РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Журнал имени А.Н.Колмогорова

ТОМ 50

(отдельный оттиск)

МОСКВА 2005

(это следует из того, что $\mu_j \circ T^{-1}_{\mu_j,\lambda} = \lambda$ и $\|\mu_j - \mu\| \to 0$), то упомянутый выше факт указывает нужную сходимость. Теорема 2 доказана.

Доказанная теорема усиливает результат работ [1], [2], где рассматривалась только одна мера μ, причем меры μ и ν_j предполагались абсолютно непрерывными относительно меры Лебега на $\mathbf{R}^n$.

Отметим, что в работе [9] даны эффективно проверяемые достаточные условия сходимости по вариации образов абсолютно непрерывной меры μ на $\mathbf{R}^n$ при слабо дифференцируемых отображениях T_j. В случае канонических треугольных отображений эти условия можно заметно ослабить. Это явствует из установленных в [2] формул замены переменных для канонических треугольных отображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачев В. И., Колесников А. В., Медведев К. В.* О треугольных преобразованиях мер. — Докл. РАН, 2004, т. 396, №6, с. 727-732.
2. *Богачев В. И., Колесников А. В., Медведев К. В.* Треугольные преобразования мер. — Матем. сб., 2005 (в печати).
3. *Богачев В. И., Колесников А. В.* Нелинейные преобразования выпуклых мер и энтропия плотностей Радона–Никодима. — Докл. РАН, 2004, т. 397, №2, с. 155-159.
4. *Богачев В. И., Колесников А. В.* Нелинейные преобразования выпуклых мер. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 1, с. 27–51.
5. *Колесников А. В.* Неравенства выпуклости и нелинейные преобразования мер. — Докл. РАН, 2004, т. 396, №3, с. 300–304.
6. *Kolesnikov A. V.* Convexity inequalities and optimal transport of infinite-dimensional measures. — J. Math. Pures Appl., 2004, v. 83, №11, p. 1373–1404.
7. *Богачев В. И.* Гауссовские меры. М.: Наука, 1997, 352 с.
8. *Богачев В. И.* Основы теории меры. Т. 1, 2. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003.
9. *Александрова Д. Е., Богачев В. И., Пилипенко А. Ю.* О сходимости индуцированных мер по вариации. — Матем. сб., 1999, т. 190, №9, с. 3–20.

Поступила в редакцию
1.VII.2004

*МАЛЫШЕВ В. А.**, *МАНИТА А. Д.**

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В МОДЕЛИ СИНХРОНИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ[1)]

На вещественной прямой $\mathbf{R}$ рассматриваются частицы двух типов $i = 1, 2$, и пусть N_i — число частиц типа i. Каждая частица типа i движется с постоянной скоростью v_i. Кроме этого, любая частица типа $i = 1, 2$ скачет к любой частице типа $j = 1, 2$ с интенсивностью $N_j^{-1}\alpha_{ij}$. Мы находим фазовый переход, связанный с кластеризацией (синхронизацией) этой системы частиц, на различных временных шкалах $t = t(N)$ по отношению к $N = N_1 + N_2$.

---

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: malyshev@lbss.math.msu.su, e-mail: manita@mech.math.msu.su

[1)] Первый автор поддержан РФФИ (грант 02-01-00415); второй автор поддержан РФФИ (грант 02-01-00945).

Ключевые слова и фразы: марковские процессы, системы стохастических частиц, модели синхронизации.

1. Модель и основной результат. Модель, которую мы рассматриваем, проще всего описать в терминах системы частиц. На вещественной прямой имеется N_1 частиц типа 1 и N_2 частиц типа 2, $N = N_1 + N_2$. Каждая частица типа $i = 1, 2$ осуществляет два независимых движения. Во-первых, она движется с постоянной скоростью v_i в положительном направлении. В дальнейшем предполагается, что v_i различны, поэтому без ограничения общности можно считать, что $0 \leqslant v_1 < v_2$. Вырожденный случай $v_1 = v_2$ является особым и будет изучен отдельно.

