ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 43 2007 Вып. 4

УДК 621.391.1:519.2

© 2007 г. **А.А. Замятин, В.А. Малышев**

НАКОПЛЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

Рассматривается бесконечная система частиц на полупрямой, движущихся независимо друг от друга. При попадании на границу одной из частиц частица исчезает, а граница сдвигается вправо на некоторую величину (размер частицы). Исследуется скорость движения (роста) границы. Возможные применения – динамика роста автомобильной пробки, рост тромба в сосуде, эпитаксия. Нетривиальная математика связана с корреляцией движения частиц с движением границы.

§ 1. Введение

Задача о достижении границы блуждающей частицей является классической задачей теории вероятностей. Более сложной является задача о достижении частицей движущейся границы (см. [1]). Здесь мы рассматриваем случай, когда движение границы коррелировано с движением частиц. Именно, мы рассматриваем бесконечную систему блуждающих частиц на положительной полупрямой, которые при достижении границы прилипают к ней. Кроме того, при попадании одной из частиц на границу граница сдвигается вправо на величину "размера" частицы. Таким образом, граница сдвигается за счет накопления частиц на ней. Насколько нам известно, такие задачи ранее не рассматривались.

Подобные задачи часто встречаются в приложениях – рост тромба, эпитаксия и другие способы напыления частиц на поверхность. Во многих случаях при расчетах эффектом корреляции движения частиц и границы можно пренебречь. Здесь, наоборот, мы исследуем влияние этой корреляции на скорость роста границы. Такие эффекты можно наблюдать, например, при быстром образовании автомобильной пробки.

В статье имеются два результата: первый – для ненулевого сноса частиц, второй – для нулевого. В первом случае удается найти точный асимптотический рост границы. Во втором удается получить только порядок роста.

§ 2. Постановка задачи и результат

Мы рассматриваем бесконечную систему частиц на полупрямой, которые, попадая на границу, прилипают к ней (накапливаются на ней), в результате чего граница сдвигается вправо. Дадим точную постановку.

Пусть в момент 0 на полупрямой $\mathbb{R}_+$ в точках

$$0 \le x_1 = x_1(0) < \ldots < x_n = x_n(0) < \ldots$$

находятся частицы, которые образуют точечный пуассоновский процесс с плотностью λ.

Каждая из частиц до достижения границы движется независимо от остальных по закону

$$x_i(t) = x_j - vt + w_j(t), \tag{1}$$

где $v \geq 0$ – постоянный снос, а $w_i(t)$ – стандартный винеровский процесс с нулевым средним. При столкновении с границей частицы поглощаются и исчезают, при этом граница сдвигается на некоторую величину δ – "размер частицы".

Точнее, граница, которая в момент $t = 0$ совпадает с точкой $0 \in \mathbb{R}_+$, также движется. Закон $\xi(t)$ ее движения моделирует налипание частиц на границу. Именно, $\xi(0) = 0$, а $\xi(t)$ является неубывающей кусочно-постоянной функцией со скачками

$$\xi(t_j + 0) = \xi(t_j) + \delta k_j$$

в случайные моменты времени

$$0 \leq t_1 < \ldots < t_j < \ldots$$

При этом $\delta > 0$ – константа ("размер частицы"), а моменты t_j и неотрицательные целые числа k_j определяются следующей рекуррентной процедурой. Пусть t_1 – первый момент, когда одна из частиц попадает в точку 0, тогда k_1 – минимальное целое $k > 0$, такое что в интервале $(0, k\delta]$ в момент t_1 находится не более $k-1$ частицы. Например, $k = 1$ тогда и только тогда, когда в момент t_1 в интервале $(0, \delta]$ нет частиц. Далее по индукции t_{n+1} определяется как первый момент, когда одна из оставшихся частиц попадает в точку $(k_1 + \ldots + k_n)\delta$, а k_{n+1} определяется, соответственно, как минимальное целое $k > 0$, такое что в интервале $(\xi(t_n), k\delta]$ в момент t_{n+1} находится не более $k - 1$ частицы.

Ниже мы докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $\lambda < \delta^{-1}$, то с вероятностью 1 все k_i и t_i конечны, и более того, $t_i \to \infty$. Наоборот, если $\lambda > \delta^{-1}$, то граница с положительной вероятностью уходит в бесконечность за конечное время.*

Теперь мы сформулируем основной результат. Пусть $N = N(t)$ – число частиц, поглощенных границей к моменту времени t, тогда $\xi = \xi(t) = \delta N(t)$ – положение границы к моменту времени t.

Теорема. *Пусть $\lambda < \delta^{-1}$. Если $v > 0$, то движение границы является асимптотически линейным, т.е. при $t \to \infty$ п.н.*

$$\frac{\xi(t)}{t} \to V = v\frac{\delta\lambda}{1 - \delta\lambda}.$$

Если же $v = 0$, то при достаточно больших t

$$C_0 \leq \frac{MN(t)}{\sqrt{t}} \leq C$$

для некоторых констант

$$\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}} < C_0 < C < \infty.$$

Замечание. Ниже будет показано, что если граница не сдвигается при ударах частиц и снос $v = 0$, то среднее число соударений частиц с границей за время t равно $\lambda\sqrt{\frac{2t}{\pi}}$. Из второго утверждения теоремы, в частности, следует, что среднее число соударений частиц с границей в случае движения границы при ударах частиц асимптотически строго больше, чем среднее число соударений частиц с неподвижной границей. Можно предположить, что $\frac{MN(t)}{\sqrt{t}}$ стремится к константе для больших времен, и что, более того, распределение случайной величины $\frac{N(t)}{\sqrt{t}}$ при $t \to \infty$ сходится к некоторому непрерывному распределению.

§ 3. Доказательства

Доказательство леммы 1. Для заданной конфигурации $X = \{x_i(0)\}$ обозначим через $p(X, n)$ вероятность того, что первой достигнет нуля частица $x_n(0)$.

