СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

МАЛЫШЕВ В. А., ЦАРЕГРАДСКИЙ И. П.

Марковские процессы с локальным взаимодействием изучались в основном для случая, когда пространство состояний в каждой точке конечно (см., например, работы Toома, Васильева, Ставской и др. в [3], а также [4]).

Если пространство состояний в каждой точке является счетным, возникают трудности уже для конечномерных систем (в терминологии статистической физики — в конечном объеме). В этой статье мы изучаем один из простейших возможных процессов локального взаимодействия конечного числа счетных цепей Маркова типа процесса «разорения — гибели».

1. Формулировка результатов. Рассмотрим счетную цепь Маркова с дискретным временем, множество состояний которой в момент t составляют всевозможные векторы $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, где компоненты $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — произвольные неотрицательные целые числа. Мы будем интерпретировать $x_i(t)$ как длину очереди к i-му обслуживающему прибору системы в моменты $t = 0, 1, \ldots$ Будем полагать, что требования к каждому прибору приходят независимо. В каждый момент времени t с вероятностью p на i-й прибор поступает требование и с вероятностью $q = 1 - p$ не поступает. Каждый прибор системы обслуживает в единицу времени не более одного требования в своей очереди и при этом вероятность обслуживания равна α, если оба соседних прибора заняты, и равна α' в остальных случаях.

Точнее, мы считаем, что вероятность перехода удовлетворяет следующим условиям:

$$\mathrm{P}(\mathbf{x}(t+1) \mid \mathbf{x}(t)) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(x_i(t+1) \mid x_{i-1}(t), x_i(t), x_{i+1}(t)). \tag{1}$$

Мы полагаем здесь $x_0(t) = x_{n+1}(t) \equiv 1$, задавая таким образом «граничные» условия.

В соответствии со сказанным выше переходные вероятности

$$\mathrm{P}(x_i(t+1) \mid x_{i-1}(t), x_i(t), x_{i+1}(t))$$

в случае $x_{i-1}(t) x_{i+1}(t) > 0$ равны $q(1-\alpha) + p\alpha$, если $x_i(t+1) = x_i(t) \neq 0$; q, если $x_i(t) = x_i(t+1) = 0$; $p(1-\alpha)$, если $x_i(t+1) = x_i(t) + 1$; $q\alpha$, если $x_i(t+1) + 1 = x_i(t) \neq 0$; 0 в остальных случаях.

В случае $x_{i-1}(t) x_{i+1}(t) = 0$ соответствующие формулы получаются заменой α на α'.

Если $\alpha' = \alpha$, то мы имеем систему с независимой эволюцией каждой компоненты и, как хорошо известно (см., например, [1]), при $p < \alpha$ цепь будет эргодической, при $p = \alpha$ — нулевой возвратной и невозвратной при $p > \alpha$.

Для эргодического случая $(p < \alpha)$ нетрудно вычислить стационарные вероятности π_k. В частности,

$$\pi_0 = 1 - \frac{p}{\alpha}. \tag{2}$$

Для $\alpha' \neq \alpha$ все ситуации, когда классифицировать цепь достаточно просто, содержит следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $p < \min(\alpha', \alpha)$, то цепь эргодична. Если $p > \alpha$, то при всех α' цепь невозвратна.*

Таким образом, остается исследовать случай $\alpha' < p < \alpha$. Достаточные условия эргодичности содержатся в следующем утверждении.

Теорема 2. *Если $\alpha' < p < \alpha$ и $\alpha' > \alpha p/(\alpha + p)$, то цепь эргодична.*

Неизвестно, в какой степени это условие близко к необходимому. Справедливы, впрочем, такие утверждения.

