle\cdot\rangle$ называется равновесным, если для всех $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ существует ограниченная аналитическая при $0 < \operatorname{Im} z < \beta$, $0 \leq \beta \leq \infty$, и непрерывная на границе этой области функция $F_{A_1,A_2}(z)$, такая, что для вещественных

$$F_{A_1,A_2}(z) = \langle A_1\alpha_t(A_2)\rangle \tag{9.1}$$

при $\beta < \infty$ требуется также, чтобы

$$F_{A_1,A_2}(t+i\beta) = \langle \alpha_t(A_2)A_1\rangle. \tag{9.2}$$

При $\beta = \infty$ такое состояние называется основным, при $\beta < \infty$ – КМШ-состоянием (с обратной температурой β).

Замечание 9.1. Требование ограниченности F является лишним при $\beta < \infty$ (см. предл. 5.3.7 [8]).

Лемма 9.1. Равновесное состояние инвариантно, т.е.

$$\langle\alpha_t(A)\rangle = \langle A\rangle \quad \text{для всех} \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Доказательство. Пусть, например, $\beta < \infty$. Продолжая по периодичности $F_{1,A}(z)$ на всю комплексную плоскость, мы получим ограниченную аналитическую функцию, которая является константой.

Асимптотику корреляционных функций при больших временах удобно изучать методом спектральной теории операторов.
Для этого рассматривается ГНС – представление π относительно инвариантного состояния ω. Гильбертово пространство представления называется физическим гильбертовым пространством: $\mathcal{H}_{ГНС} = \mathcal{H}_{физ}$, циклический вектор Ω – физический вакуум, преобразование $[A] \to [\alpha_t(A)]$ сохраняет $\|\cdot\|_{физ}$ ввиду инвариантности ω и поэтому продолжается до сильно непрерывной унитарной группы. По теореме Стоуна, её можно записать в виде $e^{itH_{физ}}$, где $H_{физ}$ – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_{физ}$, называемый физическим гамильтонианом. Тогда ($H = H_{физ}$)

$$\pi(\alpha_t(A)) = e^{itH_{физ}}\pi(A)e^{-itH_{физ}}, \quad e^{itH}\Omega = \Omega, \tag{9.3}$$

$$\Gamma_{A_1\ldots A_n}(t_1,\ldots,t_n) = (\Omega, \pi(A_1)\exp\{i(t_2-t_1)H\},$$
$$\pi(A_2)\ldots\exp\{i(t_n-t_{n-1})H\}\,\pi(A_n)\Omega).$$

Лемма 9.2. Инвариантное состояние ω является основным тогда и только тогда, когда $H \geq 0$.

Доказательство. Если $H \geq 0$, то условие аналитичности и ограниченности следует из (9.3). Наоборот, если существует $x \in E_{(-\infty,-\varepsilon)}\mathcal{H}_{физ}$, где E_Δ – спектральное семейство для H, то существует $A \in \mathfrak{A}$, такой, что $[A] \cap E_{(-\infty,-\varepsilon)} \mathcal{H} \neq 0$. Тогда $\Gamma_A(t) = (\Omega, e^{itH} A \Omega)$ не может быть ограниченным при $\operatorname{Im} t \to \infty$.

Состояние ω является КМШ-состоянием с $\beta = 0$ тогда и только тогда, когда ω есть след на $\mathfrak{A}$, т.е. $\omega(A_1 A_2) = \omega(A_2 A_1)$ для всех A_1, A_2. Нам осталось оправдать для $0 < \beta < \infty$ несколько неестественное, на первый взгляд, определение 9.I.

Задача 9.1. Существует единственное точное состояние, являющееся следом на спиновой алгебре.

Лемма 9.3. Пусть $Q = Q^* \in \mathfrak{A}$. Рассмотрим динамику $\alpha_t(A) = e^{itQ} A e^{-itQ}$. Инвариантное относительно α_t состояние ω на $\mathfrak{A}$ и такое, что $\omega(e^{\beta Q}) > 0$, является КМШ-состоянием с $0 < \beta < \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\omega(A) = \frac{Tr(e^{-\beta Q} A)}{Tr(e^{-\beta Q})}, \tag{9.4}$$

где Tr – некоторое состояние, являющееся следом на $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Группа α_t определена рядом Дайсона–Швингера для всех комплексных t. Значит, если ω есть КМШ-состояние, то

$$\omega(A_1 \alpha_{i\beta}(A_2)) \equiv \omega(A_1 e^{-\beta Q} A_2 e^{\beta Q}) = \omega(A_2 A_1). \tag{9.5}$$

Пусть $A_3 = e^{-\beta Q} A_2$. Тогда

$$\omega(A_1 A_3 e^{\beta Q}) = \omega(e^{\beta Q} A_3 A_1).$$

Таким образом, состояние $\rho(A) = \dfrac{\omega(e^{\beta Q} A)}{\omega(e^{\beta Q})}$ удовлетворяет условию

$$\rho(e^{-\beta Q} A_1 A_2 e^{\beta Q}) = \rho(A_3 A_1).$$

Но ввиду инвариантности ω и ρ

$$\rho(A_1 A_3) = \rho(A_3 A_1)$$

и ρ есть след на $\mathfrak{A}$, обратное утверждение очевидно.

Теорема 9.I. Для достаточно малых β КМШ – состояние на спиновой алгебре относительно динамики, построенной в теореме 8.I, существует, единственно и имеет вид

$$\langle A \rangle = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu} \frac{Tr\, e^{-\beta H_\Lambda} A}{Tr\, e^{-\beta H_\Lambda}}. \tag{9.6}$$

Доказательство. Докажем сначала, что предел (9.6) существует, построив кластерное разложение.

Получим сначала кластерное представление статистической суммы:

$$\begin{aligned} Z_\Lambda &= \langle e^{-\beta H_\Lambda} \rangle_0 \overset{def}{=} \frac{1}{2^{|\Lambda|}} Tr\, e^{-\beta H_\Lambda} = \\ &= \left\langle \sum_n \frac{(-\beta H_\Lambda)^n}{n!} \right\rangle_0 = \sum_n \frac{(-\beta)^n}{n!} \sum_{(B_1,\dots,B_n)} \langle \Phi_{B_1} \dots \Phi_{B_n} \rangle_0 = \\ &= \sum K_{\Gamma_1} \dots K_{\Gamma_n}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Назовем кластером произвольное I-связное множество Γ и положим

$$K_\Gamma = \sum_n \frac{(-\beta)^n}{n!} \sum_{B_1} \dots \sum_{B_n} \langle \Phi_{B_1} \dots \Phi_{B_n} \rangle_0, \tag{9.8}$$

где сумма по всем последовательностям $B_1, \dots, B_n$, таким, что

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Gamma .$$

Задача 9.2. Доказать, что имеет место кластерная оценка. Далее как следствие общей техники лекций 3,4 получаем существование предела.

Докажем теперь, что полученное состояние есть КМШ. Воспользуемся следующим общим утверждением.

Теорема 9.2. Пусть $\alpha_t^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots,$ – последовательность сильно непрерывных групп автоморфизмов $\mathfrak{A}$, сильно сходящаяся к группе α_t, т.е. для всех $A \in \mathfrak{A}$

$$\lim_{n \to +\infty} \| \alpha_t^{(n)}(A) - \alpha_t(A) \| = 0 \tag{9.9}$$

и всех t. Пусть $\omega^{(n)}$ – β-КМШ-состояние относительно $\alpha_t^{(n)}$. Тогда каждая предельная точка $\omega^{(n)}$ есть β-КМШ для α_t.

Доказательство. Заметим, что последовательность функций $F^{(\Lambda)}_{A_1, A_2}(z)$ равномерно ограничена при $0 \le \operatorname{Im} z \le \beta$ по принципу Фрагмена-Линделефа, так как на границе (например, при $\operatorname{Im} z = 0$)

$$| F^{(\Lambda)}_{A_1, A_2}(t) | = | \langle A_1 \alpha_t^{(\Lambda)}(A_2) \rangle | \le \|A_1\| \|A_2\| . \tag{9.10}$$

Отобразим конформно полосу на единичный круг. Мы имеем равномерно ограниченную последовательность функций, аналитических в круге и непрерывных на границе, кроме двух точек. Представим значение этих функций внутри круга в виде интеграла Коши по окружности. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости мы получим сходимость внутри круга.

Переходим теперь к единственности КМШ – состояния. Идея состоит в получении системы корреляционных уравнений непосредственно из условия КМШ.

В алгебре $\mathfrak{A}^0$ локальных наблюдаемых рассмотрим линейный базис

$$1,\ \sigma_t^i,\ \sigma_{t_1}^{i_1}\sigma_{t_2}^{i_2}, \dots,\ \sigma_{t_1}^{i_1}\dots\sigma_{t_n}^{i_n}, \dots,$$

где $i = 1, 2, 3$ и все $t_1, \dots, t_n$ различны.

Мы получим систему уравнений для чисел $\omega(\sigma_{t_1}^{i_1}\dots\sigma_{t_n}^{i_n})$.

Положим $A_1 = \sigma_{t_1}^j$, $A_2 = \sigma_{t_1}^k \sigma_{t_2}^{i_2}\dots\sigma_{t_n}^{i_n}$, где j, k, i_2 – циклическая перестановка чисел 1,2,3.

Тогда, используя абсолютную сходимость ряда Дайсона-Швингера из (9.5), получим

$$\omega(A_1 A_2) = \omega(A_2 A_1) = \omega\Big(A_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} [H, A_2]^{(n)}\Big) \tag{9.11}$$

или, используя соотношение

$$(\sigma_t^i)^2 = 1, \quad [\sigma_t^j, \sigma_{t'}^k] = 2i\,\delta_{tt'}\sigma_t^\ell , \tag{9.12}$$

где j, k, ℓ – циклическая перестановка индексов 1,2,3, получим

$$\omega(\sigma_{t_1}^{i_1}\sigma_{t_2}^{i_2}\dots\sigma_{t_n}^{i_n}) = \omega\Big(A_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} [H, A_2]^{(n)}\Big) \tag{9.13}$$

Гамильтониан H можно также разложить по выбранному базису, и, таким образом, (9.13) будет системой уравнений для $\omega(\sigma_{t_1}^{i_1}\dots\sigma_{t_n}^{i_n})$.

Задача 9.3. Так же, как в лекциях 3,4, доказать, что эта система уравнений имеет единственное решение для достаточно малых β.

Мы теперь построим модулярный оператор для нашего случая.

Задача 9.4. Так как H самосопряжен, то можно определить самосопряженный оператор $e^{-\frac{\beta}{2}H}$. Пользуясь рядом Дайсона-Швингера, доказать, что при малых β $\pi(A)\Omega \in D(e^{-\frac{\beta}{2}H})$ для всех $A \in \mathfrak{A}$.