Для доказательства первой части леммы введем такую вспомогательную модель. В момент $t = 0$ к конфигурации частиц на положительной полуоси добавим пуассоновскую конфигурацию Y на отрицательной полуоси, с такой же интенсивностью λ. Тогда получится пуассоновская конфигурация на всей прямой $\mathbb{R}$, все эти частицы назовем красными. Кроме того, есть еще одна (синяя) частица, которую с вероятностью $p(X, n)$ мы поместим в точку $x_n(0) > 0$. Частицы движутся согласно (1) независимо друг от друга. В момент $t = 0$ в точке $\xi'(0) = 0$ находится граница. Случайная величина t'_1 определяется как первый момент попадания синей частицы в точку 0, а k'_1 определяется так же, как и раньше. Отличие от основной модели состоит в том, что граница никак не влияет на сами частицы. Поэтому в каждый момент времени t система красных частиц $y_i(t)$, $-\infty < i < \infty$, образует пуассоновское поле (см. [2, теорема Добрушина–Дуба]). Более того, в случайный момент t'_1 красные частицы будут образовывать пуассоновское поле.

Обозначим через $\xi'(t)$ положение границы во вспомогательной модели в момент времени t. Тогда для всех t почти наверное $\xi'(t) \geq \xi(t)$. В частности, $k'_1 \geq k_1$ п.н. Действительно, пусть Ω – вероятностное пространство вспомогательной модели. Основная модель лежит в этом же пространстве, так как получается из вспомогательной удалением синей частицы и красных частиц, лежащих левее 0. Поэтому во вспомогательной модели п.н. число ударов частиц о границу не меньше, чем в исходной.

Докажем, что k'_1 конечно п.н. для всех n. Случайная величина k'_1 определяется случайным моментом остановки следующей вспомогательной цепи Маркова $m_1, \ldots, m_i, \ldots$ с дискретным временем и множеством состояний $\mathbb{Z}_+$. Состояние 0 является поглощающим. Обозначим через m_1 число частиц в отрезке $[0, \delta]$ в момент t_1, через m_2 – число частиц в отрезке $[\delta, (m_1 + 1)\delta]$, если $m_1 > 0$, через m_3 – число частиц в отрезке $[(m_1 + 1)\delta, (m_1 + 1)\delta + m_2\delta]$, если $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, и т.д. Последовательность m_i образует однородную марковскую цепь с переходными вероятностями

$$p_{m_i m_{i+1}} = \frac{(m_i \lambda \delta)^{m_{i+1}}}{m_{i+1}!} e^{-m_i \lambda \delta}.$$

Граница остановится, когда $m_i = 0$. Приращение за один шаг равно

$$M(m_{i+1} - m_i | m_i = k) = k(\lambda\delta - 1).$$

Цепь попадает в 0 с вероятностью 1, если $\lambda\delta - 1 < 0$.

По индукции, используя такой же трюк с добавлением новой синей частицы в каждый из моментов t'_i, следует конечность всех k'_i.

Второе утверждение леммы не используется при доказательстве теоремы 1. Нам будет удобно доказать его в конце статьи после доказательства основной теоремы.

Идея доказательства теоремы. Можно записать следующие два соотношения между случайными величинами $\xi(t)$ и $N(t)$:

$$\xi(t) = N(t)\delta, \tag{2}$$
$$N(t) = n_0(t, \xi(t)) + n_1(t, \xi(t)), \tag{3}$$

где $n_0(t,\xi)$ – число частиц, которые в момент 0 были в интервале $[0,\xi]$ и были поглощены границей за время t, $n_1(t,\xi)$ – число частиц, которые были в момент 0 правее точки ξ и были поглощены границей до момента t. Мы получаем уравнение на ξ

$$\delta^{-1}\xi(t) = n_0(t,\xi(t)) + n_1(t,\xi(t)),$$

если у нас есть хорошие выражения для n_0 и n_1.

Первый результат теоремы может быть пояснен случаем, когда при ненулевом сносе отсутствуют флуктуации. Точнее, частицы, расположенные первоначально в точках $\lambda^{-1}k$ для целых k, движутся с постоянной скоростью v. Тогда из уравнений (2), (3) имеем

$$\xi = N\delta, N = [\xi\lambda] + [\lambda vt]. \tag{4}$$

Отсюда

$$N - [\lambda N\delta] = [\lambda vt],$$
$$N = N(t) = \frac{[\delta\lambda vt]}{1 - \frac{1}{N}[N\delta\lambda]} \sim \frac{\delta\lambda vt}{1-\delta\lambda}$$

при больших t. Поэтому

$$\frac{\xi(t)}{t} \to V = v\frac{\delta\lambda}{1-\delta\lambda}.$$

3.1. Случай ненулевого сноса. Возьмем произвольное $\epsilon > 0$, так что $(\lambda+\epsilon)\delta < 1$. Пусть $c_\epsilon = (1-(\lambda+\epsilon)\delta)^{-1}(\lambda+\epsilon)(v+\epsilon)$. Представим событие $A(t) = \{N(t,\omega) > c_\epsilon t\}$ в виде объединения

$$A(t) = \bigcup_n B(n,t),$$

где $B(n,t)$ – событие, состоящее в том, что к моменту времени t границей было поглощено ровно n частиц, находившихся первоначально в интервале $(0, c_\epsilon t\delta + (v+\epsilon)t)$, и более чем $m = c_\epsilon t - n$ частиц, находившихся первоначально в интервале $(c_\epsilon t\delta + (v+\epsilon)t, \infty)$. Обозначим через $B_\epsilon(t)$ объединение событий $B(n,t)$ с $n \geq (\lambda+\epsilon)(\delta c_\epsilon t + (v+\epsilon)t) = c_\epsilon t$. Событие $B_\epsilon(t)$ имеет экспоненциально малую вероятность, так как оно принадлежит событию $C_\epsilon(t)$, состоящему в том, что в момент 0 в интервале $(0, c_\epsilon t\delta + (v+\epsilon)t)$ было не менее чем $(\lambda+\epsilon)(\delta c_\epsilon t + (v+\epsilon)t) = c_\epsilon t$ частиц. Вероятность же последнего события оценивается по распределению Пуассона:

$$\mathbf{P}(C_\epsilon(t)) \leq C_0 e^{-h(\epsilon)t}, \tag{5}$$

где константа C_0 зависит от λ и ϵ, $h(\epsilon) > 0$.