Во-вторых, на любом интервале времени $[t, t + dt]$ каждая частица типа i независимо от других частиц с вероятностью $\alpha_{ij}\,dt$ принимает решение совершить скачок к некоторой частице типа j, при этом выбор конкретной частицы j-го типа, к которой будет осуществлен перескок, среди всех частиц j-го типа производится с вероятностью $1/N_j$. Здесь α_{ij} — заданные неотрицательные параметры, $i, j = 1, 2$. В дальнейшем, если не сказано обратное, мы предполагаем, что $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, $\alpha_{12}, \alpha_{21} > 0$.

После такого мгновенного перескока частица типа i продолжает движение с прежней скоростью v_i. Таким образом, определена цепь Маркова

$$\xi_{N_1,N_2}(t) = (x_1^{(1)}(t), \ldots, x_{N_1}^{(1)}(t);\ x_1^{(2)}(t), \ldots, x_{N_2}^{(2)}(t)), \tag{1}$$

где $x_k^{(i)}(t)$ — координата k-й частицы типа i в момент времени t. Предположим, что в начальный момент времени 0 координаты всех частиц $x_k^{(i)}(0)$ заданы. Нас будет интересовать поведение этой системы на больших временах при различном выборе временных шкал $N \to \infty$, $t = t(N) \to \infty$.

В других терминах, вышесказанное может быть проинтерпретировано как задача синхронизации времени. В общем виде задача синхронизации времени ставится следующим образом. Имеется N систем (процессоров, устройств, индивидуумов и т.п.). Есть абсолютное (физическое) время t, в то время как каждый процессор j выполняет однородное задание в своем собственном времени $t_j = v_j t$, $v_j > 0$. Собственное время измеряется количеством v_j работы, выполняемой процессором в единицу физического времени при условии, что он изолирован от других процессоров. Однако между каждой парой процессоров имеется обмен сообщениями, который приводит к значительным изменениям их собственного времени. В нашем случае координаты $x_k^{(i)}(t)$ можно интерпретировать как модифицированные собственные времена частиц-процессоров, тогда как немодифицированное собственное время процессора имеет вид $x_k^{(i)}(0) + v_i t$.

Существует много вариантов формулировки такого рода проблем (см., например, [1], [4], [6]). Мы будем называть рассматриваемую здесь модель основной (базисной) моделью, поскольку в ней нет ограничений на скачкообразный процесс. Множество других проблем включают такого рода ограничения, к примеру, разрешаются только скачки влево. Благодаря отсутствию таких ограничений рассматриваемая нами задача, как мы увидим ниже, является «линейной задачей» в том смысле, что после скейлинга (перемасштабирования) она приводит к линейным уравнениям. Тем не менее модель проявляет нетривиальное поведение — мы наблюдаем различные картины на разных временных шкалах.

Имеются, однако, другие интересные интерпретации нашей модели, связанные с психологией, биологией и физикой. Например, в социальной психологии восприятие времени и жизненные ритмы сильно зависят от социальных контактов и общения. Мы не будем углубляться здесь в эти детали.

Мы покажем, что эволюция процесса проходит через три последовательные стадии: начальная десинхронизация до критической шкалы, затухание десинхронизации в критической области и заключительная стабилизация.

Рассмотрим эмпирические средние (центры масс) и эмпирические дисперсии

$$\overline{x^{(i)}}(t) = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} x_k^{(i)}(t), \qquad S_i^2(t) = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} (x_k^{(i)}(t) - \overline{x^{(i)}}(t))^2$$

для типов 1 и 2, а также их математические ожидания

$$\mu_i(t) = \mathbf{E}\overline{x^{(i)}}(t), \quad l_{12}(t) = \mu_1(t) - \mu_2(t), \quad R_i(t) = \mathbf{E}S_i^2(t).$$

Наш первый результат относится к асимптотическому поведению эмпирических средних.

