РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Журнал имени А.Н.Колмогорова

ТОМ 53

(отдельный оттиск)

МОСКВА 2008

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965, 407 с.
2. *Aurzada F.* A short note on small deviations of sequences of i.i.d. random variables with exponentially decreasing weights. — Statist. Probab. Lett., 2008, v. 78, p. 2300–2307.
3. *Borovkov A. A., Ruzankin P. S.* Small deviations of series of independent positive random variables with weights close to exponential. — Siberian Adv. Math., 2008, v. 18, № 3, p. 163–175.
4. *Dunker T., Lifshits M. A., Linde W.* Small deviations probabilities of sums of independent random variables. — High Dimensional Probability. Basel: Birkhäuser, 1998, p. 59–74.
5. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах. — Успехи матем. наук, 1959, т. 14, № 2, с. 3–86.
6. *Kuelbs J., Li W. V.* Metric entropy and the small ball problem for Gaussian measures. — J. Funct. Anal., 1993, v. 116, № 1, p. 133–157.
7. *Li W. V., Linde W.* Approximation, metric entropy and small ball estimates for Gaussian measures. — Ann. Probab., 1999, v. 27, № 3, 1556–1578.
8. *Li W. V., Shao Q.-M.* Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications. — Stochastic Processes: Theory and Methods. Amsterdam: North-Holland, 2001, p. 533–597.
9. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. Киев: ТВіМС, 1995, 246 с.
10. *Lifshits M. A.* Bibliography on small deviation probabilities. http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/biblio.html.
11. *Лифшиц М. А., Цирельсон Б. С.* Малые уклонения гауссовских полей. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. 31, в. 3, с. 632–633.
12. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964, 267 с.
13. *Rasmussen C. E., Williams C. K. I.* Gaussian Processes for Machine Learning. Cambridge: MIT Press, 2006, 248 p.
14. *van der Vaart A., van Zanten J.H.* Bayesian inference with rescaled Gaussian process priors. — Electron. J. Statist., 2007, v. 1, p. 433–448.
15. *Widom H.* Asymptotic behavior of the eigenvalues of certain integral equations. II. — Arch. Ration. Mech. Anal., 1964, v. 17, p. 215–229.

Поступила в редакцию
29.III.2008

 МАЛЫШЕВ В. А.*, МАНИТА А. Д.*

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МИКРОМОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА[1)]

Рассматривается марковский процесс с запретами для системы частиц с локальным взаимодействием в целочисленной полосе. Этот процесс моделирует обмен скоростями и обмен частица–дырка молекул жидкости. Показано, что профиль средних скоростей соответствует пове-

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы 1, 119992 Москва, Россия; e-mail: malyshev2@yahoo.com, e-mail: manita@mech.math.msu.su

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-01-22001, 06-01-00662 и 08-01-90431).

дению, характерному для несжимаемой вязкой жидкости. По параметру случайного возмущения доказано существование фазового перехода между ламинарным и турбулентным профилем.

Ключевые слова и фразы: течение Куэтта, марковские процессы с локальным взаимодействием, скейлинг, гидродинамика.

1. Введение. С математической точки зрения, эта статья посвящена исследованию фазового перехода для одного многомерного марковского процесса с запретами. Но поскольку она возникла из конкретных физических задач, мы подробно обсуждаем и эти связи.

Изучать движение жидкости можно как с макроскопической, так и с микроскопической точки зрения. Хотя в первом случае (т.е. в механике сплошной среды) единой основой являются уравнения Навье–Стокса, тем не менее существует много различных обобщений, связанных с введением случайности в эти уравнения (см. обзор Дж. Марсдена и другие статьи в [1], историю вопроса можно найти в недавнем препринте [4]). Именно с помощью уравнений Навье–Стокса было рассмотрено необозримое количество конкретных теоретических и прикладных задач механики жидкостей, в том числе и течение Куэтта, которое является простейшей (но далеко не тривиальной, см. [5], [6]) моделью, доступной для изучения на математическом уровне.

Микроскопических же моделей для конкретных ситуаций в случае ненулевой вязкости крайне мало, несмотря на обилие решеточных моделей с бесконечным числом частиц (см. монографии [10], [3], [9]). В теоретической физике предпочтительным направлением является вывод уравнений Навье–Стокса следуя цепочке «гамильтонова микродинамика (например, твердых шариков) → цепочка уравнений ББГКИ → уравнение Больцмана → уравнения гидродинамики». Однако есть и прямые выводы уравнений Навье–Стокса из модельной случайной динамики частиц на решетке (см. [11]). В последние годы появились работы, где с уравнениями Навье–Стокса связывается некоторая система частиц так, что при определенном скейлинге динамика частиц сходится к этим уравнениям (см. [3], [13], [14]). Однако динамика частиц в этих работах не является локальной, а ближе к динамике среднего поля типа Маккина–Власова. Но самое главное — она берется не из собственно молекулярной динамики, а из методов компьютерного численного моделирования уравнений Навье–Стокса. Поэтому вывод уравнений Навье–Стокса из физически обоснованной динамики молекул остается открытым.

Основная проблема здесь — неясно, как лучше описывать движение молекул жидкости. Модель твердых шариков, двигающихся по законам классической механики, проста в формулировке, но чрезвычайно сложна в исследовании. Но самое главное, нет никакой уверенности в том, что она адекватна. Дело в том, что молекулы в жидкости расположены довольно близко друг от друга, и квантовые эффекты, по-видимому, существенны. Если же работать в рамках классических моделей, то надо учитывать взаимодействие вращательных и колебательных степеней свободы соседних молекул, которые имеют случайные распределения.

С другой стороны, прежде чем пытаться вывести уравнения Навье–Стокса в полном объеме, естественно сначала рассмотреть частные случаи. В рассматриваемой ниже (локальной) модели течения Куэтта используется два процесса: обмен скоростями между молекулами и обмен координатами между молекулами и дырками (т.е. пустыми местами). Это соответствует интуитивной картине, представляемой в физической литературе. При этом можно надеяться, что существует определенная универсальность, т.е. независимость качественного поведения от вида модели.