Обозначим через $D_\epsilon(t)$ объединение событий $B(n,t)$ с $n < (\lambda+\epsilon)(\delta c_\epsilon t + (v+\epsilon)t) = c_\epsilon t$. Событие $D_\epsilon(t)$ принадлежит событию, состоящему в том, что хотя бы одна частица из числа частиц, находившихся первоначально в интервале $(c_\epsilon t\delta + (v+\epsilon)t, \infty)$, за время t поглотится границей. Это последнее событие, в свою очередь, принадлежит событию $J_\epsilon(t)$, состоящему в том, что хотя бы одна частица из числа частиц, находившихся первоначально в интервале $(c_\epsilon t\delta + (v+\epsilon)t, \infty)$, побывала левее точки $c_\epsilon t\delta$ за время t. Таким образом,

$$A(t) \subset C_\epsilon(t) \cup J_\epsilon(t).$$

Вероятность события $J_\epsilon(t)$ можно оценить сверху математическим ожиданием числа частиц, находившихся первоначально в интервале $(c_\epsilon t\delta + (v+\epsilon)t, \infty)$ и побывавших левее точки $c_\epsilon t\delta$ за время t:

$$\mathbf{P}(J_\epsilon(t)) \leq \lambda \int\limits_{c_\epsilon t\delta+(v+\epsilon)t}^{\infty} p(t,x)dx,$$

где $p(t,x)$ – вероятность того, что частица, стартовавшая в точке x, $x > c_\epsilon t\delta+(v+\epsilon)t$, за время t побывает левее точки $c_\epsilon t\delta$. Более точно,

$$p(t,x) = \mathbf{P}\left(\min_{s\leq t}(x - vs + w(s)) \leq c_\epsilon t\delta\right). \tag{6}$$

Из определения винеровского процесса следует, что

$$\mathbf{P}\left(\min_{s\leq t}(x - vs + w(s)) \leq c_\epsilon t\delta\right) = \mathbf{P}\left(\min_{s\leq t}(-vs + w(s)) \leq -x + c_\epsilon t\delta\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\max_{s\leq t}(vs + w(s)) \geq x - c_\epsilon t\delta\right).$$

Чтобы найти $p(t,x)$, воспользуемся хорошо известной формулой для распределения максимума винеровского процесса со сносом (см., например, [1, с. 935]):

$$\mathbf{P}\left(\max_{s\leq t}(vs + w(s)) \geq x\right) = 1 - \Phi\left(\frac{x - vt}{\sqrt{t}}\right) + e^{2vx}\Phi\left(\frac{-x - vt}{\sqrt{t}}\right), \tag{7}$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2}dy$. Поэтому

$$\mathbf{P}(J_\epsilon(t)) \leq \lambda \int\limits_{c_\epsilon t\delta+(v+\epsilon)t}^{\infty} \overline{\Phi}\left(\frac{x - c_\epsilon t\delta - vt}{\sqrt{t}}\right) dx +$$
$$+\lambda \int\limits_{c_\epsilon t\delta+(v+\epsilon)t}^{\infty} e^{2vx}\Phi\left(\frac{-x + c_\epsilon t\delta - vt}{\sqrt{t}}\right) dx = I_1(\epsilon,t) + I_2(\epsilon,t), \tag{8}$$

где $\overline{\Phi} = 1 - \Phi$. После замены переменных $z = \frac{x - c_\epsilon t\delta - vt}{\sqrt{t}}$ в первом интеграле в формуле (8) получаем

$$I_1(\epsilon,t) = \lambda\sqrt{t} \int\limits_{\epsilon\sqrt{t}}^{\infty} \overline{\Phi}(z)dz \leq \lambda\sqrt{\frac{t}{2\pi}}e^{-\frac{\epsilon^2 t}{2}}$$

при $\epsilon\sqrt{t} > 1$.

Сделав замену переменных $z = \frac{x - c_\epsilon t\delta + vt}{\sqrt{t}}$ во втором интеграле в формуле (8), найдем

$$I_2(\epsilon,t) = \lambda\sqrt{t}e^{-2v^2t} \int\limits_{(2v+\epsilon)\sqrt{t}}^{\infty} e^{2v\sqrt{t}z}\Phi(-z)dz = \lambda\sqrt{t}e^{-2v^2t} \int\limits_{(2v+\epsilon)\sqrt{t}}^{\infty} e^{2v\sqrt{t}z}\overline{\Phi}(z)dz.$$

При $\epsilon\sqrt{t} > 1$ имеем

$$I_2(\epsilon,t) \le \lambda\sqrt{\frac{t}{2\pi}} \int\limits_{(2v+\epsilon)\sqrt{t}}^{\infty} e^{-(z^2/2-2vz\sqrt{t}+2v^2t)}dz =$$

$$= \lambda\sqrt{\frac{t}{2\pi}} \int\limits_{(2v+\epsilon)\sqrt{t}}^{\infty} e^{-(z-2v\sqrt{t})^2/2}dz = \lambda\sqrt{t}\overline{\Phi}(\epsilon\sqrt{t}) \le \lambda\sqrt{\frac{t}{2\pi}}e^{-\frac{\epsilon^2 t}{2}}.$$

Таким образом, можно утверждать, что при $\epsilon\sqrt{t} > 1$

$$\mathbf{P}(J_\epsilon(t)) \le \lambda\sqrt{\frac{2t}{\pi}}e^{-\frac{\epsilon^2 t}{2}}. \tag{9}$$

Поскольку событие $A(t)$ принадлежит объединению событий $C_\epsilon(t)$ и $J_\epsilon(t)$, то используя оценки (5) и (9), получаем, что для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(N(t) > \frac{(\lambda+\epsilon)(v+\epsilon)t}{1-(\lambda+\epsilon)\delta}\right) = O\left(e^{-\alpha_1(\epsilon)t}\right) \tag{10}$$

при некотором $\alpha_1(\epsilon) > 0$.