Теорема 1. *Для любой последовательности троек (N_1, N_2, t) таких, что $\min(N_1, N_2) \to \infty$ и $t = t(N_1, N_2) \to \infty$, имеют место следующие утверждения*:

$$l_{12}(t) \to \frac{v_1 - v_2}{\alpha_{12} + \alpha_{21}}, \qquad \frac{\mu_i(t)}{t} \to \frac{\alpha_{12}v_2 + \alpha_{21}v_1}{\alpha_{12} + \alpha_{21}}.$$

Предположим теперь, что $N_i = [c_i N]$, где $c_i > 0$, $c_1 + c_2 = 1$. Результаты следующей теоремы покрывают всю область асимптотического поведения $t(N)$ при $N \to \infty$.

Теорема 2. *Существуют следующие три области асимптотического поведения при достаточно больших N*:

(a) *если $t(N)/N \to 0$, то $R_i(t(N)) \sim h\varkappa_2 t(N)$*,

(b) *если $t = t(N) = sN$ для некоторого $s > 0$, то $R_i(t(N)) \sim h(1 - e^{-\varkappa_2 s})N$*,

(c) *если $t(N)/N \to \infty$, то $R_i(t(N)) \sim hN$*,

где постоянная $\varkappa_2 > 0$ определяется формулой (11), *см. ниже, а*

$$h = \frac{2\alpha_{12}\alpha_{21}(v_1 - v_2)^2}{\varkappa_2(\alpha_{12} + \alpha_{21})^3}.$$

2. Доказательства.

2.1. Вложенная цепь Маркова. Для доказательства теорем 1 и 2 мы воспользуемся вложенной цепью Маркова. Рассмотрим марковский процесс $\xi_{N_1,N_2}(t) = \xi_{N_1,N_2}(t, \omega)$ с непрерывным временем и пространством состояний $\mathbf{R}^{N_1+N_2}$, определяемый формулой (1), и

$$\tau_1(\omega) < \tau_2(\omega) < \cdots < \tau_n = \tau_n(\omega) < \cdots$$

— случайные моменты времени, в которые происходят скачки частиц процесса $\xi_{N_1,N_2}(t)$. Тогда $\{\tau_{n+1} - \tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение со средним $\gamma_{N_1,N_2} = (N_1\alpha_{12} + N_2\alpha_{21})^{-1}$.

Введем в рассмотрение на том же пространстве состояний $\mathbf{R}^{N_1+N_2}$ цепь Маркова *с дискретным временем* $\zeta_{N_1,N_2}(n)$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$\zeta_{N_1,N_2}(n, \omega) = \xi_{N_1,N_2}(\tau_n(\omega), \omega).$$

Идея состоит в том, что вопрос об изучении асимптотического поведения системы частиц в непрерывном времени $\xi_{N_1,N_2}(t)$ может быть сведен к асимптотическим свойствам цепи Маркова с дискретным временем $\zeta_{N_1,N_2}(n)$. В самом деле, по закону больших чисел

$$\tau_n \sim \frac{n}{N_1\alpha_{12} + N_2\alpha_{21}} \qquad (n \to \infty).$$

Другими словами, если n велико, то значение $n\gamma_{N_1,N_2} = n(N_1\alpha_{12} + N_2\alpha_{21})^{-1}$ асимптотически равно «физическому» времени t, связанному с системой частиц в непрерывном времени $\xi_{N_1,N_2}(t)$. Аналогично эмпирическому среднему и эмпирической дисперсии мы введем для вложенной цепи

$$X_i(n) = \frac{1}{N_i}\sum_{k=1}^{N_i} x_k^{(i)}(\tau_n), \qquad D_i(n) = \frac{1}{N_i}\sum_{k=1}^{N_i}(x_k^{(i)}(\tau_n) - X_i(n))^2.$$

Очевидно, что

$$X_i(n) = \overline{x^{(i)}}(\tau_n) \quad \text{и} \quad D_i(n) = S_i^2(\tau_n).$$

В дальнейшем нам понадобятся их математические ожидания

$$\mu_i(n) = \mathbf{E}X_i(n), \qquad d_i(n) = \mathbf{E}D_i(n),$$

а также следующие обозначения:

$$l_{12}(n) = \mu_1(n) - \mu_2(n), \qquad r(n) = \mathbf{E}(X_1(n) - X_2(n))^2.$$

2.2. Замкнутое уравнение для эмпирических средних. Здесь мы докажем теорему 1.

