1998 г. март — апрель *т. 53, вып. 2(320)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 519.2

СЛУЧАЙНЫЕ ГРАММАТИКИ

В. А. Малышев

СОДЕРЖАНИЕ

1. Определения

Рассмотрим конфигурации $\omega = (s_x) \in S^{\mathbf{Z}}$ на целочисленной решетке $\mathbb{Z}$ со значениями в некотором множестве S. Хорошо известно, что $S^{\mathbf{Z}}$ является стандартным пространством состояний для процессов с локальным взаимодействием (см. [8]), действие которых на этом пространстве заключается в случайной замене символов s_x в узлах x. Мы будем рассматривать процессы, в которых один символ s_x может быть заменен, например, двумя символами. Вопрос состоит в том, куда можно поместить эти символы, чтобы не нарушить пространственной однородности. Чтобы осуществить это на решетке, нужно раздвинуть остальные символы, и дать новые номера бесконечному числу символов. На конечном промежутке времени потребуется бесконечное число таких глобальных перенумераций, что делает процедуру неприемлемой.

Мы обсуждаем здесь строгое определение таких процессов в одномерном случае (т.е. для линейных графов). Устанавливаются существование и единственность динамики в термодинамическом пределе и доказывается, что эта динамика является кластерной. Приводятся условия эргодичности и невозвратности в области малых значений параметров возмущения. Изучаются инвариантные меры и поведение фрактального типа на больших временах для случайных контекстно-независимых грамматик.

Мы широко применяем ряд идей из техники кластерных разложений [10], которая оказалась наиболее мощным инструментом в современной математической физике, но до сих пор не использовалась в информатике.

Представляют интерес различные применения приведенных здесь понятий в информатике. Первый пример – статистическая структура длинных предложений как в формальных, так и в естественных языках. Последние утверждения статьи относятся к этому. Из других возможных применений отметим развитие языка в различные исторические периоды, когда менялась форма языкотворчества. И, наконец, эволюция структуры ДНК.

Однако более важным кажется неожиданное отсутствие системы координат и необходимость отхода от колмогоровского подхода к заданию случайного процесса мерами цилиндрических множеств.

Этот раздел содержит основные определения и простейшие результаты. Основными результатами второго раздела являются теорема 1 и теорема-определение 1, в которых строится термодинамический предел динамики на конечных временах. Доказательства существенно используют технику кластерных разложений, которую мы вводим в этом же разделе. В третьем разделе мы рассматриваем простейший процесс с локальным взаимодействием и его малое возмущение, когда вершины могут рождаться и гибнуть. Основные результаты даны в теореме 2, доказывающей сходимость к единственной инвариантной мере для бесконечной динамики, и в теореме 5, где даны условия транзиентности и эргодичности для динамики конечных слов. Эти условия могут быть даны лишь в терминах инвариантных мер для бесконечных систем. В разделе 4 изучаются контекстно-независимые грамматики вне области малых возмущений. Рассматривается предел корреляционных функций на больших временах. В теоремах 6 и 7 найдены инвариантные меры. Для вырожденных случаев мы определяем фрактальное поведение грамматик и конечность числа критических экспонент (теоремы 8 и 9). Найдено также асимптотическое распределение вероятностей на множестве предложений в контекстно-независимом языке (теорема 10).

1.1. Грамматики.

Рассмотрим конечное множество S, которое мы назовем алфавитом. Словом α называется линейно-упорядоченная (или вполне упорядоченная) последовательность символов из S. Для конечных слов

$$\alpha = x_1 \dots x_n, \qquad \beta = y_1 \dots y_m$$

их композицией $\alpha\beta$ называется слово

$$\alpha\beta = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m.$$

Композиция бесконечных слов определяется аналогично.

Пусть $n = |\alpha| = l(\alpha)$ есть длина слова α. Пусть $e = \varnothing$ – пустое слово, так что

$$e\alpha = \alpha e = \alpha.$$

Слово γ называется подсловом слова α, если $\alpha = \beta\gamma\delta$ для некоторых слов β, δ.

Обозначим S^* множество всех конечных слов над алфавитом S, включая пустое слово.

Пусть U есть конечное множество замен (заменой, или подстановкой, мы называем упорядоченную пару $\gamma \to \delta$), точнее, множество упорядоченных пар конечных слов $\gamma_i \to \delta_i, i = 1, \ldots, k$. Теория грамматик изучает траектории, т.е. последовательности слов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ такие, что для любого $j = 1, 2, \ldots, k-1$ слово α_{j+1} получается из α_j удалением некоторого подслова γ_i слова α_j и добавлением вместо него δ_i, т.е. заменой γ_i на δ_i.

Грамматикой называется пара (S, U). Мы будем всегда использовать это общее определение; заметим, однако, что в информатике определение грамматики более узкое. Напомним его.

Грамматикой с нетерминальными символами называется четверка $G=(W, V, U, n_0)$, где

- W – конечное множество (его элементы называются нетерминальными символами, переменными, или синтаксическими категориями), V – тоже конечное множество такое, что $V \cap W = \varnothing$;
- U – конечное множество замен, а именно, пары $u = (\alpha \to \beta)$ такие, что α есть слово над $S = W \cup V$, содержащее по крайней мере один символ из W, а $\beta \in S^*$;
- $n_0 \in W$ – выделенный символ (начальное нетерминальное слово).

Высказывание (sentential form) определяется следующим образом: n_0 есть высказывание; если $\alpha\beta\gamma$ есть высказывание и $\beta \to \delta \in U$, то $\alpha\delta\gamma$ также есть высказывание.

Предложением (или словом), порожденным грамматикой G, называется высказывание, не содержащее W-символов.

Приведем простейшие классы грамматик. Грамматика G называется

(1) *линейной*, если каждая замена имеет вид $n \to l\alpha m$, где $l, n, m \in W, \alpha \in V^*$; она называется линейной справа, если каждая замена имеет вид $n \to \alpha m$, где $n, m \in W$, $\alpha \in V^*$;

(2) *контекстно свободной*, если любая замена имеет вид $n \to \alpha$, где $n \in W$, $\alpha \in S^*$.

Языком L над Σ называется множество слов над Σ. Композицией (произведением) $L_1 L_2$ языков называется множество всех слов $\alpha\beta, \alpha \in L_1$, $\beta \in L_2$. Замыканием L называется $\bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$, $L^n = LL^{n-1}$, $L^0 = \{\varnothing\}$.

Языком $L(G)$, порожденным грамматикой G, называется множество всех предложений, порожденных G. Языком $L(U, \alpha)$, порожденным U и α, называется минимальное множество слов, удовлетворяющих следующим условиям:

- $\alpha \in L(U, \alpha)$;
- если $\rho\beta\gamma \in L(U, \alpha)$ и $(\beta \to \delta) \in U$, то $\rho\delta\gamma \in L(U, \alpha)$.

Язык $L(G)$ имеет тип (1) (соответственно (2)), если грамматика G имеет тип (1) (соответственно (2)).

Теория L-систем Линденмайера является аналогом теории грамматик с параллельными заменами. Она исследует траектории, для которых *все* возможные замены должны быть выполнены одновременно. Это налагает некоторые ограничения, так как может возникнуть неоднозначность. Поэтому обычно рассматривается лишь случай, когда в левой части каждой замены стоит только один символ.

Приведем классы L-систем, аналогичные классам контекстно свободных грамматик.

- OL-система имеет лишь замены вида $s \to \alpha$, $s \in S$, и для каждого $s \in S$ имеется по крайней мере одна замена $s \to \alpha$.
- DOL-система (детерминированная OL-система) – это OL-система, в которой для каждого s имеется ровно одна замена.
- Контекстно-зависимые L-системы имеют замены вида

$$\alpha x \beta \to \alpha \gamma \beta.$$

1.2. Случайные грамматики и L-системы.

Информатика изучает языки, порожденные грамматиками. Следовательно, теория случайных грамматик должна исследовать вероятностные меры на языках.

Случайной грамматикой называется следующая счетная цепь Маркова. Предположим, что на множестве U задана неотрицательная функция $q(\alpha \to \beta) = q(\alpha, \beta)$. Счетная цепь Маркова $\mathscr{G}(U, q)$ с непрерывным временем и с пространством состояний S^* определяется с помощью переходных вероятностей: для любого слова вида $\alpha\gamma\beta$ и любой замены $\gamma \to \delta$ интенсивность перехода $\alpha\gamma\beta \to \alpha\delta\beta$ равна $q(\gamma, \delta)$. Фактически пространством состояний является множество слов языка.

Мы обсуждаем следующие основные проблемы.

- Термодинамический предел для таких процессов, существование и единственность.
- Классификация таких цепей. Мы используем мартингалы и кластерные разложения с целью получить в явном виде необходимые и достаточные условия эргодичности и возвратности в "области малых возмущений".
- Для контекстно свободных грамматик мы изучаем поведение на больших временах в случае транзиентности и показываем, что оно может быть разбито на поведение, соответствующее инвариантным мерам, и на поведение фрактального типа.

Стохастические L-системы являются системами с дискретным временем, они рассматривались ранее, но складывается впечатление, что терминология марковских процессов была неизвестна авторам, см., например, [4], [13]. Поэтому авторы переоткрыли некоторые элементарные результаты из теории ветвящихся процессов. Когда траектории становятся случайными, возникают асинхронная динамика для грамматик (непрерывное время) и синхронная динамика для L-систем (дискретное время).

Случайные грамматики и L-системы имеют приложения в языках программирования и биологических моделях роста.

Черепашья динамика. Можно определить другой процесс, являющийся локальным и последовательным. Пространством состояний для него является множество всех пар (α, x_i), где α есть слово, а x_i – один из символов α. Можно представлять себе, что на месте этого выделенного символа находится частица. Тогда каждый переход состоит в том, что частица создает вместо символа x_i на том же месте два, один или ни одного другого символа и одновременно прыгает на место одного из вновь созданных символов либо в один из узлов, соседних к x_i.

Существование. В однородной счетной марковской цепи с непрерывным временем $\mathscr{G}(U, q)$ нет взрыва, т.е. можно построить реализацию процесса, когда для любого начального состояния число скачков почти наверное конечно на любом конечном интервале времени $[0, T]$. Это очевидно, поскольку сумма интенсивностей скачков, увеличивающих длину слова, ограничена интенсивностями чистого процесса рождения на $\mathbb{Z}_+$ с интенсивностями переходов $\lambda(n \to n + d) = Cn$, где n – длина слова, C – максимальная интенсивность одной замены, а d – максимальная разность длин слов в заменах. Хорошо известно, что такой процесс чистого рождения с линейно растущими интенсивностями не приводит к взрыву.

