ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 27 **1991** **Вып. 2**

УДК 621.391.1:519.27–503.5

В.А. Малышев

РАЗРУШЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТАХ

Изучается класс марковских процессов с локальным взаимодействием с дискретным временем, являющийся квадратичным возмущением модели голосования. Основной результат состоит в том, что в некотором разумном классе мер число экстремальных инвариантных мер не более двух. Отсюда следует отсутствие законов сохранения для рассматриваемого класса возмущений.

Стохастические клеточные автоматы, или процессы с локальным взаимодействием, моделируют множество явлений в сетях связи, биологии, физике. Существует обширный класс таких процессов, которые являются явно решаемыми в некотором смысле (моментно замкнутые и маргинально замкнутые процессы, см. [1, 2]). Некоторые процессы из этого класса обладают законами сохранения, которые были использованы для моделирования гидродинамического поведения различных систем [3–6]. В этой статье впервые исследовано возмущение таких процессов во всем интервале времени.

Мы рассматриваем простейший процесс такого рода – модель голосования и один класс его возмущений.

Основной результат состоит в том, что в разумном классе мер число экстремальных инвариантных мер не более двух. Отсюда следует исчезновение закона сохранения.

1. Определения. Модель голосования с дискретным временем есть условно-независимый марковский процесс с локальным взаимодействием $\xi_t(x)$, $x \in \mathbf{Z}^\nu$, $t \in \mathbf{Z}_+$, $\xi_t(x) \in \{0, 1\}$, определенный (см. [2]) так:

$$P(\xi_{t+1}(x) = 1 \mid \xi_t) = \sum_{y \in Q} a_y \xi_t(x+y), \tag{1}$$

где $Q \subset \mathbf{Z}^\nu$ – конечно, $a_y > 0$, $\sum\limits_{y \in Q} a_y = 1$. Мы рассматриваем класс возмущений этой модели квадратичным мономом. Это также условно-независимый процесс, но

$$P(\xi_{t+1}(x) = 1 \mid \xi_t) = \sum_{y \in Q} (a_y + \epsilon_y)\xi_t(x+y) + \epsilon_0 + \epsilon \xi_t(x+y')\xi_t(x+y'') \tag{2}$$

cond. prob. f.e.,

для некоторых $y', y'' \in Q$; $\epsilon_y, \epsilon_0, \epsilon$ – малы, $\epsilon \neq 0$. Равенство (2) можно переписать так:

$$P(\xi_{t+1}(x) = 1 \mid \xi_t) = \sum_{y \in Q} \tilde{a}_y \xi_t(x+y) + \epsilon_0 + \epsilon \xi_t(x+y')\xi_t(x+y''), \tag{3}$$

где $\tilde{a}_y = a_y + \epsilon_y > 0$ и ϵ_0, ϵ, $1 - \Sigma\tilde{a}_y$ – малы. Ясно, что обязательно выполнены условия

$$\epsilon_0 \geqslant 0, \quad \Sigma\tilde{a}_y + \epsilon_0 + \epsilon \leqslant 1, \tag{4}$$

которые получаются, соответственно, если положить $\xi_t \equiv 0$ и $\xi_t \equiv 1$.

Возможны два случая: 1. $\epsilon > 0$, 2. $\epsilon < 0$. Покажем, что случай 2 с помощью простого преобразования сводится к случаю 1.

Лемма 1. *Случай $\epsilon < 0$ сводится к случаю 1 с помощью преобразований*: $1 \leftrightarrow 0$, *т.е.* $\bar{\xi} = 1 - \xi$, $\epsilon \to -\epsilon$,

$$\epsilon_0 \to 1 - (\Sigma\tilde{a}_y + \epsilon_0 + \epsilon), \quad \tilde{a}_y \to \hat{a}_y,$$

где

$$\hat{a}_y = \tilde{a}_y \text{ при } y \neq y', \quad y'', \ \hat{a}_y = \tilde{a}_y + \epsilon \quad \text{при} \quad y = y', \ y''.$$