С вероятностной точки зрения мы изучаем марковскую систему взаимодействующих частиц, динамика которой является смесью двух хорошо известных (см. [8]) процессов с запретами — симметричного и полностью асимметричного. Введение граничных условий, соответствующих прилипанию на границе, не влияет на моментную замкнутость процесса [12], что существенно облегчает исследование. Именно благодаря наличию моментной замкнутости удается избежать использования такой громоздкой техники, как анзац Бете [15] или матричный анзац (см., например, [16]).

Мы хотим отметить, кроме того, что, из-за разности скейлингов, прямое исследование микромодели конкретной ситуации не эквивалентно выводу для нее уравнений Навье–Стокса и их дальнейшему исследованию. Мы получаем для нашей модели фазовый переход в профиле скорости, полностью соответствующий известному переходу в течении Куэтта [7], однако есть различия. Параметр перехода у нас не является переходом по классическому числу Рейнольдса, зависящему от вязкости, поперечного сечения и продольной скорости, а по его аналогу, зависящему от интенсивности поперечного обмена (аналога вязкости), поперечного сечения и случайного возмущения. Последнее может происходить либо от быстрых вихрей, возникающих из-за отклонений продольного течения от строгой горизонтальности, либо из-за обмена скоростей между молекулами со случайными внутренними степенями свободы. Интересно, что фазовый переход является резким на грубой шкале и плавным на более мелкой шкале.

2. Модель и результаты. Течением Куэтта называется течение жидкости в одном (горизонтальном) направлении в пространстве (далее оно у нас дискретно и двумерно, однако обобщение на многомерный случай делается непосредственно) между двумя пластинами, одна из которых неподвижна, а другая движется с постоянной скоростью, увлекая за собой близлежащие частицы. Остальные частицы также вовлекаются в движение благодаря вязкости, что микроскопически выражается в обмене скоростями между соседними частицами.

Переходим теперь к точным определениям. Отправным множеством для нас будет служить дискретная полоса

$$L_S = \{0,1,2,\dots,S,S+1\} \times \mathbf{Z},$$

в каждой точке которой задана случайная величина $v_{(s,x)}$, которая может принимать одно из трех значений: $\varnothing$, 0 или V. Значение $\varnothing$ означает, что в узле (s,x) нет частиц («дырка»), $v_{(s,x)} = 0$ означает присутствие одной частицы с нулевой скоростью, а $v_{(s,x)} = V$ означает наличие одной частицы со скоростью V. Для удобства изложения мы будем называть «дырку» частицей со скоростью $\varnothing$.

Динамика данной системы частиц имеет скачкообразный характер и описывается следующими переходами. На малом интервале времени $[t, t+dt]$ независимо друг от друга могут произойти такие события:

(а) частицы каждой соседней вертикальной пары (в точках (s,x) и $(s+1,x)$) с вероятностью $\lambda\, dt + o(dt)$ обмениваются скоростями (*обмен скоростями между вертикальными слоями*);

(б) частицы каждой соседней горизонтальной пары типа $v_{(s,x)} = V$, $v_{(s,x+1)} = \varnothing$ (и только такого типа) с вероятностью $\lambda_1 dt + o(dt)$ обмениваются скоростями (*горизонтальное течение*); можно положить конечно, $V = \lambda_1$, но нам в этой статье удобнее их различать;

(в) каждая частица на нулевом слое, имеющая скорость V, с вероятностью $\beta\, dt + o(dt)$ приобретает скорость 0; каждая частица на верхнем слое $S+1$, имеющая скорость 0, с вероятностью $\beta\, dt + o(dt)$ приобретает скорость V (*влияние границ*);

(г) каждый узел (s,x) с непустой скоростью ($v_{(s,x)} = 0$ или V) с вероятностью $\varepsilon\, dt + o(dt)$ меняет скорость по правилу $0 \leftrightarrow V$ (*случайное возмущение*).

В дальнейшем мы предполагаем, что $\lambda > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\beta > 0$ и $\varepsilon \geqslant 0$.

Таким образом, мы определили *марковский* процесс $v(t) = \{v_{(s,x)}(t),\ (s,x) \in L_S\}$, $t \in \mathbf{R}_+$, с непрерывным временем и пространством состояний $\mathscr{W} = \{\varnothing, 0, V\}^{L_S}$. Его генератор действует на функции f, зависящие от состояний в конечном числе узлов, следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} f(v) := {} & \lambda \sum_{x\in\mathbf{Z}} \sum_{k=0}^{S} \Big(f(v^{(k,x)\leftrightarrow(k+1,x)}) - f(v) \Big) \\
& + \lambda_1 \sum_{x\in\mathbf{Z}} \sum_{k=0}^{S+1} \Big(f(v^{(k,x)\leftrightarrow(k,x+1)}) - f(v) \Big) \mathbf{1}(v_{(k,x)} = V, v_{(k,x+1)} = \varnothing) \\
& + \beta \sum_{x\in\mathbf{Z}} \Big(f(v^{(0,x)}) - f(v) \Big) \mathbf{1}(v_{(0,x)} = V)
\end{aligned}$$

$$+\beta \sum_{x\in\mathbf{Z}} \Big(f(v^{(S+1,x)}) - f(v)\Big)\, \mathbf{1}(v_{(S+1,x)} = 0)$$

$$+\varepsilon \sum_{x\in\mathbf{Z}} \sum_{k=0}^{S+1} \Big(f(v^{(k,x)}) - f(v)\Big)\, \mathbf{1}(v_{(k,x)} \neq \varnothing), \tag{1}$$

где конфигурации $w = v^{y\leftrightarrow z}$ и v из $\mathscr{W}$ различаются только скоростями в точках y и z из L_S:

$$w_y = v_z, \quad w_z = v_y,$$

а $v^y \in \mathscr{W}$ — конфигурация, которая может отличаться от v только значением скорости в узле y, за счет перемены значений $0 \leftrightarrow V$:

$$(v^y)_z = \begin{cases} v_z, & z \neq y, \\ \varnothing, & z = y, \quad v_y = \varnothing, \\ V\,\mathbf{1}(v_y = 0), & z = y, \quad v_y \neq \varnothing. \end{cases}$$

Можно проверить, что такое определение $\mathscr{L}$ приводит к корректному заданию марковского процесса на $\mathscr{W}$ (см. [8, гл. I, §3]).