Классификация. Ниже мы даем полную классификацию для случая контекстно свободных грамматик. Обозначим число W-символов в α через $W(\alpha)$.

Предложение 1. *Предположим, что есть лишь один W-символ n. Тогда для контекстно-независимых грамматик процесс является эргодическим (нулевым возвратным, транзиентным) тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{\alpha} (W(\alpha) - 1)\hat{q}(n, \alpha) < 0$$

(*соответственно*, $= 0$, > 0).

Доказательство. Заметим, что W-символы ведут себя как частицы в простом ветвящемся процессе. Поэтому утверждение вытекает из хорошо известных результатов теории ветвящихся процессов.

В случае, когда W содержит более одного символа, условия эргодичности и возвратности можно получить, используя ветвящийся процесс с несколькими типами частиц. Аналогичным образом можно получить классификацию в более общем случае, когда не делается различия между терминальными и нетерминальными символами и U состоит только из замен $s \to \beta$ с $s \in S$.

1.3. Полугрупповое представление.

Предположение 1. С целью упрощения обозначений в этом разделе мы рассматриваем только случай, когда все замены имеют вид

$$\gamma y \delta \to \gamma \beta \delta,$$

где $y \in S, \delta, \gamma, \beta$ таковы, что $l(\gamma) + l(\delta) \leqslant 1$, $l(\beta) \geqslant 0$. Сначала, однако, нам не понадобится это предположение. Более того, для того чтобы перейти к общему случаю, необходимо лишь взять больше разделяющих символов вместо одного, как берется ниже.

Пусть H – генератор марковской цепи. Разложим его следующим образом:

$$H = H_0 + V = H_0 + \sum_a V_a.$$

Ниже мы будем использовать три типа такого разложения. Используя дифференциальное уравнение

$$\frac{dW(t)}{dt} = W(t)e^{H_0 t}Ve^{-H_0 t}\,ds,$$

где $W(t) = e^{(H_0+V)t}e^{-H_0 t}$, можно получить следующее разложение:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \exp(tH) &= \exp(tH_0) + \int_0^t \exp(Hs)V\exp(H_0(t-s))\,ds \\
&= \exp(tH_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-1}} \exp(H_0 s_n)V \\
&\quad \times \exp\bigl(H_0(s_{n-1}-s_n)\bigr)\cdots V\exp\bigl(H_0(t-s_1)\bigr)\,ds_n\cdots ds_1 \\
&= \exp(tH_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-1}} \sum \exp(H_0 s_n)V_{a_n} \\
&\quad \times \exp\bigl(H_0(s_{n-1}-s_n)\bigr)\cdots V_{a_1}\exp\bigl(H_0(t-s_1)\bigr)\,ds_n\cdots ds_1,
\end{aligned}
$$

где внутреннее суммирование берется по всем последовательностям $a_1,\dots,a_n$.

Операторное представление. Положим $H_0 = 0$. Символ $a = (u,i)$ состоит из подстановки $u = (\gamma y\delta \to \gamma\beta\delta)$ и целого числа $i \geqslant 1$, V_a – линейный оператор в банаховом пространстве $l_1(S^*)$, действующий следующим образом. Пусть δ_α – точечная мера на пространстве S^* с носителем α. Тогда

$$\delta_\alpha V_a = q(u)(\delta_{\alpha_1\gamma\beta\delta\alpha_2} - \delta_\alpha),$$

если $\alpha = x_1\dots x_n = \alpha_1\gamma y\delta\alpha_2$, так что $x_i = y$, если $a = (u,i)$. В противном случае

$$\delta_\alpha V_a = 0.$$

В этом случае разложение может быть переписано в упрощенном виде:

$$(2)\qquad \exp(Ht) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{a_n,\cdots,a_1} V_{a_n}\cdots V_{a_1}.$$

Лемма 1. *Применим последний член разложения* (2) *к некоторому* δ_α. *Тогда для фиксированного* n *число членов не превосходит* $C_1(l(\alpha))C^n$ *для некоторых констант* C, $C_1 = C_1(l(\alpha))$. *Следовательно, для малого* t *ряд является аналитической по норме функцией от* $q(\,\cdot\,)$ *и* t *в пространстве мер.*

Доказательство. Для заданных $a_1,\dots,a_k$ рассмотрим число операторов $V_{a_{k+1}}$, дающих ненулевой вклад в $\delta_\alpha V_{a_1}\cdots V_{a_k}V_{a_{k+1}}$. Это число не превосходит $l(\alpha) + Ck$, где $l(\alpha)$ – длина начального слова. Это дает требуемую оценку.

Заметим, что нормы V_a равномерно ограничены. Отсюда следует аналитичность для малых t.

Траекторное представление. Пусть H_0 – диагональная часть H, на диагонали стоят отрицательные элементы. Символ a имеет тот же самый смысл, но теперь мы полагаем

$$\delta_\alpha V_a = q(u)\delta_{\alpha_1\gamma\beta\delta\alpha_2},$$

если $\alpha = \alpha_1\gamma y\delta\alpha_2$, и

$$\delta_\alpha V_a = 0$$

в противном случае.

Заметим, что члены разложения имеют точный вероятностный смысл. Они дают формулу для плотности распределения в пространстве траекторий относительно меры Лебега на объединении симплексов

$$\{(s_n, \dots, s_1) : s_n < s_{n-1} < \dots < s_1 < t\}.$$

Точнее, матричные элементы $(\delta_\alpha e^{Ht}, \delta_{\alpha_1})$ являются суммами интегралов от следующих произведений матричных элементов $V_{\alpha\beta}$ матрицы V и диагональной части:

$$(e^{-H_0 s_n})_{\alpha\alpha} V_{\alpha\alpha^n} (e^{-H_0(s_{n-1}-s_n)})_{\alpha^n\alpha^n} \cdots V_{\alpha^2\alpha^1} (e^{-H_0(t-s_1)})_{\alpha^1\alpha^1},$$

здесь мы предположили, что траектория ω начинается с α и состоит из n последовательных скачков в $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ в моменты $s_n < \dots < s_1$ соответственно.

2. Динамика бесконечных слов

Мы определяем бесконечное слово, как слово, которое как упорядоченное множество изоморфно $\mathbb{Z}$. Для конечного времени мы хотим определить аналог процесса $\mathcal{G}(U, q)$ для бесконечных слов как термодинамический предел процессов $\mathcal{G}(U, q)$, начинающихся с конечного слова длины N. Мы также изучаем, как этот предел связан с пределом по времени. Ответ не столь однозначен, как для процессов с локальным взаимодействием, и зависит от рассматриваемой задачи. Мы обсуждаем различные подходы к термодинамическому пределу.

При стандартном подходе к термодинамическому пределу исследуются пределы корреляционных функций. Для наших процессов ситуация более тонкая, потому что все вершины постоянно исчезают и снова появляются, таким образом, возникает, например, вопрос, как определить вершину, в которой мы будем рассматривать одноточечную корреляционную функцию. Кроме того, нет возможности корректно определить процесс, если мы будем перенумеровывать бесконечное слово после каждого перехода. Получится, что за конечный промежуток времени произошло бесконечное число переходов, и в момент t нет естественной нумерации. Можно сказать, что для бесконечных слов нет системы координат.

Однако существует прямой способ свести динамику бесконечных слов к динамике конечных слов. Если такой способ работает, соответствующая динамика называется кластерной. Мы приводим две строгих реализации этой идеи.

2.1. Кластерное разложение.

Вероятностное разложение. Пусть в качестве начального слова взято произвольное бесконечное слово. Зафиксируем некоторый символ x_0 этого слова, присвоив ему номер 0. Мы получим таким образом нумерацию $s(x)\colon \mathbb{Z} \to S$, т.е. взаимнооднозначное отображение $\mathbb{Z}$ на множество символов слова. Зафиксируем какую-нибудь пару (U, q) и рассмотрим последовательность марковских процессов $\mathcal{G}^N$. Процесс $\mathcal{G}^N$ определен на вероятностном пространстве Ω^N и является копией процесса $\mathcal{G}(U, q)$, начинающейся с конечного подслова $x_{-N} \dots x_N$ бесконечного начального слова. Мы хотим исследовать предел при $N \to \infty$.

Пусть $\Omega^N_{ij,t} \subset \Omega^N$, $-N-1 \leqslant i < 0 \leqslant j \leqslant N+1$, есть событие, состоящее в том, что символы x_i и x_j начального слова $x_{-N} \dots x_N$ не участвовали в заменах (мы будем говорить также, что они не обновлялись) за промежуток времени $[0, t]$ и, кроме того, все символы $x_{i+1} \dots x_{j-1}$, расположенные между ними, обновлялись. Заметим, что если $i = -N - 1$, то все символы $x_k, k < 0$, обновились за указанный промежуток времени (аналогично для $j = N + 1$).

Тогда
$$\bigcup_{i,j:\, -N\leqslant i<0\leqslant j\leqslant N+1} \Omega_{ij,t}^N = \Omega \quad \text{п.н.}$$

Теорема 1. *При $N \to \infty$ вероятности $P^N(t;i,j) = P(\Omega_{ij,t}^N)$ сходятся к пределу $P(t;i,j)$. При этом*
$$\sum_{(i,j):\, i<0\leqslant j} P(t;i,j) = 1.$$

Для процесса $\mathscr{G}(U,q)$ на интервале $[0,t]$ определим следующие вероятности:

- $P_l^N(x_i)$ – вероятность того, что при начальном слове $x_{-N}\ldots x_i$ крайний правый символ x_i не обновился;
- $P_r^N(x_j)$ – вероятность того, что при начальном слове $x_j\ldots x_N$ крайний левый символ x_j не обновился;
- $P(x_i,x_j)$ – вероятность того, что при начальном слове $x_i\ldots x_j$ не обновились ни правый (x_i), ни левый (x_j) символы, а все промежуточные символы обновились.