Замечание 9.2. Вообще, этот факт является простым следствием определения КМШ-состояний (доказательство см. [II], стр. 372). Поэтому из условия КМШ, переписанного в $ГНС$-представлении, получим для всех $A, B \in \mathfrak{A}$, где $\Delta = e^{-\beta H}$,

$$(\pi(A)\Omega, \Delta\pi(B)\Omega) = (\pi(B^*)\Omega, \pi(A^*)\Omega) \tag{9.14}$$

и для всех $A \in \mathfrak{A}$

$$\| e^{-\frac{\beta}{2}H} \pi(A)\Omega \| = \| \pi(A^*)\Omega \|. \tag{9.15}$$

Теорема 9.3. Оператор Δ, определенный формулой (9.14), является модулярным оператором для пары $(\mathfrak{M}, \Omega)$, где $\mathfrak{M}$ - алгебра фон Неймана в $\mathcal{H}_{ГНС}$, порожденная $\pi(\mathfrak{A})$, причем $\Omega \in \mathcal{H}_{ГНС}$ является циклическим и отделяющим для $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Цикличность следует из определения $ГНС$-представления. Докажем, что $\mathfrak{M}\Omega \subset D(e^{-\frac{\beta}{2}H})$.

Существует последовательность $A_n \in \mathfrak{A}$:

$$\|A_n\| \le \|A\| \quad \text{и} \quad A_n\Omega \to A\Omega.$$

Если $C \in \mathfrak{M}'$, то $(C\Omega, A_n^*\Omega) = (A_n\Omega, C^*\Omega) \to (A\Omega, C^*\Omega) = (C\Omega, A^*\Omega)$. Значит, $A_n^*\Omega \to A^*\Omega$ слабо на плотном множестве. Так как $\|A_n^*\Omega\| \le \|A_n^*\| \le \|A\|$, $A_n^*\Omega \to A^*\Omega$ слабо. Тогда по (9.15) $\| e^{-\frac{\beta}{2}H} A_n\Omega \| = \|A_n^*\Omega\| \le \|A\|$.

Пусть подпоследовательность $e^{-\frac{\beta}{2}H} A_n\Omega \to \Psi$ слабо. Ввиду замкнутости $e^{-\frac{\beta}{2}H}$

$$A\Omega \in D(e^{-\frac{\beta}{2}H}), \quad e^{-\frac{\beta}{2}H} A\Omega = \Psi.$$

10. Евклидов подход к изучению основных состояний

Модель Изинга с непрерывным временем. Термодинамический предельный переход для основных состояний.

Рассмотрим квантовую модель Изинга на $\mathbb{Z}^\nu$, введенную в лекции 8. Гамильтониан в объеме $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ имеет вид

$$H_\Lambda = -\lambda_1 \sum_{\substack{|x-x'|=1\\ x,x' \in \Lambda}} \sigma_x^3 \sigma_{x'}^3 - \lambda_2 \sum_{x\in\Lambda} \sigma_x^1 + \lambda_2 \mathbb{1}. \tag{10.1}$$

Мы будем считать, что матрицы Паули σ_x^1, σ_x^3 действуют в своем двумерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_x$, изоморфном $\mathbb{C}^2$ с базисом $e_x^+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_x^- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ и стандартным скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Если обозначить $\mathcal{H}_\Lambda = \bigotimes_{x\in\Lambda} \mathcal{H}_x$ и считать, что $\sigma^{1,3}$ есть $\sigma_x^{1,3} \otimes \mathbb{1}_{\Lambda-\{x\}}$, то можно считать, что H_Λ действует в $\mathcal{H}_\Lambda$.

Пусть E_Λ - наименьшее собственное значение H_Λ. Ниже мы докажем

Утверждение 1. E_Λ невырождено.

Тогда если ω_Λ - соответствующий E_Λ нормированный собственный вектор, то состояние

$$\langle A \rangle_\Lambda = (\omega_\Lambda, A\omega_\Lambda) \tag{10.2}$$

является основным состоянием на $\mathfrak{A}$ относительно динамики

$$\alpha_t^{(\Lambda)}(A) = e^{itH_\Lambda} A e^{-itH_\Lambda}.$$

Рассмотрим вероятностное пространство Ω_Λ^0, определяемое как множество конфигураций (функций) на $\Lambda \times \{0\}$ со значениями ± 1, с вероятностной мерой μ_0, приписывающей каждой конфигурации вероятность $2^{-|\Lambda|}$. Тогда пространство $L_2(\Omega^0_\Lambda, \mu_0)$ можно отождествить с $\mathcal{H}_\Lambda$, отождествляя $e^\pm_x$ со случайной величиной, равной $\sqrt{2}$ в точке ± 1 соответственно и нулю в другой точке. В этом смысле

$$1 = \frac{e^+_x + e^-_x}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_x = \frac{e^+_x - e^-_x}{\sqrt{2}}.$$

Известно, что

$$H_{0,\Lambda} = \sum_{x\in\Lambda} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_{\Lambda - \{x\}}$$

является инфинитезимальной матрицей марковской полугруппы $\exp(-\tau H_{0,\Lambda})$ и определяет стационарный марковский процесс с непрерывным временем и множеством состояний Ω^0_Λ.

Вероятностным пространством для этого марковского процесса может служить множество Ω функций на $\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{R}$, равных ± 1 и кусочно-постоянных по $\tau \in \mathbb{R}$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{Z}^\nu$. Пусть Σ – стандартная σ-алгебра, μ_0 – соответствующая вероятностная мера, определяющая набор $\sigma_x(\tau)$ взаимно независимых одинаково распределенных цепей Маркова с двумя состояниями, $\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_{\mu_0}$. Рассмотрим $L_2(\Omega, \Sigma, \mu_0)$ и определим в нем следующие операторы:

T_τ – сдвиг на вектор $(0, 0 \ldots, 0, \tau) \in \mathbb{Z}^\nu \times R$ (т.е. $T_\tau \sigma_x(\tau') = \sigma_x(\tau' + \tau)$);

P_τ – ортогональная проекция (условное математическое ожидание) на $L_2(\Omega, \Sigma_\tau, \mu_0)$, где Σ_τ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\sigma_x(\tau)$, $x \in \mathbb{Z}^\nu$. Тогда

$$T_{-\tau} P_\tau P_0 = e^{-\tau H_{0,\Lambda}} \tag{10.3}$$

есть оператор в $\mathcal{H}_\Lambda$, стохастический оператор марковского процесса, "нормированная трансфер-матрица". Очевидно, что случайная величина I инвариантна относительно действия этого оператора.

Утверждение 2.

$$(1, e^{-\tau H_\Lambda} 1) = Z_{\Lambda;(0,\tau)} \stackrel{def}{=} \langle \exp(\int_0^\tau U_\Lambda(\tau) d\tau) \rangle_0 \tag{10.4}$$

где

$$U_\Lambda(\tau) = \lambda_1 \sum_{\substack{x, x' \in \Lambda \\ |x - x'| = 1}} \sigma_x(\tau) \sigma_{x'}(\tau).$$

Доказательство. Воспользовавшись (10.1) и формулой Троттера и обозначая $H_{1,\Lambda} = H_\Lambda - H_{0,\Lambda}$, имеем

$$(1, e^{-\tau(H_0 + H_1)} 1) = \lim_{n\to\infty} (1, [e^{-\frac{\tau H_0}{n}} e^{-\frac{\tau H_1}{n}}]^n 1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1, [T_{-\frac{\tau}{n}} P_{\frac{\tau}{n}} e^{-\frac{\tau H_1}{n}}]^n 1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1, [\prod_{k=1}^n P_{\frac{k\tau}{n}} e^{-\frac{\tau}{n} U_\Lambda(\frac{\tau(k-1)}{n})}] 1) = \tag{10.5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \langle \prod_{k=1}^n \exp(\frac{\tau}{n} U_\Lambda(\frac{k\tau}{n})) \rangle_0 =$$

$$= \langle \exp(\int_0^\tau U_\Lambda(\tau) d\tau) \rangle_0 .$$

Если $\Psi_i \in L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu_0)$, то аналогично (10.5) получим

$$(\Psi_1, e^{-\tau H_\Lambda} \Psi_2) = \langle (T_\tau \Psi_2) \Psi_1 \exp(\int_0^\tau U_\Lambda(\tau) d\tau) \rangle_0, \tag{10.6}$$

и поэтому $e^{-\tau H_\Lambda}$ удовлетворяет условиям теоремы Перрона-Фробениуса. Отсюда следует утверждение I. При этом ω_Λ можно отождествить с положительной случайной величиной в $L_2(\Omega^\circ_\Lambda, \Sigma_\circ, \mu_\circ)$ и можно ввести новую вероятностную меру μ_Λ на Ω°_Λ с плотностью

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu_\circ} = \omega^2_\Lambda . \qquad (10.7)$$

Оказывается, что μ_Λ может быть получена как ограничение гиббсовской меры.

Задача 10.1. Аналогично лемме 2.3 доказать, что мера $\mu_{\Lambda;(-\tau,\tau)}$ на Ω с плотностью

$$\frac{d\mu_{\Lambda;(-\tau,\tau)}}{d\mu_\circ} = \exp\left(\int_{-\tau}^{\tau} U_\Lambda(\tau)d\tau\right) \qquad (10.8)$$

имеет при $\tau\to\infty$ предел $\mu_{\Lambda;(-\infty,\infty)}$ в смысле конечномерных распределений. При этом μ_Λ есть ограничение $\mu_{\Lambda;(-\infty,\infty)}$ на $\Sigma_\circ$. Далее, если $\widehat{H}_\Lambda = H_\Lambda - E_\Lambda$, $(\cdot,\cdot)_\Lambda$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega^\circ_\Lambda, \Sigma_\circ, \mu_\Lambda)$, то

$$(\Psi_1, e^{-\tau\widehat{H}}\Psi_2)_\Lambda = \langle \Psi_1(T_\tau\Psi_2)\rangle_{\mu_{\Lambda;(-\infty,\infty)}} . \quad (10.9)$$

Теорема 10.1. Если $|\lambda_1|$ достаточно мало при фиксированном $\lambda_2>0$, то при $\Lambda\uparrow Z^\nu$ мера $\mu_{\Lambda,(-\infty,\infty)}$ имеет предел μ в смысле конечномерных распределений.

Докажем сначала, что тогда и состояние $\langle A\rangle_\Lambda$ имеет предел при $\Lambda\uparrow Z^\nu$ для всех $A\in\mathfrak{A}_{\Lambda'}$, $\Lambda'\subset\Lambda$.

