Тезисы докладов, представленных на Седьмой Международной конференции по стохастическим методам. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2023, том 68, выпуск 1, 177–198

DOI: 10.4213/tvp5608

Том 68 | ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ 2023 | Выпуск 1

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ НА СЕДЬМОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ. II[1)]

Люлинцев А. В. (СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия)**. О некоторых мартингальных конструкциях для ПСИ-процессов**[2)]**.**

Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность с.в., $\Pi(t)$ — независимый от нее стандартный пуассоновский процесс, $\lambda > 0$ — фиксированная постоянная (интенсивность). ПСИ-процессом (процессом пуассоновского случайного индекса) назовем $\psi_\lambda(t) = \xi_{\Pi(\lambda t)}$ (см. [1]).

В работе изучаются совместные мартингальные свойства ПСИ-процесса $\psi_\lambda(t)$ и интегрированного ПСИ-процесса $\Psi_\lambda(t) = \int_0^t \psi_\lambda(s)\, ds$ (см., например, [2]).

Теорема. *Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность н.о.р.с.в., $\mathbf{E}\xi_0 = 0$, $\lambda > 0$. Фильтрация $\mathbf{F}$ натурально порождена марковской парой $(\psi_\lambda, \Psi_\lambda)$: $\mathcal{F}_t = \sigma\{(\psi_\lambda(s), \Psi_\lambda(s)),\, s \leqslant t\}$. Тогда процесс $\lambda\Psi_\lambda(t) + \psi_\lambda(t)$ при $t \geqslant 0$ является мартингалом относительно $\mathbf{F}$. В силу марковости пары $(\psi_\lambda, \Psi_\lambda)$ верно равенство*

$$\mathbf{E}\{\lambda\Psi_\lambda(t) + \psi_\lambda(t) \mid \psi_\lambda(s),\, \Psi_\lambda(s)\} = \lambda\Psi_\lambda(s) + \psi_\lambda(s), \qquad s \leqslant t. \tag{1}$$

Как следствие, рассмотрен случай стохастической интенсивности $\lambda > 0$ п.н.

В случае $\mathbf{D}\xi_0 < \infty$ вычислены главные числовые характеристики мартингала $\lambda\Psi_\lambda(t) + \psi_\lambda(t)$.

Произведено моделирование траекторий данного мартингала, в частности, для случаев нормального и радемахеровского распределения ξ_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О. В. Русаков, “Псевдо-пуассоновские процессы со стохастической интенсивностью и класс процессов, обобщающих процесс Орнштейна–Уленбека”, *Вестн. СПбГУ. Матем. Мех. Астрон.*, **4(62)**:2 (2017), 247–257; англ. пер.: O. V. Rusakov, “Pseudo-Poissonian processes with stochastic intensity and a class of processes generalizing the Ornstein–Uhlenbeck process”, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, **50**:2 (2017), 153–160.

[1)] Конференция проводилась при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265).

[2)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00646_а).

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5608

2. O. Rusakov, Y. Yakubovich, M. Laskin, “Self-similarity for information flows with a random load free on distribution: the long memory case”, 2018 *2nd European conference on electrical engineering and computer science (EECS)* (Bern, 2018), IEEE, 2018, 183–189.

Макарова А. П. (ВМедА им. С. М. Кирова, Санкт-Петербург, Россия)**, Горлов В. А.** (Воронеж, Россия)**, Макарова А. В.** (ВУНЦ ВВС ВВА им. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж, Россия)**. Вероятностное моделирование сетевой кластеризации.**

На базе разработанных алгоритмов и протоколов возможно реализовать усовершенствованную сеть SDN [1]. Для нахождения наиболее эффективного разбиения сети рассмотрим $M \in \Phi$ — разбиение n вершин на m кластеров (Φ — множество всех возможных разбиений множества вершин графа V). Определим некоторую случайную величину Q, принимающую значения от 1 до m с вероятностями q_i, $i = 1, \dots, m$. Для всех кластеров i сети определим некоторую случайную величину P^i, принимающую значения от 1 до n_i с вероятностями p_i^k, где $k = 1, \dots, n_i$. В результате исследования получаем расширенное понимание показателя качества разбиения $L(M)$ — верхнюю границу длины кодового слова, определяющего качество разбиения M:

$$L(M) = \sum_{i=1}^{m} q_i \ln\biggl(\sum_{i=1}^{m} q_i\biggr) - 2\sum_{i=1}^{m} q_i \ln q_i - \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \ln p_\alpha + \sum_{i=1}^{m}\biggl(q_i + \sum_{\alpha\in i} p_\alpha\biggr) \ln\biggl(q_i + \sum_{\alpha\in i} p_\alpha\biggr).$$

Теорема. *При использовании алгоритма и формулы для $L(M)$ вероятность отказов в сети снижается, показатель эффективности растет и “время жизни сети” возрастает в целом.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. A. Gorlov, A. V. Makarova, “Stochastic analysis methods in SDN networks modelling”, *Commun. Stoch. Anal.*, **14**:1-2 (2020), 13–18.

Мартынов Г. В. (ИППИ РАН, Москва, Россия)**. Критерий согласия омега-квадрат (Крамера–Мизеса) для параметрических семейств распределений.**

В настоящей работе рассматривается задача проверки гипотезы о том, что функция распределения наблюдаемой случайной величины принадлежит некоторому параметрическому семейству распределений. Для этого могут использоваться критерии Крамера–Мизеса, Колмогорова–Смирнова и др. Известно, что предельные распределения упомянутых статистик не зависят от неизвестных параметров наблюдаемых случайных величин для семейств распределений типа $\mathcal{F} = \{F((x-m)/s)\}$ и $\mathcal{R} = \{R((x/\theta)^\kappa)\}$ (см. [1]–[3]). Здесь рассматривается семейство $\mathcal{G} = \{G(x/\theta, \kappa), \theta, \kappa > 0\}$.

Теорема. *При некоторых условиях регулярности для семейства $\mathcal{G}$ предельное распределение статистики Крамера–Мизеса зависит не более чем от* *одного параметра семейства. В частности, для случая семейства $\mathcal{R}$ (см. [3]) распределение статистики не зависит от параметров вовсе, а для случая семейства гамма-распределений оно зависит только от параметра κ.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Kac, J. Kiefer, J. Wolfowitz, "On tests of normality and other tests of goodness-of-fit based on distance methods", *Ann. Math. Statist.*, **26**:2 (1955), 189–211.
2. G. Martynov, "New procedure for applying the Cramér–von Mises test for parametric families of distributions", *Operator theory and harmonic analysis-OTHA* 2020, Part II. Probability-analytical models, methods and applications, Springer Proc. Math. Stat., **358**, Springer, Cham, 2021, 293–308.
3. G. Martynov, "Note on the Cramér–von Mises test with estimated parameters", *Publ. Math. Debrecen*, **76**:3-4 (2010), 341–346.

Меликян М. В. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия)**. Большая система осцилляторов с ультралокальным воздействием случайного стационарного внешнего поля.**

Рассматривается конечная система точечных частиц единичных масс на вещественной прямой $\mathbf{R}$, где на частицу с фиксированным номером n действует внешняя сила $f(t)$ — стационарный в широком смысле центрированный случайный процесс с непрерывной ковариационной функцией $B(s)$ и спектральной мерой $\mu(dx)$, как в работе [1].

Теорема 1. *Пусть мера μ такова, что ковариационную функцию рассматриваемого случайного процесса можно представить в виде $B(t)=\int_{\mathbf{R}} e^{itx} b(x)\,dx$. Тогда средняя энергия всей системы будет ограничена по времени, если выполнено одно из условий*:

1) *носитель функции $b(x)$ не пересекается с множеством $\{\nu_k,\ k=1,\dots,N\}$*;

2) *для всех j таких, что $\nu_j \in \operatorname{supp} b(x)$, выполнено равенство $(u_j,e_n)^2=0$*;

3) *если есть точка спектра ν_j, лежащая в $\operatorname{supp} b(x)$, такая, что $(u_j,e_n)^2\neq 0$, то $\nu_j=0$ и $b(0)=b'(0)=0$.*

В противном случае средняя энергия будет расти по времени, причем существует положительная постоянная C такая, что $\mathbf{E}(H(t))\sim Ct^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. В. Меликян, "Большая система осцилляторов с ультралокальным воздействием случайного стационарного внешнего поля", *Чебышевский сб.*, **23**:1 (2022), 130–141.