Лемма 2. *Для любых i,j,x_i,x_j,N имеет место равенство*:
$$P^N(t;i,j) \doteq P(\Omega_{ij,t}^N) = P_l^N(x_i)P(x_i,x_j)P_r^N(x_j).$$

Интуитивно утверждение леммы понятно, поскольку до тех пор пока символы x_i или x_j не обновились, процесс протекает как три независимых процесса – слева, справа и между ними, – в соответствии с нашим предположением о том, что любой символ может быть изменен либо только под влиянием контекста слева, либо только под влиянием контекста справа. Мы, однако, приведем здесь и другие рассуждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Прежде всего мы определим динамику конечных слов с граничными условиями $\mathscr{G}(U,q_{b.c.}(x,y)), x,y \in S\cup\{e\}$, где $\{e\}$ обозначает пустые граничные условия. Точнее, это марковская цепь, для которой переходные интенсивности $q_{b.c.}(x,y)$ совпадают с интенсивностями переходов для $\mathscr{G}(U,q)$ с одним лишь исключением: мы добавляем следующие переходы для крайнего левого символа x_l:
$$x_l\delta \to \alpha\delta$$
с интенсивностями
$$q_{b.c.}(x_l\delta \to \alpha\delta) = q(xx_l\delta \to x\alpha\delta),$$
унаследованными от $\mathscr{G}(U,q)$. Аналогичным образом, мы добавляем переходы для крайнего правого символа x_r:
$$\gamma x_r \to \gamma\alpha,$$
имеющие интенсивности $q(\gamma x_r y \to \gamma\alpha y)$.

Пусть ω – траектория процесса $\mathscr{G}^N$, удовлетворяющая нашему условию, что x_i, x_j не обновляются, а символы, расположенные между ними, обновляются. Такие необновляющиеся символы делят ω на три части, $\omega_{<i}, \omega_{>j}, \omega_{ij}$, соответствующие частям слова, находящимся слева от x_i, справа от x_j и между ними.

Обозначим $P(\omega), P_{b.c.}(\omega_{<i}), \ldots$ плотности распределения вероятностей траекторий процессов $\mathcal{G}^N, \mathcal{G}(U, q_{b.c.}(e, x_i)), \ldots$. Заметим, что, например, $\omega_{<i}$ можно представлять себе как траекторию процесса $\mathcal{G}(U, q_{b.c.}(e, x_i))$ с граничными условиями.

Пусть ω имеет скачки в области $\omega_{<i}$ в моменты времени s_k и в области ω_{ij} в моменты времени t_k. Обозначим $y(s)$ символ слова в момент времени s, который расположен непосредственно слева от символа x_i. Рассмотрим условную вероятность (для процесса $\mathcal{G}(U, q)$) того, что x_i, x_j не изменились при условии, что задана траектория ω вне этих двух символов. Эта условная вероятность равна

$$P(x_i, x_j \,|\, \omega) = P(x_i \,|\, \omega_{<i}) P(x_i, x_j \,|\, \omega_{ij}) P(x_j \,|\, \omega_{>j}),$$

где, например,

$$P(x_i \,|\, \omega_{<i}) = \prod_{k=1}^{n+1} \exp\Big(-(s_{k-1} - s_k)\Big(\sum_\beta q\big(y(s_k) x_i \to y(s_k)\beta\big)\Big)\Big), \tag{3}$$

а $s_0 = t, s_{n+1} = 0$. Но в то же время

$$P_l^N(x_i) = \int P(x_i \,|\, \omega_{<i}) \, d\mu_{b.c.}(\omega_{<i}).$$

Те же равенства можно написать для двух других вероятностей и, таким образом, для всего процесса мы получаем:

$$P^N(t; i, j) = \int P(x_i, x_j \,|\, \omega) \, d\mu_{b.c.}(\omega), \tag{4}$$

где $\mu_{b.c.}$ соответствует нашему процессу, если исключить интенсивности переходов, которые могут изменить x_i, x_j. Заметим, что $\mu_{b.c.}$ есть произведение трех независимых процессов с граничными условиями:

$$\mu_{b.c.} = \mu_{(e,x_i)} \mu_{(x_i,x_j)} \mu_{(x_j,e)}.$$

Используя эту независимость и (4), получаем результат.

Операторное разложение. Введем структуру некоммутативной алгебры на $l_1(S^*)$. Заметим, что δ_α образует базис этого пространства. Определим произведение базисных элементов следующим образом:

$$\delta_\alpha \otimes \delta_\beta \to \delta_\alpha \star \delta_\beta \doteq \delta_{\alpha\beta}.$$

Для конечного слова $\alpha^{(N)} = x_{-N} \ldots x_N$ обозначим

$$\alpha_{<i} = x_{-N} \ldots x_{i-1}, \quad \alpha_{i,j} = x_{i+1} \ldots x_{j-1}, \quad \alpha_{>j} = x_{j+1} \ldots x_N.$$

Мы скажем, что линейный оператор A в $l_1(S^*)$ допускает кластерное разложение, если существуют $|S|$ операторов $A_{<,x}, x \in S$, $|S|$ операторов $A_{>,x}, x \in S$, и $|S|^2$ операторов $A_{0,x,y}, x, y \in S$, таких, что для любого $\alpha = \alpha^N = x_{-N} \ldots x_N$

$$\delta_\alpha A = \sum_{i,j:-N \leqslant i < 0 \leqslant j \leqslant N} (\delta_{\alpha_{<i}} A_{<,x_i}) \star \delta_{x_i} \star (\delta_{\alpha_{i,j}} A_{O,x_i,x_j}) \star \delta_{x_j} \star (\delta_{\alpha_{>j}} A_{>,x_j}).$$

Наша цель – получить в явном виде кластерное разложение для полугруппы $\exp tH$.

ЛЕММА 3. *Имеет место следующее алгебраическое тождество:*

$$(5)\qquad \delta_{\alpha(N)}\exp(tH) = \sum_{i,j:\,-N\leqslant i<0\leqslant j\leqslant N} [\delta_{\alpha_{<i}}\exp(tH_{(e,x_i)})] \star \delta_{x_i}\star[\delta_{\alpha_{i,j}}L_{i,j}]\star\delta_{x_j}\star[\delta_{\alpha_{>j}}\exp(tH_{(x_j,e)})],$$

где H с индексами обозначают генераторы марковских цепей с соответствующими граничными условиями. Главный член $L_{-10}=1$, а остальные

$$\sum_{n=j-i-1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}V_{a_n}\cdots V_{a_1},$$

последнее суммирование ведется по всем $a_n,\ldots,a_1$ таким, что каждый символ слова α_{ij} обновлялся по крайней мере один раз. В L_{ij} мы берем все V_a из марковской цепи с граничными условиями (x_i,x_j).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что L_{ij} можно рассматривать как ограничение одного оператора (связного ядра) на слова длины $j-i-1$. Чтобы получить алгебраическое разложение, перепишем сумму $\sum_{a_n,\ldots,a_1}$ в правой части (2) таким образом:

$$\sum_{a_n,\ldots,a_1} = \sum_{ij}\sum_{a_n,\ldots,a_1}^{(ij)},$$

где последнее суммирование ведется по всем $a_n,\ldots,a_1$ таким, что

- нет множителей V_a для символов x_i и x_j;
- есть по крайней мере один множитель V_a для каждого символа начального слова между x_i и x_j.

Полезно вернуться к разложению (1). Последовательность $V_{a_n},\ldots,V_{a_1}$ назовем диаграммой G. Вклад $Q(G)$ диаграммы G – это соответствующий член разложения, включая интегрирование по симплексу по переменным времени, в соответствии с порядком, заданным последовательностью $V_{a_n},\ldots,V_{a_1}$. Определим теперь разбиение

$$A_{\text{left}}\cup A_{\text{middle}}\cup A_{\text{right}}=\{n,\ldots,1\}$$

на три непересекающихся подмножества; например, $k\in A_{\text{left}}$ если и только если V_{a_n} действует слева от x_i. Соответственно, V_{a_k} и переменные времени s_k также разбиваются на три подмножества.

Заданной диаграмме G мы ставим в соответствие еще три диаграммы, G_l, G_m, G_r, следующим образом. G_l есть подпоследовательность $V_{a_n},\ldots,V_{a_1}$ с индексами, принадлежащими A_{left}. Диаграмма G_m получится, если мы возьмем подпоследовательность $V_{a_n},\ldots,V_{a_1}$ с индексами, принадлежащими A_{middle} и изменим их следующим образом. Если $k\in A_{\text{middle}}$, то для $a_k=(u_k,i_k)$ мы определяем $\bar a_k=(u_k,j_k)$, $j_k=i_k-l(\alpha_{<i}(\,\cdot\,))-1$, где $\alpha_{<i}(\,\cdot\,)$ есть слово, находящееся слева от x_i в соответствующий момент времени. Таким образом, для действия $\delta_\alpha V_{a_k}$ мы считаем j_k, начиная от первого символа справа от x_i. Напомним, что мы всегда знаем, где находится неизменяющийся символ x_i. Аналогичным образом определяется диаграмма G_r; в этом случае мы считаем, начиная с первого символа справа от x_j.

Каждой диаграмме G мы сопоставим класс диаграмм $C(G)$, состоящий из всевозможных диаграмм, получающихся из G путем допустимых перестановок V_{a_k}. Перестановка называется допустимой, если порядок каждой пары V_{a_i}, V_{a_k}, принадлежащей одному и тому же классу, A_{left}, A_{middle} или A_{right}, не изменяется.

Тогда

$$\sum_{G \in C(G)} Q(G) = Q(G_l)Q(G_m)Q(G_r).$$

Это следует из коммутативности $V_{a_i}V_{a_k} = V_{a_k}V_{a_i}$ перестановок V_{a_k} и V_{a_i}, если a_i, a_k принадлежат разным классам, - если воспользоваться разделением временных переменных s_j.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Последняя формула дает интересную связь между алгеброй композиций (concatenation algebra) и алгеброй тасования (shuffle algebra). Алгебра композиций была определена выше, определение алгебры тасования см. в [9].

2.2. Кластерная динамика. Операторный подход.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Из операторного разложения видно, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $n = n(\varepsilon) > 0$ и операторы M_n такие, что для любого начального слова $\alpha = y_{-N} \dots y_N$ норма*

$$\delta_\alpha\big(\exp(Ht) - M_n\big)$$

меньше a^n для некоторого $a < 1$.