Распределение случайного процесса $v(t)$ в момент времени t обозначим через η^t. Пусть $A = ((s_1, x_1), \ldots, (s_m, x_m))$ есть некоторое конечное упорядоченное подмножество L_S, а $E = (e_1, \ldots, e_m)$ — некоторый упорядоченный набор $e_j \in \{\varnothing, 0, V\}$. Рассмотрим следующие вероятности

$$q_t[A; E] := \mathbf{P}\left\{v_{(s_1,x_1)}(t) = e_1, \ldots, v_{(s_m,x_m)} = e_m\right\}.$$

На множестве L_S действует естественная группа сдвигов $(T_a,\ a \in \mathbf{Z})$ вдоль горизонтального направления:

$$T_a(s, x) = (s, x + a).$$

В этой работе мы ограничиваем себя рассмотрением начальных распределений η^0 процесса v, *инвариантных* относительно действия группы T_a. Заметим, что так как марковская полугруппа, порождаемая (1), перестановочна с T_a, то в любой момент времени t распределение η^t также трансляционно инвариантно. В частности, при любом выборе множеств A и E

$$q_t[T_a A; E] = q_t[A; E] \tag{2}$$

для всех $t > 0$ и $a \in \mathbf{Z}$. С физической точки зрения это означает, что нас интересуют только однородные течения, т.е. , инвариантные относительно сдвигов вдоль направления x: $x \to x + a$.

Заметим, что динамика процесса v такова, что количество частиц, т.е. суммарное количество узлов со скоростями 0 и V, «сохраняется». В частности, среднее число непустых узлов в вертикальном сечении x сохраняется во времени и не зависит от x:

$$\sum_{k=0}^{S+1} (q_t[(k,x); 0] + q_t[(k,x); V]) \equiv M \quad \forall x, t. \tag{3}$$

Постоянная $M = M(\eta^0)$, очевидно, может быть вычислена по начальному распределению η^0. Заметим, однако, что число узлов со значением V не сохраняется.

В последующем нас будут интересовать только распределения в фиксированном вертикальном разрезе, поэтому ввиду однородности индекс x можно опустить, полагая

$$q_t[(s, x); e] = p_s^e(t). \tag{4}$$

Теорема 1. *Предположим, что начальное распределение η^0 трансляционно инвариантно. Тогда:*

1) (*существоваение стационарного режима*) *для любых s и e существуют пределы*

$$\mu_s^e = \lim_{t\to\infty} p_s^e(t),$$

мы назовем их стационарными вероятностями;

2) (*равномерность плотности числа частиц*) *стационарные вероятности «дырок» одинаковы для всех* $s = 0, 1, \ldots, S+1$:

$$\mu_s^{\varnothing} \equiv \mathrm{const}.$$

Сначала рассмотрим случай, когда случайное возмущение отсутствует, т.е. $\varepsilon = 0$.

Теорема 2 (линейный профиль скоростей). *Пусть начальное распределение* η^0 *трансляционно инвариантно и* $\varepsilon = 0$. *Тогда средняя скорость частиц имеет линейный профиль, точнее,*

$$\mu_k^V = \frac{\rho_S}{S+1+2\lambda\beta^{-1}}(k+\lambda\beta^{-1}), \qquad k = 0, 1, \ldots, S+1,$$

где $\rho_S = M(\eta^0)/(S+2)$.

Эта теорема соответствует профилю скоростей для ламинарного течения, в отличие от того, что наблюдается в турбулентном режиме (см. [7]). В следующей теореме рассматривается случай ненулевого случайного возмущения.

Теорема 3. *Пусть* $S \to \infty$, *параметр* $\varepsilon = \varepsilon_S$ *зависит от* S, *а последовательность начальных распределений* $\{\eta^{0,S}\}$ *подобрана таким образом, что фиксирована удельная плотность числа частиц, т.е.*

$$\frac{M(\eta^{0,S})}{S+2} \to \rho \in [0,1], \qquad S \to \infty. \tag{5}$$

Тогда:

1) (*грубая картина перехода*) *для* μ_s^0 *и* μ_s^V *при скейлинге* $s = uS$, $u \in (0,1)$, *имеет место фазовый переход от ламинарного профиля к турбулентному*; *точнее, если* $\varepsilon_S S^2 \to 0$, *то профиль* μ_{uS}^V, $u \in (0,1)$, *будет иметь линейный* (*ламинарный*) *вид*:

$$\mu_{uS}^V \to \rho u \qquad (S \to \infty),$$

а если $\varepsilon_S S^2 \to \infty$, *то — постоянный* (*турбулентный*):

$$\mu_{uS}^V \to \frac{\rho}{2}, \qquad (S \to \infty);$$

2) (*тонкая картина перехода*) *случай* $\varepsilon_S S^2 = \mathrm{const}$, $S \to \infty$, *является промежуточным по отношению к ситуациям, описанным в пункте* 1); *точнее, если ввести положительный параметр* K *и положить* $\varepsilon_S S^2 = \frac{1}{2}\lambda K^2$, *то* $\mu_{uS}^V \to g_K(u)$, *где*

$$g_K(u) := \frac{\rho}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{sh}\,(K(u-1/2))}{\mathrm{sh}\,(K/2)}\right).$$

Так как $\lim_{K\to 0} g_K(u) = \rho u$, *а* $\lim_{K\to\infty} g_K(u) = \rho/2$, *мы можем сказать, что по параметру* $K > 0$ *имеет место плавный переход от ламинарного профиля к турбулентному.*

Замечание 1. Параметр K служит аналогом числа Рейнольдса Re. Это можно пояснить качественным сравнением этих чисел, т.е. сравнением формулы для K

$$K^2 = \frac{S^2\varepsilon}{\lambda/2}$$

с формулой для числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{LV}{\nu},$$

где L — ширина потока, V — средняя скорость, ν — вязкость.