Мисюра В. В. (Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия)**, Мисюра Е. В.** (Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва, Россия)**. Применение порядковых статистик в построении одношаговых прогнозов временных рядов.**

В продолжение работы [1], левую и правую границы одношагового интервального прогноза временного ряда h_k, $k=1,\dots,N$, формируют соответственно k первых наименьших порядковых статистик и порядковые статистики от

$k+1$ до N, полученные с помощью процедуры сдвига с шириной окна τ, $1<\tau<N$, и процедуры дальнейшего упорядочивания. Для получения весов предлагается использовать квантильную регрессию, поскольку в качестве целевых переменных используется интервальная оценка (h_l,h_k), $i\leqslant l<k\leqslant i+\tau-1$, для медианы $\mathrm{Me}(h)_i^{i+\tau-1}$ случайной последовательности $(h)_i^{i+\tau-1}=\{(h)_i,h_{i+1},\dots,h_{i+\tau-1}\}$, $i\leqslant l<k\leqslant i+\tau-1$, определяющая симметричный интервал с уровнем доверия $1-2\alpha$, полагая $k=\tau-l-1+i$. Обоснованием такого выбора целевых переменных является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\{H_{(1)},H_{(2)},\dots,H_{(\tau)}\}$ *— порядковые статистики для выборки* $\{H_1,H_2,\dots,H_\tau\}$ *и два числа* r *и* s *таковы, что* $\mathbf{P}(H_{(r)}<h_p<H_{(s)})=1-2\alpha$ *— заданная доверительная вероятность, интервал* $(H_{(r)},H_{(s)})$ *включает неизвестный квантиль* $h_p=F^{-1}(p)$, $0<p<1$. *Тогда вероятность* $\mathbf{P}(H_{(r)}<h_p<H_{(s)})$ *не зависит от неизвестной функции распределения наблюдаемой случайной величины* $F_H(h)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Misyura, M. Bogacheva, E. Misyura, “Interval forecasting of time series using orderstatistics”, *J. Phys. Conf. Ser.*, **2131** (2021), 022110, 6 pp.

Никитина А. В. (Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия)**, Долгов В. В.** (Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия)**.** **Изучение аллелопатического взаимодействия гидробионтов на основе стохастического подхода**[3]**.**

Исследование посвящено разработке конструктивных методов компенсации априорной неопределенности, проистекающей от нестационарного и стохастического характера экологических систем. Разностная схема для однородных уравнений математической модели биологической кинетики мелководного водоема (на примере Азовского моря), учитывающей аллелопатическое взаимодействие гидробионтов, из [1] запишется в виде

$$\frac{C^{n+1}-C^n}{\tau}+A_xC^n+A_yC^n+A_zC^{n+\sigma}=0,$$

где C — концентрация примеси; τ — шаг по времени; n — номер временного слоя; σ — вес схемы, $\sigma\in[0,1]$; A_x, A_y, A_z — дискретные аналоги операторов переноса вдоль координатных направлений Ox, Oy, Oz:

$$\begin{aligned}(A_xC)_i&=u_{i+1/2}\frac{C_{i+1}-C_i}{2h_x}+u_{i-1/2}\frac{C_i-C_{i-1}}{2h_x}\\&\quad-\mu_{i+1/2}\frac{C_{i+1}-C_i}{h_x^2}+\mu_{i-1/2}\frac{C_i-C_{i-1}}{h_x^2},\qquad 0\leqslant i\leqslant N,\end{aligned}$$

где h_x — шаг пространственной переменной; N — число шагов, μ — коэффициент диффузии; u — скорость движения водного потока. Дискретные операторы A_y, A_z записываются аналогичным образом.

[3] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-20050).

Теорема. *При выполнении условия* $\tau \leqslant \left(\max(2\mu/h_x^2 + 2\mu/h_y^2)\right)^{-1}$ *разностная схема условно устойчива и имеет место оценка* $\|C^{n+1}\| \leqslant \|C^0\|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. М. Атаян, А. В. Никитина, А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, “Математическое моделирование опасных явлений природного характера в мелководном водоеме”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **62**:2 (2022), 270–288; англ. пер.: A. M. Atayan, A. V. Nikitina, A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, “Mathematical modeling of hazardous natural phenomena in a shallow basin”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **61**:2 (2022), 269–286.

Николаев А. К. (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия)**. О вероятностном представлении резольвенты двумерного оператора Лапласа.**

Рассматривается семейство случайных линейных операторов

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_0^t e^{\lambda\tau} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(x - \|w(\tau)\| \cdot \theta)\, dS(\theta)\right] d\tau, \qquad \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0, \qquad (1)$$

где $w(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, $w(0) = (0,0)$, — двумерный винеровский процесс.

Соответствующее операторное семейство возникает при построении вероятностного представления резольвенты двумерного оператора Лапласа. В работе показывается, что с вероятностью единица операторы этого семейства являются интегральными операторами в $L_2(\mathbf{R}^2)$, и исследуются свойства их ядер. Также строится аналогичное операторное семейство для случая $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

Теорема. 1) *Если* $\lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$, *то*

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta - \lambda I\right)^{-1} f(x) = \mathbf{E}[\mathcal{R}_\lambda^\infty f(x)]$$

при всех $f(x) \in L_2(\mathbf{R}^2)$.

2) *Если* $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \sigma(\Delta/2), \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, *то*

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta - \lambda I\right)^{-1} f(x) = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}[\mathcal{R}_\lambda^t f(x)]$$

при всех $f(x) \in L_2(\mathbf{R}^2)$.

3) *Если* $\lambda \in \sigma(-\Delta/2)$, *то равенство из п.* 2) *справедливо при всех* $f(x) \in \mathcal{D}(-\Delta/2 - \lambda I)^{-1}$.

Пчелинцев Е. А., Перелевский С. С. (Томский государственный университет, Томск, Россия)**. Об оценивании тренда диффузионного процесса по дискретным данным**[4]**.**

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определено стохастическое дифференциальное уравнение: $dy_t = S(y_t)\,dt + \sigma(y_t)\,dw_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где $(w_t)_{t\geqslant 0}$ — винеровский процесс, начальное значение y_0 — некоторая постоянная,

[4] Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 20-61-47043).

$\sigma(\,\cdot\,)$ — неизвестный коэффициент диффузии (мешающий параметр) и $S(\,\cdot\,)$ — неизвестная функция из класса Σ, определенного в [1]. Задача — оценить тренд $S(x)$, $x \in [a,b]$, по дискретным наблюдениям $(y_{t_j})_{0\leqslant j\leqslant N}$, $t_j = j\delta$, с частотой $\delta = \delta_T$ и объемом выборки $N = N_T$. Предлагается процедура выбора модели S^* на основе улучшенных взвешенных оценок МНК $(S^*_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, введенных в [2]. Установлено, что такие оценки превосходят по точности оценки МНК, и доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Среднеквадратический риск процедуры выбора модели S^* удовлетворяет неасимптотическому точному оракульному неравенству*:

$$\mathbf{E}_S\|S^* - S\|^2 \leqslant A(\rho_T)\min_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{E}_S\|S^*_\lambda - S\|^2 + \frac{B_T}{\delta_T\rho_T},$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[a,b]$, $A(\rho_T) \to 1$ и $T^{-\epsilon}B_T \to 0$ для любого $\epsilon > 0$ при $T \to \infty$.

Используя полученную в [1] нижнюю границу для риска и теорему 1, установлено, что предложенная оценка S^* является асимптотически эффективной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. I. Galtchouk, S. M. Pergamenshchikov, "Adaptive efficient analysis for big data ergodic diffusion models", *Stat. Inference Stoch. Process.*, **25**:1 (2022), 127–158.
2. E. Pchelintsev, S. Pergamenshchikov, M. Leshchinskaya, "Improved estimation method for high dimension semimartingale regression models based on discrete data", *Stat. Inference Stoch. Process.*, **25**:3 (2022), 537–576.

Переварюха А. Ю. (СПБ ФИЦ РАН, Санкт-Петербург, Россия)**. Моделирование инвазий со стохастически возмущенным запаздыванием**[5]**.**

При анализе стремительных инвазий и инфекций актуален сценарий, когда достигнутая численность $N(t) \to \mathcal{K}$ не будет устойчивой. Стохастическое возмущение динамики значимо при активации противоборства в состоянии, критическом для среды. При приближении к порогу разрушения среды наблюдается усиление противодействия, что типично для иммунного ответа организма. Время активации важно, вариативно, но не менее τ_1. Пусть τ_1 варьируется случайной величиной γ в ограниченном диапазоне. Предложим модель инвазии с возмущенным равномерной случайной величиной запаздыванием $(t - \tau_1\gamma)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{\mathcal{K}}{N(t-\tau\gamma)}\right) - \frac{\delta N^2(t-\tau_1\gamma)}{(J - N(t))^2} - qN(t), \qquad \delta > q, \quad \gamma(\omega) \in [1,2]. \tag{1}$$

При приближении $N(t)$ к пороговому значению J, $N(0) < J < \mathcal{K}$, имеет место резкий переход в глубокий популяционный кризис $N(t) \to 0 + \epsilon$. Сценарий преодоления кризиса с образованием колебаний $N(t) \to N_*(t)$, $\max N_*(t) < J$, зависит от стохастических временных факторов. Согласно (1) популяция гарантированно погибает при увеличении репродуктивного потенциала r.