Более того, для некоторых операторов $A^{(n)} = A^{(n)}_{0,y_i,y_j}$, любого N и любого начального слова $\alpha = y_{-N} \dots y_N$

$$M_n = \sum \delta_{y_{-N} \dots y_{i-1}} \exp(Ht) \star \delta_{y_i} \star \delta_{y_{i+1} \dots y_{j-1}} A^{(n)} \star \delta_{y_j} \star \delta_{y_{j+1} \dots y_N} \exp(Ht),$$

где суммирование берется по всем i, j таким, что $-2n \leqslant i < -n$, $n \leqslant j \leqslant 2n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции; положим вначале $M_n = 0$. На втором шаге возьмем операторное разложение (5). Все его члены с $-2n \leqslant i < -n$, $n < j \leqslant 2n$ добавим к M_n. На следующем шаге выполним дальнейшее разложение каждого члена операторного разложения, у которого либо $-n \leqslant i < 0 \leqslant j \leqslant 2n$, либо $-2n \leqslant i < 0 \leqslant j \leqslant n$. Сделаем это следующим образом. Рассмотрим в качестве примера случай $-n \leqslant i$, $n < j \leqslant 2n$ и выпишем для $\exp(H_{e,x_i})$ разложение, подобное основному разложению (5):

$$\delta_{\alpha_{<i}} \exp(H_{e,x_i}) = \sum_{k:k<i} \delta_{\alpha_{<k}} \exp(H_{e,x_k}) \star \delta_{x_k} \star \delta_{x_{k+1} \dots x_{i-1}} L^1_{ki}.$$

Мы добавляем члены с $2n \leqslant k < n$ к M_n и для $-n \leqslant k$ продолжим подобным образом. Индукция окончится за конечное число шагов.

Вероятностный подход. Основная идея кластерного разложения - разложить далее $P_l^N(x_i)$ и $P_r^N(x_j)$ аналогичным образом. При этом невозможно получить разложение только с положительными членами.

Обозначим $p_i^N(x_i) = P_l^N(x_i)$. Тогда

$$p_i^N(\bar{x}_i) = 1 - p_i^N(x_i) = p_i^N(\bar{x}_i, x_{i-1}) + p_i^N(\bar{x}_i, \bar{x}_{i-1}).$$

Индекс i в p_i^N означает, что мы рассматриваем процесс, начинающийся со слова $x_{-N} \dots x_i$, черта над символом означает, что этот символ обновлялся. Например, $p_i^N(\bar{x}_i, x_{i-1})$ означает, что x_i обновился, а x_{i-1} не обновился. Тогда, используя рассуждения, аналогичные тем, что приводились при обосновании леммы 2, получаем

$$p_i^N(\bar{x}_i, x_{i-1}) = p_{i-1}^N(x_{i-1})P(x_{i-1}),$$

где $P(x_{i-k})$ есть вероятность того, что у процесса, начавшегося со слова $x_{i-k} \dots x_i$, символ x_{i-k} не обновлялся, а другие символы обновлялись. Также

$$p_i^N(\bar{x}_i, \bar{x}_{i-1}) = \sum_{k=2}^{\infty} p_i^N(\bar{x}_i, \dots, \bar{x}_{i-k+1}, x_{i-k}) = \sum_{k=2}^{\infty} P(x_{i-k})p_{i-k}^N(x_{i-k}).$$

Таким образом, окончательное разложение имеет вид

$$p_i^N(x_i) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(x_{i-k})p_{i-k}^N(x_{i-k}). \tag{6}$$

Заметим, что $P(x_{i-k}) = O(t^k)$, поэтому, итерируя последнее разложение, получим экспоненциально сходящийся ряд для $p_i^N(x_i)$.

Доказательство теоремы 1. Используя малость t, получим

$$P(\Omega_{ij,t}^N) < a^{|j-i|}$$

для некоторого $a = a(t) < 1$ (этот факт можно легко доказать и без кластерного разложения).

Итерируя разложение (6), получим сходящийся ряд для $p_i^N(x_i)$, члены которого вплоть до порядка a^N для некоторого $a < 1$ не зависят от N. Отсюда следует экспоненциальная сходимость для $p_i^N(x_i)$ при $N \to \infty$.

Теорема-определение 1. *Для любого t существует кластерная динамика на множестве бесконечных слов. Это означает следующее.*

- *Для любого начального слова α определим случайное множество точек $A(\omega, t, \alpha)$. Оно состоит почти наверное из бесконечного набора символов $x_{k_i}(\omega) = x_{k_i}(\omega, \alpha, t)$ из α таких, что*

$$\dots < x_{k_i}(\omega) < \dots < x_{k_j}(\omega) < \dots,$$

и таких, что других символов, не изменявшихся за время $[0, t]$, нет. Примем соглашение, что k_0 есть наименьший неотрицательный индекс. Определенные нами множества удовлетворяют следующим условиям.

1) *Для любых $t_1 < t_2$*

$$A(\omega, t_2) \subset A(\omega, t_1) \quad \textit{п. н.}$$

2) *Условные распределения* $x_{k_i}(\omega) - x_{k_{i-1}}(\omega), i < 0$, *при условии, что заданы* $x_{k_0}(\omega) = x^0$ *и* $x_{k_{-1}}(\omega) = x^{-1}$, *независимы и одинаковы.*

То же самое, разумеется, верно и в другом направлении (т.е. направо).

- *Рассмотрим некоторые символы*

$$\cdots < x^i < \cdots < x^j < \cdots .$$

Тогда при условии, что для любого i

$$x_{k_i}(\omega) = x^i,$$

динамика состоит из независимых распределений μ_i *на траекториях конечного слова, расположенного между* x^i *и* x^{i-1}. *Эти распределения являются ограничениями процесса* $\mathscr{G}(U,q)$ *с начальным словом* $x_{k_i} \dots x_{k_{i+1}}$ *на такие траектории, которые начинаются со слова* $x_i \dots x_j$ *и при этом ни крайний правый символ* x_i, *ни крайний левый символ* x_j *не изменяются, в то время как все остальные символы изменяются.*

Мы получим эту динамику как предел динамики конечного слова для малых t. Мы используем кластерное разложение. Пусть $\alpha^{(N)} = x_{-N} \dots x_N$ есть подслово (длины $2N+1$) бесконечного начального слова α (мы снова фиксируем некоторый символ x_0 начального слова). Мы доказали уже сходимость распределений символов x^0 и x^{-1} и траекторий, зажатых между этими символами. Теперь в точности так же найдем распределение $x_{k_{-2}}(\omega)$ при условии, что задано $x_{k_{-1}}(\omega) = x^{-1}$, т.е. распределение первого символа слева от x^{-1}, который не был изменен. Кластерное разложение имеет тот же вид, что и раньше, и мы его здесь не приводим. По индукции находим затем все остальные символы. Независимость приращений этого точечного случайного процесса очевидна. Все остальные утверждения доказываются аналогично утверждениям для траекторий между x^0 и x^{-1}.

Тот факт, что случайные множества $A(t,\omega)$ являются почти наверное бесконечными для любого t, можно получить, устраивая покрытия интервала $[0,t]$ интервалами достаточно малой длины t_0. Все остальные свойства динамики для любого t легко следуют, так как они выполнены равномерно по всем начальным условиям для $t < t_0$.

2.3. Локальный наблюдатель.

Мы видели, что для конечного времени множества $A(\omega,t)$ и фиксированный символ начального слова дают подходящую точку отсчета. При возрастании t, поскольку $A(\omega,t) \to \varnothing$, эта точка отсчета исчезает и нам нужны иные средства, дающие возможность понять, в каком месте слова мы находимся. Существует один путь разрешить этот вопрос раз и навсегда. Но, как мы сейчас увидим, этот путь крайне неконструктивен.

Рассмотрим множество конфигураций $S^{\mathbb{Z}}$, т.е. функций на $\mathbb{Z}$, принимающих значения в S. Оно является топологическим пространством с топологией произведения. В этом пространстве действует группа сдвигов, поэтому можно отождествить бесконечное слово с классом эквивалентности функций по отношению к сдвигам. Класс эквивалентности может содержать одно слово (если функция постоянна), конечное число слов (если функция периодична); в остальных случаях он содержит счетное число различных функций. Множество $\mathscr{E}$ классов эквивалентности является топологическим пространством с индуцированной топологией. В этой топологии два бесконечные слова близки, если у них есть достаточно длинное общее подслово.

Для гиббсовских случайных полей на $\mathbb{Z}$ термодинамический предел определяется с использованием локальных функций. Чтобы определить понятие локальной функции в нашем случае, необходимо воспользоваться аксиомой выбора Цермело, т.е. выбрать по одному представителю из каждого класса эквивалентности, а это означает зафиксировать некоторый символ в каждом слове. Можно сказать, что чтобы выбрать начало координат в пространстве, необходимо воспользоваться аксиомой Цермело. После того как это сделано, можно рассматривать локальную функцию на представителях классов эквивалентности и расширить ее с помощью сдвигов на все функции, входящие в класс эквивалентности. Такой подход, однако, неконструктивен, и мы будем использовать другие способы определения точки отсчета.

Думается, что природа этих сложностей носит фундаментальный характер (отличающийся однако от несуществования точек в некоммутативной геометрии), особенно в случае высоких размерностей – невозможно зафиксировать точку в "пространстве" независимо от прошлого.

Можно привязать точку отсчета к локальному наблюдателю, поместив его где-нибудь на начальном слове и определив правила его перемещения во времени. Тогда можно рассматривать корреляционные функции в точках, расположенных близко от наблюдателя и далеко от него. Можно также поместить несколько наблюдателей и изучать их взаимное расположение.

Если начальное слово конечно, то проще всего поместить наблюдателя в один из концов слова, например, в левый. Более общий способ – снова зафиксировать какой-нибудь символ x_0 начального слова и приписать ему номер 0. Тогда все остальные элементы автоматически получают свои номера. Можно представлять себе, что локальный наблюдатель находится в узле 0 и остается там до тех пор, пока находящийся там символ не изменится. Когда символ x_0 изменится в соответствии с некоторой подстановкой $x_0 \to \alpha$, наблюдатель совершит скачок в один из соседних узлов, x_{-1}, x_1, или в один из узлов с символами в α в соответствии с некоторым марковским правилом. После этого номер 0 перемещается в тот узел, где находится наблюдатель, а остальные элементы соответственно перенумеровываются. Чтобы избежать исчезновения наблюдателя в случае $\alpha = e$, надо допустить, что наблюдатель совершает скачок в один из соседних узлов.