Доказательство просто:

$$P(\bar{\xi}_{t+1}(x) = 1 \mid \xi_t) = P(\xi_{t+1}(x) = 0 \mid \xi_t) = 1 - P(\xi_{t+1}(x) = 1 \mid \xi_t) =$$
$$= 1 - \Sigma\tilde{a}_y \xi_t(x+y) - \epsilon\xi_t(x+y')\xi_t(x+y'') - \epsilon_0 = \Sigma\tilde{a}_y(1 - \xi_t(x+y)) +$$
$$+ \epsilon(1 - \xi_t(x+y')\xi_t(x+y'')) + \beta = \Sigma\tilde{a}_y \bar{\xi}_t(x+y) - \epsilon\bar{\xi}_t(x+y')\bar{\xi}_t(x+y'') +$$
$$+ \epsilon\bar{\xi}_t(x+y') + \epsilon\bar{\xi}_t(x+y'') + \beta = \Sigma\hat{a}_y \bar{\xi}_t(x+y) - \epsilon\bar{\xi}_t(x+y')\bar{\xi}_t(x+y'') + \beta,$$

где мы использовали, что для некоторого $\beta \geqslant 0$

$$1 = \Sigma\tilde{a}_y + \epsilon_0 + \epsilon + \beta \tag{5}$$

и

$$1 - \xi_0\xi_1 = -\bar{\xi}_0\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_1.$$

Поэтому в дальнейшем считаем всегда $\epsilon > 0$.

2. Графическое представление и двойственный процесс. Опишем ниже один из вариантов такого представления (см. подробнее [2]). Обозначим

$$p_t(x_1, \ldots, x_n) = \langle \xi_t(x_1) \ldots \xi_t(x_n) \rangle.$$

Имеем, например,

$$p_{t+1}(x) = \sum_{y \in Q} \tilde{a}_y p_t(x+y) + \epsilon_0 + \epsilon p_t(x+y', \quad x+y''). \tag{6}$$

и аналогичные формулы для любого n.

Интегрируя последнее соотношение, получаем

$$p_t(x_1, \ldots, x_n) = \sum_G I(G), \tag{7}$$

где G – граф, все вершины которого лежат в $\mathbf{Z}^\nu \times \{0, 1, \ldots, t\}$, причем вершины на t-слое в точности $(x_1, t), \ldots, (x_n, t)$. Из каждой вершины (x, t'), $t' \neq 0$, в направлении меньших времен идет либо одно ребро в вершину $(x+y, t'-1)$ с вкладом $\tilde{a}_y$, либо два ребра в вершины $(x+y', t'-1)$, $(x+y'', t'-1)$ с совместным вкладом ϵ, либо вершина (x, t') является финальной (из нее не идет ребер) и ей приписывается вклад ϵ_0. Вкладом $I(G)$ графа G называется произведение вкладов ребер, финальных вершин и начальных данных $p_0(x_1', \ldots, x_m')$, где $(x_1', 0), \ldots, (x_m', 0)$ – совокупность всех вершин графа на нулевом слое.

С этим графическим представлением тесно связан двойственный процесс, обозначаемый $\eta_\tau = \eta_\tau(x_1, \ldots, x_n; t)$, где $\tau = 0, 1, \ldots, t$ называется обратным временем. В момент $\tau = 0$ имеем n частиц в точках $x_1, \ldots, x_n$. Любая частица может независимо от остальных: перейти из точки x_i в точку $x_i + y$ с вероятностью $\tilde{a}_y$; с вероятностью ϵ породить две частицы, которые помещаются в точки $x_i + y'$, $x_i + y''$; исчезнуть с вероятностью ϵ_0; если две или более частиц приходят одновременно в одну точку, то они склеиваются и становятся одной частицей.

Случай, когда

$$\alpha = 1 - \Sigma\tilde{a}_y - \epsilon - \epsilon_0 > 0, \tag{8}$$

особый и очень простой (см. ниже). Если $\alpha = 0$, то траектория процесса определяет единственный граф G и наоборот.