Следующая лемма устанавливается непосредственной проверкой.

Лемма 1. *Функции $\mu_i(n)$ удовлетворяют замкнутой системе*

$$\begin{aligned}\mu_1(n+1) &= \mu_1(n) + [\alpha_{12}(\mu_2(n)-\mu_1(n)) + v_1]\,\gamma_{N_1,N_2} + \alpha_{12}(v_2-v_1)\,\gamma^2_{N_1,N_2},\\ \mu_2(n+1) &= \mu_2(n) + [\alpha_{21}(\mu_1(n)-\mu_2(n)) + v_2]\,\gamma_{N_1,N_2} + \alpha_{21}(v_1-v_2)\,\gamma^2_{N_1,N_2}.\end{aligned}$$

Уравнение для l_{12} также замкнуто и линейно. А именно,

$$\begin{aligned}l_{12}(n+1) &= l_{12}(n) + [-(\alpha_{12}+\alpha_{21})\,l_{12}(n) + (v_1-v_2)]\,\gamma_{N_1,N_2}\\ &\quad + (\alpha_{12}+\alpha_{21})(v_2-v_1)\,\gamma^2_{N_1,N_2}\\ &= l_{12}(n)[1-\gamma_{N_1,N_2}(\alpha_{12}+\alpha_{21})] + \gamma_{N_1,N_2}(v_1-v_2)[1-\gamma_{N_1,N_2}(\alpha_{12}+\alpha_{21})],\end{aligned}$$

и, как следствие, мы получаем

$$l_{12}(n) = l_{12}(0)R^n + \frac{v_1-v_2}{\alpha_{12}+\alpha_{21}}\,(1-R^n)\,R \tag{2}$$

$$= \frac{v_1-v_2}{\alpha_{12}+\alpha_{21}}\,R + \left(l_{12}(0) - \frac{v_1-v_2}{\alpha_{12}+\alpha_{21}}\,R\right)R^n, \tag{3}$$

где $R = 1-\gamma_{N_1,N_2}(\alpha_{12}+\alpha_{21})$.

Величины

$$S(n) = \alpha_{21}\mu_1(n) + \alpha_{12}\mu_2(n)$$

также удовлетворяют рекуррентным уравнениям:

$$S(n+1) = S(n) + \gamma_{N_1,N_2}[\alpha_{21}v_1 + \alpha_{12}v_2].$$

Таким образом,

$$S(n) = S(0) + n\,\frac{\alpha_{21}v_1+\alpha_{12}v_2}{N_1\alpha_{12}+N_2\alpha_{21}} = S(0) + (n\gamma_{N_1,N_2})\cdot(\alpha_{21}v_1+\alpha_{12}v_2). \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает утверждение теоремы 1.

2.3. Эмпирические дисперсии. Ближайшая цель состоит в получении замкнутых уравнений для $d_i(n)$.

Лемма 2. *Имеет место следующее тождество*:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(D_1(n+1)\,|\,(x_i^{(1)}(t), x_j^{(2)}(t),\ i=1,\dots,N_1,\ j=1,\dots,N_2),\ t\leqslant\tau_n)\\ &\quad= D_1(n) + \alpha_{12}\gamma_{N_1,N_2}\\ &\qquad\times\left[\frac{N_1-1}{N_1}\,(D_2(n)-D_1(n)+(X_1(n)-X_2(n))^2) - \frac{2}{N_1}\,D_1(n)\right.\\ &\qquad\left.+2\,\frac{N_1-1}{N_1}(\gamma_{N_1,N_2}(v_1-v_2)(X_1(n)-X_2(n)) + \gamma^2_{N_1,N_2}(v_1-v_2)^2)\right],\end{aligned}$$

а аналогичное тождество для $\mathbf{E}(D_2(n+1)\,|\,\dots)$ *получается простой переменой индексов* $1\leftrightarrow 2$.

Доказательство этой леммы может быть получено непосредственным вычислением. Применяя оператор математического ожидания к предыдущим тождествам, мы видим, что в уравнениях для $d_i(n)$ участвует также член $r(n)$.

