Теорема 3 может быть применена и к преобразованиям с квазидискретным спектром, если рассматривать их на подпространстве, ортогональном собственным функциям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.
2. *Кифер Ю. И.* О спектре малых случайных возмущений динамических систем. — IV Международный симпозиум по теории информации. Тезисы докладов, ч. 1. М.—Л., 1976.
3. *Кифер Ю. И.* О малых случайных возмущениях некоторых гладких динамических систем. — «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1974, 38, № 5, с. 1091—1115.
4. *Дунская М. Б.* О спектре возмущенного автоморфизма тора. — «Усп. мат. наук», 1971, 26, вып. 1, с. 215.
5. *Lind D. A.* Spectral invariants in smooth ergodic theory. — «Lecture Notes Phys.», 1975, 38, p. 296—308.
6. *Lind D. A.* Locally compact measure preserving flows. — «Advances Math.», 1975, 15, N 2, c. 175—193.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1967.
8. *Brezin I., Ellis R., Shapiro L.* Recognizing G-induced flows. — «Israel Math.», 1974, 17, N 1, p. 56—65.
9. *Брин М. И., Песин Я. Б.* Частично гиперболические динамические системы. — «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1974, 38, № 1, с. 170—212.

■

ВОЗМУЩЕНИЯ ГИББСОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В. А. Малышев

§ 1. Введение

Здесь рассматривается задача построения малого возмущения случайного поля с сильным убыванием корреляций. При этом были объединены известные подходы к этой задаче:

1. Уравнения Кирквуда—Зальцбурга для решетчатых систем с конечным спиновым пространством. Они были известны давно [2], однако не были перенесены на произвольное спиновое пространство. Этому посвящен § 3.

2. Подход Дюно—Яголнитцера—Суилларда [5, 6], в котором было введено понятие сильного убывания корреляций.

где

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k f_k(x) \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k f_k(x).$$

Из (49) следует, что

$$|g_k| = |h_{t(k)}| \exp\{-\varepsilon^2 \lambda_k\},$$

и так как $\lambda_k \to -\infty$ при $k \to \infty$, то не для всякой $h \in H$ функция g принадлежит H. Таким образом, точка 0 принадлежит остаточному спектру оператора P^ε.

Спектр оператора P^ε имеет вид, указанный в теореме 3, лишь вследствие условия согласованности Б и в случае общего положения поведение спектра при $\varepsilon \to 0$, по-видимому, иное. Неустойчивость картины спектра, изображенной в теореме 3, подтверждается и тем обстоятельством, что для любого λ, такого, что $0 < |\lambda| < 1$:

$$\|(P^\varepsilon - \lambda)^{-1}\| \to \infty \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Последнее соотношение следует из явного представления решения $r(x)$ уравнения $P^\varepsilon r(x) - \lambda r(x) = g(x)$, которое имеет вид

$$r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k f_k(x), \text{ где}$$

$$r_k = -\frac{1}{\lambda}\left[g_k + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{l} \gamma_{t-m(k)}\right)\frac{g_{t-l(k)}}{\lambda^l}\exp\left(\varepsilon^2 \sum_{m=1}^{l} \lambda_{t-m(k)}\right)\right]$$

$$\text{и } g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k f_k(x).$$

Естественной областью применения теоремы 3 является случай афинных преобразований компактных абелевых групп с функцией $q^\varepsilon(x, y)$, инвариантной относительно сдвигов. Пусть, например, M есть n-мерный тор T^n, V — его автоморфизм, который задается целочисленной матрицей с определителем, равным единице и $q^\varepsilon(x, y) = q(x - y)$. В случае, когда собственные значения V по модулю отличны от 1 (гиперболический случай), а также когда есть собственные значения всех трех типов, т. е. модуль которых больше 1, меньше 1 и равен 1 (частично гиперболический случай), соответствующий унитарный оператор U имеет непрерывный спектр, [9] и, следовательно, все условия теоремы 3 выполнены. В случае возмущения автоморфизма двумерного тора результат теоремы 3 получен другим методом в работе [4].

3. Групповое разложение Глимма—Джаффе—Спенсера в квантовой теории поля [1]. Наши результаты в большой степени основаны на этой работе, хотя техника разложений несколько другая.

§ 2. Случайные поля на решетках

Случайным полем на решетке $\mathbf{Z}^\nu$ называется система φ_t случайных величин $t \in \mathbf{Z}^\nu$ с заданными конечномерными распределениями. В дальнейшем вид вероятностного пространства, где эти случайные величины определены (обозначим его (Ω, Σ, μ)), не играет никакой роли. Величины φ_t принимают значения в множестве X, которое предполагается сепарабельным полным метрическим пространством с борелевской σ-алгеброй Σ_X.

Случайная величина Φ_A на (Ω, Σ, μ) называется локальной, если она зависит лишь от φ_t, $t \in A$, и $|A| < \infty$. Ее среднее обозначается $\langle \Phi_A \rangle_\varphi \equiv \langle \Phi_A \rangle$ (в дальнейшем индексы будут часто указывать распределение, по которому производится усреднение). Совокупность таких средних (моментов) для всех ограниченных локальных Φ_A определяет случайное поле, и наоборот.

Лагранжианом называется набор $\Phi = (\Phi_A)$ локальных случайных величин (не более одной для каждого A). Всегда предполагаем лагранжиан локальным, т. е. $\Phi_A \equiv 0$ для всех A с $\operatorname{diam} A > d_\Phi$, $d_\Phi < \infty$, и трансляционно инвариантным, т. е. Φ_A и Φ_{A+t} совпадают как функции на X^A и X^{A+t} соответственно при изоморфизме X^A и X^{A+t}, задаваемым сдвигом.

Пусть задан куб $V \subset \mathbf{Z}^\nu$. Определим новую меру $\mu_{\Phi, V}$ на (Ω, Σ) с плотностью

$$d\mu_{\Phi, V}/d\mu = Z_V^{-1} \exp[-\lambda U_V], \tag{1}$$

где $U_V = \sum_{A \subset V} \Phi_A$, $Z_V = \langle \exp(-\lambda U_V) \rangle_\varphi$, λ — параметр. Всегда предполагается, что Z_V существует.

Произвольную слабую предельную точку мер $\mu_{\Phi; V}$ для любой расширяющейся последовательности кубов V назовем возмущением случайного поля φ лагранжианом Φ. Слабая сходимость понимается в смысле сходимости конечномерных распределений или, что то же самое, сходимости средних для всех ограниченных локальных Ψ_G.

В качестве начального поля φ часто рассматривается независимое случайное поле. Это эквивалентно заданию на X вероятностной меры μ_X. Иногда удобно считать μ_X произвольной положительной мерой на X. При этом для любой локальной Ψ_V вместо функционала $\langle\Psi_V\rangle_\varphi$ определяется функционал $\langle\Psi_V\rangle_0$, равный интегралу от Ψ_V (как функции на X^V) по произведению мер на X^V, т. е. по мере $\mu_X \times \ldots \times \mu_X$. При этом все определения, данные выше (и ниже), сохраняются [3].