Отмеченный фазовый переход основан на конкуренции между процессами, усиливающими влияние границы, и процессами, его уменьшающими. Так, множители L и S показывают, что чем больше расстояние до границ, тем больше случайные возмущения превалируют над влиянием границ. Множители V и ε показывают, что чем больше скорость, тем чаще частица получает случайные возмущения и влияние границы менее заметно. Наконец, чем больше λ, тем влияние границы более заметно. Следует отметить, что, по смыслу модели, параметр V можно считать пропорциональным λ_1.

3. Доказательства теорем.

3.1. Замкнутые уравнения для одночастичных функций. Наша ближайшая цель — получить систему дифференциальных уравнений для функций $p_k^e(t)$, $0 \leqslant k \leqslant S+1$, $e \in \{\varnothing, 0, V\}$, определенных в (4). Первое наблюдение состоит в том, что при каждом $k = 0, 1, \ldots, S+1$

$$p_k^{\varnothing}(t) + p_k^0(t) + p_k^V(t) = 1 \quad \forall t \geqslant 0, \tag{6}$$

т.е., например, функции $p_k^0(t)$ могут быть легко выражены через функции $p_k^{\varnothing}(t)$ и $p_k^V(t)$.

Лемма 1. *Пусть начальное распределение η^0 трансляционно инвариантно. Тогда набор функций $p_k^e(t)$ удовлетворяет замкнутой системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая имеет следующую структуру.*

1) *Функции $p_k^{\varnothing}(t)$ могут быть найдены из подсистемы*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p_k^{\varnothing}(t) &= \lambda(p_{k+1}^{\varnothing}(t) + p_{k-1}^{\varnothing}(t) - 2p_k^{\varnothing}(t)), \qquad 1 \leqslant k \leqslant S,\\
\frac{d}{dt}p_0^{\varnothing}(t) &= \lambda(p_1^{\varnothing}(t) - p_0^{\varnothing}(t)),\\
\frac{d}{dt}p_{S+1}^{\varnothing}(t) &= \lambda(p_S^{\varnothing}(t) - p_{S+1}^{\varnothing}(t)).
\end{aligned} \tag{7}$$

2) *Уравнения для $p_k^V(t)$ имеют вид*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p_k^V(t) &= \lambda(p_{k+1}^V(t) + p_{k-1}^V(t) - 2p_k^V(t)) + \varepsilon(1 - p_k^{\varnothing}(t) - 2p_k^V(t)),\\
&\quad 1 \leqslant k \leqslant S,\\
\frac{d}{dt}p_0^V(t) &= \lambda(p_1^V(t) - p_0^V(t)) + \varepsilon(1 - p_0^{\varnothing}(t) - 2p_0^V(t)) - \beta p_0^V(t),\\
\frac{d}{dt}p_{S+1}^V(t) &= \lambda(p_S^V(t) - p_{S+1}^V(t)) + \varepsilon(1 - p_{S+1}^{\varnothing}(t) - 2p_{S+1}^V(t))\\
&\quad + \beta(1 - p_{S+1}^{\varnothing}(t) - p_{S+1}^V(t)).
\end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что уравнения (7) и (8) не зависят от λ_1.

З а м е ч а н и е 2. Можно проверить, что система (7) имеет ту же форму, что и соответствующая система для простого симметричного процесса с запретами на конечном множестве $0, 1, \ldots, S+1$ (с пустыми граничными условиями).

Оставшаяся часть настоящего пункта посвящена д о к а з а т е л ь с т в у леммы 1. Для этого вначале мы выпишем уравнения для маргинальных распределений $q_t[(k,x); e]$ *без предположения* о трансляционной инвариантности начального распределения скоростей.

Для внутренних слоев $1 \leqslant k \leqslant S$ имеют место уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\, q_t[(k,x);\varnothing] &= \lambda\Big(q_t[(k+1,x);\varnothing] + q_t[(k-1,x);\varnothing] - 2q_t[(k,x);\varnothing]\Big)\\
&\quad + \lambda_1\Big(q_t[((k,x),(k,x+1));(V,\varnothing)] - q_t[((k,x-1),(k,x));(V,\varnothing)]\Big),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\, q_t[(k,x);0] &= \lambda\Big(q_t[(k+1,x);0] + q_t[(k-1,x);0] - 2q_t[(k,x);0]\Big)\\
&\quad + \varepsilon\Big(q_t[(k,x);V] - q_t[(k,x);0]\Big),\\
\frac{d}{dt}\, q_t[(k,x);V] &= \lambda\Big(q_t[(k+1,x);V] + q_t[(k-1,x);V] - 2q_t[(k,x);V]\Big)\\
&\quad + \varepsilon\Big(q_t[(k,x);0] - q_t[(k,x);V]\Big) + \lambda_1\Big(-q_t[((k,x),(k,x+1));(V,\varnothing)]\\
&\quad + q_t[((k,x-1),(k,x));(V,\varnothing)]\Big).
\end{aligned} \tag{10}$$

На нижней границе $k=0$ уравнения примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,q_t[(0,x);\varnothing] = \lambda\Big(q_t[(1,x);\varnothing] - q_t[(0,x);\varnothing]\Big) \\
&\quad + \lambda_1\Big(q_t[((0,x),(0,x+1));(V,\varnothing)] - q_t[((0,x-1),(0,x));(V,\varnothing)]\Big), \qquad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,q_t[(0,x);0] = \lambda\Big(q_t[(1,x);0] - q_t[(0,x);0]\Big) + \beta q_t[(0,x);V] \\
&\quad + \varepsilon\Big(q_t[(0,x);V] - q_t[(0,x);0]\Big), \\
&\frac{d}{dt}\,q_t[(0,x);V] = \lambda\Big(q_t[(1,x);V] - q_t[(0,x);V]\Big) - \beta q_t[(0,x);V] \\
&\quad + \varepsilon\Big(-q_t[(0,x);V] + q_t[(0,x);0]\Big) + \lambda_1\Big(-q_t[((0,x),(0,x+1));(V,\varnothing)] \\
&\qquad + q_t[((0,x-1),(0,x));(V,\varnothing)]\Big). \qquad (12)
\end{aligned}$$