Пусть, например, $A = e^{+-}_{xy}$, $x,y\in\Lambda'$, т.е.

$$(e^\pm_x, A e^\pm_y) = 1,$$

а остальные матричные элементы A в базисе $e^\pm_x$ равны 0. Тогда

$$\langle A\rangle_\Lambda = (\omega_\Lambda, A\omega_\Lambda) = (\omega_\Lambda, e^\pm_x)(e^\pm_y,\omega_\Lambda) =$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_\Lambda(\sigma_x=\pm1)}{\mu_\circ(\sigma_x=\pm1)}}\sqrt{\frac{\mu_\Lambda(\sigma_y=\pm1)}{\mu_\circ(\sigma_y=\pm1)}} \to 2\sqrt{\mu(\sigma_x=\pm1)\mu(\sigma_y=\pm1)}.$$

(10.10)

Доказательство теоремы. Мы проведем его, пользуясь техникой кластерных разложений. Рассмотрим решетку $T = Z^{\nu+1}_a$ с шагом a, вложенную в $Z^\nu\times R$. Спином в точке $t=(x, an)$, $x\in Z^\nu$, $n\in Z$, будем называть конфигурацию $\{\sigma_x(\tau)\}$ на отрезке $\tau\in[an, a(n+1)]$. Через $A_1,\dots,A_n,A$ мы будем обозначать всевозможные пары точек $\{(x,an),(x',an): |x-x'|=1\}$. Через $B_1,\dots,B_n,B$ – пары точек $\{(x,an),(x,a(n+1))\}$.

Пусть $\xi_{\Lambda,N}=\xi$ – значение $\sigma_x(\tau)$ в точках $t\in\Lambda\times[-Na,Na]\subset Z^{\nu+1}_a$. Пусть $\langle\cdot\rangle_\xi$ – условное математическое ожидание при заданной конфигурации ξ; $\langle\cdot\rangle_\circ$ – среднее по распределению ξ, соответствующих введенному выше семейству независимых (пуассоновских) процессов на системе прямых. Тогда

$$Z_{\Lambda;(-N,N)} = \langle\langle \exp\left(\int_{-N}^{N} U_\Lambda(\tau)d\tau\right)\rangle_\xi\rangle_\circ = \qquad (10.11)$$

$$= \langle\langle \prod_A (1+K_A)\rangle_\xi\rangle_\circ ,$$

где

$$K_A = \exp\left(\lambda_1\int_{an}^{a(n+1)}\sigma_x(\tau)\sigma_{x'}(\tau)d\tau\right) - 1 .$$

Заметим, что значения конфигурации ξ в точках (x фиксировано)

$$(x, -aN),\ (x, -a(N-1)), \dots, (x, aN)$$

образуют цепь Маркова с дискретным временем (эти цепи независимы для разных x). Пусть

$$\begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,-1} \\ P_{-1,1} & P_{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \varepsilon_{11} & \frac{1}{2} + \varepsilon_{1,-1} \\ \frac{1}{2} + \varepsilon_{-1,1} & \frac{1}{2} + \varepsilon_{-1,-1} \end{pmatrix}$$

– матрица переходных вероятностей этой цепи.

Обозначим $\varepsilon_B(\xi) = 2\varepsilon_{\sigma_x(a(n+1)),\ \sigma_x(an)}$.

Тогда

$$Z_{\Lambda,(-N,N)} = \frac{1}{2^{|\Lambda|(2N+1)}} \sum_{\xi} \Big[\prod_B \big(1 + \varepsilon_B(\xi)\big)\Big| \cdot$$

$$\times \Big\langle \prod_A (1 + K_A) \Big\rangle_{\xi} . \tag{10.12}$$

Задача 10.2. Получить отсюда кластерное представление статистической суммы. Заметим, что при достаточно больших a ε_B достаточно малы, а при малых $|\lambda_1|$ K_A достаточно малы. Доказать отсюда кластерную оценку. Закончить доказательство теоремы 10.1.

Задача 10.3. Повторяя рассуждение лекции 7, построить базис $\hat{\sigma}_T = \prod_{x\in T} \hat{\sigma}_x(0)$ и доказать кластерные оценки для "нормированной трансфер-матрицы", $\mathcal{T} = e^{-a\hat{H}_\Lambda}$ для $\tau = a$, определенной в (10.9):

$$(\hat{\sigma}_T, \mathcal{T}\hat{\sigma}_{T'}) = \langle \hat{\sigma}_T\, \hat{\sigma}_{T'+e_a} \rangle = \sum \langle \hat{\sigma}_{A_1}' \rangle \dots \langle \hat{\sigma}_{A_k}' \rangle ,$$

$$e_a = (0, \dots, 0, a) \in \mathbb{Z}_a^{\nu+1} ,$$

$$|\langle \sigma_A' \rangle| \le \lambda^{d_A} , \tag{10.13}$$

где $\lambda \to 0$, если $a \to \infty$, $\lambda_1 = \lambda_1(a) \to 0$.

Оператор $\mathcal{T}$ вида (10.13) называется мультипликативным кластерным.

11. Картина квазичастиц

Одночастичные пространства

Мы знаем, что 1 есть простое собственное значение $\mathcal{T}$. Обозначим через $\mathcal{H}_0$ соответствующее ему одномерное инвариантное подпространство, $\mathcal{H}_0 = \{c\omega\}$, ω – вакуум. Единственность вакуума связана с эргодичностью построенного случайного поля.

Спектр $\mathcal{T}$ априори содержится в $[0,1]$. Обозначим как $\mathcal{L}^{(n)}$ линейное подпространство $\mathcal{H}_{\Phi u_3} = L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$, порожденное всеми $\hat{\sigma}_T$ с $|T| = n$.

Пусть $\mathcal{M}^{(1)}$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{L}^{(1)}$ в $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_0$. В $\mathcal{L}^{(1)} \oplus \mathcal{M}^{(1)}$ оператор $\mathcal{T}$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_{11} & \mathcal{T}_{12} \\ \mathcal{T}_{21} & \mathcal{T}_{22} \end{pmatrix}, \tag{11.1}$$

где $\mathcal{T}_{21} : \mathcal{M}^{(1)} \to \mathcal{L}^{(1)}$; $\mathcal{T}_{11} : \mathcal{L}^{(1)} \to \mathcal{L}^{(1)}$ и т.д.

Лемма 11.1.

$$\|\mathcal{T}_{12}\|, \ \|\mathcal{T}_{21}\|, \ \|\mathcal{T}_{22}\| \le c_1 \lambda^2 , \tag{11.2}$$

$$\mathcal{T}_{11} = c_2 \lambda + \mathcal{T}_{11}' , \tag{11.3}$$

где $\|\mathcal{T}_{11}'\| \le c_3 \lambda^2$. Поэтому $\mathcal{T}_{11}^{-1}$ существует и

$$\|\mathcal{T}_{11}^{-1}\| \le c_4 |\lambda^{-1}| . \tag{11.4}$$

Доказательство. Представление (11.3) тривиально следует из кластерной оценки (10.13).

Доказательство (II.2) следует из оценки матричных элементов:

$$\sum |(\hat{\sigma}_T, \mathcal{T}\hat{\sigma}_{T'})| \leq \begin{cases} (c\lambda)^{\max(k,m)}, & k \neq m, \\ (c\lambda)^{m+1}, & k = m, \end{cases} \qquad (II.5)$$

если $\max(k,m) > 1$, $|T| = m$, C зависит только от ν.

Задача II.I. Доказать (II.2), используя (II.5) (см. [15], стр. 236).

Доказательство (II.5) очень просто для $m=1$ и несколько сложнее для $m \geq 2$ (см. [15], лемма 2.2).

Заметим, что в $\mathcal{H} = L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ определено унитарное представление U_x группы $\mathbb{Z}^\nu$ сдвигов:

$$U_x \hat{\sigma}_T = \hat{\sigma}_{T-x}.$$

Заметим, что U_x коммутирует с унитарной группой временных трансляций $U_\tau = e^{i\tau H} = \mathcal{T}_\tau^{-i}$, $H = -\frac{d\mathcal{T}_\tau}{d\tau}\Big|_{\tau=0}$.

Группы U_x и U_τ играют роль симметрий и временной эволюции для нашей системы.

Определение II.I. Одночастичным подпространством $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}$ назовем подпространство в $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_0$, циклическое относительно U_x (это значит, что существует (циклический) вектор ξ, такой, что U_x порождают все $\mathcal{H}_1$) и инвариантное относительно U_x и U_τ.

Мы сейчас построим одночастичное подпространство в нашем случае. Будем искать $\mathcal{H}_1$ в виде графика $\{\psi + S\psi : \psi \in \mathcal{L}^{(1)}\}$ некоторого оператора $S : \mathcal{L}^{(1)} \to \mathcal{M}^{(1)}$. Основанием для этого служит тот факт, что $\mathcal{L}^{(1)}$ инвариантно относительно U_x и инвариантно относительно $\mathcal{T}$ с точностью до λ^2. Условие $\mathcal{T}\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$ может быть записано в виде уравнения на S:

$$S(\mathcal{T}_{11} + \mathcal{T}_{12} S) = \mathcal{T}_{21} + \mathcal{T}_{22} S \qquad (II.6)$$

или, так как $\mathcal{T}_{11}^{-1}$ существует,

$$S = \mathcal{T}_{21}\mathcal{T}_{11}^{-1} + \mathcal{T}_{22}\mathcal{T}_{11}^{-1} - S\mathcal{T}_{12}S\mathcal{T}_{11}^{-1}. \qquad (II.7)$$

Задача II.2. Доказать, что ввиду леммы II.I уравнение (II.7) разрешимо методом последовательных приближений и определяет поэтому одночастичное подпространство $\mathcal{H}_1$.

Векторы $\hat{\sigma}_x(0) + S\hat{\sigma}_x(0) = \hat{\xi}_x \in \mathcal{H}_1$ неортогональны.

Задача II.3. Найти такие c_x, $x \in \mathbb{Z}^\nu$, что векторы $\xi_x = \sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu} c_{x-y}\hat{\xi}_y$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}_1$. Доказать для этого, что система уравнений $(\xi_0, \xi_x) = \delta_{0x}$ относительно c_x

$$\sum_{y,z} c_{-y} c_{x-z} (\hat{\xi}_y, \hat{\xi}_z) = \delta_{0x} \qquad (II.8)$$

разрешима.