Для учета граничных условий дадим более общее определение. Будем считать, что Φ_A есть функция на X^A. Граничным условием для куба V называется произвольная конфигурация (функция) b на $\partial_d V = \{t \bar{\in} V,\ \rho(t,\ V) \leqslant d\}$, где ρ — евклидово расстояние. Для каждой (случайной) конфигурации x на V обозначим $x \cup b$ конфигурацию на $V \cup \partial_d V$, равную b на $\partial_d V$ и x на V; $d = d_\Phi$.

Энергия конфигурации x в V с граничным условием b есть

$$U_{V,b} = \sum_{A \subset V} \Phi_A(x) + \sum_{A \cap V \neq 0,\ A \cap \partial_d V \neq 0} \Phi_A(x \cup b), \tag{2}$$

где $\Phi_A(x \cup b)$ называются граничными членами.

Гиббсовское случайное поле (распределение Гиббса) в V с граничным условием b определяется плотностью (1), где вместо U_V подставляется $U_{V,b}$.

Рассмотрим последовательность кубов V_n, $V_n \subset V_{n+1}$ и граничных условий b_n для V_n. Всегда предполагается, что для такой данной последовательности все $b_n(t)$ равномерно ограничены (т. е. для некоторой $s_0 \in X$ $\sup\limits_{t,\,n} \rho_X(s_0,\ b_n(t)) < \infty$, ρ_X — метрика в X). Пусть ξ_n — случайное поле на $\mathbf{Z}^\nu$, определенное (2). Назовем гиббсовским случайным полем (предельным распределением Гиббса) для данного лагранжиана произвольную слабую предельную точку любой такой последовательности ξ_n.

§ 3. Высокотемпературные разложения

Пусть ξ_0 — трансляционно-инвариантное случайное поле. Здесь случайные величины $\xi_0(t)$ предполагаются взаимно независимыми. Пусть $\langle\cdot\rangle_{\xi_0} \equiv \langle\cdot\rangle_0$.

Теорема 1. *Если лагранжиан Φ удовлетворяет условию I, сформулированному ниже, то существует $\lambda_0 > 0$, такое, что для $0 < \lambda < \lambda_0$ возмущение ξ_Φ лагранжианом Φ поля ξ_0 существует, единственно и аналитически зависит от λ (т. е. $\langle\psi_T\rangle_{\xi_\Phi}$ аналитически зависит от λ для каждой ограниченной ψ_T).*

Будем рассматривать неупорядоченные наборы $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_k\}$ попарно различных множеств $A_i \subset \mathbf{Z}^\nu$. Набор Γ называется связным, если для любых двух A_i, $A_j \in \Gamma$ существует цепочка $A_i = A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n} = A_j$ с $A_{i_l} \in \Gamma$, $A_{i_l} \cap A_{i_{l+1}} \neq 0$ для $l = 1, 2, \ldots, n-1$. Обозначим $\tilde{\Gamma} = \bigcup_{A_i \in \Gamma} A_i$.

Лемма 1. *Число связных наборов* Γ, *таких, что* $|\Gamma| = k$, $\operatorname{diam} A_i \leqslant d$ *для всех* $A_i \in \Gamma$ *и некоторая фиксированная точка* $t \in \mathbf{Z}^\nu$ *принадлежит* $\tilde{\Gamma}$, *ограничено* c_1^k *для некоторой* $c_1 > 0$, *зависящей лишь от* d *и* ν.

Доказательство достаточно просто и не приводится.

Положим $k_A = \exp[-\lambda \Phi_A] - 1$, $k_\Gamma = \prod_{A \in \Gamma} k_A$, и введем условие I: существует область Λ комплексной плоскости, содержащая интервал $(0, \lambda_1)$ вещественной оси для некоторого $\lambda_1 > 0$ и такая, что для всех связных Γ и любой ограниченной локальной ψ_T моменты $\langle \psi_T k_\Gamma \rangle_0$ аналитичны по $\lambda \in \Lambda$ и для некоторой константы $c > 0$ и $c_2 = c_2(\psi_T)$:

$$|\langle \psi_T k_\Gamma \rangle_0| \leqslant c_2 |c\lambda|^{|\Gamma|}, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{1}$$

Примеры, в которых выполняется условие I:

1. Φ_A равномерно ограничены. Тогда можно положить $\Lambda = \{\lambda : |\lambda| < \lambda_1\}$. Доказательство ниже показывает, что ξ_Φ аналитически зависит от λ в $(-\lambda_0, \lambda_0)$.

2. $X = \mathbf{R}$, μ_X гауссова, а Φ_A ограниченный снизу многочлен от A переменных x_t, $t \in A$. Тогда можно положить $\Lambda = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0, |\lambda| < \lambda_1\}$.

Доказательство теоремы 1. Пусть задан куб V и $U_V = \sum_{A \subset V} \Phi_A$. Тогда

$$\langle \psi_T \rangle_V = Z_V^{-1} \langle \psi_T e^{-\lambda U_V} \rangle_0, \quad Z_V = \langle e^{-\lambda U_V} \rangle_0. \tag{2}$$

Докажем, что для любой ограниченной локальной ψ_T моменты $\langle \psi_T \rangle_V$ стремятся к пределу, когда $V \to \infty$. Доказательство использует следующий способ разложения экспоненты

$$\exp(-\lambda U_V) = \prod_{A \subset V} \exp(-\lambda \Phi_A) = \prod_{A \subset V} (1 + k_A) =$$
$$= \sum_\Gamma k_\Gamma = \sum_\Gamma{}' k_\Gamma \exp[-\lambda U_{V-(T \cup \tilde{\Gamma})}], \tag{3}$$

где в $\sum'$ суммирование по всем Γ (включая пустой), таким, что $\Gamma \cup \{T\}$ связен.

Используя независимость ξ_0 из (2) и (3), имеем

$$\langle\psi_T\rangle_V = \sum_\Gamma{}' \langle\psi_T k_\Gamma\rangle_0 Z_V^{-1} Z_{V-(T\cup\tilde\Gamma)}. \tag{4}$$

Для $A \subset V$ обозначим

$$f_A = Z_V^{-1} Z_{V-A}.$$

Разлагая $e^{-\lambda U_{V-A}}$ с помощью (3), получим

$$f_A = f_{A\cup t} + \sum_\Gamma{}'' \langle k_\Gamma\rangle_0 f_{A\cup\tilde\Gamma} \tag{5}$$

для любого одноточечного множества $t \subset V - A$, в $\sum''$ суммирование по всем связным $\Gamma \neq 0$, таким, что $t \in \tilde\Gamma \subset V - A$.