На верхней границе $k=S+1$ уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,q_t[(S+1,x);\varnothing] &= \lambda\Big(q_t[(S,x);\varnothing] - q_t[(S+1,x);\varnothing]\Big) \\
&\quad + \lambda_1\Big(q_t[((S+1,x),(S+1,x+1));(V,\varnothing)] \\
&\qquad - q_t[((S+1,x-1),(S+1,x));(V,\varnothing)]\Big), \qquad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,q_t[(S+1,x);0] &= \lambda\Big(q_t[(S,x);0] - q_t[(S+1,x);0]\Big) + \beta q_t[(S+1,x);V] \\
&\quad + \varepsilon\Big(q_t[(S+1,x);V] - q_t[(S+1,x);0]\Big), \\
\frac{d}{dt}\,q_t[(S+1,x);V] &= \lambda\Big(q_t[(S,x);V] - q_t[(S+1,x);V]\Big) + \beta q_t[(S+1,x);0] \\
&\quad + \varepsilon\Big(q_t[(S+1,x);0] - q_t[(S+1,x);V]\Big) \\
&\quad + \lambda_1\Big(-q_t[((S+1,x),(S+1,x+1));(V,\varnothing)] \\
&\qquad + q_t[((S+1,x-1),(S+1,x));(V,\varnothing)]\Big). \qquad (14)
\end{aligned}$$

Мы видим, что уравнения для одномерных маргинальных распределений процесса *не являются замкнутыми*, так как включают двумерные распределения.

Вывод этих уравнений проводится непосредственно, но промежуточные формулы довольно громоздки. Этот вывод станет более прозрачным, если заметить, что динамика модели является объединением трех процессов. Во-первых, это симметричный процесс с запретами вдоль вертикальных слоев. Во-вторых, полностью асимметричный процесс с запретами в горизонтальном направлении. И наконец, глауберовский процесс «спин-флип» в каждой точке. Этот последний входит в уравнения очень простым образом, а первые два поучительно рассмотреть отдельно. Мы увидим, что уравнения для первого являются замкнутыми даже с граничными условиями, а для второго — наоборот, незамкнутыми.

Модель 1: *симметричный процесс с запретами.* Полезно рассмотреть более простую *вспомогательную* модель $\xi(t) = (\xi_s(t))$, которая описывает один вертикальный слой $x=0$, состоящий из точек $s = 0,1,2,\dots,S,S+1$, при дополнительном предположении, что $\lambda_1 = 0$, $\varepsilon = 0$ и $\beta = 0$. Для простоты обозначений мы будем считать, что «дырки» отсутствуют, т.е. $\xi_s(t) \in \{0,1\}$, и положим $V=1$. Тогда процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, является хорошо известным процессом с запретами (simple exclusion process).

Обозначим для $1 \leqslant i < i+k-1 \leqslant S$ и $e_j = 0,1$

$$p_t(i;e_1\dots e_k) = \mathbf{P}\left\{\xi_i(t) = e_1,\dots,\xi_{i+k-1}(t) = e_k\right\}.$$

Для одночастичных функций $p_t(s;1)$ непосредственно получаются замкнутые уравнения. Действительно, используя вид переходных функций марковского процесса ξ на малом интервале времени $[t, t+dt)$ и формулу полной вероятности, с точностью до $o(dt)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant S$ имеем

$$\begin{aligned} p_{t+dt}(i;1) &= p_t(i-1;111) + [p_t(i-1;011) + p_t(i-1;110)](1-\lambda\, dt) \\ &\quad + p_t(i-1;010)(1-2\lambda\, dt) + [p_t(i-1;100) \\ &\quad + p_t(i-1;001)]\lambda\, dt + p_t(i-1;101)\cdot 2\lambda\, dt, \end{aligned} \tag{15}$$

откуда

$$\begin{aligned} p_{t+dt}(i;1) - p_t(i;1) &= \lambda\, dt\,[-p_t(i-1;01) - p_t(i;10) + p_t(i-1;10) + p_t(i;01)] \\ &= \lambda\, dt\,[p_t(i-1;1) - 2p_t(i;1) + p_t(i+1;1)], \end{aligned} \tag{16}$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\, p_t(i;1) = \lambda[p_t(i-1;1) - 2p_t(i;1) + p_t(i+1;1)]. \tag{17}$$

Модель 2: ***асимметричный процесс с запретами.*** Нам удобно также рассмотреть $\zeta(t) = (\zeta_x(t),\ x \in \mathbf{Z})$ — асимметричный процесс с запретами на $\mathbf{Z}$ с тремя значениями в узле $\zeta_x \in \{\varnothing, 0, V\}$, в котором возможны *лишь следующие переходы*: каждая пара ближайших соседей вида $V\varnothing$ с интенсивностью λ_1 переходит в пару $\varnothing V$. Другими словами, на интервале $[t, t+dt]$ каждая частица со скоростью V независимо от остальных частиц с вероятностью $\lambda_1 dt + o(dt)$ перепрыгивает на единицу вперед ($x \to x+1$) при условии, что узел $x+1$ не занят другой частицей. Нам потребуются вычисления, аналогичные (15) и (16). На этот раз $x \in \mathbf{Z}$. Как и раньше, рассмотрим все возможные состояния соседних узлов $x-1$, x и $x+1$ в момент t и применим формулу полной вероятности:

$$\begin{aligned} p_{t+dt}(x;\varnothing) = \sum_{e_i \in \{\varnothing, 0, V\}, i=1,2,3} & \mathbf{P}\Big(\zeta_x(t+dt) = \varnothing \mid (\zeta_{x-1}(t), \zeta_x(t), \zeta_{x+1}(t)) = (e_1, e_2, e_3)\Big) \\ & \times \mathbf{P}\Big\{(\zeta_{x-1}(t), \zeta_x(t), \zeta_{x+1}(t)) = (e_1, e_2, e_3)\Big\}. \end{aligned}$$

Условные вероятности, стоящие под знаком суммы, легко найти. Результаты представлены в виде следующей таблицы, где «$*$» обозначает любой из символов $\varnothing$, 0 или V:

$x-1$ e_1	x e_2	$x+1$ e_3	$\mathbf{P}\left(\zeta_x(t+dt) = \varnothing \mid (\zeta_{x-1}(t), \zeta_x(t), \zeta_{x+1}(t)) = (e_1, e_2, e_3)\right)$
$\varnothing$	$\varnothing$	$*$	$1 - o(dt)$
0	$\varnothing$	$*$	$1 - o(dt)$
V	$\varnothing$	$*$	$1 - \lambda_1\, dt + o(dt)$
$*$	0	$*$	$o(dt)$
$*$	V	$\varnothing$	$\lambda_1\, dt + o(dt)$
$*$	V	0	$o(dt)$
$*$	V	V	$o(dt)$

С точностью до членов порядка $o(dt)$ получим:

$$\begin{aligned} p_{t+dt}(x;\varnothing) &= p_t(x-1;\varnothing\varnothing) + p_t(x-1;0\varnothing) + p_t(x-1;V\varnothing) \\ &\quad - \lambda_1\, dt\cdot p_t(x-1;V\varnothing) + \lambda_1\, dt\cdot p_t(x;V\varnothing) \\ &= p_t(x;\varnothing) + \lambda_1\, dt\cdot[-p_t(x-1;V\varnothing) + p_t(x;V\varnothing)], \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\, p_t(x;\varnothing) = \lambda_1[-p_t(x-1;V\varnothing) + p_t(x;V\varnothing)]. \tag{18}$$

Совершенно так же получается уравнение для $p_t(x;V)$:

$$\frac{d}{dt}\, p_t(x;V) = \lambda_1[p_t(x-1;V\varnothing) - p_t(x;V\varnothing)].$$

Аналогично рассматриваются составляющие динамики (1), соответствующие случайным возмущениям и поведению на границах.

Оказывается, что уравнения для $q_t[(k,x);e]$ становятся замкнутыми, если рассматривать трансляционно инвариантные распределения. Именно, чтобы завершить доказательство леммы 1, с этого момента мы будем считать, что процесс стартует в момент $t=0$ с *трансляционно инвариантного* распределения. Напомним, что динамика сохраняет трансляционную инвариантность, т.е. в любой момент $t>0$ распределение процесса будет обладать этим свойством. В частности, имеет место (2). Следовательно, при таком начальном распределении в правых частях уравнений (9)–(14) все члены, умножаемые на λ_1, обнуляются. Собирая вместе уравнения с $\frac{d}{dt}\,q_t((k,x);\varnothing)$, $0\leqslant k\leqslant S+1$, и используя обозначения (4), приходим к утверждению пункта 1) леммы 1. Утверждение пункта 2) также легко вытекает из вида уравнений (9)–(14) с учетом (6).

Лемма полностью доказана.

3.2. Сходимость при $t\to\infty$. Здесь мы докажем пункт 1) теоремы 1, а именно, мы покажем существование пределов $\lim_{t\to\infty}p_k^e(t)$ для функций $p_k^e(t)$, являющихся решениями систем (7)–(8). Мы воспользуемся вероятностными рассуждениями. Для этого мы введем на *конечном* множестве состояний $\mathscr{M}=\{\varnothing,0,V\}^{\{0,1,\ldots,S+1\}}$ вспомогательный марковский процесс с непрерывным временем

$$\vartheta(t)=(\vartheta_k(t),\ k=0,1,\ldots,S+1),\qquad \vartheta_k(t)\in\{\varnothing,0,V\},$$

имеющий следующие переходы. На малом интервале времени $[t,t+dt]$ независимо друг от друга могут произойти такие события:

– каждая вертикальная пара соседних узлов k и $k+1$ с вероятностью $\lambda\,dt+o(dt)$ обменивается состояниями;

– узел нулевого слоя $k=0$, находящийся в состоянии V, с вероятностью $\beta\,dt+o(dt)$ приобретает состояние 0; узел верхнего слоя $k=S+1$, находящийся в состоянии 0, с вероятностью $\beta\,dt+o(dt)$ меняет свое состояние на V;

– каждый узел k с состоянием, отличным от $\varnothing$, с вероятностью $\varepsilon\,dt+o(dt)$ меняет состояние по правилу $0\leftrightarrow V$ (*случайное возмущение*).

Обратим внимание на то, что марковский процесс $\vartheta(t)$ является приводимым, так как динамика не изменяет числа узлов, находящихся в пустом ($\varnothing$) состоянии. Вместе с тем, процесс $\vartheta(t)$, рассматриваемый на каждом из инвариантных для динамики множеств

$$\mathscr{M}_n=\bigl\{\vartheta=(\vartheta_0,\ldots,\vartheta_{S+1})\in\mathscr{M}\colon \#\bigl\{j\colon\vartheta_j=\varnothing\bigr\}=n\bigr\},\qquad n=0,1,\ldots,S+1,$$

будет неприводим и эргодичен, следовательно, при каждом n пределы

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\,(\vartheta(t)=\varkappa\,|\,\vartheta(0)=\varkappa_0)=g_n(\varkappa),\qquad \varkappa_0,\varkappa\in\mathscr{M}_n,$$

существуют и не зависят от конкретного выбора начального состояния $\varkappa_0$. Поэтому для каждого начального распределения $\mu_{\vartheta(0)}$ существует предел $\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\,\{\vartheta(t)=\varkappa\}$, зависящий от $\mu_{\vartheta(0)}$.

Если в пределах настоящего пункта позволить себе обозначение

$$p_k^e(t)=\mathbf{P}\,\{\vartheta_k(t)=e\},\qquad e\in\{\varnothing,0,V\},\quad k=0,1,\ldots,S+1,$$

то можно показать, что функции $p_k^e(t)$ удовлетворяют системе уравнений (7)–(8). Доказательство этого факта немного проще рассуждений п. 3.1. Так как

$$p_k^e(t)=\sum_{\varkappa\in\mathscr{M}\colon\varkappa_k=e}\mathbf{P}\,\{\vartheta(t)=\varkappa\},$$

то пункт 1) теоремы 1 легко следует.