Теорема 3. *При $n = 3$, $\alpha' < p < \alpha$, $\alpha' < \alpha p/(\alpha + p)$ цепь невозвратна.*

Теорема 4. *Если $\alpha = 1$, $n \geqslant 3$ и $\alpha' < p/(1 + p)$, то цепь невозвратна.*

2. Основная конструкция. Заметим, что рассматриваемый однородный марковский процесс $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ можно представлять, как случайное блуждание на целочисленной решетке

$$Z_+^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n);\ x_i = 0, 1, 2, \ldots \text{— целые}\}.$$

Переходные вероятности $p_{\mathbf{xy}}$ блуждания за один шаг из точки $\mathbf{x}$ в точку $\mathbf{y}$ легко подсчитываются. Пусть

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = (M_1(\mathbf{x}), \ldots, M_n(\mathbf{x})) = \sum_{\mathbf{y}} (\mathbf{y} - \mathbf{x})\, p_{\mathbf{xy}}$$

— вектор среднего скачка за один шаг из точки $\mathbf{x} \in Z_+^n$.

Простое вычисление дает:

$$M_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} p - \alpha, & \text{если} \quad x_{i-1} > 0,\ x_i > 0,\ x_{i+1} > 0, \\ p, & \text{если} \quad x_i = 0, \\ p - \alpha', & \text{если} \quad x_i > 0,\ x_{i-1}x_{i+1} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Введем теперь основную конструкцию. Пусть $R_+^n = \{\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n);\ r_i\ (i = 1, \ldots, n)$ — неотрицательные вещественные числа$\}$. Через Λ будем обозначать наборы возрастающих натуральных чисел:

$$\Lambda = \{i_1, \ldots, i_k\}, \quad i_1 < \ldots < i_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Пусть $\Gamma^\Lambda = \Gamma_{00}^\Lambda$ — «квадрант», определяемый формулой

$$\Gamma_{cg}^\Lambda = \{\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n):\ r_i > c,\ i \in \Lambda;\ r_j < g,\ j \notin \Lambda\}$$

при $c = 0$ и $g = 0$.

Случайное блуждание $\mathbf{x}(t)$ обладает следующими двумя свойствами:

1) скачки за один шаг блуждания равномерно ограничены (в евклидовой метрике) величиной $\sqrt{n}$;

2) блуждание однородно, т. е. для всех Λ и любого вектора $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, где a_i — целые числа, $i = 1, \ldots, n$, $a_i = 0$ при $i \notin \Lambda$, имеет место равенство $p_{\mathbf{xy}} = p_{\mathbf{x+a},\mathbf{y+a}}$ для всех таких $\mathbf{x} \in Z_+^n \cap \Gamma^\Lambda$ и всех $\mathbf{y} \in Z_+^n$, что $\mathbf{x} + \mathbf{a} \in Z_+^n \cap \Gamma^\Lambda$ и $\mathbf{y} + \mathbf{a} \in Z_+^n$. Для любого «квадранта» Γ^Λ $(\Lambda \neq \{1, \ldots, n\})$ выберем произвольную точку $\mathbf{b} \in Z_+^n \cap \Gamma^\Lambda$ и проведем через нее плоскость $\tilde{C}^\Lambda$ размерности $n - |\Lambda|$ перпендикулярно Γ^Λ. Назовем *индуцированным* процессом $\mathbf{x}^\Lambda(t)$ однородный марковский процесс с множеством состояний $C^\Lambda = \tilde{C}^\Lambda \cap Z_+^n$ и следующими вероятностями перехода за один шаг:

$$p_{\mathbf{xy}}^\Lambda = p_{\mathbf{xy}} + \sum_{\mathbf{y}' \neq \mathbf{y}} p_{\mathbf{xy}'}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C^\Lambda, \tag{4}$$

где суммирование ведется по всем таким $\mathbf{y}' \in Z_+^n$, что прямая, соединяющая $\mathbf{y}'$ и $\mathbf{y}$, перпендикулярна к C^Λ. Из свойства однородности блуждания $\mathbf{x}(t)$ следует, что определение индуцированного процесса $\mathbf{x}^\Lambda(t)$ не зависит от выбора точки $\mathbf{b} \in Z_+^n \cap \Gamma^\Lambda$.