Рассмотрим теперь событие $A'(t) = \{N(t,\omega) < c'_\epsilon t\}$, где $c'_\epsilon = (1-(\lambda-\epsilon)\delta)^{-1}(\lambda-\epsilon)(v-\epsilon)$. Введем событие $C'_\epsilon(t)$, состоящее в том, что в момент 0 в интервале $(0, c'_\epsilon t\delta + (v-\epsilon)t)$ было не больше чем $(\lambda-\epsilon)(\delta c'_\epsilon t + (v-\epsilon)t) = c'_\epsilon t$ частиц, и пусть $\overline{C}'_\epsilon(t)$ – дополнение события $C'_\epsilon(t)$. Представим событие $A'(t)$ в виде объединения

$$A'(t) = B'_\epsilon(t) \cup D'_\epsilon(t),$$

где $B'_\epsilon(t) = A'(t)\cap C'_\epsilon(t)$ и $D'_\epsilon(t) = A'(t)\cap \overline{C}'_\epsilon(t)$. Событие $B'_\epsilon(t)$ имеет экспоненциально малую вероятность, поскольку принадлежит событию $C'_\epsilon(t)$, вероятность которого оценивается по распределению Пуассона:

$$\mathbf{P}(C'_\epsilon(t)) \le C'_0 e^{-h'(\epsilon)t}, \tag{11}$$

где константа C'_0 зависит от λ и ϵ, $h'(\epsilon) > 0$.

Событие $D'_\epsilon(t)$ принадлежит событию $J'_\epsilon(t)$, состоящему в том, что хотя бы одна частица, находившаяся первоначально в интервале $(0, c'_\epsilon t\delta + (v-\epsilon)t)$, не поглотится границей за время t. Вероятность события $J'_\epsilon(t)$ можно оценить сверху математическим ожиданием числа частиц, находившихся первоначально в интервале $(0, c'_\epsilon t\delta + (v-\epsilon)t)$ и отклонившихся более чем на ϵt от расчетной точки (если в начальный момент времени частица находится в точке x, то ее расчетной точкой является $x - vt$) в момент времени t:

$$\mathbf{P}(J'_\epsilon(t)) \le \lambda \int\limits_0^{c'_\epsilon t\delta+(v-\epsilon)t} p'(t,x)dx,$$

где $p'(t,x)$ – вероятность того, что частица, стартовавшая в точке x, $x < c'_\epsilon t\delta + (v-\epsilon)t$, в момент времени t окажется вне интервала $(x - vt - \epsilon t, x - vt + \epsilon t)$, т.е.

$$p'(t,x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{x-(v+\epsilon)t}^{x-(v-\epsilon)t} e^{-\frac{(y-x+vt)^2}{2t}}dy.$$

После замены переменных $z = \dfrac{y - x + vt}{\sqrt{t}}$ находим

$$p'(t,x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\epsilon\sqrt{t}}^{\epsilon\sqrt{t}} e^{-\frac{z^2}{2}} dy = 2\overline{\Phi}(\epsilon\sqrt{t}).$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(J'_\epsilon(t)) \le C_\epsilon t e^{-\frac{\epsilon^2 t}{2}}.$$

Принимая во внимание (11), получаем, что для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(N(t) < \frac{(\lambda - \epsilon)(v - \epsilon)t}{1 - (\lambda - \epsilon)\delta}\right) = O\left(e^{-\alpha_2(\epsilon)t}\right) \tag{12}$$

при некотором $\alpha_2(\epsilon) > 0$, что вместе с (10) доказывает первое утверждение теоремы.

3.2. Нулевой снос. Здесь мы докажем второе утверждение теоремы.

Начнем с "тривиальной" оценки снизу, где мы оцениваем просто число ударов частиц о неподвижную границу. Рассмотрим вспомогательную модель, в которой граница не сдвигается при ударах частиц, а частицы исчезают после столкновения с границей. Пусть $L(t)$ – число соударений с барьером за время t в этой модели. Очевидно имеем $L(t) \le N(t)$ почти наверное. Обозначим через $K_0(t) = K_0(t,d)$ число частиц, которые за время t не достигли 0 и в момент t оказались левее точки $d\sqrt{t}$, где $d > 0$. Положим $K(t) = N(t) - L(t)$. Если выполнено условие $\delta L(t) \ge d\sqrt{t}$, то $K(t) \ge K_0(t)$, поскольку в случае движения границы все частицы, попавшие к моменту времени t внутрь отрезка $[0, \delta L(t)]$, были бы поглощены движущейся границей. Поэтому можно утверждать, что

$$\mathbf{M}\, K(t) \ge \mathbf{M}\, K_0(t) I(L(t) \ge d\sqrt{t}), \tag{13}$$

где $I(L(t) \ge d\sqrt{t})$ – индикатор соответствующего события.

Найдем совместное распределение случайных величин $L(t)$ и $K_0(t)$. Начнем со средних значений. Пусть $p(t,x)$ – вероятность того, что частица, которая в начальный момент времени находится в точке x, за время t дойдет до границы:

$$p(t,x) = \mathbf{P}\left(\min_{s \le t}(x + w(s)) \le 0\right).$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\left(\min_{s \le t}(x + w(s)) \le 0\right) = \mathbf{P}\left(\min_{s \le t} w(s) \le -x\right) = \mathbf{P}\left(\max_{s \le t} w(s) \ge x\right),$$

то по формуле (7) с $v = 0$ имеем

$$p(t,x) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 2\overline{\Phi}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Покажем, что при нулевом сносе ($v = 0$)

$$\mathbf{M}\, L(t) = \lambda\sqrt{\frac{2t}{\pi}}.$$

В самом деле, имеем

$$\mathbf{M}\, L(t) = \lambda \int_0^\infty p(t,x)dx = 2\lambda \int_0^\infty \overline{\Phi}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = 2\lambda\sqrt{t} \int_0^\infty \overline{\Phi}\,(x)\, dx = \lambda\sqrt{\frac{2t}{\pi}},$$