Нам понадобится также *ассоциированный ветвящийся процесс.* Мы определим ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона $\zeta_\tau = \zeta_\tau(n)$ с одним типом частиц. Частица может умереть с вероятностью ϵ_0, сохраниться с вероятностью $\Sigma\tilde{a}_y$, превратиться в две частицы с вероятностью ϵ. Хорошо известно, что (при $\alpha = 0$) последний процесс имеет три типа поведения: субкритическое при $m \equiv \Sigma\tilde{a}_y + 2\epsilon < 1$, критическое при $m = 1$ и сверхкритическое $m > 1$. Первое важное наблюдение состоит в том, что ζ_τ является хорошим первым приближением для η_τ.

3. Вырожденный случай ($\alpha > 0$).

Теорема 1. *Если $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$, то любая начальная мера процесса ξ_t сходится при $t \to \infty$ к единственной инвариантной мере μ_∞ с экспоненциальной скоростью, точнее*

$$|p_\infty(x_1, \dots, x_n) - p_t(x_1, \dots, x_n)| < (1 - \alpha)^t,$$

где

$$p_\infty(x_1, \dots, x_n) = \langle \xi(x_1) \dots \xi(x_n) \rangle_{\mu_\infty},$$

при этом $\mu_\infty = \delta_0$ при $\epsilon_0 = 0$, а при $\epsilon_0 \neq 0$ является некоторой нетривиальной мерой с экспоненциальным убыванием корреляций.

Здесь обозначены δ_0 и δ_1 точечные меры на конфигурациях $\xi \equiv 0$ и $\xi \equiv 1$ соответственно.

Доказательство просто: можно интерпретировать α как вероятность гибели всего процесса, что дает нулевой вклад в $p_t(x_1, \dots, x_n)$. Выживает только вклад траекторий, где все частицы исчезли (ϵ_0-смерть) до α-гибели. Элементарная техника кластерных разложений позволяет доказать экспоненциальное убывание корреляций в предельном процессе.

4. Субкритическая область.

Теорема 2. *Пусть $\alpha = 0$, $\epsilon > 0$ и $m < 1$. Тогда существует единственная инвариантная мера $\mu_\infty = \mu_\infty(\epsilon_0, \epsilon, \tilde{a}_y) = \delta_1$ для процесса ξ_t. Для любой начальной меры корреляционные функции сходятся экспоненциально быстро, т.е.*

$$|p_\infty(x_1, \dots, x_n) - p_t(x_1, \dots, x_n)| < C_n \beta^t$$

для некоторого β, $0 < \beta < 1$, не зависящего от $n, x_1, \dots, x_n$.

Доказательство. Можно записать

$$p_t(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\{y_1, \dots, y_m\}} c(t;\ x_1, \dots, x_n;$$

$$y_1, \dots, y_m) p_0(y_1, \dots, y_m) + P_e(t;\ x_1, \dots, x_n), \tag{9}$$

где P_e — вероятность того, что все частицы двойственного процесса погибли до момента t. Заметим, что $c(\dots)$ все неотрицательны и их сумма

$$P_s = P_s(t; x_1, \dots, x_n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\{y_1, \dots, y_m\}} c(t; x_1, \dots, x_n;\ y_1, \dots, y_m)$$

есть в точности вероятность того, что η_τ выжил к моменту t.

Мы имеем неравенство

$$P_s \leqslant \tilde{P}_s, \tag{10}$$

10

где $\tilde{P}_s$ — соответствующая вероятность для ζ_τ, так как у ζ_τ нет склеивания частиц. Известно, что в субкритической области

$$\tilde{P}_s \leqslant C_n \beta^t \tag{11}$$

для некоторых C_n, $0 < \beta < 1$ (см. [7]). При $m < 1$ неизбежно $\epsilon_0 > 0$ и $P_e \to 1$ ввиду (11).

5. Критическая область.