[5]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 23-21-00339).

Теорема. *Существует* $r = \overline{r}$ *такое, что событие* $\lim_{t\to\bar{t}} N(t; \overline{r}\,\tau) = 0$ *имеет положительную вероятность, и существуют* $\widehat{r} > \overline{r}$ *и* $t < \infty$ *такие, что указанное выше событие реализуется с вероятностью единица* ($\widehat{r}$ — *критический порог репродуктивной активности*). *Модель* (1) *описывает сценарии борьбы иммунной системы с инфекцией, способной стать хронической при* $N(t) \ll J$. *Иммунный ответ имеет не полностью предопределенный характер из-за недетерминированной длительности этапов иммунной активации. Варьируются время презентации антигена и длительность подбора подходящих клеток "наивных" лимфоцитов.*

Попов Г. А. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия)**. О предельных распределениях случайных блужданий по многомерным решеткам**[6]**.**

В настоящей работе доказывается предельная теорема для размера популяции частиц μ_t в критическом ветвящемся случайном блуждании (ВСБ) по $\mathbf{Z}$ с переходными вероятностями при $t \to \infty$ вида $p(t,x,y) \sim h_{1,\alpha}\, t^{-1/\alpha}$, где $h_{1,\alpha} > 0$ и $\alpha \in [1, 2)$. Вероятность выживания популяции для такого ВСБ изучалось, например, в [1].

Теорема. *Для критического возвратного ВСБ при любых* $z > 0$ *и* $x \in \mathbf{Z}$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}_x[e^{-z\mu_t} \mid \mu_t > 0] = 1 - \sqrt{1 - e^{-z}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Rytova, E. Yarovaya, "Survival analysis of particle populations in branching random walks", *Comm. Statist. Simulation Comput.*, **50**:10 (2021), 3031–3045.

Рахимбаева Е. О. (Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия)**, Атаян А. М.** (Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия)**. Обработка зашумленных изображений и данных на основе рекурсивной фильтрации**[7]**.**

Пусть математическая модель биогеохимических циклов мелководного водоема [1] имеет следующий вид:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + u\,\frac{\partial q_i}{\partial x} + v\,\frac{\partial q_i}{\partial y} + w\,\frac{\partial q_i}{\partial z} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} q_i) + R_{q_i},$$

где q_i — скопление i-й составляющей [мг/л]; $i \in M$, $M = \{\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3, \mathrm{PO}_4, \mathrm{POP}, \mathrm{DOP}, \mathrm{NO}_3, \mathrm{NO}_2, \mathrm{NH}_4, \mathrm{Si}\}$; $\{u, v, w\}$ — составляющие вектора скорости потока $\mathrm{H_2O}$ [м/с]; k — коэффициент турбулентного обмена [м^2·с]; R_{q_i} — функция-источник биогенных компонентов [мг/(л·с)]. Добавим соответствующие начальные и граничные условия.

[6] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00487).

[7] Исследование выполнено при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации в рамках научного проекта № MD-3624.2021.1.1.

На основе изучения коэффициентов чувствительности как норм операторов отклика доказана устойчивость оптимального решения задачи вариационного усвоения данных для математической модели биогеохимических циклов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. А. Гущин, А. В. Никитина, А. А. Семенякина, А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, “Модель транспорта и трансформации биогенных элементов в прибрежной системе и ее численная реализация”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **58**:8 (2018), 120–137; англ. пер.: V. A. Gushchin, A. I. Sukhinov, A. V. Nikitina, A. E. Chistyakov, A. A. Semenyakina, “A model of transport and transformation of biogenic elements in the coastal system and its numerical implementation”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **58**:8 (2018), 1316–1333.

Ратанов Н. Е. (Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия)**. О процессах Каца–Орнштейна–Уленбека**[8]**.**

В работе установлена связь между марковски-модулированными процессами Леви, существованием инвариантных распределений и экспоненциальными функционалами. Получены необходимые и достаточные условия существования инвариантных распределений для таких процессов, а также доказано следующее утверждение, иллюстрирующее работу [1].

Теорема. *Пусть $\varepsilon(t)$ — марковский процесс с двумя состояниями. Стационарное распределение (когда оно существует) процесса $\langle Z, \varepsilon\rangle$, заданного уравнением $Z(t) = z + \int_0^t \bigl(a_{\varepsilon(u)} - c_{\varepsilon(u)} Z(u)\bigr)\,\mathrm{d}u$, однозначно определяется распределением экспоненциального функционала*

$$G = \int_0^\infty \exp\biggl(-\int_0^t c_{\varepsilon(u)}\,\mathrm{d}u\biggr) a_{\varepsilon(t)}\,\mathrm{d}t,$$

см. [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Behme, A. Sideris, “Markov-modulated generalized Ornstein–Uhlenbeck processes and an application in risk theory”, *Bernoulli*, **28**:2 (2022), 1309–1339.
2. N. Ratanov, “Kac–Ornstein–Uhlenbeck processes: stationary distributions and exponential functionals”, *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 2022, Publ. online.

Рохлин Д. Б. (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия)**. Об алгоритмах стимулирующего ценообразования в условиях отсутствия информации о функциях полезности агентов**[9]**.**

Мы рассматриваем задачи, в которых лидер стремится изменить эгоистическое поведение агентов путем назначения цен на товары или ресурсы. В частности, рассмотрим корпорацию, производящую и продающую d товаров и состоящую из n производственных подразделений и m подразделений продаж. Пусть

[8] Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-21-00148).

[9] Работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра ЮФУ, соглашение Минобрнауки России № 975-02-2022-893.

$F(x,y)$ — прибыль корпорации, зависящая от векторов $x, y \in \mathbf{R}^d$, описывающих объемы производства и продаж подразделений, и $(\widetilde{x}(\lambda), \widetilde{y}(\lambda))$ — реакции подразделений на трансфертные цены, действующие внутри фирмы. Следующая рекуррентная формула является следствием применения алгоритма из [1] к задаче, двойственной к задаче максимизации прибыли:

$$\lambda_t = -\frac{\sum_{j=1}^{t-1} \Delta\widetilde{z}(\lambda_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{t-1} \|\Delta\widetilde{z}(\lambda_j)\|^2}}, \quad \lambda_0 = 0; \qquad \Delta\widetilde{z}(\lambda) := \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y}_i(\lambda) - \sum_{i=1}^{m} \widetilde{x}_i(\lambda).$$

Теорема. *Пусть F^* — максимальная прибыль. Для усредненного вектора трансфертных цен $\overline{\lambda}_T = (1/T)\sum_{t=1}^{T} \lambda_t$ справедливы оценки*

$$F^* - F(\widetilde{z}(\overline{\lambda}_T)) \leqslant CT^{-1/4}, \quad \|\Delta\widetilde{z}(\overline{\lambda}_T)\| \leqslant CT^{-1/4}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. Orabona, D. Pál, “Scale-free online learning”, *Theoret. Comput. Sci.*, **716** (2018), 50–69.

Русаков О. В. (СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия)**, Якубович Ю. В.** (СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия)**. Амбит-, траловые и ПСИ-стохастические процессы**[10]**.**

Под ПСИ-процессом здесь мы понимаем следующую субординацию: $\psi(t) = \xi_{\Pi(\lambda t)}$, $t \geqslant 0$, где $(\xi) = \xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность н.о.р.с.в., Π — стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от (ξ), $\lambda > 0$. Предположим, что ξ_0 находится в области притяжения некоторого симметричного α-устойчивого закона, $\alpha \in (0,2]$. Рассмотрим независимые копии ПСИ-процессов (ψ_j), $j \in \mathbf{N}$.

Теорема. *Имеет место сходимость конечномерных распределений*:

$$\frac{1}{N^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{N} \psi_j(t) \Rightarrow U^\alpha(t), \qquad N \to \infty, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь $U^\alpha(t) = \int_{A_\eta(t)} \mathrm{d}\mathcal{L}_\alpha(u,v)$, где $\mathcal{L}_\alpha$ — базис Леви (*см.* [1]) *на $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ с симметричным α-устойчивым законом распределения и структурной мерой Лебега. Так называемые амбит-множества* (*см.* [1]) *определяются как $A_\eta(t) = \{(x,s)\colon s \leqslant t,\ 0 \leqslant x \leqslant \eta(s-t)\}$, $t \in \mathbf{R}$, и в данном случае, т.е. для пределов ПСИ-процессов, $\eta(-r) = \lambda \exp(-\lambda r)$, $r \in \mathbf{R}_+$.*

Предельный процесс U^α является стационарным, и мы можем рассматривать его на $\mathbf{R} \ni t$. В терминологии [1] случайный процесс U^α будет называться “траловым процессом” с монотонным тралом — множествами $\{A_\eta(t)\}$, $t \in \mathbf{R}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. O. E. Barndorff-Nielsen, F. E. Benth, A. E. D. Veraart, *Ambit stochastics*, Probab. Theory Stoch. Model., **88**, Springer, Cham, 2018, xxv+402 pp.