где последний интеграл проинтегрирован по частям:

$$\int_0^\infty \overline{\Phi}\,(x)\, dx = \int_0^\infty x d\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Найдем $\mathbf{M}\, K_0(t)$. Обозначим через $\sigma(t,x)$ вероятность того, что частица, находившаяся в начальный момент времени в точке x, за время t не достигнет 0 и в момент времени t будет левее $d\sqrt{t}$. Другими словами,

$$\sigma(t,x) = \mathbf{P}\left(x + \min_{[0,t]} w_s > 0, x + w_t < d\sqrt{t}\right) = \mathbf{P}\left(\max_{[0,t]} w_s < x, w_t > x - d\sqrt{t}\right).$$

Вероятность $\sigma(t,x)$ можно также записать следующим образом:

$$\sigma(t,x) = \mathbf{P}(w_t > x - d\sqrt{t}) - 2\mathbf{P}(w_t > x) + \mathbf{P}\left(\max_{[0,t]} w_s > x, w_t < x - d\sqrt{t}\right),$$

где согласно [3, с. 45] имеем

$$\mathbf{P}\left(\max_{[0,t]} w_s > x, w_t < x - d\sqrt{t}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int_{-\infty}^{x-d\sqrt{t}} da \int_x^\infty (2b-a) e^{-(2b-a)^2/2t} db =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x-d\sqrt{t}} e^{-(2x-u)^2/2t} du = \overline{\Phi}\left(\frac{x+d\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right).$$

Используя эту формулу, находим

$$\sigma(t,x) = \overline{\Phi}\left(\frac{x-d\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right) - 2\overline{\Phi}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \overline{\Phi}\left(\frac{x+d\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right),$$

и следовательно,

$$\mathbf{M}\, K_0(t) = \int_0^\infty \sigma(t,x)dx = \sqrt{t}\left(\int_{-d}^\infty \overline{\Phi}(x)dx - 2\int_0^\infty \overline{\Phi}(x)dx + \int_d^\infty \overline{\Phi}(x)dx\right) = \sigma\sqrt{t},$$

где константа

$$\sigma = \int_{-d}^\infty \overline{\Phi}(x)dx - 2\int_0^\infty \overline{\Phi}(x)dx + \int_d^\infty \overline{\Phi}(x)dx = \int_{-d}^0 \overline{\Phi}(x)dx - \int_0^d \overline{\Phi}(x)dx.$$

Лемма 2. *Случайные величины $L(t)$ и $K_0(t)$ независимы. $L(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda\sqrt{\frac{2t}{\pi}}$, а $K_0(t)$ – пуассоновское распределение с параметром $\sigma\sqrt{t}$.*

Доказательство. Пусть $\pi_n(a)$ – пуассоновское распределение с параметром λa, $L(a,t)$ – число частиц, которые находились в интервале $(0,a)$ в момент времени $t=0$ и за время t были поглощены границей, $K_0(a,t)$ – число частиц, которые находились в интервале $(0,a)$ в момент времени $t=0$, за время t не достигли 0 и к моменту времени t оказались левее точки $d\sqrt{t}$. Положим

$$q(t,x) = 1 - p(t,x) - \sigma(t,x).$$

Найдем совместное распределение случайных величин $L(a,t)$ и $K_0(a,t)$:

$$\mathbf{P}(L(a,t)=k, K_0(a,t)=m) =$$
$$= \sum_{n=k+m}^{\infty} \pi_n(a) a^{-n} \sum \int_0^a \ldots \int_0^a \prod_{l=1}^{k} p(t,x_{i_l})dx_{i_l} \prod_{l=1}^{m} \sigma(t,x_{j_l})dx_{j_l} \prod_{l=1}^{n-k-m} q(t,x_{r_l})dx_{r_l},$$

где внутренняя сумма берется по всем таким упорядоченным наборам $i_1 < \ldots < i_k$ и $j_1 < \ldots < j_m$ длины k и m соответственно, что $\{i_1 < \ldots < i_k\} \cap \{j_1 < \ldots < j_m\} = \emptyset$. Здесь

$$\{r_1 < \ldots < r_{n-k-m}\} = \{1,\ldots,n\} \setminus \{i_1 < \ldots < i_k\} \cup \{j_1 < \ldots < j_m\}.$$

Поскольку внутренняя сумма состоит из

$$\frac{n!}{k!m!(n-k-m)!}$$

одинаковых слагаемых $(\widehat{p}(t,a))^k (\widehat{\sigma}(t,a))^m (\widehat{q}(t,a))^{n-k-m}$, где $\widehat{p}(t,a) = \int_0^a p(t,x)\,dx$, $\widehat{\sigma}(t,a) = \int_0^a \sigma(t,x)dx$ и $\widehat{q}(t,a) = \int_0^a q(t,x)dx$, то

$$\mathbf{P}(L(a,t)=k, K_0(a,t)=m) =$$
$$= \sum_{n=k+m}^{\infty} \pi_n(a) a^{-n} \frac{n!}{k!m!(n-k-m)!} (\widehat{p}(t,a))^k (\widehat{\sigma}(t,a))^m (\widehat{q}(t,a))^{n-k-m} =$$
$$= \frac{(\lambda\widehat{p}(t,a))^k}{k!} \frac{(\lambda\widehat{\sigma}(t,a))^m}{m!} e^{-\lambda a} \sum_{n=k+m}^{\infty} \frac{(\lambda\widehat{q}(t,a))^{n-k-m}}{(n-k-m)!} =$$
$$= \frac{(\lambda\widehat{p}(t,a))^k e^{-\lambda\widehat{p}(t,a)}}{k!} \frac{(\lambda\widehat{\sigma}(t,a))^m e^{-\lambda\widehat{\sigma}(t,a)}}{m!}.$$

Чтобы получить совместное распределение $L(t)$ и $K_0(t)$, устремим a к бесконечности. В пределе получим прямое произведение пуассоновских распределений с параметрами $\lambda\sqrt{\frac{2t}{\pi}}$ и $\sigma\sqrt{t}$, поскольку $\widehat{p}(t,a) \to \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$ и $\widehat{\sigma}(t,a) \to \sigma\sqrt{t}$ при $a \to \infty$. Лемма доказана.