Теорема 3. *Пусть $\alpha = 0$, $\epsilon > 0$, $m = 1$. Тогда существует единственная инвариантная мера δ_1. Любая начальная мера сходится к ней степенным образом. Это значит, что имеется верхняя равномерная степенная оценка и нижняя степенная оценка для некоторых начальных данных.*

Доказательство. Условия $\alpha = 0$ и $m = 1$ с необходимостью влекут $\epsilon_0 = \epsilon$. Снова воспользуемся (10), но со степенной оценкой вместо (11) [7]. Отсюда следуют первые три утверждения. Доказательство того, что для начальной меры δ_0 мы имеем нижнюю степенную оценку сходимости менее тривиально. Оно основано на том, что вероятность несклеивания двух частиц до момента τ ведет себя степенным образом. Мы опускаем детали.

6. Суперкритическая область. Нам понадобится одно определение. Пусть p – вероятностная мера на $\{0, 1\}^{\mathbf{Z}^\nu}$ и $p(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \neq x_j$ – ее корреляционные функции. Положим

$$\alpha_n(p) = \sup_{x_1, \ldots, x_n} p(x_1, \ldots, x_n).$$

Мы скажем, что p принадлежит классу $\mathfrak{A}_0$ мер, если $\alpha_n(p) \to 0$ при $n \to \infty$.

Примеры мер, не принадлежащих классу $\mathfrak{A}_0$.

1. δ_1 и, вообще, класс $\mathfrak{A}_1$ вероятностных мер таких, что существует бесконечное подмножество $A \subset \mathbf{Z}^\nu$, что мера множества конфигураций, тождественно равных 1 на A, не равна 0.

2. Класс (не трансляционно инвариантных) мер Бернулли таких, что

$$p(x) > 1 - c/|x|^{\nu+\epsilon}.$$

При $m > 1$ мы отдельно рассмотрим два случая: $\epsilon_0 = 0$ и $\epsilon_0 \neq 0$.

Теорема 4. *Пусть $\alpha = 0$, $\epsilon > 0$, $m > 1$, $\epsilon_0 = 0$. В классе $\mathfrak{A}_0 \cup \{\delta_1\}$ существуют ровно две инвариантные меры: δ_0 и δ_1. Любая начальная мера из $\mathfrak{A}_0$ сходится к δ_0.*

Для двойственного процесса множество состояний есть множество всех конечных подмножеств $\mathbf{Z}^\nu$. Удобно, но необязательно, ввести приведенный двойственный процесс $\tilde{\eta}_\tau$, множество состояний которого есть множество классов эквивалентности конечных подмножеств $\mathbf{Z}^\nu$: A_1 и A_2 эквивалентны, если они конгруэнтны, т.е. получаются одно из другого сдвигом. Переходные вероятности за один шаг для $\tilde{\eta}_\tau$ определяются посредством

$$P(\tilde{A}_i \to \tilde{A}_j) = \sum_{A_j \in \tilde{A}_j} P(A_i \to A_j)$$

для произвольного A_i из класса эквивалентности $\tilde{A}_i$. Это корректно ввиду трансляционной инвариантности

$$P(A_i + x \to A_j + x) = P(A_i \to A_j).$$

Заметим, что в условиях теоремы в двойственном процессе η или $\tilde{\eta}$ частицы не могут исчезать, но могут склеиваться. Поэтому η_τ никогда не пусто.

Докажем сначала, что

$$P_\tau(\tilde{A}_1) \to 0 \text{ при } \tau \to \infty, \tag{12}$$

где $\tilde{A}_1$ – класс эквивалентности одноточечных множеств, P_τ – распределение $\tilde{\eta}$ в момент τ. Положим $w_\tau = \operatorname{diam} \tilde{\eta}_\tau$, где $\tilde{\eta}_\tau$ – множество, занятое частицами в момент τ. Для $\nu = 1$

$$w_\tau = u_\tau^r - u_\tau^l,$$

где $u_\tau^{r,l}$ – координаты самой правой и самой левой частиц.

Лемма 3. *Для* $\nu = 1$

$$E(w_\tau \mid w_{\tau-1}) \geqslant w_{\tau-1} + \delta \tag{13}$$

для некоторого $\delta > 0$.