[10] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00646_а).

Рыков В. В. (РГУ нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина, Москва, Россия; Российский университет дружбы народов, Москва, Россия). **Разложимые полурегенерирующие процессы и их применение при исследовании дублированной восстанавливаемой системы**[11]**.**

Опираясь на результаты работ [1], [2], мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Преобразование Лапласа* $\widetilde{R}(s)$ *функции надежности* $nR(t)$ *дублированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы* $A(t)$ *и восстановления* $B(t)$ *ее компонентов имеет вид*

$$\widetilde{R}(s) = \frac{(1-\widetilde{a}(s))(1+\widetilde{a}(s)-\widetilde{a}_B(s))}{s(1-\widetilde{a}_B(s))},$$

где наряду с обычными $\widetilde{a}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dA(x)$, $\widetilde{b}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dB(x)$ *использованы вновь вводимые модифицированные преобразования Лапласа–Стилтьеса распределений* $A(t)$ *и* $B(t)$,

$$\widetilde{a}_B(s) = \int_0^\infty e^{-sx}B(x)\,dA(x), \qquad \widetilde{b}_A(s) = \int_0^\infty e^{-sx}A(x)\,dB(x).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. V. Rykov, *Decomposable semi-regenerative processes and their applications*, LAP Lambert Academic Publishing, 2011, 84 pp.
2. V. V. Rykov, “Decomposable semi-regenerative processes: review of theory and applications to queueing and reliability systems”, *Reliability Theor. Appl.*, **16**:2(62) (2021), 157–190.

Сергеева Д. С. (ВГУ, Воронеж, Россия). **О глобальных по времени решениях одного класса дифференциально-алгебраических уравнений со случайными возмущениями.**

В настоящей работе содержится теорема, обобщающая результаты работ [1] и [2]. Пусть матрица $\widetilde{L}$ вырождена, а $\widetilde{M}$ невырождена. Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} \widetilde{L}D_S\xi(t) = \widetilde{M}\xi(t) + \widetilde{f}(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \overline{\Theta}(\xi), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} D_S\eta^{(1)}(t) = J\eta^{(1)}(t) + f^{(1)}(t,\eta(t)), \\ D_2\eta^{(1)}(t) = \Xi. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема. *Для того чтобы и прямой, и обратный потоки, порожденные уравнением* (1), *были одновременно полны и непрерывны на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы на* $[0,\infty)\times\mathbf{R}^d$ *существовали положительные гладкие собственные функции* $u(t,x)$ *и* $\overline{u}(t,x)$ *такие, что при всех* (t,x) *выполняются неравенства* $(\partial/\partial t+\mathcal{A})u < C$ *и* $(-\partial/\partial t+\overline{\mathcal{A}})\tilde{u} < \overline{C}$ *для некоторых положительных констант* C *и* $\overline{C}$, *где* $\mathcal{A}$ *и* $\overline{\mathcal{A}}$ *— генераторы прямого и обратного потоков, порожденных уравнением* (2).

[11] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00575_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yu. E. Gliklikh, *Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics*, Theoret. Math. Phys., Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011, xxiv+436 pp.
2. Ю. Е. Гликлих, *Производные в среднем случайных процессов и их применения*, ЮМИ ВНЦ РАН, Владикавказ, 2016, 194 с.

Шумафов М. М. (Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия)**, Тлячев В. Б., Панеш Т. А., Хаваджа М. А. Об устойчивости по вероятности решений некоторых стохастических дифференциальных уравнений второго порядка.**

В настоящей работе доказываются теоремы, обобщающие и дополняющие результаты работ [1], [2]. Приведем одну из них.

Теорема. *Пусть существуют числа $b > 0$ и $c \in \mathbf{R}$ такие, что для функций $f(y)$, $g(x)$ и $\sigma(x)$, $x \in \mathbf{R}$, выполнены следующие условия*:

1) f, g, σ *удовлетворяют условию Липшица на множестве* $\mathbf{R}$;
2) $f(y)/y > b$ *для всех* $y \neq 0$, $f(0) = 0$;
3) $xg(x) > 0$ *для всех* $x \neq 0$, $g(0) = 0$;
4) $\int_0^x g(s)\,ds \to +\infty$ *для* $|x| \to \infty$;
5) $0 < \sigma(y)/y < c^2$ *для всех* $y \neq 0$ *и* $c^2 < 2b$, $\sigma(0) = 0$.

Тогда тривиальное решение $(x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0)$ *стохастической системы Ито* $dx(t) = y(t)\,dt$, $dy(t) = [-f(y)-g(x)]\,dt+\sigma(y)\,dw(t)$, *где* $w(t)$ — *одномерный винеровский процесс, асимптотически устойчиво по вероятности в целом.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. М. Шумафов, “О построении функций Ляпунова для некоторых нелинейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка и вопросы устойчивости”, *Дифференц. уравнения*, **17**:6 (1981), 1143–1145.
2. М. М. Шумафов, “О стохастической устойчивости некоторых двумерных динамических систем”, *Дифференц. уравнения*, **46**:6 (2010), 892–896; англ. пер.: M. M. Shumafov, “On the stochastic stability of some two-dimensional dynamical systems”, *Differ. Equ.*, **46**:6 (2010), 901–905.

Симонян А.Р. (Сочинский государственный университет, Сочи, Россия)**, Улитина Е.И.** (Сочинский государственный университет, Сочи, Россия)**. Виртуальные времена ожидания в модели Клейнрока.**

Рассмотрим модель Клейнрока [1], [2] с интенсивностями входящих потоков $a_0, \ldots, a_r > 0$ и функцией распределения обслуживания вызовов $B_k(x)$, $B_k(+0) = 0$, $k = 1, \ldots, r$. Пусть $w_k(t)$ — виртуальные времена ожидания k-вызова в момент времени t [1].

В настоящей работе предложен новый метод анализа $w_k(t)$, $k = \overline{1, r}$, $t \geqslant 0$.

При $k = 1, \ldots, r$, $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ справедливы следующие равенства [2]:

$$\omega_k(s,t) = \overline{\omega}_k(m_{k-1}(s), t).$$

Положим $p_k(s) = s - \sum_{i=1}^k a_i(1-\beta_i(s))$, $p_k^j(s) = s - \sum_{i=1}^k a_{ij}(1-\beta_i(s))$ $(k = 1, \ldots, r,\ j = k, \ldots, r,\ s \geqslant 0)$, тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. *При любых* $k = 1, \ldots, r$, $t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$

$$\overline{\omega}_k(s,t) = e^{p_k(s)t}\biggl\{1 - s\int_0^t e^{-p_k(s)u} P(u)\,du$$

$$- \sum_{j=k+1}^{r} a_j(1-\beta_j(s)) \int_0^t e^{-p_k(s)v}\,dv \int_0^{(b_k/(b_k-b_j))(t-v)} e^{-p_k^{j-1}(s)u}\,d_u\mathbf{P}(w_j(v) < u)\biggr\},$$

где $\int_0^\infty e^{-st}P(t)\,dt = (m_r(s))^{-1}$, $s \geqslant 0$ (b_k, $m_k(s)$, $\beta_k(s)$ *определены в* [1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Р. Симонян, Р. А. Симонян, Е. И. Улитина, В. Г. Ушаков, "Стационарные времена ожидания в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета", *Изв. Сочинского гос. ун-та*, **24**:1-2 (2013), 26–42.
2. E. A. Danieljan, F. Liese, "The analysis of a $M_r/G_r/1/\infty$ model with time dependent priorities", *Rostock. Math. Kolloq.*, 1991, № 43, 39–54.