Лемма 1. *В условиях теоремы 2 процессы $\mathbf{x}^\Lambda(t)$ эргодичны.*

Обозначим $\pi^\Lambda(\gamma)$, $\gamma \in C^\Lambda$, стационарные вероятности процессов $\mathbf{x}^\Lambda(t)$. Введем векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in R_+^n$, $\mathbf{r} \neq 0$, играющее в дальнейшем важную роль. Для этого определим сначала векторы $\mathbf{v}^\Lambda = (v_1^\Lambda, \ldots, v_n^\Lambda)$ при $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ равенством

$$\mathbf{v}^\Lambda \equiv \mathbf{M}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma^\Lambda.$$

Для остальных Λ положим: $v_i^\Lambda = \sum_{\gamma \in C^\Lambda} \pi^\Lambda(\gamma) M_i(\gamma)$ при $i \in \Lambda$, $v_i^\Lambda = 0$ при $i \notin \Lambda$.

Лемма 2. *В условиях теоремы 2 для всех Λ и всех $i \in \Lambda$ справедливо неравенство $v_i^\Lambda < 0$.*

Положим теперь $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}^\Lambda$, если $\mathbf{r} \in \Gamma^\Lambda$. Мы задали, таким образом, векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ на $R_+^n \setminus \{0\}$, причем для любой точки $\mathbf{r} \in R_+^n \setminus \{0\}$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{r}) \in R_+^n \setminus \{0\}.$$

Поэтому векторное поле $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ определяет (если в качестве начальной выбрать точку $\mathbf{x} = \psi(0)$) детерминированный процесс

$$\psi'(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)),$$

для которого $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ есть поле скоростей. Заметим, что этот процесс в условиях теоремы 2 всегда за конечное время $\tau(\mathbf{x})$ приходит из $\mathbf{x}$ в начало координат.

Лемма 3. *Пусть случайное блуждание* $\mathbf{x}(t)$ *в* Z^n_+ *обладает свойствами равномерной ограниченности и однородности скачков (см. выше свойства 1 и 2) и имеет один существенный непериодический класс состояний. Пусть при этом все индуцированные процессы* $\mathbf{x}^\Lambda(t)$, $\Lambda \neq \{1, \ldots, n\}$, *эргодичны и для всех* $\Lambda \subseteq \{1, \ldots, n\}$

$$v_i^\Lambda < 0 \quad \text{при} \quad i \in \Lambda. \tag{5}$$

Тогда случайное блуждание эргодично.

Из лемм 1, 2, 3 следует утверждение теоремы 2. Сейчас мы докажем лемму 3, а леммы 1, 2 докажем в следующем параграфе.

Доказательство леммы 3. Для эргодичности случайного блуждания $\mathbf{x}(t)$ достаточно показать [2], что существует такая положительная функция $f(\mathbf{x})$ и такая функция $m(\mathbf{x})$, значения которой суть натуральные числа, $\sup\limits_{\mathbf{x}\in Z^n_+} m(\mathbf{x}) < +\infty$, что для всех $\mathbf{x}$, принадлежащих Z^n_+ без некоторого конечного множества, выполняется для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ неравенство

$$\sum_{\mathbf{y}\in Z^n_+} p^{m(\mathbf{x})}_{\mathbf{xy}} f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) < -\varepsilon_0. \tag{6}$$

(Здесь $p^m_{\mathbf{xy}}$ — вероятность перехода из $\mathbf{x}$ в $\mathbf{y}$ за m шагов). В качестве функции $f(\mathbf{x})$ возьмем $\tau(\mathbf{x})$ — время достижения начала координат из точки $\mathbf{x}$ детерминированным процессом $\psi(t)$. Нетрудно доказать, что существуют такие положительные константы, a, δ, ε, что из условия $\|\mathbf{v}^\Lambda(x) - \mathbf{w}\| < \delta$ следует неравенство