Если задан наблюдатель, то в любой момент времени t имеется нумерация элементов и поэтому можно определить локальные корреляционные функции $\mathsf{P}(s(-k) = s_{-k}, \ldots, s(k) = s_k)$, $k > 0$. Ясно, что, вообще говоря, случайное поле на $\mathbb{Z}$, определенное с помощью этих корреляционных функций, не является пространственно однородным. В качестве примера рассмотрим подстановки вида

$$\alpha \to \beta, \qquad |\alpha| = 1, \qquad |\beta| = 2$$

(контекстно свободные грамматики без терминальных символов).

Пусть наблюдатель всегда совершает прыжок в правый символ слова β. Тогда в узле 0 мы наблюдаем конечную марковскую цепь с интенсивностями переходов

$$\mu_{xy} = \sum_z q(x \to zy).$$

Обозначим стационарное распределение этой цепи через π. Тогда стационарное распределение корреляционной функции

$$p(x_{-1} = b_{-1},\, x_0 = b_0) = \sum_x \pi(x) \frac{q(x \to b_{-1}b_0)}{\sum_\beta q(x \to \beta)}\,.$$

Напротив, предельное распределение x_1 не зависит от x_0 и совпадает с предельным распределением конечной марковской цепи с интенсивностями

$$\mu_{xy} = \sum_z q(x \to yz).$$

Для этого же примера рассмотрим k наблюдателей, находящихся в разных узлах в момент времени 0. Очевидно, что локальные функции в окрестностях разных наблюдателей становятся независимыми в совокупности.

В [1] исследуются более сложные ситуации для случая, когда наблюдатель находится в конце слова.

3. Поведение на больших временах: малые возмущения

Рассмотрим независимый процесс с локальным взаимодействием, начинающийся с бесконечного слова и развивающийся следующим образом. С интенсивностью 1, т.е. после экспоненциально распределенного (со средним 1) промежутка времени, символ в заданной вершине заменяется на символ r с вероятностью $p(r)$, $\sum_{r \in S} p(r)$. Инвариантной мерой для этого процесса является бернуллиевская последовательность с распределением символов $p(r)$. Такой процесс мы будем называть независимым.

Рассмотрим малое возмущение этого процесса. Предположим, что кроме указанных ранее переходов возможны также замены любого символа s_v на слово α с интенсивностью $c(s_v \to \alpha, s_{O(v)})$. Эти интенсивности зависят от конфигурации $s_{O(v)}$ в окрестности $O(v)$ узла v, α состоит из одного или двух символов либо может быть пустым. Мы будем далее предполагать, что все функции интенсивностей $c(\,\cdot\,)$ (а их конечное число) достаточно малы. Это множество параметров мы будем называть областью малых возмущений.

3.1. Инвариантные меры.

Мы дадим два определения предельной меры

Определение 1. Начнем с некоторого бесконечного слова и выберем локального наблюдателя (по определению, он всегда находится в вершине 0). Рассмотрим корреляционные функции $\mathsf{P}(x_n(t) \ldots x_{n+k-1}(t) = \gamma)$, где γ есть слово длины k. Любую предельную точку множества этих функций при $t \to \infty$, $n = n(t) \to \infty$ мы будем называть предельной корреляционной функцией.

Заметим, что в силу компактности всегда существует по крайней мере одна предельная точка.

Эмпирическое распределение. В случае, когда имеется пространственная однородность, можно использовать другой подход. Зафиксируем какую-нибудь нумерацию в момент времени 0 и предположим, что начальное распределение на пространстве функций $\mathbb{Z} \to S$ является стационарным случайным процессом η. Рассмотрим последовательность подслов $\alpha_N = x_{-N} \ldots x_N$ начального бесконечного слова α. Для фиксированного N рассмотрим конечную динамику $\alpha_N(t)$, начинающуюся с состояния α_N, причем в качестве начального распределения берется ограничение процесса η на α_N. Определим эмпирические одноточечные корреляционные функции $q(\gamma, t)$. Для этого возьмем слово $\alpha_N(t)$ в момент времени t и обозначим $Q(\gamma; t, N)$ число подслов γ в этом слове.

Лемма 4. *Для малого t*

$$\frac{1}{N} Q(\gamma; t, N) \to q(\gamma; t) \quad \textit{при} \quad N \to \infty,$$

и для любого k

$$\sum_{\gamma: l(\gamma)=k} q(\gamma; t) = 1.$$

Эта лемма следует из кластерных рассуждений, развитых в предыдущей части; нужно только принять во внимание, что слова, находящиеся близко к границе, дают бесконечно малый вклад в Q.

Определение 2. Предельными корреляционными функциями называются любые предельные точки $\mu(\gamma)$ множества $q(\gamma; t)$ при $t \to \infty$. Корреляционные функции $q(\gamma; t)$ называются инвариантными, если они не зависят от t. Корреляционные функции называются трансляционно инвариантными, если они (по теореме Колмогорова, если мы занумеруем γ таким образом: $\gamma = x_0 \dots x_{k-1}$) определяют трансляционно инвариантную меру на $S^{\mathbf{Z}}$.

Теорема 2. *В области малых возмущений предельные корреляционные функции единственны. Они совпадают с инвариантными корреляционными функциями, которые тоже единственны.*

Мы получим в явном виде ряды для корреляционных функций. В частности, для одночастичной корреляционной функции имеем:

$$\mu(r) = p(r) + O\big(c(\,\cdot\,)\big).$$

Мы докажем также экспоненциальную сходимость к этой инвариантной мере.

Доказательство. Используем снова разложение типа (1), где

$$H = H_0 + V = H_0 + \sum_a V_a,$$

но в качестве H_0 возьмем генератор независимого процесса, т.е. матрицу интенсивностей для независимых переходов; V соответствует малому возмущению и не является положительным:

$$\delta_\alpha V_a = c(u)(\delta_{\alpha_1 \gamma \beta \delta \alpha_2} - \delta_\alpha),$$

здесь u обозначает переход $\gamma y \delta \to \gamma \beta \delta$. Отметим два свойства V_a.

- Норма V_a равна $2c(\,\cdot\,)$. Таким образом, полная вариация уменьшается не меньше чем в $2c(\,\cdot\,)$ раз.
- Для любой меры μ полный заряд меры μV_a равен нулю.

Мы можем записать

$$V_a = V_a^+ + V_a^-,$$

где

$$\delta_\alpha V_a^+ = c(u)\delta_{\alpha_1 \gamma \beta \delta \alpha_2}, \qquad \delta_\alpha V_a^- = -c(u)\delta_\alpha.$$

Используем разложение (1). Заметим, что в интервале $[s_k, s_{k-1}]$ вершины не изменяются и мы можем записать

$$\exp(H_0 \Delta s) = \prod_v \exp(H_{0,v} \Delta s) = \prod_v \big(P_0 + W_v(\Delta s)\big),$$

где $\Delta s = s_{k-1} - s_k$, а $\exp(H_{0,v}\Delta s)$ – независимый процесс в одном узле, P_0 – линейный оператор, переводящий любое распределение вероятностей на S в распределение $p(r)$ на S.

Норма разности $W_v(\Delta s) = \exp(H_{0,v}\Delta s) - P_0$ стремится к нулю экспоненциально при $s \to \infty$. Выберем d так, чтобы $W_v(d) < \varepsilon$.

Определим теперь диаграммы, т.е. направленные графы в $\mathbb{R}_+ \times V$, где время $\mathbb{R}_+$ будет вертикальным направлением, а счетное множество V – горизонтальным. Диаграммами будут нумероваться члены разложения. Вершины диаграмм помечаются парами (s, v). В начальный момент времени множество вершин диаграммы совпадает с множеством символов (узлов) начального слова. Из каждой вершины $(0, v)$ мы проводим вертикальную линию до тех пор, пока она не встречает V_a^+ или V_a^-, которые действуют на эту вершину в момент времени s_k. Направим вертикальные линии в сторону уменьшения времени.

Когда это произойдет, мы строим новую вершину (s_k, v). Из нее мы проводим горизонтальные линии в другие новые вершины (s_k, v_i), которые расположены в окрестности v, и символы x_{v_i}, от которых зависел переход. Эти горизонтальные линии направлены из (s_k, v_i). В случае V^+ мы строим также новые вершины (s_k, w), которые появляются вместо обновленного символа x_v. Эти вершины мы соединяем горизонтальными линиями с вершиной (s_k, v) (в направлении к (s_k, v)).

Мы продолжаем построение до тех пор, пока не дойдем до временного слоя T.

Вклад диаграммы равен

$$Q(G) = \int \prod_{\text{lines}} Q(l) \prod_{\text{vertices}} Q((s_k, v)),$$

причем вклад дают лишь вершины (s_k, v). Эти вклады равны $V_a^{\pm}$.

Вклад любой вертикальной линии длины, меньшей d, равен $\exp(H_0\Delta s)$. Вклад вертикальной линии длины, большей d, равен либо P_0, либо $W(s_+ - s_-)$, где s_+ обозначает временную координату верхней вершины этой линии, а s_- – координату нижней вершины. Вклад любой горизонтальной линии равен 1.

Как это принято в кластерных разложениях, для больших T мы вначале возьмем $c(\,\cdot\,)$ достаточно малыми и покажем при помощи подходящей перенормировки, что радиус сходимости (область аналитичности) не зависит от T.

Рассмотрим вершину $g = (T, v)$, где момент времени T достаточно велик. Пусть v находится в точности на расстоянии L от левого конца слова в момент T и достаточно далеко от обоих концов слова в момент T. Предположим, что слово конечно, а его длина N в момент 0 намного больше L и T. Мы докажем, что одночастичная корреляционная функция в этой вершине сходится к пределу независимо от того, как T и L стремятся к бесконечности.

Для доказательства для каждой диаграммы G определим граф $\mathcal{T}(G)$, или кластер, содержащий эту фиксированную вершину. Граф $\mathcal{T}(G)$ есть максимальный связный ориентированный подграф G, содержащий $g = (T, v)$, но не содержащий линий, имеющих вклад P_0; более того, для любой вершины имеется лишь одно входящее (с больших времен) ребро.