Смородина Н. В. (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия)**. О ядрах случайных операторов**[12]**.**

Пусть $\xi_x(t)$ — решение стохастического дифференциального уравнения $d\xi_x(t) = b(\xi_x(t))b'(\xi_x(t))\,dt + b(\xi_x(t))\,dw(t)$, $\xi_x(0) = x$. В пространстве $L_2(\mathbf{R})$ рассмотрим оператор $\mathcal{A} = -(1/2)(d/dx)\bigl(b^2(x)d/dx\bigr) + V(x)$, заданный на области определения $W_2^2(\mathbf{R})$. Относительно функций $b(x)$, $V(x)$ мы будем предполагать выполнение следующих условий:

1) $V \in L_1(\mathbf{R})$;
2) $b \in C_{\mathrm{b}^2}$ и отделена от нуля;
3) существует $b_0 > 0$ такое, что $\lim_{x\to\pm\infty} b(x) = b_0$;
4) $\lim_{x\to\pm\infty} b'(x) = \lim_{x\to\pm\infty} b''(x) = 0$;
5) $\int_{\mathbf{R}} x^2(|b(x) - b_0| + |b'(x)|)\,dx < \infty$.

Из условий 1)–5) вытекает, что спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из интервала $[0,\infty)$ и, возможно, нескольких отрицательных однократных собственных значений. Через P_{a} обозначим ортогональный проектор на абсолютно непрерывное подпространство H_{a} оператора $\mathcal{A}$, обозначим $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}P_{\mathrm{a}}$.

Для каждого λ, удовлетворяющего условию $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, определим случайный оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$, полагая $\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_0^t e^{\lambda\tau}(P_a f)(\xi_x(\tau))\exp\bigl\{-\int_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds\bigr\}\,d\tau$.

Теорема 1. 1) *С вероятностью* 1 *оператор* $\mathcal{R}_\lambda^t$ *является ограниченным интегральным оператором в* $L_2(\mathbf{R})$ *вида* $\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_{\mathbf{R}} r_\lambda(t,x,y)f(y)\,dy$, *причем при* $\operatorname{Re}\lambda < 0$ *последнее равенство справедливо также для* $t = \infty$.

2) *При любых* λ, t, x *функция* $r_\lambda(t,x,\cdot\,)$ *входит в* W_2^α *для любого* $\alpha \in [0, 1/2)$.

Теорема 2. 1) *Если* $\operatorname{Re}\lambda < 0$, *то для любого* $f \in H_{\mathrm{a}}$ *выполнено*

$$\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}} r_\lambda(\infty,\cdot\,,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}f.$$

2) *Если* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *и* $\lambda \neq 0$, *то для любого* $f \in H_{\mathrm{a}}$ *выполнено*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}} r_\lambda(t,\cdot\,,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}f.$$

[12] Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-21-00016).

Соболев В. Н., Кондратенко А. Е. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия). **Обобщение одного разложения В. В. Сенатова в ЦПТ.**

В настоящей работе доказывается следующая теорема, обобщающая результаты теорем 4 и 5 из работы [1].

Теорема. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *симметричные независимые одинаково распределенные случайные величины с* $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{D}\xi = 1$, *конечным моментом четного порядка* $m+2 \geqslant 2$ *и такой характеристической функцией* $f(t)$, *что* $|f(t)|^\nu$ *интегрируема на* $\mathbf{R}$ *при некотором* $\nu > 0$. *Тогда для плотности* $p_n(x)$ *нормированных сумм* $(\xi_1 + \cdots + \xi_n)n^{-1/2}$ *при* $n \geqslant \max\{m, \nu\}$ *и* $x \in \mathbf{R}$ *верно соотношение*

$$\left|p_n(x) - \varphi(x) \sum_{s=0}^{m/2} C_n^s \sum_{l=4s}^{m-4+4s} \frac{\Theta_{s,l}}{n^{l/2}} H_l(x) - \frac{\theta_{m+2}^{(\lambda)}}{n^{m/2}}\, \varphi(x) H_l(x)\right| \\ \lesssim \frac{\overline{\lambda}}{(m+2)!}\, \frac{\mathbf{E}\xi^{m+2}}{n^{m/2}}\, \frac{B_{m+2}}{\sqrt{2\pi}},$$

где $\varphi(x)$ — *плотность и* B_{m+2} — *момент порядка* $m+2$ *стандартного нормального распределения,* $H_l(x) = (-1)^l \varphi^{(l)}(x)/\varphi(x)$ — *многочлен Чебышёва–Эрмита степени* l, $0 \leqslant \lambda < 1$, $\overline{\lambda} = \max\{\lambda,\, 1-\lambda\}$ *и при* $k_j \geqslant 4$

$$\theta_k = \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j}{2^j j!}\, \frac{\mathbf{E}\xi^{k-2j}}{(k-2j)!}, \quad \theta_{m+2}^{(\lambda)} = \theta_k - \frac{\overline{\lambda}\, \mathbf{E}\xi^{m+2}}{(m+2)!}, \quad \Theta_{s,l} = \sum_{k_1+\cdots+k_s=l} \theta_{k_1} \cdots \theta_{k_s}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. В. Сенатов, “О реальной точности аппроксимаций в центральной предельной теореме. II”, *Матем. тр.*, **19**:2 (2016), 170–199; англ. пер.: V. V. Senatov, “On the real accuracy of approximation in the central limit theorem. II”, *Siberian Adv. Math.*, **27**:2 (2017), 133–152.

Степович М. А., Калманович В. В. (КГУ им. К. Э. Циолковского, Калуга, Россия), **Туртин Д. В.** (ИвГУ, Иваново, Россия), **Серегина Е. В.** (МГТУ им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Калужский филиал, Калуга, Россия). **О некоторых результатах математического моделирования процессов диффузии, обусловленных взаимодействием заряженных частиц и/или электромагнитного излучения с полупроводниковыми структурами[13)].**

Ранее [1] рассмотрены стохастические модели диффузии и последующей излучательной рекомбинации неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных в однородных полупроводниках широкими электронными или световыми пучками [2]. В настоящей работе для рассматриваемых математических моделей диффузии и катодолюминесценции получены оценки, позволяющие сделать заключение о корректности этих моделей и по случайному

[13)]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-03-00271).

изменению правой части дифференциального уравнения диффузии оценить изменения в решении этого уравнения и изменения в параметрах катодолюминесценции. Модельные расчеты проведены для параметров мишеней, характерных для перспективных материалов полупроводниковой оптоэлектроники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. А. Степович, Е. В. Серегина, Д. В. Туртин, “О некоторых аспектах корректности и стохастических особенностях математических моделей диффузии и катодолюминесценции в полупроводниках”, В ст.: “Тезисы докладов, представленных на Четвертой международной конференции по стохастическим методам”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **65**:1 (2020), 199–200; англ. пер.: M. A. Stepovich, E. V. Seregina, D. V. Turtin, “On some aspects of correctness and stochastic features of mathematical models of diffusion and cathodoluminescence in semiconductors”, In: “Abstracts of talks given at the 4th international conference on stochastic methods”, *Theory Probab. Appl.*, **65**:1 (2020), 162–163.
2. Д. В. Туртин, М. А. Степович, В. В. Калманович, А. А. Картанов, “О корректности математических моделей диффузии и катодолюминесценции”, *ТВИМ*, 2021, № 1(50), 81–100.

Сучкова Д. А. (УГАТУ, Уфа, Россия)**, Насыров Ф. С.** (УГАТУ, Уфа, Россия)**. Об уравнении Кортевега–де Фриза с шумом в дисперсии и нелинейном члене.**

Введем уравнение Кортевега–де Фриза с шумом в виде стохастического интеграла Стратоновича:

$$d_t u + u u_x \, dt + u_{xxx} \, dt + \varepsilon u u_x * dW(t) + \varepsilon u_{xxx} * dW(t) = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$, $u = u(t, W(t), x)$, $u(0,0,x) = u_0$, $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0,T]$ и $d_t u = u_t \, dt + u_v * dW(t)$.

Теорема 1. *Любое решение уравнения* (1) *представляется* [1] *в следующем виде*: $u(t, W(t), x) = \varphi(t + \varepsilon W(t), x)$, *где* $W(t)$ *является стандартным винеровским процессом.*

Следствие. *Частное решение уравнения* (1) *в виде уединенной волны* [2] *(солитона) существует и представляется в виде*

$$\varphi(t + \varepsilon W(t), x) = A \operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{x - (A/3)(t + \varepsilon W(t))}{\Delta}\right), \qquad A = \mathrm{const}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{12}{A}}. \tag{2}$$

Теорема 2. *Любое решение уравнения* (1) *представляется в следующем виде*: $u(t, W(t), x) = \varphi(t + \varepsilon W(t), x)$, *где* $W(t)$ *является произвольным непрерывным с вероятностью* 1 *случайным процессом или непрерывной детерминированной функцией.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф. С. Насыров, *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ*, Физматлит, М., 2011, 212 с.

2. Л. К. Мартинсон, Ю. И. Малов, *Дифференциальные уравнения математической физики*, 2-е изд., Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2002, 368 с.