Докажем теперь, что константа в оценке снизу в действительности больше тривиальной. Выберем $d > 0$, так что $d < \delta \mathbf{M}\, L(t)/\sqrt{t}$. В силу (13) и независимости случайных величин $L(t)$ и $K_0(t)$ имеем

$$\mathbf{M}\, K(t) \geq \mathbf{M}\, K_0(t) \mathbf{P}\,(L(t) \geq d\sqrt{t})$$

и

$$\mathbf{M}\, K_0(t) \mathbf{P}\,(L(t) \geq d\sqrt{t}) = \sigma\sqrt{t} - \mathbf{M}\, K_0(t) \mathbf{P}\,(L(t) < d\sqrt{t}).$$

Поскольку при данном выборе d вероятность события $L(t) < d\sqrt{t}$ экспоненциально мала

$$\mathbf{P}\left(L(t) < d\sqrt{t}\right) \le C_4 e^{-\phi\sqrt{t}},$$

то можно утверждать, что $\mathbf{M}\, K_0(t)P(L(t) \ge d\sqrt{t}) \ge \sigma_0\sqrt{t}$ при некоторой константе $\sigma_0 > 0$, где $\sigma_0 < \sigma$.

Докажем оценку сверху во втором утверждении теоремы. Нашей целью будет оценить сверху вероятность $\mathbf{P}\left(N(t) > x\sqrt{t}\right)$. Выберем произвольное $\epsilon > 0$, так чтобы $(\lambda + \epsilon)\delta < 1$. Представим событие $A(t, N) = \{N(t, \omega) = N\}$ в виде объединения событий

$$A(t, N) = \bigcup_{n \le N} B_0(N, n, t),$$

где $B_0(N, n, t)$ – событие, состоящее в том, что границей было поглощено ровно n частиц из числа частиц, находившихся первоначально в интервале $(0, N\delta)$ и ровно $m = N - n$ частиц из числа частиц, находившихся первоначально в интервале $(N\delta, \infty)$. Обозначим через $B_{0,\epsilon}(N, t)$ объединение событий $B_0(N, n, t)$ с $n > (\lambda + \epsilon)\delta N$. Событие $B_{0,\epsilon}(N, t)$ имеет экспоненциально малую вероятность, поскольку это событие принадлежит событию $C_{0,\epsilon}(N)$, что в момент 0 в интервале $(0, N\delta)$ было более чем $(\lambda + \epsilon)\delta N$ частиц. Вероятность же последнего события оценивается по распределению Пуассона:

$$\mathbf{P}\left(C_{0,\epsilon}(N)\right) \le C_0 e^{-h(\epsilon)N}, \tag{14}$$

где $h(\epsilon) > 0$ и C_0 – константа, зависящая только от λ, ϵ.

Обозначим через $D_{0,\epsilon}(N, t)$ объединение событий $B_0(N, n, t)$ с $n < (\lambda + \epsilon)\delta N$. Из предыдущих рассуждений следует, что событие $D_{0,\epsilon}(N, t)$ эквивалентно событию

$$m = N - n > N(1 - (\lambda + \epsilon)\delta).$$

В то же время, событие $m > N(1-(\lambda+\epsilon)\delta)$ принадлежит событию, состоящему в том, что из числа частиц, находившихся в момент 0 правее $N\delta$, более $N(1-(\lambda+\epsilon)\delta)$ частиц побывало за время t левее $N\delta$. Обозначим последнее событие через $J_{0,\epsilon}(N, t)$, а число частиц, находившихся в момент 0 правее $N\delta$ и побывавших за время t левее $N\delta$, обозначим через $\kappa(t)$ (т.е. $\mathbf{P}\left(J_{0,\epsilon}(N, t)\right) = \mathbf{P}\left(\kappa(t) > N(1 - (\lambda + \epsilon)\delta)\right)$). Распределение этой случайной величины не зависит от N и совпадает с распределением случайной величины $L(t)$, рассмотренной выше. В силу леммы 2 и свойств пуассоновского распределения имеем оценку

$$\mathbf{P}\left(\kappa(t) > y\sqrt{t}\right) \le C_1 e^{-\beta\sqrt{t}}, \tag{15}$$

справедливую при некотором $\beta > 0$, $y \ge y_0 > \lambda\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ и константе C_1, зависящей от y_0.

Поскольку событие $A(t, N)$ принадлежит объединению событий $C_{0,\epsilon}(N)$ и $J_{0,\epsilon}(N, t)$, то

$$\mathbf{P}\left(N(t) > x\sqrt{t}\right) \le \sum_{N > x\sqrt{t}} \mathbf{P}\left(C_{0,\epsilon}(N)\right) + \sum_{N > x\sqrt{t}} \mathbf{P}\left(J_{0,\epsilon}(N, t)\right).$$

Ввиду (14) для первой суммы справедлива оценка

$$\sum_{N > x\sqrt{t}} \mathbf{P}\left(C_{0,\epsilon}(N)\right) = O\left(e^{-h(\epsilon)x\sqrt{t}}\right).$$

Вторая же сумма в силу (15) оценивается следующим образом:

$$\sum_{N>x\sqrt{t}} \mathbf{P}\left(J_{0,\epsilon}(N,t)\right) = \sum_{N>x\sqrt{t}} \mathbf{P}\left(\kappa(t) > (1-(\lambda+\epsilon)\delta)N\right) \le C_2 e^{-\beta(\epsilon)\sqrt{t}}$$

при некоторой константе $\beta(\epsilon) > 0$, $x > x_0 = y_0(1-(\lambda+\epsilon)\delta)^{-1}$ и константе C_2, зависящей от x_0. Отсюда следует, что при достаточно больших x

$$\mathbf{P}\left(N(t) > x\sqrt{t}\right) \le C_3 e^{-\gamma x\sqrt{t}}.$$

Следовательно, при достаточно больших t

$$\mathbf{M}\, N(t) \le C\sqrt{t}.$$

Теорема полностью доказана.