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{w}) - f(\mathbf{x}) < -\varepsilon, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^\Lambda_{a0}, \quad \mathbf{w} \in \Gamma^\Lambda. \tag{7}$$

Для нахождения функции $m(\mathbf{x})$ воспользуемся следующим утверждением, которое доказывается применением неравенства Чебышева [2]: для любых $M \geq 0, \delta > 0, \sigma > 0$ существуют такие натуральные $m_\Lambda(\delta, \sigma)$ и N_Λ, что для любой точки $\mathbf{x} \in Z^n_+ \cap \Gamma^\Lambda_{N_\Lambda M}$ при $m \geq m_\Lambda(\delta, \sigma)$

$$P\{\|\mathbf{x}'_\Lambda(m) - (\mathbf{x} + m\mathbf{v}^\Lambda)\| \geq m\delta\} \leq \sigma. \tag{8}$$

(Здесь $\mathbf{x}'_\Lambda(t) = \mathbf{x}'(t)$ — вектор с компонентами $x_i(t)$, $i \in \Lambda$, и $x_j(0) = x_j$, $j \notin \Lambda$). Для каждого Λ с $|\Lambda| = k - 1$, $k = 2, \ldots, n$, выберем $M = M_\Lambda \geq \max\limits_{\Lambda': |\Lambda'| = k} N_{\Lambda'}$. Тогда, как легко понять, множество $Z^n_+ \setminus \bigcup\limits_\Lambda \Gamma^\Lambda_{N_\Lambda M}$ будет конечным. Для точек $\mathbf{x}$ его дополнения определим искомую функцию $m(\mathbf{x})$ равенством $m(\mathbf{x}) \equiv m = \max\limits_\Lambda m_\Lambda(\delta, \sigma)$, взяв в качестве $\delta > 0$ константу, фигурирующую в приведенном выше свойстве функции $f(\mathbf{x})$ и надлежащим образом выбрав затем малое $\sigma > 0$. Неравенство (6) доказывается с помощью простой выкладки, которая не приводится.

Доказательство лемм 1 и 2. Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$. Назовем множество $\Lambda = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $i_1 < \ldots < i_k$, *связным*, если $i_j - i_{j-1} = 1$ для всех $j = 1, \ldots, k$. Для любого множества $\Lambda \subset N$ его дополнение $N \setminus \Lambda$ можно представить в виде объединения $\Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_m$ максимальных связных компонент $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$. Нетрудно видеть, что индуцированный процесс $\mathbf{x}^\Lambda(t)$ представляет собой векторный процесс $\{x_i(t), i \in N \setminus \Lambda\}$ при условии, что все остальные приборы заняты (т. е. $x_j(t) \geq 1$ для $j \in \Lambda$). При разбиении на максимальные связные компоненты процесс $\mathbf{x}^\Lambda(t)$ задается в виде совокупности независимых процессов, представляющих собой копии исходного случайного блуждания в $Z^{|\Lambda_1|}_+, \ldots, Z^{|\Lambda_m|}_+$ соответственно.

Перейдем теперь к вычислению чисел v_i^Λ для $i \in \Lambda$. Возможны следующие случаи.

(1) При $1 < i < n$ пусть числа $i - 1$ и $i + 1$ принадлежат Λ; при $i = 1$ пусть $2 \in \Lambda$; при $i = n$ пусть $n - 1 \in \Lambda$. Тогда $v_i^\Lambda = p - \alpha$.