Вводя в рассмотрение вектор-столбец $w(n) = (d_1(n), d_2(n), r(n))^T$, мы можем записать

$$w(n+1) = Aw(n) + f(n) + g, \tag{5}$$

где A — матрица размера 3×3, не зависящая от n, $f(n)$ — ограниченная векторная функция от n, g — постоянный вектор, имеющие следующий явный вид:

$$A = E + \gamma_{N_1,N_2} B, \tag{6}$$

$$B = B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_{12} & \alpha_{12} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & -\alpha_{21} & \alpha_{21} \\ 0 & 0 & -2(\alpha_{12}+\alpha_{21}) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -\dfrac{\alpha_{12}}{N_1} & -\dfrac{\alpha_{12}}{N_1} & -\dfrac{\alpha_{12}}{N_1} \\ -\dfrac{\alpha_{21}}{N_2} & -\dfrac{\alpha_{21}}{N_2} & -\dfrac{\alpha_{21}}{N_2} \\ \dfrac{\alpha_{12}}{N_1}+\dfrac{\alpha_{21}}{N_2} & \dfrac{\alpha_{12}}{N_1}+\dfrac{\alpha_{21}}{N_2} & \dfrac{\alpha_{12}}{N_1}+\dfrac{\alpha_{21}}{N_2} \end{pmatrix},$$

$$f(n) = 2\gamma_{N_1,N_2}(v_1 - v_2)\, l_{12}(n)\, \mathbf{q}_{N_1,N_2}, \tag{7}$$

$$\mathbf{q}_{N_1,N_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_{N_1,N_2} \begin{pmatrix} \alpha_{12} - \dfrac{\alpha_{12}}{N_1} \\ \alpha_{21} - \dfrac{\alpha_{21}}{N_2} \\ -(\alpha_{12}+\alpha_{21}) \end{pmatrix},$$

$$g = \gamma^2_{N_1,N_2}(v_1 - v_2)^2 \begin{pmatrix} \alpha_{12}\gamma_{N_1,N_2} \\ \alpha_{21}\gamma_{N_1,N_2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что A, $f(n)$, g зависят от N_1, N_2 и от других параметров модели. Легко видеть, что при достаточно больших N_1, N_2 (при условии, что α_{ij} фиксированы) все компоненты вектора $\mathbf{q}_{N_1,N_2}$ положительны. Поскольку при больших N_1, N_2 все элементы матрицы A также положительны, то представляется оправданным применение аргументов в духе теории Перрона–Фробениуса.

2.4. Спектральные свойства матрицы A. Непосредственная проверка показывает, что матрица B_1 имеет три различных собственных значения

$$\lambda_1 = -(\alpha_{12}+\alpha_{21}), \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -2(\alpha_{12}+\alpha_{21}).$$

Рассмотрим предельный переход $N_1 = c_1 N$, $N_2 = c_2 N$, $N \to \infty$. Введем обозначение $\Delta := c_1\alpha_{12} + c_2\alpha_{21}$, т.е. $\gamma_{N_1,N_2} = (N\Delta)^{-1}$.

При больших N_i матрица B является малым возмущением матрицы B_1:

$$B = B_1 + \frac{1}{N} B_{2,k} = B_1 + \frac{1}{N} \begin{pmatrix} -\dfrac{\alpha_{12}}{c_1} & -\dfrac{\alpha_{12}}{c_1} & -\dfrac{\alpha_{12}}{c_1} \\ -\dfrac{\alpha_{21}}{c_2} & -\dfrac{\alpha_{21}}{c_2} & -\dfrac{\alpha_{21}}{c_2} \\ \dfrac{\alpha_{12}}{c_1}+\dfrac{\alpha_{21}}{c_2} & \dfrac{\alpha_{12}}{c_1}+\dfrac{\alpha_{21}}{c_2} & \dfrac{\alpha_{12}}{c_1}+\dfrac{\alpha_{21}}{c_2} \end{pmatrix}.$$