Сухинов А. И. (Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия)**, Проценко С. В.** (Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) РГЭУ РИНХ, Таганрог, Россия)**. Построение модели турбулентного обмена для прибрежных систем на основе статистического анализа данных экспедиции**[14]**.**

В настоящей работе решена задача построения подсеточной модели турбулентного перемешивания [1]. Для параметризации коэффициента вертикального турбулентного обмена использованы данные, полученные в ходе экспедиции с помощью ADCP-зонда Workhorse Sentinel 600. Исследования фиксировались на 17 станциях Азовского моря, с интервалом в 1 с каждые 10 см (128 измерений каждой из трех компонент вектора скорости по глубине).

На основе обработанных статистически данных были выполнены эксперименты для параметризации и определения коэффициента турбулентного обмена:

$$\nu = (0.41z)^2 \cdot 0.5\sqrt{\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}\right)^2}, \qquad \nu = 0.5\,(C\Delta)^2\sqrt{\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}\right)^2};$$

здесь ν — коэффициент турбулентного обмена в вертикальном направлении, $\overline{u}$, $\overline{v}$ — усредненные по времени пульсации компонент скорости водного потока, C — эмпирическая константа, Δ — характерный масштаб сетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. A. Guschin, A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, S. V. Protsenko, “Three-dimensional mathematical model for numerical investigation of coastal wave processes”, *18th international multidisciplinary scientific geoconference SGEM* 2018, т. 18 (Albena, 2018), СТЕФ92 Технолоджи, София, 2018, 499–506.

Тихомиров А. Н. (Коми НЦ УрО РАН, Сыктывкар, Россия)**. Предельные теоремы для матриц Лапласа и матриц смежности обобщенных случайных графов.**

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{L}$ — матрицы смежности и Лапласа соответственно случайного взвешенного графа $\{V, E, W\}$ с $|V| = n$, $\mathbf{E}W_{ij} = 0$ и $\mathbf{E}W_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2$, $\mathbf{P}\{(i,j) \in E\} = p_{ij}^{(n)}$. Обозначим $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ собственные числа матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{L}$ соответственно. Введем нормирующий множитель $a_n := (1/n)\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{jk}^{(n)} \sigma_{jk}^2$ и рассмотрим эмпирические спектральные функции распределения матриц смежности и матриц Лапласа: $F_n(x) := (1/n)\sum_{j=1}^n I\{\lambda_j < x\sqrt{a_n}\}$, $G_n(x) = (1/n)\sum_{j=1}^n I\{\mu_j < x\sqrt{a_n}\}$, где $I\{A\}$ — индикатор события A. В настоящей работе доказывается следующая теорема, обобщающая некоторые результаты работы [1].

[14] Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-11-00295).

Теорема. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\sup_{n\geqslant 1}(\max_{1\leqslant j,k\leqslant n} p_{jk}\sigma_{jk}^2/a_n) < \infty$ *и выполнены следующие условия*: $\lim_{n\to\infty}(1/(na_n))\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n |p_{jk}\sigma_{jk}^2 - a_n/n| = 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \mathbf{E}X_{jk}^2 I\{|X_{jk}| > \tau\sqrt{a_n}\} = 0.$$

Тогда $F_n(x)$ *слабо сходится по вероятности к полукруговому закону, а* $G_n(x)$ *— к свободной свертке функций распределения нормального и полукругового закона.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W. Bryc, A. Dembo, Tiefeng Jiang, “Spectral measure of large random Hankel, Markov and Toeplitz matrices”, *Ann. Probab.*, **34**:1 (2006), 1–38.

Тихов М. С. (ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия). **Оценивание квантилей функции распределения с использованием полиномов Бернштейна.**

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — латентные независимые и одинаково распределенные случайные величины с неизвестной непрерывной функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения $f(x) > 0$, $x \in (0,1)$, отрезок $[0,1]$ — носитель этого распределения, $u_i = i/n$, $i = 0,1,\dots,n$, — точки деления интервала $[0,1]$ и $W_i = I(X_i < u_i)$ есть индикатор события $\{X_i < u_i\}$. Рассматривается задача оценивания квантиля порядка $0 < \lambda < 1$ функции распределения $F(x)$ по выборке $\mathcal{W}^{(n)} = \{(u_i, W_i),\ i = 0,\dots,n\}$. Такая задача возникает в биологии и называется зависимостью “доза–эффект”.

Для полных выборок оценки функции распределения $F(x)$ с использованием полиномов Бернштейна $b_k(n,x) = C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ были исследованы в [1]. В работе [2] в качестве оценки для $F(x)$ по выборке $\mathcal{W}^{(n)}$ была изучена статистика $F_n^*(x) = \sum_{k=0}^n W_k b_k(n,x)$. Для заданного $0 < \lambda < 1$ определим $x_\lambda = \inf\{x\colon F(x) \geqslant \lambda\}$, $\widehat{x}_{n,\lambda} = \inf\{x\colon F_n^*(x) \geqslant \lambda\}$. Статистику $\widehat{x}_{n,\lambda}$ мы рассматриваем как оценку квантиля x_λ порядка $0 < \lambda < 1$ функции распределения $F(x)$ в зависимости “доза–эффект”. Пусть $\sigma^2 = \lambda(1-\lambda)/(4\pi f^2(x_\lambda)x_\lambda(1-x_\lambda))$. Имеет место следующий результат.

Теорема. *Предположим, что* $F(x)$ *имеет ограниченную третью производную и* $0 < \lambda < 1$ *задано. Тогда*

$$\widehat{x}_{n,\lambda} \xrightarrow[n\to\infty]{p} x_\lambda, \qquad \sqrt{n}\,(x_{n,\lambda} - x_\lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,\sigma^2).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. J. Babu, A. J. Canty, Y. P. Chaubey, “Application of Bernstein polynomials for smooth estimation of a distribution and density function”, *J. Statist. Plann. Inference*, **105**:2 (2002), 377–392.
2. П. К. Бабилуа, Э. А. Надарая, “Об одном новом методе оценки бернуллиевской функции регрессии”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **67**:2 (2022), 209–222; англ. пер.: P. Babilua, E. A. Nadaraya, “On a new estimation method of the Bernoulli regression function”, *Theory Probab. Appl.*, **67**:2 (2022), 163–174.

Власков Г. А. (Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия). **К алгоритму численного моделирования электронной плотности стохастически конвектирующей высокоширотной ионосферы.**

В работе [1] в уравнении неразрывности $\partial N_e/\partial t + (\vec{v} + \vec{v}_{\mathrm{st}})\nabla N_e = q - \beta N_e$, где N_e — электронная плотность, β — коэффициент рекомбинации, q — функция ионообразования, поле скоростей переноса разделяется на детерминированную $\vec{v}$ и стохастическую $\vec{v}_{\mathrm{st}}$ составляющие. Стохастическую составляющую представим винеровским процессом: $\sigma(x,t)W(t)$. В работе [1] приведен алгоритм расчета электронной плотности как случайной функции на основе метода Монте-Карло.

В настоящей работе обосновывается использование значений величин $\sigma(x,t)$. Для этого анализируются данные, опубликованные в [2]. Флуктуации $\vec{E}_{\mathrm{st}}$ достигают в авроральной зоне $25\,\mathrm{мV/м}$, а в полярной шапке $5\,\mathrm{мV/м}$. Это дает соответственно $v_{\mathrm{st}} = 500\,\mathrm{м/с}$ и $v_{\mathrm{st}} = 100\,\mathrm{м/с}$. Полагая характерный масштаб L_0 равным 10 км, получим для авроральной зоны $\sigma = 2500$, а для полярной шапки $\sigma = 500$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Vlaskov, "Algorithm for numerical simulation of electron density and stochastically convecting high latitude ionosphere", *J. Phys. Conf. Ser.*, **2131** (2021), 022013, 10 pp.
2. Н. П. Исаев, Е. П. Трушкина, Н. П. Осипов, *Эмпирические модели электрического поля в высокоширотной ионосфере*, Препринт № 51(936), ИЗМИРАН СССР, М., 1990, 40 с.

Волосатова Т. А., Неумержицкая Н. В., Павлов И. В., Углич С. И. (Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия). **Исследование модели со случайными приоритетами.**

В настоящей работе для модели со случайными приоритетами доказывается следующая теорема, обобщающая результаты работ [1], [2].

Теорема. *Для параметров $c_1 > 0, \dots, c_n > 0$ рассмотрим функцию*

$$F(u_1, \dots, u_{n-1}) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(u_1^{\alpha_1} \cdots u_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \cdot (-c_1 u_1 - \dots - c_{n-1}u_{n-1} + c_n)^{\alpha_n}\right),$$

заданную на области D, описываемой неравенствами: $u_1 > 0, \dots, u_{n-1} > 0$, $c_1 u_1 + \dots + c_{n-1}u_{n-1} < c_n$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — с.в. на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$). Если для любого i $(i = 1, \dots, n)$ $\mathbf{P}$-п.н. выполняются неравенства $\alpha_i > 0$ и $\sum_{1\leqslant k\leqslant n,\, k\neq i} \alpha_k < 1$, то функция F строго выпукла вверх на D.