(2) При $1 < i < n$ пусть только одно из чисел $i-1$ и $i+1$ принадлежит Λ; при $i = 1$ пусть $2 \notin \Lambda$; при $i = n$ пусть $n-1 \notin \Lambda$. То из $i-1$ и $i+1$, которое не принадлежит Λ, 2 при $i = 1$ или $n-1$ при $i = n$ обозначим общим индексом j. Тогда

$$v_i^\Lambda = \pi_0^{(r)}(p - \alpha') + (1 - \pi_0^{(r)})(p - \alpha),$$

где r — мощность максимальной связной компоненты $N \setminus \Lambda$, содержащей j, а $\pi_0^{(r)}$ — стационарная вероятность нулевого состояния последней или первой координаты рассматриваемого случайного блуждания в Z_+^r.

(3) Пусть $1 < i < n$, числа $i-1$ и $i+1$ не принадлежат Λ. Тогда

$$v_i^\Lambda = [1 - (1 - \pi_0^{(r)})(1 - \pi_0^{(s)})](p - \alpha') + (1 - \pi_0^{(r)})(1 - \pi_0^{(s)})(p - \alpha),$$

где r и s — мощности компонент $N \setminus \Lambda$, содержащих $i-1$ и $i+1$ соответственно. Теперь воспользуемся следующим утверждением, которое докажем ниже.

Лемма 4. *Справедливо неравенство* $\pi_0^{(k)} \leqslant 1 - p/\alpha$ *для всех* k.

Из этой леммы следует, что в случаях (2) и (3) выполняется неравенство

$$v_i^\Lambda \leqslant \frac{\alpha^2 - p^2}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha p}{\alpha + p} - \alpha'\right].$$

Доказательство лемм 1 и 2 теперь проводится индукцией по n. Действительно, по предложению индукции все процессы $x^\Lambda(t)$ эргодичны. Поэтому из последнего неравенства следует, что выполнены условия леммы 3 и, следовательно, блуждание эргодично. Переходим к доказательству леммы 4. Наряду с рассматриваемой системой обслуживания, определяемой параметрами k, $\alpha' < \alpha$ и задаваемой процессом $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_k(t))$, рассмотрим систему с параметрами k, $\alpha' = \alpha$, задаваемую процессом $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_k(t))$ с независимыми компонентами $\bar{x}_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$. В предположении, что системы находились в одном и том же начальном состоянии

$$x_i(0) = \bar{x}_i(0) = x_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

нетрудно доказать индукцией по $t = 0, 1, \ldots$, что

$$\mathbf{P}\{x_i(t) < l_i, i = 1, \ldots, k\} \leqslant \mathbf{P}\{\bar{x}_i(t) < l_i, i = 1, \ldots, k\}.$$

В частности, $\mathbf{P}\{x_i(t) = 0\} \leqslant \mathbf{P}\{\bar{x}_i(t) = 0\}$. Если процессы $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ эргодичны, то из последнего неравенства следует:

$$\pi_0^{(k)} \leqslant \pi_0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Ссылка на формулу (2) завершает доказательство леммы и основной теоремы 2. Теорема 3 доказывается простым подсчетом компонент векторов поля $\mathbf{v}(x)$ и указанием пути, уводящего процесс $x(t)$ в бесконечность. Доказательство теоремы 4 — в следующем параграфе.

4. Невозвратность блуждания при $\alpha = 1$. Пусть $n \geqslant 3$, $\alpha' < \alpha p/(\alpha + p)$, $\alpha = 1$. Последнее равенство означает, что при нормальном режиме рассматриваемая система в каждый такт своей работы обслуживает с вероятностью единица каждое поступающее на обслуживание требование. Предположим, что в начальный момент $t = 0$ процесс $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, описывающий функционирование системы обслуживания во времени, находится в состояниях $x_i(0) = N \gg 1$ при четном i; $x_i(0) = \varepsilon_i$ при нечетном i, где ε_i равно 0 или 1.