Тогда $U_x \xi_y = \xi_{y-x}$, и после перехода к преобразованию Фурье $\mathcal{H}_1$ окажется изоморфным $L_2(T^\nu)$ на ν-мерном торе T^ν по лебеговой мере. При этом U_x будет действовать как

$$\begin{aligned} U_x(f(k)) &= e^{ikx} f(k), \quad k \in T^\nu, \\ U_\tau(f(k)) &= e^{i\tau E(k)} f(k). \end{aligned} \qquad (II.9)$$

При этом k называется импульсом квазичастицы, $E(k)$ – энергией квазичастицы, а эволюция квазичастицы в $\mathcal{H}^1$ будет происходить как эволюция свободной частицы в обычной квантовой механике, только вместо $L_2(\mathbb{R}^\nu)$ берется $\ell_2(\mathbb{Z}^\nu)$, а вместо лапласиана – некоторый другой инвариантный относительно сдвигов оператор.

Теорема II.I. В $\mathcal{H}$ существует подпространство $\widehat{\mathcal{H}}$, инвариантное относительно U_x, U_τ и такое, что ограничение U_x, U_τ на $\widehat{\mathcal{H}}$ унитарно эквивалентно операторам вторичного квантования $\Gamma(U_x)$, $\Gamma(U_\tau)$ в фазовом пространстве $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}_1)$ над построенным нами одночастичным пространством $\mathcal{H}_1$.

Если других одночастичных пространств нет, то весьма вероятно, что $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Эта гипотеза называется асимптотической полнотой (теории рассеяния) или квазичастичной картиной: наша модель изоморфна бесконечной системе невзаимодействующих квазичастиц.

Доказательство теоремы проводится методами теории рассеяния.

Рассмотрим в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ оператор $\zeta(x)$ умножения на $\xi(x)$. Более общо, введем операторное поле

$$\zeta(x,t) = e^{iHt}\zeta(x)e^{-iHt}$$

(система ограниченных операторов, зависящих от x, t).

Тогда

$$\frac{d}{dt}\zeta(x,0) = [H, \zeta(x)]$$

также будет ограниченным оператором, принадлежащим $\mathfrak{A}$.

Задача II.4. Доказать последнее утверждение. Воспользоваться тем, что

$$\xi(x) = \sum c_T \sigma_T$$

с

$$|c_T| \leq (c\lambda)^{d_{T \cup \{x\}}}. \tag{II.I0}$$

На алгебре $\mathfrak{A}$ рассмотрим основное состояние

$$\langle A \rangle = (\omega, A\omega) \stackrel{def}{=} (\omega, \pi_\omega(A)\omega),$$

определенное посредством (I0.I0).

Лемма II.2. Пусть $A_i(x) = \xi(x)$ или $\frac{d}{dt}\zeta(x,0)$.

Тогда преобразование Фурье для семиинварианта

$$\langle A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n) \rangle$$

равно

$$\delta(k_1 + \ldots + k_n)\, G(k_1, \ldots, k_n), \tag{II.II}$$

где G аналитична на $T^{\nu n}$.

Доказательство. Если все $A_i(x_i) = \xi(x_i)$, то семиинвариант совпадает с семиинвариантом от обычных случайных величин, и этот результат ввиду полученных в конце лекции I0 кластерных оценок следует из (II.I0). Именно:

$$|\langle A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n) \rangle| \leq (c\lambda)^{d_{\{x_1,\ldots,x_n\}}}. \tag{II.I2}$$

Из (II.I2) следует (II.II).

В общем случае доказательство несколько сложнее. Пусть сначала B_i – локальные операторы в $\mathfrak{A}$ – имеют носители X_i соответственно, $|X_i| < \infty$, $X_i \subset \mathbb{Z}^\nu$. Тогда для любого локального B с носителем X из формул (I0.I0) получаем кластерные разложения (извлекая корень из подобных рядов)

$$\langle B \rangle = \sum_{R:\, R \cap X_i = \emptyset} b_R(B) \tag{II.I3}$$

с кластерными оценками

$$|b_R| \leq (c\lambda)^{d_R}. \tag{II.I4}$$

Далее мы воспользуемся одним довольно сложным результатом (теоремой 3.I из [I2]) для формальных семиинвариантов, выводящим равномерную кластерную оценку

$$|\langle B_1, \ldots, B_n \rangle| \leq c^{d_{X_i}} (c\lambda)^{d_{\{X_1,\ldots,X_n\}}} \tag{II.I5}$$

из (II.I3) и (II.I4).

Задача II.4* . Найти простое аналитическое доказательство (II.5).

Далее заметим, что A_i имеет разложение по локальным операторам с оценкой коэффициентов типа (II.10). Отсюда следует (II.12) (см. [12], стр. 44). Лемма доказана.

Заметим, что $E(k)$ аналитична на торе и для всех $\ell \geq 2$ множество T_ℓ критических точек функций

$$E(-k_1-\ldots-k_\ell) \pm E(k_1) \pm \ldots \pm E(k_\ell)$$

есть многообразие размерности, не большей $(\nu-1)\ell-1$.

Теорема II.2. Пусть на торе заданы трижды непрерывно дифференцируемые функции $f_1(k), \ldots, f_n(k)$, такие, что пересечение носителей $f_{i_1}(k_1) \ldots f_{i_\ell}(k_\ell)$ с B_ℓ пусто для всех $\ell \leq n-1$ и всех $i_1, \ldots, i_\ell$.

Тогда существуют сильные пределы:

$$\lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} \left[\prod_{\ell=1}^{n} \xi \left[\widetilde{(f_\ell e^{-itE})} \right] \right] \overset{def}{=}$$

$$= \Phi_{out}(f_1, \ldots, f_n). \qquad \text{(II.16)}$$

Здесь через $\tilde{f}$ обозначено обратное преобразование Фурье функции f, и для любой $f(x)$, $x \in Z^\nu$,

$$\xi(f) = \sum \xi(x) f(x).$$

Доказательство. Положим

$$\Phi(t) = \left[\prod_{\ell=1} B_\ell(t) \right] \omega,$$

где

$$B_\ell(t) = e^{itH} \tilde{\xi}(f_\ell e^{-itE}) e^{itH},$$

$\tilde{\xi}(f_\ell e^{-itE})$ – оператор умножения на $\xi \left[\widetilde{(f_\ell e^{-itE})} \right]$.

Для доказательства сходимости достаточно доказать, что при $t_1 < t_2$

$$\| (\Phi(t_1) - \Phi(t_2)) \omega \| \leq \int_{t_1}^{t_2} \| \frac{d}{dt} \Phi(t) \omega \| dt \xrightarrow[t_1 \to \infty]{} 0$$

равномерно по t_2. Но

$$\| \frac{d}{dt} \Phi(t) \omega \|^2 = \left(\omega, \left[\frac{d}{dt} \prod_{\ell=1}^{n} B_\ell(t) \right]^* \left[\frac{d}{dt} \prod_{\ell=1}^{n} B_\ell(t) \right] \omega \right)$$

$$= \left\langle \left[\prod_{\ell=n}^{1} \hat{B}^*_\ell(t) \right] \left[\prod_{\ell=1}^{n} \hat{B}_\ell(t) \right] \right\rangle, \qquad \text{(II.17)}$$

где $\hat{B} = B$ или $\frac{d}{dt} B$. Разложим последнее выражение по семиинвариантам. Все одноточечные семиинварианты равны нулю. Двухточечные семиинварианты, содержащие хотя бы одну $\frac{d}{dt} B_\ell$, равны нулю, так как при $n=1$ $\Phi(t)$ не зависит от времени.

Мы докажем, что все остальные семиинварианты стремятся к нулю при $t \to \pm\infty$ как $O(|t|^{-3})$:

$$\langle B^*_k(t), B_\ell(t) \rangle = (\omega, B^*_k(t) B_\ell(t) \omega), \qquad \text{(II.18)}$$

откуда следует теорема, так как в любом члене разложения (II.17) по семиинвариантам есть семиинварианты, отличные от (II.18).

Рассмотрим, например,

$$\langle B_{\ell_1}(t), B_{\ell_2}(t) \rangle = \sum_{x_1, x_2} \int dk_1 dk_2 \langle \xi(x_1), \xi(x_2) \rangle \times$$

$$f_{\ell_1}(k_1) e^{i(k_1, x_1)} e^{-itE(k_1)} f_2(k_2) e^{i(k_2, x_2)} e^{-itE(k_2)} \overset{\text{(II.18)}}{=}$$

$$\int dk_1 dk_2 \, \delta(k_1 + k_2) G(k_1, k_2) f_{\ell_1}(k_1) f_{\ell_2}(k_2) \exp(-itE(k_1) -$$

$$itE(k_2)) = \int dk \, G(-k, k) f_{\ell_1}(-k) f_{\ell_2}(k) \exp(-it(E(k) + E(k))).$$

Интегрирование по частям дает искомый результат.

Обозначим через $\mathcal{H}^{(n)}_{out}$ замкнутое подпространство в $\mathcal{H}$, порождаемое построенными в теореме II.2 векторами $\Phi_{out}(f_1, \ldots, f_n)$ при заданном n.

Если заметить, что семиинварианты не зависят от времени, то подобно предыдущему можно доказать, что

$$\left(\Phi_{out}(f_1,\dots,f_n),\ \Phi_{out}(f_1',\dots,f_m')\right)$$

равны нулю, если $n\neq m$, и равны

$$\sum\left(\tilde\xi(f_1),\tilde\xi(f'_{i_1})\right)\dots\left(\tilde\xi(f_n),\tilde\xi(f'_{i_n})\right) \qquad (\text{II.19})$$

если $m=n$, где суммирование по всем подстановкам $\begin{pmatrix}1&\dots&n\\ i_1&\dots&i_n\end{pmatrix}$.

Поэтому $\mathcal H_{out}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathcal H_{out}^{(n)}$ изоморфно фоковскому пространству $\mathcal F_+(\mathcal H_1)$.

Очевидно также, что каждое $\mathcal H^{(n)}_{out}$ инвариантно относительно e^{itH}, причем эта эволюция осуществляется следующим образом:

$$e^{itH}\Phi_{out}(f_1,\dots,f_n)=\Phi_{out}(f_1e^{-itE},\dots,f_ne^{-itE}).$$

Аналогично определяется $\mathcal H_{in}$, также изоморфное $\mathcal F_+(\mathcal H_1)$. Обозначим соответствующие изоморфизмы:

$$\alpha_{out}:\ \mathcal F_+(\mathcal H_1)\to\mathcal H_{out},$$

$$\alpha_{in}:\ \mathcal F_+(\mathcal H_1)\to\mathcal H_{in}.$$

Если выполнена гипотеза асимптотической полноты

$$\mathcal H_{out}=\mathcal H_{in}=\mathcal H,$$

то можно определить матрицу рассеяния как

$$S=\alpha_{out}^{-1}\alpha_{in}.$$

Если существует несколько одночастичных подпространств $\mathcal H_1^{(k)}$, то гипотеза асимптотической полноты формулируется как изоморфизм $\mathcal H$ и $\bigoplus_k\mathcal F_+(\mathcal H_1^{(k)})$.