Рассмотрим банахово пространство $\mathscr{B}$ векторов $f = (f_B)$ с комплексными компонентами, занумерованными всеми конечными подмножествами $B \subset \mathbf{Z}^\nu$, $B \neq 0$. Норма в $\mathscr{B}$ определяется так:

$$\|f\| = \sup_B \frac{|f_B|}{2^{|B|}}.$$

Перепишем (5)

$$\begin{gathered} f_A - f_{A-b} + \sum_\Gamma{}'' \langle k_\Gamma\rangle_0 f_{A\cup\tilde\Gamma} = 0, \quad |A| \geqslant 2, \\ f_A + \sum_\Gamma{}' \langle k_\Gamma\rangle_0 f_{A\cup\tilde\Gamma} = 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Итак, получены уравнения Кирквуда—Зальцбурга. Выберем для каждого непустого A точку $t = t(A) \in A$ и рассмотрим систему уравнений (6) только для таких пар $(A, t(A))$. Можно переписать (6) в виде операторного уравнения в $\mathscr{B}$:

$$(1 - R + K) f = (\delta_{|A|,1}), \tag{7}$$

где 1 — единичный оператор, R — оператор «сдвига», переводящий (f_A) в (f_{A-b}), K — оставшаяся часть оператора.

Заметим, что $\|R\| \leqslant \frac{1}{2}$ и

$$\|K\| \leqslant \sup_{t\in V} \left| \sum_{\Gamma: t\in\tilde\Gamma}{}'' \langle k_\Gamma\rangle_0 2^{|\tilde\Gamma|} \right| \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие I. Тогда для некоторого $\lambda_0 > 0$ и $\lambda \in \Lambda \cap \{\lambda : |\lambda| < \lambda_0\}$ существует $c_3 > 0$, такое, что равномерно по λ и V $Z_V^{-1} Z_{V-A} \leqslant c_3^{|A|}$.*

Для фиксированного A существует

$$\lim_{V\to\infty} Z_V^{-1} Z_{V-A}.$$

Доказательство. Можно найти $\lambda_0 > 0$, такое, что для $\lambda \in \Lambda \cap \{|\lambda| < \lambda_0\}$ норма $\|K\| < \frac{1}{4}$ (это следует из (8), условия I, леммы 1) и $\|P_V K P_V\| < \frac{1}{4}$, где P_V — естественная проекция $\mathscr{B}$ на конечномерное подпространство векторов (f_A) с $f_A \equiv 0$ для $A \not\subset V$. Поэтому к $P_V(1-R+K)P_V$ и к $1-R+K$ применим метод последовательных приближений со всеми оценками, равномерными по V. Отсюда легко следует лемма 2.

Доказательство теоремы 1 завершается использованием (4) и теоремы Витали.

§ 4. Низкотемпературные разложения

Отступим ненадолго от основного изложения и покажем, как простое преобразование позволяет перейти от высокотемпературных разложений к низкотемпературным. Это преобразование типа двойственности, но мы не используем алгебраической теории двойственности [4]. Рассмотрим простейший случай, оставляя в стороне все обобщения.

Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, μ_X — равномерная мера и все $\Phi_A \not\equiv 0$ в лагранжиане имеют единственный минимум (абсолютный) при $x_A \equiv 1$, который можно положить равным нулю.

Теорема 2. *Существует $\lambda_0 > 0$, такое, что для всех $\lambda > \lambda_0$ предельное гиббсовское распределение существует, единственно и аналитически зависит от λ.*

Покажем здесь это только для граничных условий $b \equiv 1$. Другие граничные условия сводятся к этим с помощью одного комбинаторного приема, который здесь не рассматривается.

Доказательство. Пусть x — конфигурация в V. Множество $B \subset V$ называется неправильным относительно x, если $x_B \not\equiv 1$.

Фиксируем множество $T \subset V$. Назовем $R \supset T$ связной компонентой T для конфигурации x, если имеет место:

1) существует связный набор $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$, такой, что $\Phi_{A_i} \not\equiv 0$ для всех i, $T \cup \tilde{\Gamma} = R$ и каждое A_i неправильно относительно x;

2) каждое A, $\Phi_A \not\equiv 0$, такое, что $A \cap R \neq 0$, $A \cap (\mathbf{Z}^\nu \setminus R) \neq 0$, правильно относительно x, т. е. $x_A \equiv 1$.

Пусть y_T — произвольная конфигурация на T. Ее вероятность $P_{V,b}(y_T)$ в распределении Гиббса в V с граничными условиями b равна

$$\sum_{R:T\subset R} \sum_{x}^{R} \exp\left(-\lambda U_R(x)\right) \frac{Z_{V-\tilde{R}}}{Z_V}, \tag{1}$$

где в $\sum^R$ суммирование по всем x, таким, что R есть связная компонента T относительно x, причем $x_T = y_T$, $x_{V-R} \equiv 1$. $\tilde{R} = \bigcup A$, где объединение по всем возможным A, таким, что $A \cap R \neq 0$, $\Phi_A \not\equiv 0$.

Разложение (1) аналогично разложению (4) § 3 и в некотором смысле имеет двойственное ядро K. Аналогично получаются и уравнения Кирквуда—Зальцбурга, подобные (5) § 3, и оставшаяся часть доказательства протекает так же, как в § 3.

§ 5. Разложения в ряд Тейлора

Возвратимся теперь к основному изложению и рассмотрим здесь разложения основных величин в ряд Тейлора по степеням λ. Определим понятие усеченной корреляционной функции. Пусть даны вещественные случайные величины $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, не обязательно различные. $\mathfrak{A}_T$ — частично упорядоченное множество всех разбиений α множества $T = \{1, \ldots, n\}$. $\alpha < \beta$, если каждый блок α содержится в некотором блоке β, $\alpha \wedge \beta$ есть наибольшая нижняя грань α и β, c — минимальный элемент $\mathfrak{A}_T$. Для любого разбиения $\alpha = (T_1, \ldots, T_p$ определим по индукции $\langle \sigma_T \rangle^\alpha \equiv \langle \sigma_{T_1}, \ldots, \sigma_{T_p} \rangle$:

$$\langle \sigma_T \rangle = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_T} \langle \sigma_{T_1} \rangle^c \ldots \langle \sigma_{T_p} \rangle^c \tag{1}$$

предполагается, что левые части в (1) существуют). Эквивалентное определение дает формальный вид

$$\ln \left\langle e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} \sigma_i} \right\rangle = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^s}{s!} \sum_{i_1, \ldots, i_s = 1}^{n} \langle \sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_s} \rangle. \tag{2}$$

Пусть теперь дано трансляционно-инвариантное случайное поле ξ_0, $\langle \cdot \rangle_{\xi_0} = \langle \cdot \rangle_0$, причем не предполагается его независимость.

Используя (2), легко получается формальное разложение Тейлора:

$$\langle \psi_T \rangle_V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \sum_{A_1 \subset V} \ldots \sum_{A_n \subset V} \langle \psi_T, \Phi_{A_1}, \ldots, \Phi_{A_n} \rangle_0. \tag{3}$$

В этом разделе всегда предполагается, что в лагранжиане Φ все Φ_A равномерно ограничены.

Определим свойство сильного убывания корреляций [5, 6]:

$$\left|\langle\psi_T, \Phi_{A_1}, \ldots, \Phi_{A_n}\rangle_0\right| \leqslant C \sum_{\mathscr{T}} \prod_{\zeta\in\mathscr{T}} u(d(\zeta)), \tag{4}$$

где суммирование производится по всем связным деревьям $\mathscr{T}$ с $n+1$ вершинами $T, A_1, \ldots, A_n$ и n ребрами ζ, $d(\zeta)$ — длина ζ, т. е. кратчайшее расстояние в R^ν между двумя подмножествами — вершинами ζ. Следующий результат несколько обобщает основной результат работы [5].