3.3. Точные формулы для стационарных решений. Здесь мы возвращаемся к рассмотрению процесса $v(t)$. Обозначим $\mu_s^{\varnothing}$, μ_s^0 и μ_s^V — стационарные вероятности того, что на вертикальном слое s нет частиц, есть частица со скоростью 0 и есть частица со скоростью V соответственно: $\lim_{t\to\infty} p_s^e(t) = \mu_s^e$. Как было объяснено в предыдущем пункте, эти пределы зависят от начального распределения η^0. В частности,

$$\sum_{s=0}^{S+1} \mu_s^{\varnothing} = (S+2) - M(\eta^0), \tag{19}$$

где $M(\eta^0)$ определено в (3).

Заметим, что предельные вероятности μ_s^e являются решениями стационарных версий выписанных выше уравнений (7), (8). Из (6) вытекает, что

$$\mu_s^{\varnothing} + \mu_s^0 + \mu_s^V = 1 \qquad \forall s.$$

Лемма 2. *«Дырки» распределены по слоям равномерно:* $\mu_s^{\varnothing} = \mu_{s_1}^{\varnothing}$ *для любых* $s, s_1 \in \{0, 1, \dots, S+1\}$.

Доказательство. Система стационарных уравнений для $\mu_s^{\varnothing}$, $s = 0, 1, \dots, S+1$, имеет вид:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_{s-1}^{\varnothing} + \mu_{s+1}^{\varnothing} - 2\mu_s^{\varnothing}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant S, \\ 0 &= \mu_1^{\varnothing} - \mu_0^{\varnothing}, \\ 0 &= \mu_S^{\varnothing} - \mu_{S+1}^{\varnothing}. \end{aligned}$$

Очевидно, что множество всех ее решений образует одномерное подпространство $\mu_0^{\varnothing} = \dots = \mu_{S+1}^{\varnothing}$. По смыслу исходной вероятностной модели мы выберем лишь семейство

$$\mu_0^{\varnothing} = \dots = \mu_{S+1}^{\varnothing} = 1 - \rho_S \in [0, 1].$$

Это доказывает лемму, а вместе с ней и пункт 2) теоремы 1.

Число $\rho_S \in [0, 1]$ будем называть плотностью частиц. Из (19) видно, что плотность зависит от начального распределения: $\rho_S = M(\eta^0)/(S+2)$.

Так как $\mu_k^0 + \mu_k^V \equiv \rho_S$, то достаточно найти только вероятности (μ_k^V, $k = 0, 1, \dots, S+1$). Они удовлетворяют следующим уравнениям на внутренних слоях:

$$0 = \lambda(\mu_{k+1}^V + \mu_{k-1}^V - 2\mu_k^V) + \varepsilon(\rho_S - 2\mu_k^V), \qquad 1 \leqslant k \leqslant S, \tag{20}$$

с граничными условиями

$$0 = \lambda(\mu_1^V - \mu_0^V) + \varepsilon(\rho_S - 2\mu_0^V) - \beta\mu_0^V, \tag{21}$$

$$0 = \lambda(\mu_S^V - \mu_{S+1}^V) + \varepsilon(\rho_S - 2\mu_{S+1}^V) + \beta(\rho_S - \mu_{S+1}^V). \tag{22}$$

Случай 1: $\varepsilon = 0$. Уравнения (20) примут вид $\mu_{k+1}^V + \mu_{k-1}^V - 2\mu_k^V = 0$. Характеристическое уравнение этой разностной задачи

$$z^2 + 1 - 2z = 0$$

имеет корень $z = 1$ кратности 2. Это *резонансный* случай, поэтому общее решение запишется в форме $\mu_k^V = D_0 + D_1 k$. Неопределенные коэффициенты D_0 и D_1 находятся из граничных условий (21) и (22):

$$0 = \lambda D_1 - \beta D_0, \quad 0 = -\lambda D_1 + \beta(\rho_S - D_0 - D_1(S+1)).$$

Решая эту систему, получим явное решение в виде линейной функции

$$\mu_k^V = \frac{\rho_S}{S+1+2\lambda\beta^{-1}} (k + \lambda\beta^{-1}), \qquad k = 0, 1, \dots, S+1.$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы 2.

Случай 2: $\varepsilon > 0$. Стандартным образом можно показать, что общее решение неоднородных разностных уравнений (20) имеет вид

$$\mu_k = \frac{\rho_S}{2} + C_1 z_1^k + C_2 z_2^k, \tag{23}$$

где z_1 и z_2 — решения характеристического уравнения

$$\lambda z^2 + \lambda - 2(\lambda + \varepsilon)z = 0, \tag{24}$$

а C_1 и C_2 — неопределенные коэффициенты. Непосредственно решая уравнение (24), имеем

$$z_{1,2} = 1 + \frac{\varepsilon}{\lambda} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)^2 - 1}. \tag{25}$$

Заметим, что при $\varepsilon > 0$ уравнение (24) имеет два *различных* вещественных корня: $z_1 > 1$ и $z_2 < 1$, причем $z_1 z_2 = 1$. Подставляя (23) в граничные условия (21)–(22), после некоторых преобразований получим следующую лемму.

Лемма 3. *Решение* (μ_s^V, $s = 0, 1, \ldots, S+1$) *имеет следующий явный вид*:

$$\mu_k^V = \frac{\rho_S}{2} - \rho_S \frac{(b(z_1) z_1^{S+1-k} - b(z_2) z_2^{S+1-k}) - (b(z_1) z_1^k - b(z_2) z_2^k)}{2(b^2(z_1) z_1^{S+1} - b^2(z_2) z_2^{S+1})},$$

$k = 0, 1, \ldots, S+1$, *где* $b(z) := 1 + (2\varepsilon + \lambda(1 - z^{-1}))/\beta$.

3.4. Асимптотика и фазовый переход. Мы будем считать, что параметры λ и β фиксированы, а $\varepsilon \to 0$, $S \to \infty$. Видим, что при малых ε

$$z_1 = 1 + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\lambda}} + O\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right), \quad z_2 = 1 - \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\lambda}} + O\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right).$$

Исходя из предположений теоремы 3, будем считать для простоты, что $\rho_S \equiv \rho$.