В случае КМШ-состояний с $\beta<\infty$ говорить о гипотезе квазичастичной картины пока следует с осторожностью.

ДОПОЛНЕНИЯ

I. Семиинварианты

Для случайной величины $\xi=\xi(\omega)$, заданной на вероятностном пространстве (Ω,Σ,μ), мы обозначаем:

$$\langle\xi\rangle=\langle\xi\rangle_\mu\overset{def}{=}M\xi=\int_\Omega\xi\,d\mu.$$

Пусть дана система случайных величин $\{\xi_i\}$, $i\in\mathcal N=\{1,\dots,n\}$. Для любого непустого $T\subset\mathcal N$ обозначим

$$\xi_T=\prod_{i\in T}\xi_i,\quad \xi'_T=\{\xi_i: i\in T\},$$

т.е. ξ'_T есть подсистема системы $\{\xi_i\}$, $i\in\mathcal N$.

Разбиением $\alpha=\{T_1,\dots,T_p\}$ конечного множества $\mathcal N$ назовем неупорядоченный набор взаимно непересекающихся подмножеств (блоков) $T_i\subset\mathcal N$, дающих при объединении все $\mathcal N$. Разбиение 0 есть разбиение на точки, разбиение 1 состоит из одного блока $\mathcal N$. Разбиение δ называется верхней гранью разбиений α и β, если каждый блок α и β содержится целиком в некотором блоке δ. Среди верхних граней существует наименьшая, обозначаемая $\alpha\vee\beta$ (подробнее о структуре разбиений см. [12]).

Функция

$$\langle e^{\lambda_1\xi_1+\dots+\lambda_n\xi_n}\rangle=f(\lambda_1,\dots,\lambda_n),$$

определенная для чисто мнимых λ_j, называется производящей функцией моментов (она совпадает с характеристической функцией от вещественных переменных t_j, если положить $\lambda_j=it_j$). Если все моменты $\langle\xi_j^n\rangle$ существуют, то $f(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ бесконечно дифференцируема в точке $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$ и наоборот.

Поэтому можно записать формальный ряд Тейлора по $\lambda_1,\dots,\lambda_n$:

$$\langle e^{\lambda_1\xi_1+\dots+\lambda_n\xi_n}\rangle=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}\langle(\lambda_1\xi_1+\dots+\lambda_n\xi_n)^s\rangle. \qquad (\text{I.1})$$

Семиинвариантом случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ называется число

$$\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle \overset{def}{=} \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \ln \langle e^{\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n} \rangle \Big|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0} \qquad (1.2)$$

Мы будем применять также обозначение $\langle \xi_T^{,} \rangle$ для семиинварианта случайных величин ξ_i, $i \in T$. Систему из s экземпляров случайной величины ξ обозначим $\xi^{,s}$.

Функция $\ln f$ называется производящей функцией семиинвариантов. Мы предполагаем далее, что все моменты существуют.

Элементарные свойства семиинвариантов

1.1.

$$\langle \xi_1^{,k_1}, \dots, \xi_n^{,k_n} \rangle = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial \lambda_1^{k_1} \dots \partial \lambda_n^{k_n}} \ln \langle e^{\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n} \rangle \Big|_{\lambda_j = 0}$$

Для доказательства надо положить $\lambda_i = \lambda_{i1} + \dots + \lambda_{ik_i}$, воспользоваться определением

$$\langle \xi_1^{,k_1}, \dots, \xi_n^{,k_n} \rangle = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial \lambda_{11} \dots \partial \lambda_{1k_1} \dots \partial \lambda_{n1} \dots \partial \lambda_{nk_n}} \ln \langle e^{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{ij} \xi_i} \rangle \Big|_{\lambda_{ij} = 0},$$

а также тем, что $\dfrac{\partial^{k_i}}{\partial \lambda_i^{k_i}} = \dfrac{\partial^{k_i}}{\partial \lambda_{i1} \dots \partial \lambda_{ik_i}}$.

1.2. Симметричность и полилинейность

$$\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle = \langle \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n} \rangle$$

для любой подстановки $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}$;

$$\langle a\xi_1 + a'\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n \rangle = a \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle + a' \langle \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n \rangle.$$

Симметричность очевидна, а полилинейность выводится как 1.1.

1.3. Если $\mathcal{N}$ можно разбить на два непересекающихся подмножества $A \cup B = \mathcal{N}$ и система $\{\xi_i\}_{i \in A}$ независима от системы $\{\xi_j\}_{j \in B}$, то $\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle = 0$.

Доказательство.

$$\ln \langle e^{\lambda \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n} \rangle = \ln \langle e^{\sum_{i \in A} \lambda_i \xi_i} \rangle + \ln \langle e^{\sum_{i \in B} \lambda_i \xi_i} \rangle,$$

и, применяя определение, получаем результат. В частности, если хотя бы одна $\xi_j = const$, то семиинвариант равен нулю. Это утверждение иллюстрирует характер семиинварианта как меры зависимости случайных величин.

Приведем аксиоматическую характеризацию семиинвариантов, принадлежащую Перкусу.

Лемма 1.1. Если выполнено свойство 1.3 и функции $\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ представляются в виде

$$\sum_{\alpha = \{T_1, \dots, T_k\}} d(\alpha) \langle \xi_{T_1}^{,} \rangle \dots \langle \xi_{T_k}^{,} \rangle$$

с $d(1) = 1$, то $d(\alpha) = (-1)^{k-1}(k-1)!$, т.е. они совпадают с семиинвариантами.

Доказательство. Рассмотрим некоторое разбиение $\beta = (A_1, \dots, A_p)$, и пусть системы $(\xi_i)_{i \in A}$ независимы. Тогда отличными от нуля могут быть только $\langle \xi_T^{,} \rangle$, где T полностью содержится в одном из блоков разбиения β. Поэтому $d(\beta)$ допускают индуктивное вычисление.

1.4. Выражение моментов через семиинварианты

$$\langle \xi_{\mathcal{N}_n} \rangle = \sum_{\alpha} \langle \xi_{T_1}^{,} \rangle \dots \langle \xi_{T_k}^{,} \rangle, \qquad (1.3)$$

где сумма берется по всем разбиениям $\alpha = \{T_1, \dots, T_k\}$ множества $\mathcal{N}$.

Доказательство. Нам надо вычислить коэффициент при $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ формального ряда Тейлора для $\langle e^{\lambda_1\xi_1+\ldots+\lambda_n\xi_n}\rangle$. С одной стороны, это есть левая часть формулы (I.3). С другой стороны, обозначая $\xi = \lambda_1\xi_1+\ldots+\lambda_n\xi_n$, имеем

$$\langle e^{\xi}\rangle = e^{\ln\langle e^{\xi}\rangle} = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\langle\xi^{,s}\rangle\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\langle\xi^{,s}\rangle\right)^{k}.$$

Фиксируем k и вычислим коэффициент при $\lambda_1\cdots\lambda_n$. Нетрудно видеть, что это есть сумма по всем разбиениям с k блоками:

$$\langle\xi'_{T_1}\rangle\ldots\langle\xi'_{T_k}\rangle.$$

I.5. Выражения семиинвариантов через моменты

$$\langle\xi'_{\mathcal{N}_n}\rangle = \sum_{\alpha}(-1)^{k-1}(k-1)!\,\langle\xi_{T_1}\rangle\ldots\langle\xi_{T_k}\rangle, \qquad (I.4)$$

где сумма так же, как и в (I.3), — по всем разбиениям α. Доказательство можно провести так же, как и для формулы (I.3), или воспользоваться формулой обращения Мебиуса [12].

I.6. Система случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ является гауссовой тогда и только тогда, когда

$$\langle\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_s}\rangle = 0, \quad s > 2,$$

для произвольных $i_1,\ldots,i_s \in \mathcal{N}$.
Это свойство следует из определения гауссовой системы.

I.7. Обобщенное разложение по связным группам

Для любого разбиения $\alpha = \{T_1,\ldots,T_k\}$ множества $\mathcal{N}_n$ имеет место

$$\langle\xi_{T_1},\ldots,\xi_{T_k}\rangle = \sum_{\beta:\,\alpha\vee\beta=1}\langle\xi'_{Q_1}\rangle\ldots\langle\xi'_{Q_m}\rangle, \qquad (I.5)$$

где сумма по всем разбиениям $\beta = \{Q_1,\ldots,Q_m\}$, таким, что $\alpha\vee\beta = 1$.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $|T_1| = \ldots = |T_{k-1}| = 1$, $|T_k| = 2$. Иначе говоря, докажем сначала, что для всех средних

$$\langle\xi_1,\ldots,\xi_{n-2},\xi_{n-1}\xi_n\rangle = \langle\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},\xi_n\rangle +$$

$$+ \sum_{T\subset\mathcal{N}_{n-2}}\langle\xi_{n-1},\xi'_T\rangle\langle\xi_n,\xi'_{\mathcal{N}_{n-2}-T}\rangle. \qquad (I.6)$$

Из (I.6) формула (I.5) легко следует по индукции.
Для доказательства (I.6) разложим согласно свойству I.4:

$$\langle\xi_1\ldots\xi_n\rangle = \sum\langle\xi'_{A_1}\rangle\ldots\langle\xi'_{A_k}\rangle, \qquad (I.7)$$

$$\langle f_1\cdots f_{n-1}\rangle = \sum\langle f'_{B_1}\rangle\ldots\langle f'_{B_k}\rangle,$$

где мы положили $f_1 = \xi_1,\ldots,f_{n-2} = \xi_{n-2}$, $f_{n-1} = \xi_{n-1}\xi_n$.
Приравняем правые части (I.7). Имеем

$$\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle + \sum_{k\ge2}\langle\xi'_{A_1}\rangle\ldots\langle\xi'_{A_k}\rangle =$$

$$= \langle f_1,\ldots,f_{n-1}\rangle + \sum_{k\ge2}\langle f'_{B_1}\rangle\ldots\langle f'_{B_k}\rangle.$$

Докажем (I.7) с помощью индукции по n. Пусть, например, f_{n-1} входит в систему f'_{B_k}. Разложим тогда $\langle f'_{B_k}\rangle$ согласно индуктивному предположению по формуле (I.7). Тогда

$$\sum_{k\ge2}\langle\xi'_{A_1}\rangle\ldots\langle\xi'_{A_k}\rangle - \sum_{k\ge2}\langle f'_{B_1}\rangle\ldots\langle f'_{B_k}\rangle =$$

$$= \sum_{T\subset\mathcal{N}_{n-2}}\langle\xi_{n-1},\xi'_T\rangle\langle\xi_n,\xi'_{\mathcal{N}_{n-2}-T}\rangle.$$

Из двух последних формул следует (I.6).