Обозначим $\mathfrak{S}$ множество состояний системы с $x_i(t) \leqslant 1$ для нечетных i (в частности, $x(0) = (x_1(0), \ldots, x_n(0)) \in \mathfrak{S}$). Очевидно, система может выйти из $\mathfrak{S}$ только в том случае, если $x_i(t)$ станет равным нулю для некоторого четного i. Рассмотрим подсистему $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t))$ рассматриваемой системы, включающую приборы, стоящие на четных местах (так что в новых обозначениях $y_j(t) = x_{2j}(t)$, $j = 1, \ldots, m$, $n - 1 \leqslant 2m \leqslant n$). Далее, обозначим $\mathrm{R} = (R_1, \ldots, R_m)$ вектор среднего скачка за некоторое число $k < N$ шагов блуждания $y(t)$. Вычислим координаты R_j этого вектора. Вводя $\bar{r}_t$ — средний скачок за один t-й шаг блуждания $y_j(t)$, $0 < t < N$, имеем:

$$\bar{r}_t = \begin{cases} p - \alpha, & \text{если} \quad x_{2j-1}(t)\, x_{2j+1}(t) > 0, \\ p - \alpha', & \text{если} \quad x_{2j-1}(t)\, x_{2j+1}(t) = 0. \end{cases}$$

Последнее соотношение означает, ввиду соотношений $y_j(t) > 0$, $t < N$ и $\alpha = 1$, что

$$\bar{r}_t = \begin{cases} p - \alpha & \text{с вероятностью } p^2, \\ p - \alpha' & \text{с вероятностью } 1 - p^2. \end{cases}$$

Поэтому

$$R_j = \bar{r}_0 + \mathrm{M}\left\{\sum_{t=1}^{k-1} \bar{r}_t\right\} \geqslant k(p - \alpha') - (1 - \alpha')[1 + (k-1)p^2], \quad j = 1, \ldots, m.$$

Нетрудно проверить, что при $\alpha' < p/(1+p)$ и $k > 1 + [p - \alpha'(1+p)]^{-1}$ величины R_j, $j = 1, \ldots, m$, положительны. Таким образом, найден путь, уводящий исходный процесс $\mathbf{x}(t)$ в бесконечность. Этим доказана теорема 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971, 536 с.
2. *Малышев В. А., Меньшиков М. В.* Эргодичность, непрерывность и аналитичность счетных цепей Маркова.— Тр. Моск. Матем. об-ва, 1979, т. 39, с. 3—48.
3. Locally interacting systems and their application in biology./Ed. by Dobrushin R. L., Kryukov V. I., Toom A. L.— Lect. Notes Math., 1978, B. 653, 202 S.
4. *Holley R. A., Liggett T.* Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model.— Ann. Probab., 1975, v. 3, № 4, p. 643—663.

Поступила в редакцию
11.III.1979

A QUEUEING SYSTEM WITH LOCAL INTERACTION

MALYŠEV V. A., CAREGRADSKIĬ I. P. (MOSCOW)

(*Summary*)

A Markovian queueing system consisting of the finite number of birth-death processes with simple interactions between them is examined. We obtain sufficient conditions for its ergodicity and non-recurrency.

О СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЛОКАЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПРИБОРОВ

ЦАРЕГРАДСКИЙ И. П.

В работе [1] была проанализирована одна конечномерная система массового обслуживания с локальным взаимодействием. Анализ был сведен к исследованию в конечном объеме случайного поля со счетным числом состояний в каждой точке (в отличие от более изученной ситуации конечного пространства состояний). В данной заметке рассматривается бесконечномерный случай этой системы.

В фазовом пространстве

$$\mathrm{X} = \{\mathbf{x} = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)\},$$

где x_i ($i = 0, \pm 1, \ldots$) — произвольные неотрицательные числа, введем счетную цепь Маркова с дискретным временем $t = 0, 1, \ldots$ Состоянием этой цепи в момент t будет вектор

$$\mathbf{x}(t) = (\ldots, x_{-1}(t), x_0(t), x_1(t), \ldots),$$

отдельная компонента $x_i(t)$, $i = 0, \pm 1, \ldots$, которого будет интерпретироваться как длина очереди к i-му обслуживающему прибору в момент t.