Вклад графа $\mathcal{T}$ определяется следующим образом:

$$Q(\mathcal{T}) = \sum_{G:\, T(G)=T} Q(G).$$

Пересуммирование дает более простую формулу для вычисления $Q(\mathcal{T})$. Рассмотрим нижние вершины графа $\mathcal{T}$, т.е. вершины, которые не имеют исходящих ребер, принадлежащих $\mathcal{T}$. Эти вершины могут быть двух типов: множество вершин, лежащих на нулевом временном слое, мы обозначим через V_0, а остальные обозначим V_1. Напомним, что в диаграмме G под вершиной $v \in V_1$ имеется линия l с вкладом P_0. Если под ней лежит вершина не на нулевом слое, мы можем выполнить пересуммирование, используя $V_a P_0 = 0$. Таким образом, останутся лишь линии l, заканчивающиеся на нулевом слое. Они дают совместное распределение вероятностей в вершинах, если дерево, расположенное над этими линиями, имеет распределение P_0, которое является независимым бернуллиевским. Предположим вначале, что $\mathcal{T}$ не содержит вершин на нулевом временном слое. Тогда вклад $Q(\mathcal{T})$ графа $\mathcal{T}$ равен

$$\mu_B Q(\mathcal{T}) = \mu_B \prod_l Q(l) \prod_v Q_v,$$

где $Q(l)$ равно либо $W(\Delta s)$, либо $e^{H_0 \Delta s}$, а Q_v равно $V_a^{\pm}$.

Лемма 5. *Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует c_0 такое, что для всех $c(\cdot) < c_0$*

$$\operatorname{norm}(\mu_B Q(\mathcal{T})) < (\varepsilon)^{l(\mathcal{T})+n(\mathcal{T})},$$

где $l(\mathcal{T})$ есть сумма длин всех линий $\mathcal{T}$, имеющих длину, большую чем d, $n(\mathcal{T})$ – общее число вершин в $\mathcal{T}$.

Аналогично, если граф $\mathcal{T}$ имеет вершины на нулевом временном слое, можно доказать, что их вклад стремится к нулю как ε^T при $T \to \infty$. Используя стандартные методы суммирования по деревьям, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Предельная одночастичная корреляционная функция равна*

$$p(\cdot) = \sum_{\mathcal{T}} Q(\mathcal{T}),$$

причем сходимость к ней экспоненциальна.

Имеет место даже более общая

Теорема 4. *Рассмотрим динамику бесконечных слов с произвольным локальным наблюдателем. Для любых $L_1, L_2 = L_1 + L \in \mathbb{Z}$ обозначим $P(\gamma_i, L_i, t_i)$, $i = 1, 2$, вероятности того, что слово длины $l(\gamma_i)$ в моменты времени t_1, $t_2 = t_1 + \tau$, начинающееся с символа $x_{L_i}(t_i)$, есть γ_i, $P(\gamma_1, L_1, t_1; \gamma_2, L_2, t_2)$ – вероятность пересечения этих событий. Тогда существуют следующие пределы:*

$$\lim_{t_i \to \infty} P(\gamma_i, L_i, t_i) = P(\gamma_i, L_i),$$

$$\lim_{L_i \to \infty} P(\gamma_i, L_i) = \mu(\gamma_i),$$

$$P(\gamma_1, L_1; \gamma_2, L_2; \tau) = \lim_{t_1 \to \infty} P(\gamma_1, L_1, t_1; \gamma_2, L_2, t_2),$$

$$\lim_{L_1 \to \infty} P(\gamma_1, L_1; \gamma_2, L_2; \tau) = P(\gamma_1, \gamma_2; L, \tau),$$

и ковариация

$$P(\gamma_1, \gamma_2; L, \tau) - \mu(\gamma_1)\mu(\gamma_2)$$

стремится к нулю экспоненциально быстро по τ и по L.

Доказательство этой теоремы следует описанной выше схеме и использует кластерное разложение.

3.2. Классификация.

Интуитивно, стратегия доказательства результатов об устойчивости такова. Вершина может произвести одну или две новые вершины, либо не произвести ни одной, причем интенсивности наступления этих событий зависят от среды. Мы знаем также, что с течением времени в системе установится предельная "локальная" инвариантная мера (инвариантная среда). Эта мера оказывается единственной предельной мерой μ для процесса бесконечных слов. Именно эта инвариантная мера и определяет средние инфинитезимальные интенсивности замен. Таким образом, условия устойчивости должны быть следующими.

ТЕОРЕМА 5. *Для фиксированной вершины v положим $c(s_{O(v)}, \alpha) = c(s_v \to \alpha, s_{O(v)})$. Величина*

$$M = \sum_{s_{O(v)}} \mu(s_{O(v)})\Big(-c(s_{O(v)}, \varnothing) + \sum_{r,s} c(s_{O(v)}, rs)\Big)$$

называется инфинитезимальной средней интенсивностью замен. Цепь эргодична, если $M < 0$, и транзиентна, если $M > 0$.

Мы дадим схему доказательства для случая транзиентности, случай эргодичности полностью аналогичен.

Случай, когда

$$M_0 = \sum_{s_{O(v)}} \mu_0(s_{O(v)})\Big(-c(s_{O(v)}, \varnothing) + \sum_{r,s} c(s_{O(v)}, rs)\Big) > 0,$$

где μ_0 – мера Бернулли, инвариантная по отношению к независимым переходам, прост. Более тонким является случай, когда $M_0 = 0$, т.е. положительны лишь члены второго порядка.

Мы будем использовать функцию Ляпунова (см. [5]), которая в данном случае равна числу узлов в слове.

Предположим, что $M > 0$. Докажем, что существуют $\tau > 0$, $N > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для любого слова $\alpha(0) = \alpha$, $l(\alpha) > N$ в момент времени 0

$$\mathsf{E}\big(l(\alpha(\tau)) \,|\, \alpha(0) = \alpha\big) - l(\alpha) > \varepsilon l(\alpha).$$

Выберем $1 \ll \tau \ll N$. Возьмем произвольное слово длины N в начальный момент времени; все вероятности будут условными при условии, что начальное слово фиксировано. Обозначим $l(t)$ (случайную) длину слова в момент времени t. Выберем T так, чтобы в момент T распределение было достаточно близко к инвариантной мере. Заметим, что за время $[0, T]$ убывание длины имеет порядок $c(\,\cdot\,)T$.

Из нашего предположения следует, что

$$\mathsf{E}\big(l(T+1) - l(T)\big) > \varepsilon l(T)$$

для малых ε. Выберем τ так, чтобы за время $[T,\tau]$ произошел значительный рост длины, т.е.

$$\mathsf{E}\sum_{k=1}^{[\tau-T]}\bigl(l(T+k)-l(T+k-1)\bigr)>\varepsilon l(T)(\tau-T).$$

Отсюда следует утверждение.

Следствие 1. *В пространстве параметров область нулевой возвратности имеет лебегову меру нуль.*

Интересен вопрос, имеет ли место последнее утверждение в общей ситуации (т.е. без предположения о малости параметров).

Гипотеза 1. *Если $M=0$, то цепь является нулевой возвратной.*

О доказательстве. Случай $M=0$ сложнее. Здесь трудно найти мартингал, необходимый для применения критериев нулевой возвратности (см. [5]). Вместо этого можно использовать операцию замены меры для различных времен и каплинг динамик конечных и бесконечных слов.

Следствие 2 (классификация для бесконечной динамики). *В области малых возмущений транзиентность для динамики конечных слов имеет место тогда и только тогда, когда для соответствующей динамики бесконечных слов выполнено хотя бы одно из следующих условий.*

1) *Для любых двух локальных наблюдателей расстояние между ними стремится к бесконечности с положительной вероятностью.*
2) *Существует ненулевая оценка для плотности выживших наблюдателей, равномерная по начальному распределению. Точнее, пусть плотность распределения наблюдателей на слове в нулевой момент времени равна ρ_0, тогда в любой момент времени плотность больше чем $c\rho_0$ для некоторой константы $c>0$.*

4. Поведение на больших временах: контекстно свободный случай

Здесь мы не будем рассматривать максимально общий случай, поскольку имеется много различных типов вырождения процесса. Исследование вырожденного поведения – относительно несложная, но достаточно скучная работа. Мы приводим интересные примеры и рассматриваем случаи, которые представляются типичными.

4.1. Инвариантные меры для грамматик.

Один нетерминальный символ. Рассмотрим сначала контекстно свободные грамматики и предположим, что $|W|=1$. Зафиксируем x_0 у начального слова. Тогда начальное слово становится конфигурацией на $\mathbb{Z}$. Обозначим $\mathscr{M}$ класс мер на $S^{\mathbb{Z}}$ таких, что

$$\liminf\frac{1}{N}\#\bigl\{i: x_i\in W,\ -N\leqslant i\leqslant N\bigr\}>0.$$

Теорема 6. *Предположим, что в счетном случае (т.е. для динамики конечных слов) имеет место транзиентность. Предположим также, что в заменах $w\to\alpha$ слово α не содержит подслова ww.*

Тогда инвариантная мера единственна в $\mathcal{M}$, трансляционно инвариантна (мы определили понятие трансляционной инвариантности выше для корреляционных функций) и обладает свойством экспоненциального убывания корреляций.

Если начальная мера принадлежит $\mathcal{M}$, то сходимость корреляционных функций к корреляционным функциям инвариантной меры экспоненциальна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположим, что счетный случай является эргодическим. Легко видеть, что тогда в невырожденных случаях имеется бесконечное число экстремальных инвариантных мер. Надо просто взять в начальный момент трансляционно инвариантное распределение (на словах с фиксированным началом координат) с ненулевой плотностью терминальных символов.

Если счетный случай является нулевым возвратным, то инвариантная мера (эмпирическая) в $\mathcal{M}$ также существует и в невырожденных случаях, по-видимому, является единственной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Заметим сначала, что символы начального слова, не принадлежащие W, не считаются, поскольку в силу транзиентности динамики конечного слова, начиная с одного символа w, их плотность убывает по времени. Поэтому мы можем предположить, что начальное слово равно $x_i \equiv w$.

Полезно начать исследование с частных случаев, для которых мы можем в явном виде найти инвариантную меру.

Линейный справа случай. В этом случае возможны лишь замены вида $w \to \alpha w$.