Для анализа собственных значений матрицы B мы воспользуемся теорией возмущений. Для $\lambda_1(N)$ и $\lambda_3(N)$ нам будет достаточно представлений

$$\lambda_1(N) = -(\alpha_{12}+\alpha_{21}) + O(N^{-1}), \qquad \lambda_3(N) = -2(\alpha_{12}+\alpha_{21}) + O(N^{-1}), \tag{8}$$

тогда как для $\lambda_2(N)$ нам понадобится результат из [2] о том, что

$$\lambda_2(N) = \frac{1}{N}(\psi' B_{2,k}\varphi) + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \tag{9}$$

где вектор-столбец φ и вектор-строка ψ' — и соответственно правый и левый собственные векторы матрицы B_1 отвечающие собственному значению 0, нормированные таким образом, чтобы $\psi'\varphi = 1$. Мы можем взять

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi' = Z^{-1}\Big(1 + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}},\ 1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}},\ 1\Big), \qquad Z = (\alpha_{12} + \alpha_{21})\Big(\frac{1}{\alpha_{12}} + \frac{1}{\alpha_{21}}\Big).$$

Подставляя эти значения в формулу (9), получаем

$$\lambda_2(N) = -\frac{\varkappa_2}{N} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big), \tag{10}$$

где

$$\varkappa_2 = 2Z^{-1}\Big(\frac{\alpha_{21}}{c_1} + \frac{\alpha_{12}}{c_2}\Big). \tag{11}$$

Обозначим через $\sigma_1(N)$, $\sigma_2(N)$, $\sigma_3(N)$ собственные числа матрицы A. Из соотношений (6), (8) и (9) легко вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Собственные числа матрицы A имеют вид*

$$\begin{aligned} \sigma_1(N) &= 1 - \frac{b_1}{N} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big), \qquad \sigma_3(N) = 1 - \frac{b_3}{N} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big), \\ \sigma_2(N) &= 1 - \frac{b_2}{N^2} + O\Big(\frac{1}{N^3}\Big), \end{aligned} \tag{12}$$

где b_1, b_2, b_3 — некоторые положительные константы.

Нас будут интересовать также собственные векторы матрицы A, которые мы обозначим $e_1^{(N)}, e_2^{(N)}, e_3^{(N)}$. Очевидно, что они являются также собственными векторами матрицы $B_1 + N^{-1}B_{2,k}$. Пользуясь теорией возмущений (см. [2]), заключаем, что $e_1^{(N)}, e_2^{(N)}, e_3^{(N)}$ являются малыми возмущениями собственных векторов e_1, e_2, e_3 матрицы B_1. Таким образом, вычисляя e_1, e_2, e_3, имеем

$$\begin{aligned} e_1^{(N)} &= \begin{pmatrix} -\alpha_{12} \\ \alpha_{21} \\ 0 \end{pmatrix} + O\Big(\frac{1}{N}\Big), \qquad e_2^{(N)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\Big(\frac{1}{N}\Big), \\ e_3^{(N)} &= \begin{pmatrix} -\alpha_{12}^2 \\ -\alpha_{21}^2 \\ (\alpha_{12} + \alpha_{21})^2 \end{pmatrix} + O\Big(\frac{1}{N}\Big). \end{aligned}$$

Очевидно, что, пользуясь (8) и (10), нетрудно получить явный вид констант b_i, участвующих в лемме. В дальнейшем нам понадобится только b_2:

$$b_2 = \frac{\varkappa_2}{\Delta} = \frac{2}{Z} \cdot \frac{\alpha_{12}/c_1 + \alpha_{21}/c_2}{c_1\alpha_{12} + c_2\alpha_{21}}. \tag{13}$$

2.5. Леммы об асимптотическом поведении. Решение уравнения (5) единственным образом может быть представлено в виде

$$w(n) = A^n w(0) + \sum_{j=1}^{n} A^{j-1} f(n-j) + (1-A)^{-1}(1-A^n)\, g. \tag{14}$$

Следующая лемма показывает, что первое и третье слагаемое в представлении (14) не влияют на асимптотику $w(n)$.