Теорема 3. *Пусть* (4) *имеет место для всех локальных ограниченных* ψ_T *и всех (не обязательно различных)* $A_1, \ldots, A_n \subset Z^\nu$, $n=1, 2, \ldots$ с $C=C(\psi_T)$ и

$$\sum_{t\in Z^\nu} u(|t|) < \infty. \tag{5}$$

Тогда существует $\lambda_0 > 0$, *такое, что возмущение лагранжианом* Φ *поля* ξ_0 *существует, единственно и аналитично по* λ *при* $-\lambda_0 < \lambda < \lambda_0$.

Доказательство немедленно получается из (4) и (5).

Замечания.

1. Почему (4) и (5) так важны для построения возмущений? Перепишем (3) при $V\to\infty$ в виде

$$\langle\psi_T\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathscr{L}_n, \tag{6}$$

где

$$\mathscr{L}_n = \sum_{A_1, \ldots, A_n \subset Z^\nu} \langle\psi_T, \Phi_{A_1}, \ldots, \Phi_{A_n}\rangle_0 \tag{7}$$

Требуется, чтобы ряд (7) был абсолютно сходящимся для всех $n=1, 2, \ldots$ Если $n=1$, то условие (5) является необходимым и достаточным для этого, а если $n \geqslant 2$, это влечет (4). Таким образом, условие (5) необходимо, если желательно обойтись без перенормировок.

2. В условии (4) $A_1, \ldots, A_n$ не обязательно различны. Так что (4) содержит комбинаторную оценку

$$\left|\langle\psi_T, \Phi_{A_1}, \ldots, \Phi_{A_n}\rangle_0\right| \leqslant C^{n_1+\ldots+n_k} n_1! \ldots n_k!, \tag{8}$$

если существует k групп одинаковых A_i с $n_1, \ldots, n_k$ элементами в каждой группе. В § 6 мы избавляемся от необходимости оценки (8) ценой небольшого усилия оценки (4) и не используем предположение об ограниченности Φ_A.

3. Перечислим известные автору случаи, когда сильное убывание корреляций имеет место для решетчатых полей с локальным лагранжианом:

A. Независимое случайное поле. Для этого случая (4) может быть доказано в работах [5, 6, см. § 3] с помощью уравнений Кирквуда—Зальцбурга.

Существует прямое комбинаторное доказательство, но оно довольно громоздко.

B. Возмущение случайного поля ξ_0, удовлетворяющего (4) для всех ψ_T, Φ_A, также, по-видимому, удовлетворяет (4) [7].

C. Гауссовы случайные поля, для которых $|\langle\varphi_t, \varphi_{t'}\rangle| \leqslant \leqslant u(|t-t'|)$. См. § 7. Неизвестно, однако, как велик класс ψ_T и Φ_A, для которых имеет место (4).

D. Область действия теоремы Янга— Ли. Некоторые строгие результаты получены в [6] (см. также [4]).

E. Область фазовых переходов первого рода для достаточно низких температур. Но не для всех Φ_A, по-видимому, это имеет место.

§ 6. Общее групповое разложение для решетчатых полей

Пусть ξ_0 — независимое трансляционно-инвариантное случайное поле, ξ_Φ — его возмущение лагранжианом $\Phi=(\Phi_A)$. Предположим, что это возмущение единственно, т. е. $\lim\limits_{V\to\infty}\langle\psi_T\rangle_{\Phi,\,V}$ существует для любой ограниченной локальной ψ_T.

Возьмем другой лагранжиан $\lambda\Phi'$ и будем строить возмущение поля ξ_0 лагранжианом $\Phi+\lambda\Phi'$.

Начнем с технических определений. Для некоторого $L>0$, которое выберем ниже достаточно большим, рассмотрим покрытие $\mathscr{D}$ решетки $\mathbf{Z}^\nu$ кубами вида

$$\Delta=\{t=(t^1, \ldots, t^\nu)\in\mathbf{Z}^\nu : k_iL\leqslant t^i\leqslant(k_i+1)L,\ k_i\in\mathbf{Z}\}.$$

Пересечение любых двух таких кубов имеет размерность не более $\nu-1$. Через Γ будем обозначать конечные наборы таких попарно различных $\Delta\in\mathscr{D}$; $\Gamma=\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$.

Будем выключать взаимодействие Φ в некоторых кубах Δ. Определим лагранжианы с частично отключенным взаимодействием. Обозначим через $s=s_\Gamma=(s_\Delta)$ набор вещественных чисел s_Δ, занумерованных всеми $\Delta \in \mathscr{D}$. Предполагается, что $0 \leqslant s_\Delta \leqslant 1$ для всех $\Delta \in \mathscr{D}$ и $s_\Delta = 0$ при $\Delta \bar{\in} \Gamma$. Для любого такого s определим лагранжиан ${}^s\Phi = (r_A(s)\, \Phi_A)$, где $r_A(s) = s_\Delta$, причем Δ для данного A произвольно, лишь бы $A \cap \Delta \neq 0$. Будем говорить тогда, что A сопоставлено кубу Δ. Пусть ξ_s — возмущение ξ_0 лагранжианом ${}^s\Phi$.

Далее любой конечный объем V будет являться объединением кубов $\Delta \in \mathscr{D}$. Фиксируем некоторый куб V и положим

$$\langle \cdot \rangle_{\xi_s} = \langle \cdot \rangle_s.$$

Положим также $\langle \cdot \rangle_s = \langle \cdot \rangle_{V'}$, если $s_\Delta = 1$ для $\Delta \subset V'$ и $s_\Delta = 0$ для остальных Δ. Пусть

$$\Phi''_\Delta = \sum_A \Phi'_A,$$

где A пробегает все $A \subset V$, сопоставленные Δ.

Для любого Γ положим

$$k_\Gamma = \prod_{\Delta \in \Gamma} (\exp[-\lambda \Phi''_\Delta] - 1).$$

Введем новый вариант свойства сильного убывания корреляций, отличный от (4) § 5: существует область Λ комплексной плоскости, содержащая интервал $(0, \lambda_1)$ и константы $c_1 = c_1(\psi_T)$, $c_2 = c_2(L)$, такие, что для любого Γ', любых попарно различных $A_1, \ldots, A_n$ следующая оценка имеет место равномерно по s:

$$\left| \langle \psi_T k_{\Gamma'}, \Phi_{A_1}, \ldots, \Phi_{A_n} \rangle_s \right| \leqslant c_1 (\lambda c_2)^{|\Gamma'|} \sum_{\mathscr{T}} \prod_{\zeta \in \mathscr{T}} u(d(\zeta)), \tag{1}$$

где $\mathscr{T}$ пробегает все деревья с $n+1$ вершинами $T \cup \Gamma', A_1, \ldots, A_n$.