1.8. Неравенства Коши. Если $\langle e^{\lambda_1 \xi_1 + \ldots + \lambda_n \xi_n} \rangle$ аналитична и не обращается в нуль в замкнутом поликруге $|\lambda_1| \le r_1, \ldots, |\lambda_n| \le r_n$ с остовом Γ, то

$$|\langle \xi_1^{k_1}, \ldots, \xi_n^{k_n} \rangle| \le k_1! \ldots k_n! \frac{C}{r_1^{k_1} \ldots r_n^{k_n}},$$

где

$$C = \sup_{\Gamma} |\ln \langle e^{\lambda_1 \xi_1 + \ldots + \lambda_n \xi_n} \rangle|.$$

Это свойство есть перефразировка неравенств Коши.

Замечание I. Если n фиксировано, а $k_1, \ldots, k_n$ стремятся к бесконечности, то стандартные методы асимптотического анализа и теории функции комплексных переменных позволяют часто получить точные асимптотические оценки $\langle \xi_1^{k_1}, \ldots, \xi_n^{k_n} \rangle$.

При изучении случайных полей основной интерес представляет случай $n \to \infty$.

I.9. Формальные семиинварианты. Пусть каждому $T \subset \mathcal{N}$ сопоставлено число f_T. Эти числа будем называть моментами (некоторого "виртуального" поля).

Определим семиинварианты g_B индуктивной формулой

$$f_T = \sum g_{B_1} \ldots g_{B_k}, \qquad (1.8)$$

где сумма по всем разбиениям $\{B_1, \ldots, B_k\}$ множества T. Легко видеть, что из (I.8) g_B определяются однозначно. Числа g_B удовлетворяют многим свойствам обычных семиинвариантов, например, I.5 и I.7.

Нам понадобится свойство I.3, которое мы сейчас надлежащим образом переформулируем. Пусть $\mathcal{N}$ является множеством вершин некоторого графа G. Обозначим: G_A, $A \subset \mathcal{N}$,– подграф графа G, натянутый

на множество A вершин. Назовем G_B компонентой G_A, если $B \subset A$ и если между B и $A - B$ нет ребер.

Виртуальное поле f_A назовем независимым относительно G, если для всякого $A \subset N$ и всех разбиений $\{A_1, A_2\}$ множества A, таких, что G_{A_i} есть компонента G_A, имеет место $f_A = f_{A_1} \cdot f_{A_2}$.

Лемма I.2. Если G не связан и виртуальное поле f_A независимо относительно G, то $g(\mathcal{N}) = 0$.

Доказательство. Имеем из (8)

$$g_{\mathcal{N}} = f_{\mathcal{N}} - \sum g_{B_1} \ldots g_{B_k} =$$

$$= f_{\mathcal{N}} - \sum_{\alpha}{}' - \sum_{\alpha}{}''. \qquad (1.9)$$

Пусть $\xi = \{A_1, A_2\}$ – разбиение $\mathcal{N}$, такое, что G_{A_1} и G_{A_2} являются компонентами $G = G_{\mathcal{N}}$. В правой части (I.9) в $\sum_{\alpha}{}'$ – суммирование по всем $\alpha < \xi$, а в $\sum_{\alpha}{}''$ – по всем остальным $\alpha \ne 1$.

Будем доказывать лемму индукцией по n. Все члены в $\sum_{\alpha}{}''$ равны по индуктивному предположению. В то же время согласно (I.8)

$$\sum_{\alpha}{}' = f_{A_1} f_{A_2} = f_{\mathcal{N}}.$$

Отсюда и следует лемма.

Семиинварианты на ассоциативной алгебре с I

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольная ассоциативная некоммутативная алгебра с I (над C). Пусть на $\mathfrak{A}$ задан линейный функционал $\langle \cdot \rangle$ со свойством $\langle 1 \rangle = 1$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathfrak{A}$. Для любого упорядоченного набора $T = (i_1, \ldots, i_k)$, $i_1 < \ldots < i_k$ (мы будем писать $T < \mathcal{N} = (1, \ldots, n)$, если $T \subset \mathcal{N}$ как подмножество), обозначим

$$\xi_T = \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}.$$

Мы определим семиинварианты

$$\langle \xi'_I \rangle \equiv \langle \xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k} \rangle$$

по индукции формулой

$$\langle \xi_N \rangle = \sum_{\alpha} \langle \xi'_{T_1} \rangle \ldots \langle \xi'_{T_m} \rangle, \tag{I.10}$$

где сумма-по всем α, $T_1 \cup \ldots \cup T_m = N$

(T_i - упорядоченные в порядке возрастания наборы).

Задача I.I. Доказать формулу обращения

$$\langle \xi'_N \rangle = \sum \langle \xi_{T_1} \rangle \ldots \langle \xi_{T_m} \rangle (-1)^{m-1} (m-1)! \tag{I.11}$$

Поэтому семиинварианты являются полилинейными (но в общем случае несимметрическими) функциями от ξ_i .

I.10. Имеет место формальный ряд $(\lambda_i \in \mathbb{C})$

$$\ln \langle e^{\lambda_1 \xi_1 + \ldots + \lambda_n \xi_n} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{m} \ldots \sum_{i_k=1}^{m},$$

$$\lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k} \langle \xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k} \rangle . \tag{I.12}$$

Доказательство. Так же,как в коммутативном случае, имеем для $\xi \in \mathfrak{A}$

$$\ln \langle e^{\xi} \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \langle \xi, \ldots, \xi \rangle .$$

Подставляя в эту формулу $\xi = \lambda_1 \xi_1 + \ldots + \lambda_n \xi_n$ и используя полилинейность,получаем (I.12).

Заметим, что правая часть (I.12) зависит фактически от так называемых симметризованных семиинвариантов, т.е.

$$\ln \langle e^{\lambda_1 \xi_1 + \ldots + \lambda_n \xi_n} \rangle = \sum_{m_1, \ldots, m_n} \frac{\lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} \langle \xi_1^{, m_1}, \ldots, \xi_n^{, m_n} \rangle^S ,$$

$m_1 + \ldots + m_n \geq 1$, $m_i \geq 0$, и для любых $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathfrak{A}$

$$\langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle^S = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \langle \xi_{\pi(1)}, \ldots, \xi_{\pi(n)} \rangle ,$$

где сумма-по всем подстановкам $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \pi(1) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$.

Задача I.2. Доказать, что обобщенное разложение по связным группам I.7 сохраняется в некоммутативном случае.

Замечание I.2. На алгебре КАС возможно другое, "антисимметризованное", определение семиинвариантов.

П. Операторные алгебры

Пусть $\mathcal{H}$ - комплексное гильбертово пространство, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ - алгебра всех линейных ограниченных операторов в нем, A^* означает сопряженный оператор к оператору $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Хорошо известно, что

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda A_2)^* = \bar{\lambda}_1 A_1^* + \bar{\lambda}_2 A_2^* ,$$

$$(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^* , \quad (A^*)^* = A . \tag{П.1}$$

Задача I. Доказать, что

$$\| A^2 \| \leq \| A^* A \| . \tag{П.2}$$

Вывести из (2), что

$$\| A \| = \| A^* \| , \quad \| A A^* \| = \| A \|^2 . \tag{П.3}$$

Определение I. Алгеброй с инволюцией называется алгебра (над $\mathbb{C}$), в которой введена операция $A \to A^*$ (инволюция), удовлетворяющая свойствам (П.I).

C^*-алгеброй называется банахова алгебра с инволюцией, в которой выполнено свойство (П.2) (или второе свойство (П.3)).

Таким образом, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и любая её замкнутая по норме

$*$-подалгебра (т.е. замкнутая относительно инволюции) есть C^*-алгебра.

Определение 2. Морфизмом (отображением) π C^*-алгебры $\mathfrak{A}_1$ в C^*-алгебру $\mathfrak{A}_2$ называется линейное отображение $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{A}_2$, сохраняющее умножение и инволюцию.

Утверждение 1. Для любого морфизма π и любого $A \in \mathfrak{A}_1$

$$\|\pi(A)\| \leq \|A\|$$

Доказательство см. [D, стр. 18].

Утверждение 2. Пусть $\mathfrak{A}$ – C^*-алгебра, I -двусторонний замкнутый идеал в $\mathfrak{A}$; тогда I замкнут относительно инволюции, и алгебра $\mathfrak{A}/I$ с нормой, строящейся как норма в фактор-пространстве банахова пространства, является C^*-алгеброй.

Если π -морфизм $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{A}_2$, то $Ker\,\pi$ есть замкнутый двусторонний идеал в $\mathfrak{A}_1$, а $Im\,\pi$ замкнут и есть C^*- подалгебра $\mathfrak{A}^2$, изоморфная $\mathfrak{A}_1/Ker\,\pi$.

Утверждение 3. Любая C^*-алгебра изоморфна некоторой C^*-подалгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Доказательство см. [D].

Элемент A C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ называется эрмитовым (самосопряженным, вещественным), если $A = A^*$; проектором, если $A = A^*$ и $A^2 = A$; унитарным, если $AA^* = A^*A = 1$.

Утверждение 4. Любая коммутативная C^*-алгебра с 1 изоморфна C^*-алгебре $C(X)$ всех непрерывных функций на некотором компакте X.

Любая коммутативная алгебра C^*-алгебры изоморфна алгебре $C_0(X)$ всех непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности, на некотором локально компактном пространстве X.

Доказательство см. [D].

[D] – Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления. "Наука", М., 1974.

Утверждение 5. Если C^*- алгебра $\mathfrak{A}$ с 1 принадлежит $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $A \in \mathfrak{A}$ обратим в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, то он обратим в $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Оператор AA^* самосопряжен и обратим в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, поэтому существует $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, такой, что $AA^*T = 1$. Из утверждения 4 следует, что T принадлежит коммутативной C^*--подалгебре, порожденной AA^*, и, значит, $T \in \mathfrak{A}$. Аналогично, существует $T' \in \mathfrak{A}$, такой, что $T'AA^* = 1$. Но тогда $T = T'$.

Спектром $Sp\,A$ элемента A алгебры $\mathfrak{A}$ с 1 называется множество $\lambda \in \mathbb{C}$, такое, что $A - \lambda \cdot 1$ необратим в $\mathfrak{A}$.

Утверждение-определение 6. Эрмитов элемент $A \in \mathfrak{A}$ называется положительным, если выполнены следующие эквивалентные условия:

1) $Sp\,A \geq 0$, т.е. $Sp\,A \subset [0, \infty)$;

2) $A = B^*B$ для некоторого $B \in \mathfrak{A}$;

3) $A = B^2$ для некоторого эрмитова $B \in \mathfrak{A}$;

4) для некоторого (любого) точного $(Ker\,\pi = 0)$ представления $\pi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $(x, Ax) \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$.