Следствие. *В условиях сформулированной теоремы функция F имеет в области D единственный локальный (и одновременно глобальный) максимум.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. В. Павлов, С. И. Углич, "Оптимизация сложных систем квазилинейного типа с несколькими независимыми приоритетами", *Вестник РГУПС*, 2017, № 3(67), 140–145.

2. N. Neumerzhitskaia, S. Uglich, T. Volosatova, “Sufficient conditions for the uniqueness of the maxima of the optimization problem in the framework of a stochastic model with priorities depending on one random variable”, *E3S Web Conf.*, **224** (2020), 01014, 8 pp.

Якымив А. Л. (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия)**. Предельное поведение порядковых статистик на длинах циклов случайных A-подстановок**[15]**.**

Зафиксируем некоторое множество натуральных чисел A. Через $T_n(A)$ обозначим множество подстановок степени n, длины циклов которых принадлежат множеству A (так называемых A-подстановок). Рассматривается случайная подстановка τ_n, равномерно распределенная на множестве $T_n(A)$. Пусть ζ_n — общее число циклов и $\eta_n(1) \leqslant \eta_n(2) \leqslant \cdots \leqslant \eta_n(\zeta_n)$ — вариационный ряд длин циклов подстановки τ_n. Мы будем предполагать, что последовательность $|T_n(A)|/n!$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\varrho > 0$. Зафиксируем действительное x и положим при $m \in \mathbf{N}$ и $t > 0$

$$r = \exp\left(\frac{m}{\varrho} + x\frac{\sqrt{m}}{\varrho}\right), \qquad l(t) = \sum_{i\in A,\, i\leqslant t} \frac{1}{i}.$$

Теорема 1. *Пусть* $(\varrho \ln n - m)/\sqrt{\ln n} \to +\infty$ *при* $n \to \infty$*. Тогда*

$$\mathbf{P}\{\varrho \ln \eta_n(m) \leqslant m + x\sqrt{m}\,\} = \Phi(z) + \frac{1}{405 l^{3/2}(r)}\bigl(10\Phi^{(3)}(z) + \Phi^{(5)}(z)\bigr) + O\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right);$$

$$z = y - \frac{1}{108\mu}(y^3 - y), \quad y = 3\sqrt{\mu}\left(\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{1/3} - \frac{1}{9\mu} - 1\right), \quad \mu = m+1, \quad \nu = l(r).$$

Теорема 1 обобщает основной результат статьи [1] на случай $A \neq \mathbf{N}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. A. Shepp, S. P. Lloyd, “Odered cycle lengths in a random permutation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121**:2 (1966), 340–357.

Яровая Е. Б. (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия)**. Предельное поведение популяций частиц в ветвящемся случайном блуждании**[16]**.**

Для критического ВСБ из [2], [3] с переходными вероятностями $p(t,x,y)$ из приводимой ниже теоремы вытекает, что рост условных математических ожиданий для популяций $\mu(t,x)$ и субпопуляций $\mu(t,x,y)$ частиц оказывается более медленным, чем при наличии источников той же интенсивности в каждой точке $\mathbf{Z}^d$ (см. [1]).

[15] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-11-00111-П, https://rscf.ru/project/19-11-00111/.

[16] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00487).

Теорема. *Для критического возвратного ВСБ по* $\mathbf{Z}^d$ *с одним источником ветвления частиц при* $\mu(0,x,y)=\delta_y(x)$ *и* $t\to\infty$ *справедливы следующие утверждения*:

a) *если* $p(t,x,y)\sim\gamma_d t^{-d/2}$, $\gamma_d>0$, $d=1$ *или* $d=2$, *то*

$$\mathbf{E}[\mu(t,x)\,|\,\mu(t,x)>0]\sim K_d(x)v_d(t),\quad \mathbf{E}[\mu(t,x,y)\,|\,\mu(t,x)>0]\sim K_d(x,y)v_d^*(t);$$

b) *если* $p(t,x,y)\sim h_{d,\alpha}t^{-d/\alpha}$, $h_{d,\alpha}>0$, $\alpha\in[1,2)$, $d=1$, *то*

$$\mathbf{E}[\mu(t,x)\,|\,\mu(t,x)>0]\sim V_{d,\alpha}(x)u_{d,\alpha}(t),\quad \mathbf{E}[\mu(t,x,y)\,|\,\mu(t,x)>0]\sim V_{d,\alpha}(x,y)u_{d,\alpha}^*(t),$$

где $v_1(t)\sim t^{1/4}$, $v_1^*(t)\sim t^{-1/4}$, $v_2(t)=u_{1,1}(t)\sim\sqrt{\ln t}$, $v_2^*(t)=u_{1,1}^*(t)\sim\sqrt{\ln t}/t$, $u_{1,\alpha}\sim t^{(\alpha-1)/(2\alpha)}$, $u_{1,\alpha}\sim t^{(\alpha-3)/(2\alpha)}$, $\alpha\in(1,2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Balashova, S. Molchanov, E. Yarovaya, "Structure of the particle population for a branching random walk with a critical reproduction law", *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, **23**:1 (2021), 85–102.
2. A. Rytova, E. Yarovaya, "Survival analysis of particle populations in branching random walks", *Comm. Statist. Simulation Comput.*, **50**:10 (2021), 3031–3045.
3. Е. Б. Яровая, "Модели ветвящихся блужданий и их применение в теории надежности", *Автомат. и телемех.*, 2010, № 7, 29–46; англ. пер.: E. B. Yarovaya, "Models of branching walks and their use in the reliability theory", *Autom. Remote Control*, **71**:7 (2010), 1308–1324.

Задорожний В. Г. (ВГУ, Воронеж, Россия)**. Оптимальное управление линейной стохастической системой.**

Рассматривается управляемая линейная система дифференциальных уравнений $dx/dt=\varepsilon(t)Ax+bu(t)$, $x(t_0)=x_0$, с критерием качества управления

$$I=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}\big[\langle B(s_1,s_2)\mathbf{E}[x(s_1)],\mathbf{E}[x(s_2)]\rangle+C(s_1,s_2)\mathbf{E}[u(s_1)]\mathbf{E}[u(s_2)]\big]\,ds_1\,ds_2 \\ +\frac{1}{2}\langle G\mathbf{E}[x(t_1)],\mathbf{E}[x(t_1)]\rangle.$$

Здесь t — время, t_0, t_1 — заданные числа, x — n-мерная векторная функция, A — вещественная матрица размера $n\times n$, b — n-мерный вектор, $u(t)$ — скалярная функция (управление), x_0 — случайный вектор, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение, ε — случайный процесс, заданный характеристическим функционалом $\psi(v)$, $B(s_1,s_2)$ — заданная самосопряженная неотрицательная матричная функция размера $n\times n$, $C(s_1,s_2)$ — заданная положительная функция, G — неотрицательная матрица размера $n\times n$, $\mathbf{E}[x(t)]$ — математическое ожидание случайного процесса. Введем функцию $\chi(s)=\chi(t_0,t,s)$ переменной s, которая равна $\operatorname{sign}(s-t_0)$, если s принадлежит отрезку с концами $\min[t_0,t]$, $\max[t_0,t]$, и равна нулю в противном случае.

Теорема. *Если математическое ожидание $\mathbf{E}[u(t)]$ является решением указанной выше задачи, то оно удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма $\int_{t_0}^{t_1} W(s,t)\mathbf{E}[u(s)]\,ds = F(t)$, в котором*

$$W(s,t) = \int_s^{t_1}\int_t^{t_1} \langle B(s_1,t)\psi(-i\chi(s,s_1)A)\mathbf{E}[x_0],\, \psi(-i\chi(t,s_2)A)b\rangle\, ds_2\, ds_1 \\ + C(s,t) + \langle G\psi(-i\chi(s,t_1)A)b,\, \psi(-i\chi(t,t_1)A)b\rangle,$$

$$F(t) = -\int_{t_0}^{t_1}\int_t^{t_1} \langle B(s_1,s_2)\psi(-i\chi(t_0,s_1)A)\mathbf{E}[x_0],\, \psi(-i\chi(t,s_2)A)b\rangle\, ds_1\, ds_2.$$

Замятин А. А. (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия)**,** **Малышев В. А.** (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия)**.** **Случайные регулярные потоки классических частиц.**

Рассматривается система N взаимодействующих частиц (единичной массы) $0 = x_1(0) < x_2(0) < \cdots < x_N(0) < x_{N+1}(0) = L$ на окружности ($x_1(0) = x_{N+1}(0)$) с потенциальной энергией взаимодействия $U = (\omega^2/2)\sum(x_{k+1} - x_k - L/N)^2$, где L — длина окружности и x_k — координаты частиц. На каждую частицу, помимо соседних частиц, действуют диссипативная сила $-\alpha\dot{x}_k$, $\alpha > 0$, и случайная движущая сила $f(t)$, являющаяся стационарным случайным процессом второго порядка ($\mathbf{E}f^2(s) < \infty$) с непрерывной ковариационной функцией и со средним $\overline{f} = \mathbf{E}f(s)$.