Теорема 4. *Если* (1) *выполнено для некоторого набора* $\psi = (\psi_T)$, *содержащего* 1, *а* $u(d)$ *удовлетворяет условию* (5) *предыдущего параграфа, то существует* $\lambda_0 > 0$, *такое, что при* $0 < \lambda < \lambda_0$ *для любой* $\psi_T \in \psi$:

$$\lim_{V \to \infty} \langle \psi_T \rangle_{\Phi + \lambda\Phi', V} \equiv \langle \psi_T \rangle$$

существует. Если по моментам $\langle \psi_T \rangle$, $\psi_T \in \psi$ *случайное поле восстанавливается единственным образом, то возмущение поля* ξ_0 *лагранжианом* $\Phi + \lambda\Phi'$ *единственно и аналитично по* λ *для некоторого* $\lambda_0 > 0$ *при* $0 < \lambda < \lambda_0$.

Положим

$$\langle \psi_T \rangle_{\Phi+\lambda\Phi', V} = \frac{\left\langle \psi_T \exp\left[-\sum_{A \subset V} (\Phi + \lambda\Phi')_A\right]\right\rangle_0}{\left\langle \exp\left[-\sum_{A \subset V} (\Phi + \lambda\Phi')_A\right]\right\rangle_0}.$$

Доказательство этой теоремы основано на разложении (3) § 3, а также на следующей формуле [1], легко доказываемой по индукции. Пусть дана функция $f(s_1, \ldots, s_n)$, гладкая при $0 \leqslant s_i \leqslant 1$. Тогда

$$f(1, \ldots, 1) = \sum_{\Gamma} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s_\Gamma} f(s_\Gamma, 0)\, ds_\Gamma, \tag{2}$$

где суммирование по всем подмножествам $\Gamma \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, включая пустое

$$\frac{\partial}{\partial s_\Gamma} = \prod_{i \in \Gamma} \frac{\partial}{\partial s_i}, \quad f(s_\Gamma, 0) \equiv f(s_1', \ldots, s_n'), \quad ds_\Gamma = \prod_{i \in \Gamma} ds_i,$$

где $s_i' = s_i$, $i \in \Gamma$, $s_i' = 0$, $i \overline{\in} \Gamma$.

Используем (2) для функции

$$f(s) \equiv \langle \psi_T \rangle_{s\Phi + \lambda\Phi',\, V}.$$

Тогда формула (3) § 3 обобщается следующим образом:

$$\langle \psi \rangle_{\Phi + \lambda\Phi',\, V} = \sum_{\Gamma, \Gamma'}{}' \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s_\Gamma} \langle \psi_T k_{\Gamma'} \rangle_s\, ds_\Gamma f_{T \cup \tilde{\Gamma} \cup \tilde{\Gamma}'}, \tag{3}$$

где $\frac{\partial}{\partial s_\Gamma} = \prod_{\Delta \in \Gamma} \frac{\partial}{\partial s_\Delta}$, суммирование происходит по таким Γ, Γ', что набор $\gamma = \{T\} \cup \Gamma \cup \Gamma'$ связен и

$$f_B = \frac{Z_{\overline{V-B}}}{Z_V}.$$

Здесь $\overline{V - B}$ — объединение всех кубов $\Delta \subset V - B$ и

$$Z_{\overline{V-B}} = \left\langle \exp\left[- \sum_{A \subset \overline{V-B}} (\Phi + \lambda\Phi')_A \right] \right\rangle_0.$$

f_B удовлетворяют следующим уравнениям Кирквуда—Зальцбурга

$$f_B = f_{B \cup \Delta} + \sum_{\Gamma, \Gamma'} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s_\Gamma} \langle k_{\Gamma'} \rangle_{s_\Gamma} f_{B \cup \tilde{\Gamma} \cup \tilde{\Gamma}'}, \tag{4}$$

где $\Delta \subset \overline{V - B}$ и суммирование по всем Γ, Γ', таким, что набор $\gamma = \{\Delta\} \cup \Gamma \cup \Gamma'$ связен, причем $\Gamma' \neq 0$, так как

$$\frac{\partial}{\partial s_\Gamma} \langle 1 \rangle_{s_\Gamma} \equiv 0; \qquad \tilde{\Gamma},\ \tilde{\Gamma}' \subset \overline{V - B}.$$

Связь между групповым разложением и свойством сильного убывания корреляций дается следующей формулой

$$\frac{\partial}{\partial s_{\Gamma}}\langle\psi_T k_{\Gamma'}\rangle_{s_{\Gamma}}=\langle\psi_T k_{\Gamma''}\ \Phi_{\Delta_1},\ \ldots,\ \Phi_{\Delta_n}\rangle_{s_{\Gamma}}, \tag{5}$$

где $\Gamma=\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$, $\Phi_{\Delta_k}=\sum\Phi_A$ с суммированием по всем A, сопоставленным Δ_k.

Оставшаяся часть доказательства протекает так же, как доказательство теоремы 1. Более сложной является только оценка нормы $\|K\|$ (см. ниже).

Используем оценку

$$\left|\langle\psi_T k_{\Gamma''}\ \Phi_{\Delta_1}, \ldots, \Phi_{\Delta_n}\rangle_s\right|\leqslant c_1(\lambda c_2(L))^{|\Gamma'|}\sum_{A_1, \ldots, A_n}{}' \sum_{\mathscr{T}}\prod_{\zeta\in\mathscr{T}}u(d(\zeta)), \tag{6}$$

где суммирование в $\sum'$ по всем A_i, сопоставленным Δ_i. Последнюю сумму можно переписать так:

$$\sum_{A_1, \ldots, A_n}{}' \sum_{\mathscr{T}}\prod_{\zeta\in\mathscr{T}}u(d(\zeta))=\sum_{\mathscr{T}}\sum_{A_1, \ldots, A_n}{}'\prod_{\zeta\in\mathscr{T}}u(d(\zeta))\equiv R.$$

Для оценки последней суммы используем прямой комбинаторный метод. Приведем сначала полезную вспомогательную конструкцию. Рассмотрим множество всех деревьев $\mathscr{T}'$ с n вершинами в точках $t\in\mathbf{Z}^{\nu}$, причем $0\in\mathbf{Z}^{\nu}$ является одной из вершин и все вершины различны. Оценим

$$R'=\sum_{\mathscr{T}'}\prod_{\zeta\in\mathscr{T}'}u(d(\zeta)),$$

где $d(\zeta)$ — длина ребра ζ.