Доказательство второй части леммы 1. Рассмотрим сначала случай нулевого сноса. Найдем распределение конфигурации частиц в момент первого попадания одной из частиц в границу. Положим

$$\sigma(t,x,y)dy = \mathbf{P}\left(x + w_t \in dy, x + \min_{s\le t} w_t > 0\right), \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Таким образом, $\sigma(t,x,y)dy$ – вероятность того, что частица, находившаяся в момент времени $t=0$ в точке $x>0$, за время t не дойдет до 0 и в момент времени t будет находиться в интерале $(y, y+dy)$. В силу того, что распределение w_t совпадает с распределением $-w_t$, имеем

$$\sigma(t,x,y)dy = \mathbf{P}\left(x - w_t \in dy, x - \max_{s\le t} w_t > 0\right) = \mathbf{P}\left(w_t \in d(x-y), \max_{s\le t} w_t < x\right).$$

Для вычисления $\sigma(t,x,y)$ используем следующую формулу для совместного распределения (см., например, [3]):

$$\mathbf{P}\left(w_t \in da, \max_{s\le t} w_s \in db\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}}(2b-a)e^{-(2b-a)^2/2t} da\, db, \quad 0 \le b, \quad b \ge a.$$

Сделав замену переменной $u = (2b-x+y)^2/2t$, получим

$$\sigma(t,x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^3}} \int\limits_{\max(x-y,0)}^{x} (2b-x+y)e^{-(2b-x+y)^2/2t} db =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} \int\limits_{(x-y)^2/2t}^{(x+y)^2/2t} e^{-u} du = \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} \left(e^{-(x-y)^2/2t} - e^{-(x+y)^2/2t}\right).$$

Пусть τ – момент первого попадания одной из частиц в границу.

Лемма 3. *Плотность распределения случайной величины τ имеет вид*

$$\mathbf{P}\left(\tau \in dt\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\lambda\sqrt{2t/\pi}} dt.$$

При условии $\tau = t$ конфигурация частиц в момент времени t образует неоднородное пуассоновское поле с интенсивностью

$$\lambda\psi(t,y) = \lambda \int_0^\infty \sigma(t,x,y)dx = \lambda(\Phi(y/\sqrt{t}) - \Phi(-y/\sqrt{t})),$$

где $\Phi(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-z^2/2}dz.$

Доказательство. Пусть $B_1, \dots, B_l$ – набор, состоящий из l попарно непересекающихся интервалов положительной полупрямой.

Найдем совместное распределение $\mathbf{P}\,(\tau \in dt, \eta(t,B_i) = k_i, i = 1,\dots,l)$, где $\eta(t,B_i)$ – число частиц в интервале B_i в момент времени t. Пусть $\pi_n(a)$ – пуассоновское распределение с параметром λa, $\eta(a,t,B_i)$ – число частиц, которые находились в интервале $(0,a)$ в момент времени $t = 0$ и в момент времени t оказались в B_i. Пусть $\tau(a)$ – первый момент времени, когда одна из частиц, находившаяся в интервале $(0,a)$ в момент времени $t = 0$, попадает в границу. Обозначим через $g(t,x)$ плотность распределения случайной величины β_x – времени первого достижения частицей 0 при условии, что в момент $t = 0$ частица находилась в точке x. Хорошо известно (см., например, [3]), что

$$g(t,x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-x^2/2t}.$$

Найдем совместное распределение случайных величин $\eta(a,t,B_i)$, $i = 1,\dots,l$, и $\tau(a)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\tau(a) \in dt, \eta(a,t,B_i) = k_i, i = 1,\dots,l) = \\
&= \sum_{n=1+k_1+\ldots+k_l}^{\infty} \pi_n(a) a^{-n} \sum \int_0^a \dots \int_0^a g(t,x_m)dt\,dx_m \times \\
&\times \prod_{j=1}^{l} \prod_{s=1}^{k_j} dx_{i_{j,s}} \int\limits_{y \in B_j} \sigma(t,x_{i_{j,s}},y)dy \prod_{s=1}^{n-1-k_1-\ldots-k_l} dx_{r_s} \int\limits_{y \in \mathbb{R}_+ \setminus \bigcup_{j=1}^{l} B_j} \sigma(t,x_{r_s},y)dy,
\end{aligned}$$

где внутренняя сумма берется по всем попарно непересекающимся упорядоченным наборам m, $i_{1,1} < \ldots < i_{1,k_1}$, $i_{2,1} < \ldots < i_{2.k_2}, \dots, i_{l,1} < \ldots < i_{l.k_l}$ длины $1, k_1, k_2, \dots$ $\dots, k_l$ соответственно. Здесь

$$\begin{aligned}
&\{r_1 < \ldots < r_{n-1-k_1-\ldots-k_l}\} = \\
&= \{1,\dots,n\} \setminus (\{m\} \cup \{i_{1,1} < \ldots < i_{1,k_1}\} \cup \ldots \cup \{i_{l,1} < \ldots < i_{l.k_l}\}).
\end{aligned}$$

Поскольку внутренняя сумма состоит из

$$\frac{n!}{k_1! \dots k_l!(n-1-k_1-\ldots-k_l)!}$$

одинаковых слагаемых $\widehat{g}(a,t)dt\prod\limits_{j=1}^{l}(\widehat{\sigma}(a,t,B_j))^{k_j}\left(\widehat{\sigma}(a,t,\mathbb{R}_+\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{l}B_j)\right)^{n-1-k_1-\ldots-k_l}$, где

$$\widehat{g}(t,a)=\int\limits_0^a g(t,x)dx,$$

$$\widehat{\sigma}(a,t,B_j)=\int\limits_0^a dx\int\limits_{y\in B_j}\sigma(t,x,y)dy,$$