Предполагается, что при столкновениях частицы обмениваются скоростями. Поэтому исходный порядок частиц сохраняется в любой момент времени.

Пусть $\mu(du)$ — ортогональная мера для центрированного процесса $f(s) - \overline{f}$.

Теорема. 1) *Разности $q_k(t) = x_{k+1}(t) - x_k(t)$ — детерминированные величины и $q_k(t) \to L/N$ при $t \to \infty$.*

2) *Существует стационарный процесс*

$$\xi(t) = \frac{\overline{f}}{\alpha} + \int_{\mathbf{R}} e^{itu}(\alpha + iu)^{-1}\,\mu(du)$$

такой, что для любого $k = 1, \ldots, N$ с вероятностью единица $\dot{x}_k(t) - \xi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. В частности, если $f(t) \equiv \overline{f}$, то $\dot{x}_k(t) \to \overline{f}/\alpha$.

В остальной части доклада изучены условия регулярности [1] процесса $\{x_k(t)\}$ и в пределе $N \to \infty$ для любого момента времени t выведены уравнения Эйлера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Лыков, В. А. Малышев, В. Н. Чубариков, “Регулярные континуальные системы точечных частиц. I. Системы без взаимодействия”, *Чебышевский сб.*, **17**:3 (2016), 148–165.

Жданок А. И. (ИППИ РАН, Москва, Россия)**, Хурума А. К.** (Тувинский государственный университет, Кызыл, Россия)**. Разложение конечно аддитивных цепей Маркова и асимптотика их компонент**[17]**.**

В настоящей работе рассматриваются цепи Маркова (ЦМ), порождаемые конечно аддитивной переходной вероятностью $P(x,E)$, заданной на произвольном дискретном пространстве (X,Σ_d). Мы изучаем такие ЦМ в рамках операторного подхода, при котором $P(x,E)$ порождает марковский оператор A, действующий в пространстве конечно аддитивных мер [1]. Мы раскладываем $P(x,E)$ и A в сумму счетно аддитивных и чисто конечно аддитивных компонент: $P=P_{\mathrm{ca}}+P_{\mathrm{pfa}}$ и $A=A_{\mathrm{ca}}+A_{\mathrm{pfa}}$. Доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть для конечно аддитивной комбинированной ЦМ при любом $y\in X$ множество $Q_y=\{x\in X\colon P_{\mathrm{ca}}(x,\{y\})>0\}$ конечно. Тогда компонента A_{ca} переводит все чисто конечно аддитивные меры в такие же, а последовательности норм счетно аддитивных компонент $\|\mu_{\mathrm{ca}}^{n+1}\|$ и чисто конечно аддитивных компонент $\|\mu_{\mathrm{pfa}}^{n+1}\|$ последовательности мер $\mu^{n+1}=A\mu^n$ экспоненциально быстро и равномерно сходятся к нулю и к единице соответственно.*

Доказательство этой и других близких теорем дано в статье авторов [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. И. Жданок, “Конечно-аддитивные меры в эргодической теории цепей Маркова. I”, *Матем. тр.*, **4**:2 (2001), 53–95; англ. пер.: A. I. Zhdanok, “Finitely additive measures in the ergodic theory of Markov chains. I”, *Siberian Adv. Math.*, **13**:1 (2003), 87–125.
2. A. Zhdanok, A. Khuruma, “Decomposition of finitely additive Markov chains in discrete space”, *Mathematics*, **10**:12 (2022), 2083, 21 pp.

Житлухин М. В. (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия)**. Стратегии оптимального роста в модели рынка с большим количеством агентов**[18]**.**

Пусть на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant0},\mathbf{P})$ заданы строго непрерывные положительные семимартингалы X_t^n, $n=1,\dots,N$.

Для непрерывных согласованных процессов λ_t, μ_t со значениями в множестве $\Delta^N=\{x\in\mathbf{R}_+^N\colon x^1+\dots+x^N=1\}$ и констант $\rho>0$, $w_0>0$ рассмотрим систему уравнений

$$V_t=\frac{1}{\rho}\sum_{n=1}^N X_t^n,\qquad S_t^n=\mu_t^nV_t\quad(n=1,\dots,N),\tag{1}$$

$$dW_t=\sum_{n=1}^N\frac{\lambda_t^nW_t}{S_t^n}(dS_t^n+X_t^n\,dt)-\rho W_t\,dt,\qquad W_0=w_0.\tag{2}$$

Теорема. *Существует п.н.-единственный процесс μ_t такой, что для любого процесса λ_t если уравнения* (1), (2) *имеют решение W_t, то процесс W_t/V_t является локальным мартингалом.*

[17] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00575_а).

[18] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-71-10097, https://rscf.ru/project/18-71-10097/.

Данный результат допускает следующую экономическую интерпретацию. Пусть процессы X_t^n задают интенсивности выплаты дивидендов N активов, а S_t^n задают их цены, которые определяются стратегией μ_t репрезентативного агента, имеющего капитал V_t. Тогда, какой бы стратегии λ_t ни следовал "маленький" агент, его капитал W_t не может расти быстрее капитала репрезентативного агента в том смысле, что W_t/V_t является локальным мартингалом.

В работе также показано, как найти процесс μ_t в явном виде.

Зорин А. В. (ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия). **О стационарном распределении процесса обслуживания неординарных потоков с разделением времени при пороговом алгоритме переключения.**

Рассматривается система массового обслуживания из работы [1]. Пусть внешняя среда имеет одно состояние, число входных потоков m равно 2, входящий поток Π_j — пуассоновский поток групп, $\{f(b,j);\, b=1,2,\dots\}$ — распределение вероятностей размера группы по потоку Π_j, $j=1,2$. Рассматриваются условия существования и способ вычисления стационарного распределения однородного марковского случайного процесса $\{(\Gamma(t),\kappa_1(t),\kappa_2(t));\, t\geqslant 0\}$. Пусть в стационарном режиме

$$\Psi(z_1,z_2,r)=\mathbf{E}\big(z_1^{\kappa_1(t)}z_2^{\kappa_2(t)}I(\Gamma(t)=\Gamma^{(r)})\big),\qquad f_j(j)=\sum_{b=1}^{\infty}z_j^b f(b,j),$$

$|z_1|<1$, $|z_2|<1$, и $Q(0,0,0)=\mathbf{P}(\{\Gamma(t)=\Gamma^{(0)},\ \kappa_1(t)=0,\ \kappa_2(t)=0\})$.

Теорема 1. *Для $r=1,2$ имеют место уравнения*:

$$\begin{aligned}
&\Psi(z_1,z_2,r)\big(\lambda_1(f_1(z_1)-1)+\lambda_2(f_2(z_2)-1)-\beta_r\big)\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{2}\overline{\beta}_j\mathbf{E}\big(z_1^{\kappa_1(t)}z_2^{\kappa_2(t)}I\big(\{\Gamma(t)=\Gamma^{(2+j)},\ h(\kappa_1(t),\kappa_2(t))=r\}\big)\big)\\
&\qquad+\lambda_r f_r(z_r)Q(0,0,0)=0,\\
&\Psi(z_1,z_2,2+r)\big(\lambda_1(f_1(z_1)-1)+\lambda_2(f_2(z_2)-1)-\overline{\beta}_r\big)\\
&\qquad+\beta_r z_r^{-1}\big(1+p_{r,1}(z_1-1)+p_{r,2}(z_2-1)\big)\Psi(z_1,z_2,r)=0,\\
&\qquad\qquad(\lambda_1+\lambda_2)Q(0,0,0)=\overline{\beta}_1Q(3,0,0)+\overline{\beta}_2Q(4,0,0).
\end{aligned}$$

Уравнения из теоремы 1 решаются для пороговой функции переключения: $h(x_1,x_2)$ принимает значение 1 при $x_1>L\in\{0,1,\dots\}$ или при $1\leqslant x_1\leqslant L$ и $x_2=0$, значение 2 при $x_1\leqslant L$ и $x_2\geqslant 1$, значение 0 при $x_1=x_2=0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. V. Zorine, "On ergodicity conditions in a polling model with Markov modulated input and state-dependent routing", *Queueing Syst.*, **76**:2 (2014), 223–241.