Лемма 1.

$$R'\leqslant\Big(\sum_{t\in\mathbf{Z}^{\nu}}u(|t|)\Big)^{n-1}2^{n-1}.$$

Доказательство. Укажем канонический способ нумерации вершин и ребер такого дерева. Присвоим номер 1 вершине $0\in\mathbf{Z}^{\nu}$. Пусть β_1 — множество вершин, соединенных ребром с $0\in\mathbf{Z}^{\nu}$. Занумеруем β_1 в лексикографическом порядке числами 2, 3, ... После этого рассмотрим множество β_2 вершин, соединенных ребром с вершиной с номером 2. Занумеруем β_2 в лексикографическом порядке после β_1 и т. д. Обозначим $t_{1\zeta}$, $t_{2\zeta}$ — вершины ребра ζ с большим и меньшим номерами соответственно. Припишем ребру ζ номер

r_ζ вершины $t_{1\zeta}$. Пусть $\varepsilon_\zeta = 1(0)$, если ребра ζ и ζ с номером $r_\zeta = r-1$ имеют (не имеют) общей вершины, а ε_ζ и $t_{1\zeta} - t_{2\zeta} \in \mathbf{Z}^\nu$, $\zeta = 2, \ldots, n$ задают дерево $\mathcal{T}'$
и лемма 1 доказана.

Применим те же самые аргументы в нашем случае. Каждое A (с $\Phi_A \not\equiv 0$) сопоставим произвольным образом некоторой точке $t \in \mathbf{Z}^\nu$ лишь бы $t \in A$. Каждой t, таким образом, будет сопоставлено не более c_3 множеств A.

Далее константы $c_3, \ldots, c_6$ зависят лишь от ν, Φ, Φ'. В качестве вершины с номером 1 дерева $\mathcal{T}$ выберем $T \cap \tilde{\Gamma}'$. Положим

$$\tilde{u}(\tilde{d}) = \max_{d \in [\tilde{d}-d_\Phi,\ \tilde{d}+d_\Phi]} u(d),$$

где d_Φ — радиус взаимодействия Φ.

Из вершины с номером 1 может выходить не более $c_4|T| + c_5L^\nu|\Gamma'|$ ребер ζ с $d(\zeta) > \frac{L}{2}$. Пусть k — число таких ребер. Существует $c_6 > 0$, такая, что $c_6(n-k)$ из оставшихся ребер имеют длину $d(\zeta) \geqslant L/2$. Номера таких ребер могут быть выбраны $C_{n-k}^{c_6(n-k)} \leqslant 2^{n-k}$ возможными способами среди номеров ребер $\zeta_2, \ldots, \zeta_{n+1}$ дерева $\mathcal{T}$. Аналогично лемме 1 имеем оценку

$$R \leqslant \sum_{k=1}^{c_4|T|+c_5L^\nu|\Gamma'|} (\tilde{u}(0))^k\, 2^{n-k} \times$$
$$\times \Big(c_3 \sum_{t \in \mathbf{Z}^\nu} \tilde{u}(|t|)\Big)^{(1-c_6)(n-k)} \Big(c_3 \sum_{|t| \geqslant L/2} \tilde{u}(|t|)\Big)^{c_6(n-k)}. \qquad (7)$$

Фиксируя L достаточно большим, последний множитель в правой части (7) можно сделать как угодно малым. Отсюда получается оценка R, не зависящая от n. Тогда правая часть формулы (6) может быть оценена сверху $c_7^{|\Gamma'|}\lambda^{|\Gamma'|}$ для некоторой константы $c_7 = c_7(L)$.

Теперь для достаточно малых $\lambda_0 > 0$ получаем необходимую оценку нормы $\|K\|$ и доказательство теоремы 4.

§ 7. Полиномиальные решетчатые системы

Пусть $X = R$ и μ_X — лебегова мера. Рассмотрим следующее выражение для энергии

$$U_V(\sigma_t) = (2\nu + m^2) \sum_{t \in V} \sigma_t^2 - \sum_{|t-t'|=1} \sigma_t \sigma_{t'} + \lambda \sum_{A \subset V} \Phi'_A. \qquad (1)$$

Здесь Φ'_A — произвольный полином от $\sigma_{t_1}, \ldots, \sigma_{t_{|A|}}$, ограниченный снизу, $A=\{t_1, \ldots, t_{|A|}\}$, $m^2>0$.

Теорема 5. *Существует* $\lambda_0=\lambda_0(m^2, \Phi')$, *такое, что для* $0<\lambda<\lambda_0$ *предельное распределение Гиббса, задаваемое* (1), *единственно и аналитично по* λ.

Произвольные граничные условия учтем в § 8. Определим случайное поле ξ_0 как независимое поле, определенное первым членом в правой части (1). Положим $\Phi_A=-2\sigma_t\sigma_{t'}$ для $A=\{t, t'\}$ и $\Phi_A\equiv 0$ в противном случае. Покажем здесь, что выполнены условия теоремы 4.

Возьмем $\psi_T=\sigma_{t_1}^{k_1}\ldots\sigma_{t_{|T|}}^{k_{|T|}}$ с целыми $k_i>0$ и $T=\{t_1, t_2, \ldots, t_{|T|}\}$. Используя

$$k_{\Gamma'}=\prod_{\Delta\in\Gamma'}\int_0^\lambda(-\Phi''_\Delta)\,e^{-\lambda'\Phi''_\Delta}d\lambda',$$

можно переписать искомую оценку следующим образом

$$\begin{aligned}&\Big|\Big\langle\sigma_{t_1}^{k_1}\ldots\sigma_{t_{|T|}}^{k_{|T|}}\prod_{\Delta\in\Gamma'}\Phi'_{A_\Delta}\exp[-\lambda_\Delta\Phi''_\Delta],\\ &\Phi_{A_1}, \ldots, \Phi_{A_n}\Big\rangle_s\Big|\leqslant k_1!\ldots k_{|T|}!\,(\lambda\bar{c}(L))^{|\Gamma'|}\sum_{\mathscr{T}}\prod_{\zeta\in\mathscr{T}}u(d(\zeta))\end{aligned}\tag{2}$$

для всех A_Δ, сопоставленных Δ, равномерно по λ_Δ, $0\leqslant\lambda_0\leqslant\lambda$.

Лемма 1. *Существуют константы* $c>0$ *и* $m_1>0$, *такие, что для всех* s *и всех* $t, t'\in\mathbf{Z}^\nu$:

$$|\langle\sigma_t\sigma_{t'}\rangle_{s\Phi}|\leqslant|\langle\sigma_t\sigma_{t'}\rangle_\Phi|\leqslant ce^{-m_1|t-t'|}.$$

Это утверждение хорошо известно.

Чтобы сделать статью независимой, приведем некоторые нужные нам сведения относительно алгебры гауссовых величин.

Пусть задана гауссова система $\{s_t\}$ случайных величин с $t\in F$, $\langle s_t\rangle=0$. Определим для любого набора $T=\{t_1, \ldots, t_n\}\subset F$ (некоторые t_i могут совпадать) полином Вика $:s_T:$ с помощью производящей функции

$$:\exp\left[\sum_{i=1}^n a_is_i\right]:=\frac{\exp[\Sigma a_is_i]}{\langle\exp[\Sigma a_is_i]\rangle}.\tag{3}$$

В левой части операция $::$ применяется почленно к степенному ряду для экспоненты.

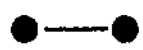
Каждую случайную величину s_t будем изображать отростком с одной вершиной

$s_t =$ 

Полином Вика будем изображать n такими отростками, некоторые или все из вершин которого могут быть отождествлены, т. е.