Инвариантную меру можно построить следующим образом. Возьмем нормированные вероятности

$$p(\alpha) = \frac{q(w \to \alpha w)}{\sum_\alpha q(w \to \alpha w)}\,.$$

Затем заменим в начальном слове $x_i \equiv w$ каждый символ (независимо от остальных) на $\alpha \neq e$ с вероятностью $p(\alpha)$. Полученное в результате бесконечное случайное слово имеет распределение, совпадающее с инвариантной мерой для непрерывной справа случайной грамматики с интенсивностями $q(\,\cdot\,)$. Заметим, что для любого слова, содержащего хотя бы один символ w, число w-символов сохраняется, но инвариантные корреляционные функции равны нулю.

Доказательство этого утверждения можно получить, заметив, что каждый символ начального слова порождает d-марковскую цепь, причем эти цепи независимы друг от друга. Корреляционные функции этой цепи совпадают с корреляционными функциями инвариантной меры и с корреляционными функциями случайного слова, которое получается при одной подстановке.

Линейный случай. В этом случае возможны лишь подстановки $w \to w\alpha w$. Здесь мы также можем получить инвариантную меру, используя переходы за один шаг из w в αw независимо друг от друга с вероятностями

$$p(\alpha) = \frac{q(w \to w\alpha w)}{\sum_\alpha q(w \to w\alpha w)}\,.$$

Заметим, что подслово ww появляется все реже при $t \to \infty$, так как мы предположили, что замена $w \to ww$ невозможна.

Все символы нетерминальные. Этот случай уводит в сторону от доказательства основной теоремы, но он достаточно хорошо демонстрирует, что может произойти в более общих случаях.

Рассмотрим сначала случай, когда единственные возможные замены имеют вид $s \to xy$, $x, y, s \in S$, и предположим, что все соответствующие интенсивности положительны. Определим вероятности с помощью нормировки:

$$p(s, xy) = \frac{q(s, xy)}{\sum q(s, \cdot)}.$$

Определим две стохастические $(|S| \times |S|)$-матрицы (одна из них стохастическая слева, другая – справа):

$$Q_l(s_1, s_2) = \sum_{u \in S} p(s_1, s_2 u),$$

$$Q_r(s_1, s_2) = \sum_{u \in S} p(s_1, u s_2).$$

ЛЕММА 6. *Инвариантная одночастичная корреляционная функция $\pi(s)$ совпадает со стационарным распределением конечной марковской цепи с $|S|$ состояниями и матрицей переходов*

$$Q = \frac{1}{2}(Q_l + Q_r)$$

в случае, если эта марковская цепь является неприводимой апериодической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый символ s начального слова производит бинарное плоское дерево потомков. Уровень n дерева (дискретное время n) содержит 2^n символов, и к каждому из этих символов ведет единственный путь. Суммирование вероятностей распределения одного символа в каждой вершине дерева на уровне n с весом 2^{-n} (рассматриваются эмпирические корреляционные функции) эквивалентно биномиальному разложению Q^n. Устремляя n к бесконечности, получим утверждение.

Для вычисления корреляционных функций высших порядков используем алгебраический формализм. Попутно докажем единственность предельных корреляционных функций. Пусть F есть алгебра всех действительных функций на S с базисом из δ-функций $\delta_s(\cdot)$. Определим коумножение $\Delta F \to F \otimes F$ следующим образом:

$$(\Delta f)(x, y) = \sum_s f(s) p(s, xy), \qquad f \in F,$$

или

$$\Delta \delta_s = \sum_{x,y} p(s, xy) \delta_x \otimes \delta_y.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Это коумножение, вообще говоря, не является коассоциативным.

Предложение 3. *Пусть* $\pi(s)$ *– одночастичная корреляционная функция. Тогда двухчастичная корреляционная функция для соседних узлов* π_2 *равна*

$$\pi_2 = \frac{1}{2}(\Delta\pi)\frac{1}{2}Q_l \otimes Q_r\Big(1 - \frac{1}{2}Q_l \otimes Q_r\Big)^{-1}.$$

Для доказательства нужно просуммировать вклады различных типов соседей на уровне n, а затем устремить $n \to \infty$. Случай $n = 3$ показан на рис. 1.

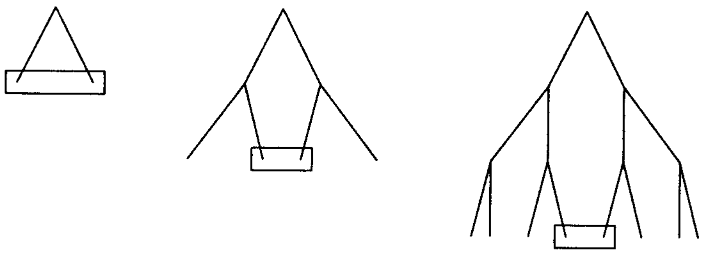

Рис. 1. Двухчастичные корреляции

Имеем:

$$\pi_2 = \frac{1}{2}\Delta\pi + \frac{1}{4}(\Delta\pi)Q_l \otimes Q_r + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}(\Delta\pi)Q_l^{k-1} \otimes Q_r^{k-1}.$$

Если матрица Q апериодична, но приводима, то для случайной грамматики может существовать несколько инвариантных мер. Мы увидим это в следующем разделе.

Общий случай. Если $q(w \to e) = 0$, то можно использовать рассуждения, использующие деревья, сходные с приведенными в предыдущем разделе. Если, например, имеются замены вида $w \to \alpha_1 w \alpha_2 w \alpha_3$, то будем рассматривать деревья с пятью линиями, исходящими из каждой вершины. Три из них соответствуют терминальным символам, а две другие – нетерминальным. Те же рассуждения, очевидно, применимы для доказательства существования предела при $n \to \infty$.

4.2. L-системы.

В двух следующих разделах мы в основном имеем дело с системами с дискретным временем (OL-системы), что приводит к упрощению записи. Вместо интенсивностей имеются вероятности $p(i \to \alpha)$ замены символа $i \in S$ на слово α. Мы приведем здесь другой подход к исследованию случая контекстно свободной грамматики, основанный на теории ветвящихся процессов. Все введенные ранее определения для случайных грамматик можно легко переформулировать для L-систем.

Рассмотрим конечный ориентированный граф, который мы будем называть одночастичным графом, с множеством вершин S. Ребро $s \to x$ имеется в графе тогда и только тогда, когда есть замена $s \to \alpha$, а α содержит символ x. Как и для конечных марковских цепей, определим (максимальные) замкнутые классы – множества $S' \subset S$ такие, что для любых $x, y \in S'$ в одночастичном графе существует направленный путь из x в y и обратно. Для классов S_i будем писать, что $S_2 < S_1$, если имеется замена $x \to \alpha$, где $x \in S_1$, а α имеет по крайней мере один символ из S_2. Иными словами, можно сказать, что мы определили ориентированный граф на замкнутых классах, проведя ребро из S_1 в S_2. В этом графе нет циклов, таким образом, множество замкнутых классов частично упорядочено. По свойству транзитивности мы можем сказать, что $S_1 < S_3$, если найдется класс S_2 такой, что $S_1 < S_2$ и $S_2 < S_3$.

Пусть M есть матрица $m_{ij}, i, j \in W$, средних продукций, где

$$m_{ij} = \sum_{\alpha} N_j(\alpha)p(i \to \alpha),$$

а $N_j(\alpha)$ равно числу символов j в слове α.

Для каждого замкнутого класса S_a имеется своя матрица $M(a) = M(a,a)$ продукций. Мы будем предполагать, что все эти матрицы положительно регулярные и непериодические. Мы используем терминологию из [11] и нумеруем замкнутые классы таким образом, чтобы матрица M была нижней треугольной матрицей, составленной из матриц $M(a,b)$, $a \geqslant b$, с элементами m_{ij}, $i \in S_a$, $j \in S_b$.

Пусть ρ_a есть максимальное положительное собственное значение $M(a)$. Обозначим $\rho_{\max} = \max \rho_a$.

Пусть n есть число замкнутых классов S_a таких, что $\rho_a > 1$, и пусть не существует замкнутого класса S_b такого, что $S_b < S_a$ и $\rho_b > \rho_a$.

Теорема 7. *Для* OL-*системы существует по крайней мере n экстремальных инвариантных мер.*

Доказательство. Можно вычислить одночастичную корреляционную функцию как предельную плотность частиц определенного типа в соответствующем ветвящемся процессе. Возьмем класс S_a и возьмем начальное слово с символами только из S_a. Тогда с положительной вероятностью символы из S_a не вымирают. Но можно утверждать и большее: для любого i такого, что $S_i < S_a$, число $N_t(S_i)$ символов из класса S_i имеет порядок $O(N_t(S_a))$. Это следует из результатов, полученных в [7], [11].

Таким образом, предельная одночастичная корреляционная функция будет отлична от нуля для этого класса, но равна нулю для классов старше чем S_a. Компактность дает по крайней мере n различных предельных распределений.

4.3. Фрактальные корреляционные функции.

Инвариантные меры не дают полной характеризации случайной грамматики или L-системы. Одной из причин тому то, что имеется сильная связь между грамматиками и L-системами, с одной стороны, и фракталами, с другой стороны (см. [12]). Это видно из следующего примера.

Вспомним об этих связях (см. [12]), рассмотрев сначала случайную контекстно свободную грамматику, которая приведет нас к известному канторову множеству. В этом случае $S = \{0, 1\}$ и единственно возможные замены имеют вид

$$0 \to 000, \qquad 1 \to 101.$$

Все соответствующие интенсивности равны 1. Если мы возьмем DOL-систему с теми же заменами, то получим в точности рекуррентную процедуру построения канторова множества. А именно, в каждый дискретный момент времени $t = 0, 1, \ldots$ каждому из символов $x_1, \ldots, x_n, n = 3^t$, мы приписываем последовательные интервалы $[(k-1)3^{-t}, k3^{-t}]$ черного (в случае $x_k = 1$) либо белого (в случае $x_k = 0$) цвета. Пусть C_t есть объединение черных интервалов. Тогда $\bigcap_t C_t$ есть канторово множество. Определенная нами случайная грамматика лишь делает процедуру построения канторова множества непараллельной.

В этом примере предельная (инвариантная) мера является точечной и сосредоточена на конфигурации $x_i \equiv 0$. На геометрическом языке эквивалентным утверждением является то, что канторово множество имеет лебегову меру нуль.

Вопрос об асимптотике одночастичной корреляционной функции $p_t(1)$ эквивалентен вопросу о фрактальной размерности канторова множества. Таким образом, для изучения асимптотики корреляционных функций нам нужно ввести "язык фракталов" для случайных грамматик и L-систем.