Доказательство [D, стр. 24].

Множество положительных элементов образует замкнутый конус $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathfrak{A})$

Определение 3. Состоянием на $\mathfrak{A}$ называется линейный положительный (т.е. неотрицательный на $\mathcal{P}(\mathfrak{A})$) функционал $\langle \cdot \rangle$ на $\mathfrak{A}$, такой, что $\langle 1 \rangle = 1$.

Утверждение 7. Состояние является непрерывной линейной формой на $\mathfrak{A}$, и его норма равна 1. И наоборот, для непрерывной линейной формы $\langle \cdot \rangle$ ее норма равна $\langle 1 \rangle$.

Доказательство см. [D, стр. 34, 37].

Утверждение 8. Множество всех состояний $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'(\mathfrak{A})$ на $\mathfrak{A}$ является выпуклым слабо*-компактным подмножеством банахова пространства $\mathfrak{A}'$, сопряженного к $\mathfrak{A}$.

Доказательство [D, стр. 50].

Крайние точки $\mathcal{P}'$ называются чистыми состояниями.

Утверждение-определение 9. Представление π C^*-алгебры в гильбертово пространство $\mathcal{H}$ (т.е. морфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$) называется неприводимым, если выполнены два эквивалентных (см. [D,2.3.1 и 2.8.4]) утверждения.

I. Топологическая неприводимость:

если $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $[C, \pi(A)] = 0$ для всех $A \in \mathfrak{A}$, то $C = \lambda \mathbb{1}$.

2. Алгебраическая неприводимость: в $\mathcal{H}$ нет нетривиальных инвариантных относительно $\pi(\mathfrak{A})$-подпространств.

3. Замыкание $\pi(\mathfrak{A})$ в слабой топологии совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

4. Любой вектор $\mathcal{H}$ является тотализирующим (циклическим) для $\pi(\mathfrak{A})$.

Представление π называется циклическим с циклическим вектором $\Omega \in \mathcal{H}$, если $\pi(\mathfrak{A})\Omega$ плотно в $\mathcal{H}$.

Утверждение IO

ГНС – конструкция (представление). Пусть $\rho(\cdot) = \langle \cdot \rangle$ – состояние на C^*- алгебре $\mathfrak{A}$. Введем в $\mathfrak{A}$ предскалярное произведение (неотрицательно определенное)

$$(A, B) = \langle B^* A \rangle.$$

Множество $\mathcal{N} = \{ A : \langle A^* A \rangle = 0 \}$ есть левый идеал в $\mathfrak{A}$, что следует из неравенства Шварца

$$|(A, B)|^2 \leq (A, A)(B, B)$$

и неравенства

$$| \langle B^* A B \rangle | \leq \| A \| \langle B^* B \rangle,$$

которое, в свою очередь, следует из положительности формы $f(A) = \langle B^* A B \rangle$ и утверждения 7.

Тогда $\mathfrak{A}/\mathcal{N}$ есть предгильбертово пространство; обозначим через $\mathcal{H}_{ГНС} = \mathcal{H}_\rho$ его пополнение. Если $A \in \mathfrak{A}$, то через $[A]$ обозначим соответствующий смежный класс $\mathfrak{A}/\mathcal{N}$; в частности $\Omega = [1]$.

ГНС- представление π_ρ алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{H}_{ГНС}$ определим формулой

$$\pi_\rho(A)[B] = [AB].$$

Это определение корректно, ибо $\mathcal{N}$ есть левый идеал. Цикличность π_ρ очевидна.

Утверждение II. Состояние ρ – чистое тогда и только тогда, когда ГНС -представление π_ρ неприводимо.

Определение 4 (прямые произведения)

Если $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, - система C^*-алгебр, то их прямым (декартовым) произведением $\mathfrak{A} = \times_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ называется множество наборов

$$A = (\{A_i\} : A_i \in \mathfrak{A}_i, \ i \in I),$$

таких, что норма

$$\| A \| = \sup_i \| A_i \| < \infty,$$

при этом сложение, умножение и инволюция покомпонентны.

Определение 5 (тензорные произведения)

Если $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ - некоторые линейные пространства функций на множествах Ω' и Ω'' соответственно, то их (алгебраическим) тензорным произведением $\mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{A}''$ называется линейное пространство функций на $\Omega' \times \Omega''$, порожденное произведениями $A'(\omega')A''(\omega'')$, $A' \in \mathfrak{A}'$, $A'' \in \mathfrak{A}''$. $A'A''$ обозначается также через $A' \otimes A''$ и удовлетворяет таким образом свойствам полилинейности:

$$c(A' \otimes A'') = (cA') \otimes A'' = A' \otimes (cA''),$$

$$(A' + B') \otimes A'' = A' \otimes A'' + B' \otimes A'', \quad A' \otimes (A'' + B'') = A' \otimes A'' + A' \otimes B''.$$

Так как любое линейное пространство может быть представлено как пространство функций, то тензорное произведение определено для любых линейных пространств. Нетрудно доказать независимость этого определения от представления.

Если в $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ заданы скалярные произведения, то в $\mathfrak{A}'\otimes\mathfrak{A}''$ существует скалярное произведение, однозначно определяемое соотношением

$$(A'\otimes A'',\ B'\otimes B'') = (A',B')(A'',B'')$$

(доказать это, воспользовавшись полилинейностью).

Тензорным произведением гильбертовых пространств называется пополнение их алгебраического тензорного произведения по введенному выше скалярному произведению.

Пусть $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ – C^*– алгебры. Существует много различных неэквивалентных способов введения нормы в их алгебраическом тензорном произведении. Мы будем пользоваться только следующим.

Пусть $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H}''$ – гильбертовы пространства и $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ вложены в $\mathcal{B}(\mathcal{H}')$ и в $\mathcal{B}(\mathcal{H}'')$ соответственно.

Для любых $A'\in\mathfrak{A}'$, $A''\in\mathfrak{A}''$ определим $A'\otimes A''$ как оператор в $\mathcal{H}'\otimes\mathcal{H}''$, однозначно определенный формулой

$$(A'\otimes A'')(x'\otimes x'') = (A'x')\otimes(A''x''),$$
$$x'\in\mathcal{H}',\quad x''\in\mathcal{H}''.$$

C^*– алгебра, порожденная всеми $A'\otimes A''$, называется C^*-тензорным произведением $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ (и обозначается $\mathfrak{A}'\otimes\mathfrak{A}''$). Нетрудно доказать независимость этого определения от выбора $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$ и вложений.

Определение 6. Алгеброй фон Неймана в $\mathcal{H}$ называется $*$-подалгебра $\mathfrak{M}\subset\mathcal{B}(\mathcal{H})$, замкнутая в слабой топологии $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Через

$\mathfrak{M}'$ обозначается коммутант $\{A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}) : AM=MA$ для всех $M\in\mathfrak{M}\}$.

Алгебры фон Неймана – более узкий класс, чем C^*-алгебры [8]. Грубо говоря, они ликвидируют топологические тонкости строения C^*-алгебр. Например, если X -компакт, μ -конечная положительная мера на X, то слабое замыкание $C(X)$ в $L_2(X,d\mu)$ есть алгебра всех измеримых функций $f(x)$ с конечной нормой $\|f\| = \operatorname{ess\,sup}|f(x)|$.

Теория Томиты-Такесаки (см. [8])

Пусть $\mathfrak{M}$ – алгебра фон Неймана, действующая в $\mathcal{H}$ (сепарабельном), и пусть задан вектор $\Omega\in\mathcal{H}$, являющийся циклическим и отделяющим (т.е. если $A\Omega\neq 0$ для всех $A\in\mathfrak{M}$). Тогда Ω является циклическим и отделяющим для $\mathfrak{M}'$.

Рассмотрим два антилинейных оператора

$$S_0(A\Omega) = A^*\Omega,\quad A\in\mathfrak{M},\qquad F_0(B\Omega)=B^*\Omega,\quad B\in\mathfrak{M}',$$

определенных на всюду плотных множествах $\mathfrak{M}\Omega$ и $\mathfrak{M}'\Omega$ соответственно.

Утверждение 12. S_0 и F_0 замыкаемы, и

$$S_0^* = \overline{F_0} \overset{def}{=} F,\qquad F_0^* = \overline{S_0} \overset{def}{=} S.$$

Пусть Δ – единственный положительный самосопряженный оператор и J – единственный антиунитарный оператор, связанные с S полярным разложением $S = J\Delta^{\frac12}$.

Теорема 1. Имеют место соотношения

$$\Delta = FS,\quad \Delta^{-1}=SF,\quad S=J\Delta^{\frac12},\quad F=J\Delta^{-\frac12},$$
$$J=J^*,\quad J^2=1,\quad \Delta^{-\frac12}=J\Delta^{\frac12}J,$$
$$J\mathfrak{M}J=\mathfrak{M}',\qquad \Delta^{it}\mathfrak{M}\Delta^{-it}=\mathfrak{M},$$

Δ называется модулярным оператором, связанным с парой $(\mathfrak{M}, \Omega)$, $\Delta^{it}(\cdot)\Delta^{-it}$ – модулярной группой автоморфизмов.

Пространство Фока

Пусть $\mathcal{H}_1$ – комплексное гильбертово пространство. Введем пространство (называемое n -частичным)

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{H} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H} \; n \text{ раз}, \qquad \mathcal{H}_0 = \mathbb{C},$$

и назовем гильбертово пространство $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{H}_1) = \widetilde{\bigoplus_{n=0}^{\infty}} \mathcal{H}_n$ пространством Фока. Положим

$$P_+(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} f_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes f_{\pi(n)}, \tag{П.4}$$

$$P_-(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} (-1)^{|\pi|} f_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes f_{\pi(n)},$$

где сумма по всем перестановкам π, $|\pi|$ – четность π.
По линейности $P_\pm$ замыканием продолжаются до самосопряженных проекторов на $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$.

$P_\pm \mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ называются симметрическим (бозонным) и антисимметрическим (фермионным) пространством Фока соответственно.