$: s_T : =$  или 

Всегда имеется в виду, какой отросток какой случайной величине соответствует. Два спаренных отростка s_{t_1} и s_{t_2}



соответствуют числу $\langle s_{t_1}, s_{t_2}\rangle$.

Вообще будем называть диаграммой конечное число отростков, некоторые вершины которых отождествлены и некоторые пары отростков спарены. Диаграмму отождествляем с полиномом Вика

$$\Pi^1 \langle s_{t_1} s_{t_2}\rangle : \Pi^2 s_t : ,$$

где произведение Π^1 берется по всем спаренным парам отростков, а Π^2 — по всем свободным (неспаренным) отросткам. Два спаренных отростка образуют ребро диаграммы. Множество всех диаграмм является, таким образом, коммутативной алгеброй над $\mathbf{R}$.

Лемма 2. *Произведение нескольких диаграмм равно сумме диаграмм, полученных следующим образом: стираются знаки произведения между сомножителями и спариваются некоторые пары отростков из разных сомножителей. Каждый способ спаривания соответствует одному и только одному члену суммы.*

Лемма 3. *Пусть W_i, $i = 1, \dots, n$ — полиномы Вика, изображенные диаграммами с одной вершиной. Тогда $\langle W_1, \dots, W_n\rangle$ равно сумме связных диаграмм из леммы 2.*

Пусть $W = : s_1 \dots s_n :$, $W_i = : s_{i1} \dots s_{im_i} :$, $\sum\limits_1^m c_i W_i$ *ограничена снизу. Тогда имеет место следующее утверждение, называемое спариванием одного отростка.*

Лемма 4. $\left\langle W \exp\left[\sum\limits_1^m c_i W_i\right]\right\rangle = \left\langle : s_2 \dots s_n : \sum\limits_{i=1}^m c_i \sum\limits_{j=1}^{m_i} \langle s_1 s_{ij}\rangle : s_{i1} \dots\right.$ $\dots \hat{s}_{ij} \dots s_{im_i} : \exp\left[\sum c_i W_i\right]$. Формальное доказательство этого утверждения с помощью разложения экспоненты. Неформальное — интегрирование по частям.

Лемма 5. *Если W_i, $\widetilde{W}_i$ — полиномы Вика, изображенные диаграммой с одной вершиной, то*

$$\langle \widetilde{W}_1 \exp [c_i W_i],\ \widetilde{W}_2,\ \ldots,\ \widetilde{W}_n \rangle = \sum_D \langle \widetilde{W}_1 e^{\sum c_i w_i} D \rangle,$$

где сумма по всем диаграммам из разложения $\widetilde{W}_2 \ldots \widetilde{W}_n$; такого, что в каждой связной компоненте D есть хотя бы один неспаренный отросток.

Доказательства этих простых утверждений здесь не приводятся.

Используя лемму 5, получим

$$\left\langle \psi_T \prod_{\Delta \in \Gamma'} \Phi'_{A_\Delta} e^{-\lambda_\Delta \Phi''_\Delta},\ \Phi_{A_1}, \ldots, \Phi_{A_n} \right\rangle_s = \sum_D \left\langle \psi_T \prod_{\Delta \in \Gamma'} \Phi'_{A_\Delta} e^{-\lambda_\Delta \Phi''_\Delta} D \right\rangle_s. \qquad (4)$$

Будем использовать также следующую оценку

$$|\langle : \sigma_{t_1}^{n_1} : \ldots : \sigma_{t_k}^{n_k} : \rangle| \leqslant \Big[n \max_i \sum_{t_j : j \neq i} u(|t_i - t_j|) \Big]^k \sum_{\mathscr{T}} \prod_{\zeta \in \mathscr{T}} u(d(\zeta)),$$

$$u(|t_i - t_j|) = |\langle \sigma_{t_i},\ \sigma_{t_j} \rangle|,$$

где $n = \max_i n_i$

Суммирование в $\sum$ ведется по всем связным деревьям с k вершинами $t_1, \ldots, t_k$. Формула (4) легко следует из леммы 2, если рассмотреть сумму диаграмм, содержащих дерево $\mathscr{T}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. В правой части (3) спарим сначала все отростки диаграммы D от тех Φ_{A_i}, для которых $\rho(A_i,\ T \cup \Gamma') \leqslant \varepsilon \operatorname{diam}(T \cup \Gamma')$. Затем спарим все оставшиеся отростки. В первом случае в формуле (4) полагаем

$$u(d(\zeta)) = u(0).$$

После спаривания можно предположить, что полином под знаком $\langle \cdot \rangle$ является четным. В противном случае можно было бы использовать оценку (для некоторого $\delta > 0$)

$$|\sigma_{t_1}^{2m_1+1} \ldots \sigma_{t_k}^{2m_k+1}| \leqslant \sigma_{t_1}^{2m_1} \ldots \sigma_{t_k}^{2m_k} \frac{1}{2} \Big(\delta + \frac{1}{\delta} \sigma_{t_1}^2 \ldots \sigma_{t_k}^2 \Big).$$

Ввиду положительности можно заменить $\Pi \exp[-\lambda_\Delta \Phi''_\Delta]\, c_1^{L^\nu |\Gamma'|}$ единицей и использовать (4) снова для оценки среднего от получившегося полинома. Простая комбинаторика показывает тогда, что справедлива формула (2). Теорема доказана.

§ 8. Учет граничных условий

Сначала дадим небольшое уточнение теоремы существования Добрушина для решетчатых случайных полей вместе с ее новым более простым доказательством.

Р. Л. Добрушин [3] называет функцию $h(s)\geqslant 0,\ s\in X$ компактной, если для любого $r\geqslant 0$ множество $\{s\in X: h(s)\leqslant r\}$ компактно.

Лемма 1. *Пусть дана последовательность случайных полей ξ_n на $\mathbf{Z}^\nu$ и компактная функция $h(s)$, причем*

$$\langle h(\xi_n(t))\rangle\leqslant b_{t,n}+\sum_{t'}c_{tt'}\langle h(\xi_n(t'))\rangle \tag{1}$$

для некоторых констант $c_{tt'}\geqslant 0,\ t,\ t'\in\mathbf{Z}^\nu,\ t\neq t'$ и $b_{t,n}\geqslant 0,\ t\in\mathbf{Z}^\nu$, причем для всех t:

$$\sum_{t'}c_{tt'}\leqslant c<1, \tag{2}$$

и $b_{t,n}$ равномерно ограничены. Тогда существует слабая предельная точка последовательности ξ_n.

Доказательство. Достаточно доказать, что все $\langle h(\xi_n(t))\rangle$ равномерно ограничены. В пространстве $l_\infty(\mathbf{Z}^\nu)$ векторов $\varphi=(\varphi_t)$ рассмотрим оператор

$$(1-M)(\varphi_t)=\Big(\varphi_t-\sum_{t'}c_{tt'}\varphi_{t'}\Big).$$

Тогда $\|M\|<1$. Обозначим матричные элементы оператора $(1-M)^{-1}$ через $m_{tt'}$. Если $h=\langle h(\xi_n(t))\rangle$, то

$$(1-M)h=\chi\equiv(\chi_{t,n}),\quad \chi_{t,n}\leqslant b_{t,n}$$

и

$$\langle h(\xi_n(t))\rangle=\sum m_{tt'}\chi_{t',n}, \tag{3}$$

что доказывает лемму 1.