ЛЕММА 7. *Рассмотрим транзиентную* OL-*систему. Предположим, что некоторая степень матрицы средних продукций положительна, и пусть ρ есть максимальное собственное значение M, а $\vec{v}$ – соответствующий положительный левый собственный вектор. Пусть процесс начинается с конечного слова, не равного тождественно нулю. Обозначим через N_t вектор $N_t = (N_{t,x}, x \in S)$, где компонента $N_{t,x}$ равна числу встречаемости символа x в слове после момента t. Тогда N_t/ρ^t стремится по распределению к $\xi\vec{v}$, где ξ есть случайная величина на $\mathbb{R}_+$, положительная с положительной вероятностью.*

Это известно из теории ветвящихся процессов с несколькими типами частиц, см. [3], [6].

Таким образом, по истечении промежутка времени t слово будет содержать приблизительно $c\rho^t$ символов. Рассмотрим теперь некоторое слово γ и обозначим $n_t(\gamma) = n_t(\gamma;\alpha)$ (случайное) число подслов, равных γ, в момент t при условии, что начальным словом было α.

Случайная L-система называется слабо вырожденной, если все матрицы M_a положительно регулярны и их максимальные положительные собственные значения все различны и все отличны от 1.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть* OL-*система является слабо вырожденной. Пусть длина слова стремится к бесконечности при $t \to \infty$. Тогда для любого слова γ и любого начального слова α, имеющего конечную длину, почти наверное выполнено одно из двух следующих утверждений. Либо существует $1 < a = a(\gamma,\alpha) \leqslant \rho$ такое, что*

$$\frac{\log n_t(\gamma)}{\log N_t} \to h(\gamma) \doteq \frac{\log a}{\log \rho}$$

при $t \to \infty$, либо $n_t(\gamma)$ растет медленнее любой экспоненты. В последнем случае мы полагаем $h(\gamma) = 0$. Иначе говоря, $n_t(\gamma) \approx \rho^{th(\gamma)}$. Предел называется фрактальной экспонентой (или критической экспонентой) $h(\gamma)$ слова γ (или соответствующей корреляционной функции).

Если $h(\gamma) = 1$, мы говорим, что γ (либо соответствующая корреляционная функция) – нормального типа; если $0 < h(\gamma) < 1$, мы говорим, что слово γ или корреляционная функция фрактального типа. Если $h(\gamma) = 0$, мы говорим, что они нулевого типа. Если имеется по крайней мере одно слово фрактального типа, мы говорим, что случайная грамматика или L-система обнаруживает фрактальное поведение.

Снова начнем с рассмотрения частных случаев.

Линейный случай. В линейном справа случае экспоненциальный рост отсутствует, но этот случай представляет интерес как модельный пример. В линейном случае все слова нормального типа являются подсловами следующих слов:

$$\omega\alpha_1\omega\alpha_2\ldots\omega\alpha_n.$$

Все остальные слова нулевого типа. Слова фрактального типа отсутствуют.

Канторова грамматика.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *В этом случае единственными словами нормального типа являются слова* $\gamma = 00\ldots0$. *Единственная фрактальная экспонента равна* $h = \log 2/\log 3$. *Возможные фрактальные слова – это все конечные подслова, кроме* $00\ldots0$, *которые могут появиться при последующих заменах. Любые другие слова вообще не могут появиться.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем метод, который мы называем убиванием инвариантной меры. Рассмотрим модифицированную канторову систему, где S потенциально бесконечно: $S = \{0, 1, 3, 9, \ldots, 3^k, \ldots\}$. Замены имеют следующий вид:

$$0 \to 3, \qquad 3^k \to 3^{k+1}, \qquad 1 \to 101,$$

и имеют интенсивность 1. Иначе говоря, мы кодируем длинные подслова, состоящие из нулей. После такого скейлинга все подслова, которые могут возникнуть в процессе, оказываются нормального типа. Это означает, что в исходной системе (т.е. после декодирования 3^k в нули) они имеют те же самые критические экспоненты.

Одноточечные корреляции. Систему всех одночастичных корреляционных функций можно представлять себе как вероятности типов частиц ветвящегося процесса. Предположим, что этот ветвящийся процесс невырожденный и положительно регулярный (т.е. некоторая степень матрицы средних продукций положительна). Тогда все одночастичные корреляционные функции имеют нормальный тип. Это следует из хорошо известных результатов теории ветвящихся процессов (см. [2], [3], [6]).

В вырожденном случае теорема 8 следует из результатов [7], [11].

Двухточечные корреляции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть возможны лишь замены вида* $s \to xy$ *и матрица* Q *такая же, как и в лемме* 6. *Тогда фрактальное поведение отсутствует. Струны нормального типа – это в точности те, которые могут появиться в развитии процесса с положительной вероятностью.*

Это утверждение фактически было доказано выше.

Итак, чтобы получить фрактальное поведение, нужно рассмотреть систему с вырожденными одночастичными корреляционными функциями.

Разложимые случаи.

ТЕОРЕМА 9. *Предположим, что имеется всего два замкнутых класса,* $S_1 < S_2$. *Тогда*

1) *если* $\rho_{S_1} > \rho_{S_2} > 1$, *то имеется всего одна инвариантная мера и не более одной критической экспоненты, при этом критическая экспонента одна и та же для любого начального слова, содержащего по крайней мере один* S_2*-символ;*

2) *если $\rho_{S_1} > 1 > \rho_{S_2}$, то имеется лишь одна инвариантная мера и фрактального поведения нет;*
3) *если $1 < \rho_{S_1} < \rho_{S_2}$, т.е. две экстремальные инвариантные меры и одна критическая экспонента;*
4) *если $\rho_{S_1} < 1 < \rho_{S_2}$, то существует одна инвариантная мера и нет фрактального поведения.*

Теперь мы можем сформулировать гипотезу для любой контекстно свободной грамматики.

ГИПОТЕЗА 2. *Множество экстремальных инвариантных мер и множество критических экспонент конечны.*

Рассмотрим теперь для каждого класса S_a новую OL-систему $\mathscr{L}(S_a)$ со следующими вероятностями замен ($p_{S_a}(\,\cdot\,) = p(\,\cdot\,)$):

$$p_{S'}(s \to \beta) = \sum p(s \to \alpha),$$

где суммирование берется по α таким, что если убрать все символы из других классов, мы получим β.

Рассмотрим третий случай и начнем со слова, содержащего только символы из S_2. Тогда символы из S_2 будут доминировать, и фрактальный показатель для одночастичной корреляционной функции символов из S_1 равен $\log \rho_{S_1} / \log \rho_{S_2}$.

Другие случаи можно исследовать аналогично.

4.4. Меры на языках.

Предложения. Рассмотрим контекстно свободную грамматику с $|W| = 1$. Пусть $L = L(P, \alpha)$ есть множество всех предложений в данном языке, которые могут быть получены с помощью процесса замен, начиная со слова α, имеющего конечную длину. Пусть μ есть вероятность попасть в L, т.е. $\mu(\beta) = \mu(\alpha; \beta)$ равняется вероятности в момент остановки попасть в терминальное слово $\beta \in L$, начиная с α. Возьмем все предложения длины N и занумеруем их целыми числами из интервалов $[-\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}]$ для нечетного N и из интервалов $[-\frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2}]$ для четного N. Рассмотрим условное распределение μ^N:

$$\mu^N(\beta) = \frac{\mu(\beta)}{\sum_{\beta:\, l(\beta)=N} \mu(\beta)}.$$

Мы хотим исследовать термодинамический предел этого случайного поля ξ_i^N.

Чтобы дать более явную характеризацию этого предельного поля, рассмотрим распределение $\nu_w = \mu(w; \beta)$ на множестве предложений в случае, когда мы начинаем с символа $w \in W$.

ТЕОРЕМА 10. *Случайное поле ξ_i^N слабо сходится при $N \to \infty$ к трансляционно инвариантному случайному полю на $\mathbb{Z}$ со значениями в V.*

Это предельное поле может быть также получено следующим образом: возьмем трансляционно инвариантную предельную меру для процесса с W-символами и подставим вместо каждого w-символа, независимо от остальных, предложение, выбранное случайным образом в соответствии с распределением ν.

В заключение сделаем несколько замечаний. Понятно, что каждая случайная грамматика с фрактальными показателями должна иметь геометрическую интерпретацию в терминах фракталов (много примеров и ссылок можно найти в [12]). Геометрическое представление случайных грамматик (как, например, канторовой) тесно связано с границами выхода. Мы рассмотрим этот вопрос более подробно в другой работе.

В [1] дан обзор последних работ о более общих линейных справа случайных грамматиках – мы не предполагаем, что они являются контекстно свободными. Линейный случай соответствует двухсторонней эволюции случайного слова (см. также [1]). Случай контекстно свободной линейной грамматики почти тривиален по сравнению со случаем, который не является контекстно свободным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Малышев В. А. Взаимодействующие цепочки символов // УМН. 1997. Т. 52. №2. С. 59–86.
[2] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
[3] Athreya K. B., Ney P. E. Branching Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1972.
[4] Eichhorst P., Savitch W. Growth functions of stochastic Lindenmayer systems // Inform. and Control. 1980. V. 45. P. 217–228.
[5] Fayolle G., Malyshev V., Menshikov M. Constructive Methods in Countable Markov Chains. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
[6] Harris Th. The Theory of Branching Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1963.
[7] Kesten H., Stigum B.P. Limit theorems for decomposable multi-dimensional Galton–Watson processes // J. Math. Anal. Appl. 1967. V. 17. P. 309–338.
[8] Liggett Th. Interacting Particle Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
[9] Madjid S. Foundations of Quantum Group Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
[10] Malyshev V. A., Minlos R. A. Gibbs Random Fields. Dordrecht: Kluwer, 1990.
[11] Mode Ch. Multitype Branching Processes. Theory and Applications. New York: American Elsevier, 1971.
[12] Prusinkiewicz P., Hanan J. Lindenmayer Systems, Fractals, and Plants. Berlin: Springer-Verlag, 1989 (Lect. Notes in Biomathematics. V. 79.)
[13] Yokomori T. Stochastic Characterizations of EOL Languages // Inform. and Control. 1980. V. 45. P. 26–33.

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
23.02.1998