Для любого $f \in \mathcal{H}_1$ определим операторы рождения-уничтожения в $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$:

$$\begin{aligned} &a(f)\psi_0 = 0, \quad a^*(f)\psi_0 = f \in \mathcal{H}_1, \quad \psi\psi_0 \in \mathcal{H}_0, \\ &a(f)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \sqrt{n}\,(f, f_1)\, f_2 \otimes \ldots \otimes f_n, \\ &a^*(f)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \sqrt{n+1}\; f \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_n, \end{aligned} \tag{П.5}$$

со всюду плотной областью определения $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}$, состоящей из векторов $(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots)$, $\psi_k \in \mathcal{H}_k$.
Тогда на $\mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}_1)$ определены операторы

$$a_\pm(f) \overset{def}{=} P_\pm a(f) P_\pm = a(f) P_\pm, \quad a_\pm^*(f) \overset{def}{=} P_\pm a^*(f) P_\pm = a^*(f) P_\pm. \tag{П.6}$$

Задача I. На $\mathcal{F}^0$

$$(a^*(f)\varphi, \psi) = (\varphi, a(f)\psi).$$

Задача 2. $a_-(f)$ ограничен.

Задача 3. Имеют место канонические коммутационные соотношения (ККС) на $\mathcal{F}_0$:

$$\begin{aligned} &[a_+(f), a_+(g)] = 0 = [a_+^*(f), a_+^*(g)], \\ &[a_+(f), a^*(g)] = (f, g)1, \end{aligned} \tag{П.7}$$

и канонические антикоммутационные соотношения (КАС) с заменой коммутаторов на антикоммутаторы.

Если в $\mathcal{H}_1$ задан унитарный оператор U, то унитарный оператор $\Gamma(U)$ в $\mathcal{F}$, единственным образом определяемый следующим соотношением

$$\Gamma(U)(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = (Uf_1) \otimes \ldots \otimes (Uf_n),$$

называется вторичным квантованием U.

Заметим, что $\Gamma(U)$ оставляет $\mathcal{F}_+$ и $\mathcal{F}_-$ инвариантными.

Если известно спектральное разложение U, то спектральное разложение $\Gamma(U)$ легко строится.

Если эволюция свободной частицы описывается унитарной группой U_t, то эволюция бесконечной системы тождественных невзаимодействующих частиц в основном состоянии описывается группой $\Gamma(U_t)$ в пространстве Фока $\mathcal{F}_\pm$, а в температурном (КМШ) состоянии – в $\mathcal{F}_\pm \otimes \mathcal{F}^*$ (где $\mathcal{F}^*$ – сопряженное и $\mathcal{F}$ – гильбертово пространство, а скалярное произведение заменяется на комплексно-сопряженное).

Алгебра матриц в задачах

Пусть $\mathfrak{M}_n$ - алгебра комплексных $n \times n$ матриц. Мы считаем, что $\mathfrak{M}_n$ действует в пространстве $\mathbb{C}^n = \{x = (x^1, \ldots, x^n)\}$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x^i \bar{y}^i .$$

C^*- структура

1. Доказать, что операция инволюции $*$ (транспонирование + комплексное сопряжение) удовлетворяет условиям

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)^* = \bar{\lambda}_1 A_1^* + \bar{\lambda}_2 A_2^* ,$$

$$(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^* , \qquad (A^*)^* = A .$$

2. Доказать, что

$$\| A \|^2 \leq \| A^* A \| .$$

Вывести из (2), что

$$\| A \| = \| A^* \| , \qquad \| A A^* \| = \| A \|^2 .$$

Линейные функционалы

3. Любой линейный функционал $\langle\ \rangle$ на $\mathfrak{M}_n$ имеет вид

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}\, \rho A , \quad \rho \in \mathfrak{M}_n .$$

4. Любое состояние на $\mathfrak{M}_n$ имеет вид

$$\langle A \rangle = \frac{\mathrm{Tr}\, \rho A}{\mathrm{Tr}\, \rho} ,$$

где ρ - ненулевая неотрицательно определенная эрмитова матрица.

Автоморфизмы

5. Любой автоморфизм φ алгебры $\mathfrak{M}_n$ является внутренним, т.е.

$$\varphi(A) = U^{-1} A U ,$$

где U - некоторая обратимая матрица .

6. Любой $*$ -автоморфизм имеет вид (5), где U -унитарная матрица.

7. Любая однопараметрическая группа α_t $*$ -автоморфизмов имеет вид

$$\alpha_t(A) = e^{itH} A e^{-itH} .$$

8. Любое дифференцирование $\mathfrak{M}_n$ (линейное отображение $\mathfrak{M}_n$ в себя, удовлетворяющее правилу Лейбница и сохраняющее $*$)

$$d(A) = i[H, A]$$

для некоторого $H = H^*$.

9. Единственное гладкое решение уравнения Гейзенберга

$$\dot{A}(t) = i[H, A(t)], \qquad A(0) = A ,$$

имеет вид

$$A(t) = e^{iHt} A e^{-iHt}$$

или

$$A(t) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} [H, \ldots, [H, [H, A]] \ldots] .$$

Инвариантные состояния

10. Состояние (4) инвариантно относительно группы автоморфизмов (7), т.е.

$$\langle A \rangle = \langle \alpha_t(A) \rangle$$

тогда и только тогда, когда

$$[H, \rho] = 0.$$

В частности, инвариантными являются:

основное состояние

$$\langle A \rangle_e = (e, Ae),$$

где e – единичный собственный вектор H с минимальным собственным значением;

температурное (гиббсовское) состояние

$$\langle A \rangle_\beta = \frac{Tr\,(e^{-\beta H} A)}{Tr\,(e^{-\beta H})}, \quad 0 \le \beta < \infty.$$

11. Если основное состояние единственно, то

$$\langle A \rangle_\beta \to \langle A \rangle_e .$$

ГНС – представление

12. Вычислить $\dim \mathcal{H}_{ГНС}$ для основного состояния (10) и температурного состояния (10).

Условие КМШ

13. Для температурного состояния (10) выполнено условие КМШ для двухчастичной функции Грина:

$$\langle A_1 \alpha_t(A_2) \rangle = \langle \alpha_{t-i\beta}(A_2) A_1 \rangle .$$

14. Существует ровно одно состояние $\langle \cdot \rangle$, для которого при данной динамике α_t имеет место условие КМШ (13).
(См. [9], стр. 246).

15. Существует только одна динамика α_t, для которой при данном состоянии $\langle \ \rangle$ выполнено условие КМШ (13).

Решение аналогично предыдущей задаче.

Модулярный оператор

16. Пусть дано КМШ-состояние $\langle \cdot \rangle_\beta$ относительно данной динамики α_t.

Следующие три определения модулярного оператора Δ в $\mathcal{H}_{ГНС}$ эквивалентны:

а) $\quad (A, \Delta B)_{\mathcal{H}_{ГНС}} = \langle A^* B \rangle ,$

б) $\quad \Delta A = e^{-\beta H} A e^{\beta H},$

в) $\quad e^{itH_{ГНС}} = \Delta^{-i\frac{t}{\beta}} .$

Алгебраические структуры

17. $\mathfrak{M}_n \otimes \mathfrak{M}_m$ изоморфно $\mathfrak{M}_{mn}$.

Матрицы Паули

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^3 = \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

обозначим в $\mathfrak{M}_2 \otimes \dots \otimes \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2^{\otimes n}$:

$$\sigma_t^i = 1 \otimes \dots \underset{i}{\otimes} \sigma_t \otimes \dots \otimes 1, \qquad t = 1, \dots, n .$$

Тогда $\quad (\sigma_t^i)^2 = 1, \quad [\sigma_t^j, \sigma_{t'}^k] = 2i\,\delta_{t,t'}\,\sigma_t^\ell ,$

где j, k, l – циклическая перестановка индексов x, y, z.

18. Доказать, что

$$a_t = \sigma_1^z \sigma_2^z \ldots \sigma_{t-1}^z \left(\tfrac{1}{2} (\sigma_t^x + i\sigma_t^y) \right),$$

$$a_t^* = \sigma_1^z \sigma_2^z \ldots \sigma_{t-1}^z \left(\tfrac{1}{2} (\sigma_t^x - i\sigma_t^y) \right)$$

удовлетворяют каноническим антикоммутационным соотношениям (КАС):

$$[a_t, a_{t'}]_+ = 0 = [a_t^*, a_{t'}^*]_+,$$

$$[a_t, a_{t'}^*]_+ = \delta_{tt'} .$$

Доказать, что

$$\sigma_t^z = 2a_t^* a_t - 1,$$

$$\sigma_t^x = \sigma_1^z \ldots \sigma_{t-1}^z (a_t^* + a_t),$$

$$\sigma_t^y = \sigma_1^z \ldots \sigma_{t-1}^z (a_t^* - a_t).$$

Отсюда следует, что a_t порождают всю $*$-алгебру $\mathfrak{M}^{\otimes n}$.

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ЧТЕНИЯ

1. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. "Наука", М., 1969.
2. Glimm J., Jaffe A. Quantum Physics. N.Y., 1981.
3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1-4, "Мир", М., 1977-1982.
4. Рюэлль Д. Статистическая механика. "Мир", М., 1971.

Эргодическая теория

5. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. "Наука", М., 1980.

Фазовые переходы

6. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. "Наука", М., 1980.
7. Малышев В.А., Минлос Р.А., Петрова Е.Н., Терлецкий Ю.А. Обобщенные контурные модели. "Итоги науки и техники", сер. "Теор.вер. мат. статист. Теор. киб." Изд. ВИНИТИ, М., т.19, 1982.

C^*-алгебры и некоммутативная вероятность

8. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. "Мир", М., т.1,2, 1982.
9. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. "Мир", М., 1976.

Евклидов подход

10. Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой теории поля."Мир", М., 1976.

11. Klein A., Landau L. J.Func.Anal., 1981, 42, N 3, p.368-428; J.Func.Anal., 1981, [illegible], N [illegible], p.121-137; Pacific J.Math., 1981, [illegible], p.341-368.

Кластерные разложения

12. Малышев В.А. УМН, 35, № 2, 1980, 3-53.

13. Малышев В.А., Петрова Е.Н. Преобразования двойственности гиббсовских случайных полей. "Итоги науки и техники". Сер. "Теор.вероят., мат.статист.,Теор.киберн." Изд. ВИНИТИ, М., т.18, 1981.

14. Federbush P., Battle G.A. Ann.Phys., 1982, 142, p.95-139.

Спектральное исследование динамики

15. Malyshev V.A., Minlos R.A. Phys.Lett. A, 1981, 86A, N 8, p.405-406;
J.Stat.Phys., 1979, 21, N 3, p.231-242;
Comm.Math.Phys., 1981, 82, p.211-216.

16. Combescure M., Dunlop F. Ann.Phys., 1979, 122, p.102-150.

Корреляционные уравнения

17. Боголюбов Н.Н., Хацет Б.И. ДАН СССР, 1949, 66, 321.

18. Боголюбов Н.Н., Петрина Д.Я., Хацет Б.И. ТМФ, 1969, 1, 251.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июня 1983 года.