Доказательство. Пусть $y' < y''$. Имеем

$$E(u_\tau^r \mid u_{\tau-1}^r) \geqslant u_{\tau-1}^r + \Sigma y \tilde{a}_y + \epsilon y'', \tag{14}$$

$$E(u_\tau^l \mid u_{\tau-1}^l) \leqslant u_{\tau-1}^l + \Sigma y \tilde{a}_y + \epsilon y'.$$

Заметим, что если на расстоянии $C = \operatorname{diam} Q$ от $u_{\tau-1}^r$ и от $u_{\tau-1}^l$ нет других частиц, то эти неравенства превращаются в равенства. Из (14) и следует утверждение леммы.

Лемма 2. *При $\nu = 1$ $w_\tau \to \infty$ почти наверное.*

Доказательство. Заметим, что w_τ есть строгий супермартингал, т.е. имеет место (13) с ограниченными скачками:

$$|w_\tau - w_{\tau-1}| \leqslant C. \tag{15}$$

Тогда лемма 2 хорошо известна. Она впервые использовалась для доказательства транзиентности счетных цепей Маркова в [8].

Отсюда следует утверждение (12) для $\nu = 1$.

Заметим также, что имеет место следующая *экспоненциальная оценка*: существуют константы C_1, κ_1, κ_2 такие, что для всех τ (см. [9])

$$P(w_\tau < \kappa_1 \tau) < C_1 \exp(-\kappa_2 \tau). \tag{16}$$

Докажем теперь, что для всех n

$$P_\tau(n) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty, \tag{17}$$

где $P_\tau(n)$ — вероятность того, что в момент τ имеется ровно n частиц. Пусть снова $\nu = 1$. Зафиксируем n, далее выберем достаточно малое $\alpha > 0$ и τ возьмем достаточно большим.

Введем моменты времени

$$\tau_1 = \tau - \alpha\tau, \ldots, \tau_k = \tau - \alpha^k \tau, \ldots, k = 1, \ldots, n-1.$$

Выделим траекторию x_t, $t = 0, \ldots, \tau$ самой правой частицы. Пусть $y_{0,t}$ — траектория самой левой частицы. Пусть $y_{1,t}$ — траектория самой левой частицы среди потомков частицы x_t, родившихся в интервале $[\tau - \alpha\tau, \ \tau - (\alpha/2)\tau]$. Аналогично введем $y_{k,t}$ — траекторию самой левой частицы среди потомков частицы x_t, родившихся в интервале $[\tau - \alpha^k \tau, \ \tau - ½\alpha^k \tau]$. Рассмотрим события A_k, состоящие в том, что $x_\tau - y_{k,\tau} > \kappa_1 \alpha^k \tau/2$. Согласно оценкам (16), имеем

$$P(\bar{A}_k) < C_1 \exp(-\kappa_1 \alpha^k \tau/2). \tag{18}$$

Поэтому с вероятностью

$$1 - \sum_{k=0}^{n-1} C_1 \exp(-\kappa_2 \alpha^k \tau/2) \tag{19}$$

при всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$x_\tau - y_{k,\tau} > \kappa_1 \alpha^k \tau/2.$$

Но при этом из-за ограниченности скачков

$$x_\tau - y_{k,\tau} < C\alpha^k \tau$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Поэтому с вероятностью (19) все $y_{k,\tau}$ различны, если выбрать $\alpha < \kappa_1/2C$.

Мы доказали таким образом, что при $\nu = 1$, при фиксированных $x_1, \ldots, x_n$ и любом m

$$\sum_{\{y_1, \ldots, y_m\}} c(t; x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) \to 0. \tag{20}$$

Отсюда следует, что любая начальная мера $\mu \in \mathfrak{A}_0$ сходится к δ_0.

При $\nu \neq 1$ выделим направление такое, что проекции Q и $\{y', y''\}$ на него имеют отличный от нуля диаметр, и повторим все рассуждения с проекциями частиц на это направление. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть* $\alpha = 0$, $\epsilon > 0$, $m > 1$, $\epsilon_0 > 0$.

Тогда все начальные меры из $\mathfrak{A}_0$ *сходятся к одной инвариантной мере* μ_0.