Далее понадобится только оценка (3). Рассмотрим для определенности только модель с

$$\lambda\sum_{A\subset V}\Phi'_A=\lambda\sum_{t\in V}:\sigma_t^4:.$$

Пусть для куба V_1 заданы граничные условия b_1. Положим

$$\beta=\max_{t\in\partial_1 V_1}|b_1(t)|.$$

Для гиббсовского случайного поля в объеме V_1 с граничными условиями b_1 имеем следующий результат.

Лемма 2. *Существует константа $c_1>0$, такая, что для любого $\alpha\geqslant 1$ и $t\in\mathbf{Z}^\nu$:*

$$\langle|x_t|^\alpha\rangle_{V_1,b_1}\leqslant c_1\alpha^{\alpha/2}+\varepsilon\sum_{t':|t'-t|=1}\langle|x_{t'}|^\alpha\rangle,$$

где $\varepsilon<\dfrac{1}{2\nu}$.

Доказательство просто и состоит в оценке интеграла $\frac{\int |x^\alpha| e^{-yx+m^2x^2+\lambda x^4} dx}{\int e^{-yx+m^2x^2+\lambda x^4} dx}$.

Используя (3), для любого $t \in V = \frac{1}{2} V_1$ получим

$$\langle |x_t|^\alpha \rangle_{V_1, b_1} \leqslant c_2 (\alpha^{\alpha/2} + \beta |V| \exp(-m_1 |V|^{1/\nu}) \leqslant c_2 \alpha^{\alpha/2},$$

если β фиксировано, а $|V|$ достаточно велико. Используя теперь неравенство Шварца, получим

$$\left\langle \prod_{i=1}^N |x_{t_i}|^\alpha \right\rangle_{V_1, b_1} \leqslant \left(\prod_{i=1}^N c_2 (\alpha_i N)^{\alpha_i N/2} \right)^{1/N} = c_2 \prod_{i=1}^N \alpha_i^{\alpha_i/2} N^{\alpha_i/2}. \qquad (4)$$

Возвратимся теперь к групповому разложению § 6 и включим в него граничные условия. Будем применять групповое разложение в кубе V с фиксированными граничными условиями y_t, $t \in \partial_1 V$. Затем возьмем усреднение $\langle \cdot \rangle_{V_1, b_1}$, используя оценку (4). Изменим несколько разложение (3) § 6. В очевидных обозначениях

$$\langle \psi_T \rangle_{\Phi + \lambda\Phi', V, y} = \sum_{\Gamma, \Gamma'} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s_\Gamma} \langle \psi_T k_{\Gamma'} \rangle_{s\Phi, V, y} ds_\Gamma f_{T \cup \tilde{\Gamma} \cup \tilde{\Gamma}'}.$$

Но

$$\langle \psi_T k_{\Gamma'} \rangle_{s\Phi, V, y} = \frac{\left\langle \psi_T k_{\Gamma'} \exp \left[-2 \sum_{|t-t'|=1,\, t \in \partial_1 V} y_t \sigma_{t'} \right] \right\rangle_{s\Phi, V}}{\left\langle \exp \left[-2 \sum y_t \sigma_{t'} \right] \right\rangle_{s\Phi, V}} =$$

$$= \sum_{m=0}^\infty \frac{(-2)^m}{m!} \sum_{t_1, \ldots, t_m} y_{t_1} \cdots y_{t_m} \langle \psi_T k_{\Gamma'}, \sigma_{t'_1}, \ldots, \sigma_{t'_m} \rangle_{s\Phi, V},$$

где

$$t_i \in \partial_1 V, \qquad |t'_i - t_i| = 1.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial s_\Gamma} \langle \psi_T k_{\Gamma'} \rangle_{s\Phi, V, y} = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-2)^m}{m!} \sum_{t_1, \ldots, t_m} y_{t_1} \cdots y_{t_m} \times$$

$$\times \sum_{\Delta_1, \ldots, \Delta_m} \langle \psi_T k_{\Gamma'}, \sigma_{t'_1}, \ldots, \sigma_{t'_m}, \Phi_{\Delta_1}, \ldots, \Phi_{\Delta_n} \rangle_{s\Phi, V}.$$

Пусть $\{t_1, \ldots, t_n\}$ может быть разбито на N групп g_i одинаковых точек с α_i точками в каждой группе. Тогда

$$\left\langle \sum{}' \frac{|y_{t_1} \cdots y_{t_m}|}{m!} \right\rangle_{V_1, b_1} \subseteq c_1 \prod_{i=1}^N \frac{\alpha_i^{\alpha_i/2}}{\alpha_i!} N^{\alpha_i/2} \leqslant c_2^N,$$

где в $\sum'$ суммирование ведется по всем $t_1, \ldots, t_m$ при заданных группах g_i (т. е. по всем перестановкам различных точек).

Оставшаяся часть доказательства протекает так же, как в § 7. От $\sigma_{t'_i}$ получаем множитель $c^N(L, \lambda)$, где $c(L, \lambda)$ может быть сделана как угодно малой выбором L и λ. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Glimm J., Jaffe A., Spencer T.* In: Constructive Field Theory. — «Lect. Notes Phys.», 1973, N 25.
2. *Рюэль Д.* Статистическая механика. Строгие результаты. М., «Мир», 1971.
3. *Добрушин Р. Л.* Теория вероятностей и ее применения, 1970, **15**, с. 469—497.
4. *Gruber G., Hintermann A., Merlini R.* — «Comm. Math. Phys.», 1975, **40**, N 2, p. 83—95.
5. *Duneau M., Jagolnitzer D., Souillard B.* — «Comm. Math. Phys.», 1973, **31**, N 3, p. 191—208.
6. *Duneau M., Jagolnitzer D., Souillard B.* — «Comm. Math. Phys.», 1974, **35**, N 4, p. 307—320.
7. *Eckmann J.-P., Magnen J., Seneor R.* — «Comm. Math. Phys.», 1975, **39**, N 4, p. 251—272.

■

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ СИЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Б. С. Нахапетян

Пусть ξ_t, $t \in \mathbf{Z}^\nu$ — случайное поле со значениями в некотором измеримом пространстве (X_t, σ_t) со стандартной σ-алгеброй σ_t его подмножеств. Стандартность σ-алгебры σ_t означает, что существует сепарабельное полное метрическое пространство $\widetilde{X}_t \supset X_t$, такое, что X_t является борелевским подмножеством в $\widetilde{X}_t$, и σ-алгебра σ_t совпадает с совокупностью борелевских подмножеств $\widetilde{X}_t$, содержащихся в X_t. Предполагается, что все пространства (X_t, σ_t), $t \in \mathbf{Z}^\nu$, являются экземплярами одного и того же пространства (X, σ). При любом $J \subset \mathbf{Z}^\nu$ через (X_J, σ_J) будем обозначать произведение про-