Нас будет интересовать поведение (μ_k^V, $0 \leqslant k \leqslant S+1$) на пространственной шкале $k = [uS]$, $u \in [0, 1]$. Чтобы получить содержательную асимптотику при $S \to \infty$, возьмем параметр ε зависящим от S:

$$\varepsilon_S = \frac{\lambda}{2} \psi^2(S) S^{-2},$$

где $\psi(S) > 0$ — некоторая функция такая, что $\psi(S) S^{-1} \to 0$ при $S \to \infty$. Таким образом, $\sqrt{2\varepsilon_S/\lambda} = \psi(S) S^{-1}$ и

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= 1 \pm \psi(S) S^{-1} + O(\psi^2(S) S^{-2}), \\ b(z_{1,2}) &= 1 \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{\beta} \psi(S) S^{-1} + \beta^{-1} O(\psi^2(S) S^{-2}). \end{aligned}$$

Приводимые ниже вычисления показывают, что асимптотика $\mu_{[uS]}^V$ будет сильно зависеть от свойств функции ψ.

В случае *малых* случайных возмущений $\psi(S) \to 0$

$$\begin{aligned} \mu_{[uS]}^V &\sim \frac{\rho}{2} - \rho \frac{2(1-u)\psi(S) - 2u\psi(S)}{2 \cdot 2\psi(S)} + \beta^{-1} O(S^{-1}) \\ &\sim \frac{\rho}{2} + \rho \frac{2u - 1}{2} = u\rho, \qquad u \in (0, 1). \end{aligned}$$

Профиль имеет ламинарный характер.

В случае *сильных* случайных возмущений $\psi(S) \to \infty$

$$\mu_{[uS]}^V \sim \frac{\rho}{2} - \rho \frac{z_2^{(1-u)S} - z_2^{uS}}{2 z_2^S} + \beta^{-1} O(S^{-1} \cdot \psi(S) e^{-\psi(S)}) \to \frac{\rho}{2} \qquad \forall u \in (0, 1). \tag{26}$$

Здесь предельный профиль весьма далек от ламинарного. На самом деле, можно проверить, что предельный профиль здесь такой же, каким он был бы без граничных условий (формально, при $\beta = 0$), т.е. в предположении «свободных границ». Вывод: при сильных случайных возмущениях границы не оказывают влияния на внутренние слои. Это характерно для турбулентной фазы.

Случай, *разделяющий* указанные две *фазы*: $\psi(S) = \mathrm{const}$. Для удобства обозначим $\psi(S) = K$, $K > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_{[uS]}^V &\sim \frac{\rho}{2} - \rho \frac{(e^{K(1-u)} - e^{-K(1-u)}) - (e^{Ku} - e^{-Ku})}{2(e^K - e^{-K})} \\ &= \frac{\rho}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{sh}\,(K(u - 1/2))}{\mathrm{sh}\,(K/2)}\right), \qquad u \in (0, 1). \end{aligned}$$

В заключение заметим, что для асимптотики сильных возмущений (26) предположение $\psi(S)S^{-1} \to 0$ не является существенным. В частности, результат имеет место в важном случае $\varepsilon_S = \varepsilon$. Действительно, при этом z_2 не зависит от S, и, пользуясь явной формулой из леммы 3, при каждом $u \in (0,1)$ мы получим

$$\mu^V_{[uS]} - \frac{\rho}{2} \sim \rho \frac{\text{const}}{b(z_2) z_2^{(1-\min(1-u,u))S}} \to 0 \qquad (S \to \infty).$$

Заметим, что все предельные выражения не зависят от параметра β.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. (Математика. Новое в зарубежной науке, в. 22.)
2. *Chorin A. J., Marsden J. E.* A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1993, 169 p.
3. *Marchioro C., Pulvirenti M.* Mathematical Theory of Incompressible Non Viscous Fluids. New York: Springer-Verlag. 1994, 283 p.
4. *Shiryaev A.* On the classical, statistical, and stochastic approaches to the hydrodynamic turbulence. Research Report №2. Aarhus: Thiele Centre for Applied Mathematics in Natural Science, 2007.
5. *Колмогоров А.Н.* Математические модели турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости. — Успехи матем. наук, 2004, т. 59, №1, с. 5–10.
6. *Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. — Прикл. матем. и мех., 1965, т. 25, с. 1140–1143.
7. *Ландау Л. Д., Ахиезер А. И., Лифшиц Е. М.* Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: Наука, 1966, 384 с.
8. *Лиггетт Т.* Марковские процессы с локальным взаимодействием. М.: Мир, 1989, 550 с.
9. *Kipnis C., Landim C.* Scaling Limits of Interacting Particle Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 442 p.
10. *Spohn H.* Large Scale Dynamics of Interacting Particles. Berlin: Springer-Verlag. 1991, 342 p.
11. *Esposito R., Marra R., Yau H. T.* Navier–Stokes equations for stochastic particle systems on the lattice. — Comm. Math. Phys., 1996, v. 182, №2, p. 395–456.
12. *Ignatyuk I. A., Malyshev V. A., Molchanov S. A.* Moment-closed processes with local interaction. — Selecta Math. Soviet., 1989, v. 8, №4, p. 351–384.
13. *Méléard S.* Monte-Carlo approximations for 2d Navier–Stokes equations with measure initial data. — Probab. Theory Related Fields, 2001, v. 121, №3, p. 367–388.
14. *Fontbona J.* A probabilistic interpretation and stochastic particle approximations of the 3-dimensional Navier–Stokes equations. — Probab. Theory Related Fields, 2006, v. 136, №1, p. 102–156.
15. *Golinelli O., Mallick K.* Derivation of a matrix product representation for the asymmetric exclusion process from algebraic Bethe ansatz. — J. Phys. A., 2006, v. 39, №34, p. 10647–10658.
16. *Derrida B., Lebowitz J. L., Speer E. R.* Entropy of open lattice systems. — J. Statist. Phys., 2006, v. 126, №4/5, p. 1083–1108.

Поступила в редакцию
27.XI.2007

Исправленный вариант
30.III.2008