Таким образом в $\mathfrak{A}_0 \cup \{\delta_1\}$ *не более двух инвариантных мер* (δ_1 *всегда инвариантна*).

Доказательство того, что число инвариантных мер не более двух, проще, чем в случае $\epsilon_0 = 0$.

Действительно, счетная цепь Маркова η_τ неприводима, поэтому $P_\tau(n)$ имеет предел $p(n)$ при $\tau \to \infty$. Если $p(n) > 0$, то с положительной вероятностью цепь попадает бесконечное число раз в множество $B_n = \{|\eta_\tau| = n\}$, т.е. число частиц станет равным n. Но это невозможно, так как из *любой* точки множества B_n процесс за один шаг вырождается с вероятностью ϵ_0^n. Поэтому снова имеет место (20) и предельные корреляционные функции равны

$$p_\infty(x_1, \ldots, x_n) = P_e(\infty; x_1, \ldots, x_n) = \lim_{t \to \infty} P_e(t; x_1, \ldots, x_n)$$

и μ_0 трансляционно инвариантна.

Замечание 1. *Очевидно, что* $P_e \neq 0$.

Можно доказать, что при достаточно больших ν и $\epsilon \gg \epsilon_0$ $P_e(x_1, \ldots, x_n) < 1$ для всех $x_1, \ldots, x_n$. Интересно исследовать эту ситуацию здесь при $\nu = 1$.

Замечание 2. *Малость* ϵ *мы использовали фактически лишь при сведении случая* $\epsilon < 0$ *к случаю* $\epsilon > 0$. *Наши результаты верны также для произвольного полиномиального возмущения с положительными коэффициентами.*

7. Законы сохранения. Пусть F – локальная (зависящая от конечного числа точек решетки) или квазилокальная функция на $\{0, 1\}^{Z^\nu}$. Мы скажем, что F определяет слабый закон сохранения, если среднее $\langle F \rangle$ сохраняется для любой начальной трансляционно инвариантной меры. F определяет сильный закон сохранения, если

$$\lim_{\Lambda \uparrow Z^\nu} \sum_{x \in \Lambda} F_x(\xi_t) / |\Lambda| = p$$

с вероятностью 1 для всех t, если это свойство выполнено для $t = 0$. Здесь F_x – сдвиг функции F на $x \in \mathbf{Z}^\nu$. В модели голосования $F_x = \xi(x)$ определяет слабый закон сохранения. Из наших результатов легко следует, что у введенного класса возмущений нет законов сохранения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ignatyuk I.A., Malyshev V.A., Molchanov S.A.* Moment-Closed Processes with Local Interaction // Selecta Mathematica Sovietica. 1989. V. 8. № 4. P. 351–384.
2. *Malyshev V.A., Petrova E.N., Scacciatelli E.* Marginally closed processes with a local interaction: Preprint № 26/89. CARR Reports in Mathematical Physics. Rome, 1989.
3. *Presutti E., Spohn H.* Hydrodynamics of the Voter Model // Ann. Prob. 1983. V. 11. № 4. P. 867–875.
4. *De Masi A., Ianiro N., Pellegrinotti A., Presutti E.* A survey of hydrodynamical behaviour of many particles systems // In "Nonequilibrium phenomena II". North-Holland, 1984.
5. *De Masi A., Presutti E., Scacciatelli E.* The Weakly Asymmetric Simple Exclusion Process // Ann. Inst. H. Poincare. 1989. V. 25. № 1. P. 1–38.
6. *De Masi A., Esposito R., Lebowitz J.L., Presutti E.* Hydrodynamics of stochastic cellular automata // Commun. Math. Phys. 1989. № 125. P. 127–145.
7. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.
8. *Малышев В.А.* Краевые задачи для функций двух комплексных переменных и их приложения: Дис. . . . докт. физ.-мат. наук. М., 1973.
9. *Малышев В.А., Меньшиков М.В.* Эргодичность, непрерывность, аналитичность счетных цепей Маркова // Тр. Моск. матем. об-ва. М.: МГУ, 1979. Т. 39. С. 3–48.

Поступила в редакцию
03.05.90