то

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\tau(a)\in dt,\eta(a,t,B_i)=k_i,i=1,\ldots,l)=\\
&=\sum_{n=1+k_1+\ldots+k_l}^{\infty}\pi_n(a)a^{-n}\frac{n!}{k_1!\ldots k_l!(n-1-k_1-\ldots-k_l)!}\times\\
&\times\widehat{g}(a,t)dt\prod_{j=1}^{l}(\widehat{\sigma}(a,t,B_j))^{k_j}\left(\widehat{\sigma}(a,t,\mathbb{R}_+\setminus\bigcup_{j=1}^{l}B_j)\right)^{n-1-k_1-\ldots-k_l}=\\
&=\lambda\widehat{g}(a,t)dt\prod_{j=1}^{l}\frac{(\lambda\widehat{\sigma}(a,t,B_j))^{k_j}}{k_j!}e^{-\lambda a}\times\prod_{j=1}^{l}\frac{(\lambda\widehat{\sigma}(a,t,B_j))^{k_j}}{k_j!}e^{-\lambda a}\times\\
&\times\sum_{n=1+k_1+\ldots+k_l}^{\infty}\frac{\left(\lambda\widehat{\sigma}(a,t,\mathbb{R}_+\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{l}B_j)\right)^{n-1-k_1-\ldots-k_l}}{(n-1-k_1-\ldots-k_l)!}=\\
&=\lambda\widehat{g}(a,t)dt\prod_{j=1}^{l}\frac{(\lambda\widehat{\sigma}(a,t,B_j))^{k_j}}{k_j!}e^{-\lambda a+\lambda\widehat{\sigma}\left(a,t,\mathbb{R}_+\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{l}B_j\right)}.
\end{aligned}$$

Примем во внимание, что

$$\sum_{j=1}^{l}\widehat{\sigma}(a,t,B_j)+\widehat{\sigma}(a,t,\mathbb{R}_+\setminus\bigcup_{j=1}^{l}B_j)=\int\limits_0^a\mathbf{P}\,(\beta_x>t)dx=a-\int\limits_0^a\mathbf{P}\,(\beta_x<t)dx.$$

Тогда

$$-a+\widehat{\sigma}\left(a,t,\mathbb{R}_+\setminus\bigcup_{j=1}^{l}B_j\right)=-\sum_{j=1}^{l}\widehat{\sigma}(a,t,B_j)-\int\limits_0^a\mathbf{P}\,(\beta_x<t)dx.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\,(\tau(a)\in dt,\eta(a,t,B_i)=k_i,i=1,\ldots,l)=\\
&=\lambda\widehat{g}(a,t)e^{-\int\limits_0^a\mathbf{P}(\beta_x<t)dx}dt\prod_{j=1}^{l}\frac{(\lambda\widehat{\sigma}(a,t,B_j))^{k_j}}{k_j!}e^{-\lambda\widehat{\sigma}(a,t,B_j)}.
\end{aligned}$$

Чтобы получить совместное распределение τ и $\eta(t, B_i)$, устремим a к бесконечности. Тогда

$$\widehat{g}(a,t) \to \int_0^\infty g(t,x)dx = \sqrt{\frac{1}{2\pi t}},$$

$$\int_0^a \mathbf{P}(\beta_x < t)dx \to \int_0^\infty \mathbf{P}(\beta_x < t)dx = \sqrt{\frac{2t}{\pi}},$$

$$\widehat{\sigma}(a,t,B_j) \to \widehat{\sigma}(t,B_j) = \int_{y\in B_j} dy \int_0^\infty \sigma(t,x,y)dx = \int_{y\in B_j} dy\, \psi(t,y),$$

где $\psi(t,y) = \Phi(y/\sqrt{t}) - \Phi(-y/\sqrt{t})$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(\tau \in dt, \eta(t,B_i) = k_i, i = 1,\dots,l) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\lambda\sqrt{\frac{2t}{\pi}}} dt \prod_{j=1}^{l} \frac{(\lambda\widehat{\sigma}(t,B_j))^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda\widehat{\sigma}(t,B_j)}.$$

Лемма 3 доказана.

Докажем, что случайная величина k_1 может принимать бесконечные значения с положительной вероятностью. Предположим, что $\tau = t$. Обозначим через m_1 число частиц в отрезке $[0,\delta]$ в момент $\tau = t$, через m_2 – число частиц в момент времени $\tau = t$ в отрезке $D_1 = [\delta, (m_1+1)\delta]$, если $m_1 > 0$, через m_3 – число частиц в момент времени $\tau = t$ в отрезке $D_2 = [(m_1+1)\delta, (m_1+1)\delta + m_2\delta]$, если $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, и т.д. Последовательность пар $\mu_i = (m_{i-1}, m_i)$ образует однородную марковскую цепь с дискретным временем, переходные вероятности которой равны

$$p_{\mu_i\mu_{i+1}} = \frac{(\lambda\widehat{\sigma}(t,D_i))^{m_{i+1}}}{m_{i+1}!} e^{-\lambda\widehat{\sigma}(t,D_i)}.$$

Состояния вида $(m,0)$ являются поглощающими. Случайная величина k_1 определяется случайным моментом остановки цепи Маркова μ_i. Граница остановится, когда цепь попадет в одно из поглощающих состояний. Введем функцию Ляпунова $f(\mu_i) = m_i$. Приращение за один шаг равно

$$\mathbf{M}(f(\mu_{i+1}) - f(\mu_i)|\mu_i = (m_{i-1}, m_i)) = \lambda\widehat{\sigma}(t,D_i) - m_i =$$

$$= \lambda \int_{(m_{i-1}+1)\delta}^{(m_{i-1}+1)\delta + m_i\delta} \psi(t,y)dy - m_i.$$

Поскольку $\psi(t,y) \to 1$ при $y \to \infty$ и $\lambda\delta > 1$, то существует такое $\epsilon > 0$, что для достаточно больших m_{i-1}

$$\mathbf{M}(f(\mu_{i+1}) - f(\mu_i)|\mu_i = (m_{i-1}, m_i)) \geq \epsilon m_i.$$

Это означает транзиентность марковской цепи μ_i. Следовательно, $P(k_1 = \infty) > 0$.

Случай ненулевого сноса рассматривается аналогично. Более того, речь идет об оценке снизу, а интуитивно ясно, что добавление сноса только увеличивает вероятность того, что граница уйдет в бесконечность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. М.: ФАЗИС, 1998.
2. *Добрушин Р.Л.* О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве // Укр. мат. журн. 1956. Т. 8. № 2. С. 127–134.
3. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968.

Замятин Андрей Андреевич
Малышев Вадим Александрович
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
лаборатория больших случайных систем
andrei.zamyatin@mail.ru
malyshev2@yahoo.com

Поступила в редакцию
21.06.2007
После переработки
29.08.2007