Лемма 4. *Имеют место следующие равномерные (по n и N) оценки:*

$$\|A^n w(0)\| \leqslant \text{const}, \qquad \|(1-A)^{-1}(1-A^n)\, g\| \leqslant \text{const}.$$

Доказательство. В базисе из собственных векторов матрицы A запишем разложение: $w(0) = \sum_{i=1}^{3} k_{w,i} e_i^{(N)}$. Получим $A^n w(0) = \sum_{i=1}^{3} k_{w,i}(\sigma_i(N))^n e_i^{(N)}$. Так как $\sup_N \|e_i^{(N)}\| < \infty$ и, начиная с некоторого N, $|\sigma_i(N)| < 1$, то первая оценка леммы вытекает очевидным образом. Для получения второй оценки представим

$$g = \gamma^2_{N_1,N_2} \sum_{i=1}^{3} k^{\circ}_{g,i}(N)\, e_i^{(N)}$$

с ограниченными по N коэффициентами $k^{\circ}_{g,i}(N)$. Подействуем на это разложение оператором $(1-A)^{-1}(1-A^n)$ и, заметив, что в силу леммы 3

$$\gamma^2_{N_1,N_2} \frac{1-(\sigma_i(N))^n}{1-\sigma_i(N)} \leqslant \frac{\text{const}}{N}, \qquad i = 1,3,$$

и

$$\gamma^2_{N_1,N_2} \frac{1-(\sigma_2(N))^n}{1-\sigma_2(N)} \leqslant \text{const}\,,$$

получим вторую оценку леммы. Лемма 4 доказана.

Чтобы проанализировать второе слагаемое в (14),

$$V_N(n) := \sum_{j=1}^{n} A^{j-1} f(n-j),$$

заметим, что векторная функция $f(n)$, определяемая формулой (7), известна в явном виде благодаря формуле (2).

Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbf{R}$ таковы, что $(0,0,1)^T = \sum_{i=1}^{3} \xi_i e_i$. Непосредственно находим, что

$$\xi_1 = \frac{\alpha_{21}-\alpha_{12}}{(\alpha_{12}+\alpha_{21})^2}, \qquad \xi_2 = \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{(\alpha_{12}+\alpha_{21})^2}, \qquad \xi_3 = \frac{1}{(\alpha_{12}+\alpha_{21})^2}.$$

Если $\xi_i(N) \in \mathbf{R}$ суть коэффициенты разложения $\mathbf{q}_{N_1,N_2} = \sum_{i=1}^{3} \xi_i(N)\, e_i^{(N)}$, то, очевидно,

$$\xi_i(N) = \xi_i + O(N^{-1}), \qquad i = 1,2,3. \tag{15}$$

Имеем разложение

$$V_N(n) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i(N) \left(2\,\gamma_{N_1,N_2}\,(v_1-v_2) \sum_{j=1}^{n} l_{12}(n-j)(\sigma_i(N))^{j-1} \right) e_i^{(N)}.$$

В силу (15), отбрасывая $O(N^{-1})$, заключаем, что при $N \to \infty$ асимптотика $V_N(n)$ совпадает с асимптотикой суммы

$$V_N^1(n) := \sum_{i=1}^{3} \xi_i \left(2\,\gamma_{N_1,N_2}\,(v_1-v_2) \sum_{j=1}^{n} l_{12}(n-j)(\sigma_i(N))^{j-1} \right) e_i^{(N)}. \tag{16}$$

Лемма 5. *При $n = N\theta(N)$, где $\theta(N) \to +\infty$, асимптотика $V_N^1(n)$ определяется лишь слагаемым, соответствующим $i = 2$, а первое и третье слагаемые малы по сравнению со вторым.*

Напомним, что $\sigma_2(N)$ есть максимальное собственное значение положительной матрицы A. Тем самым, утверждение данной леммы соответствует духу теории Перрона–Фробениуса.

Доказательство. Обратимся к формуле (2). Если *предположить*, что $l_{12}(0) < 0$, то из принятого нами ранее соглашения $v_1 < v_2$ вытекает, что $f(n) > 0$ (покоординатно) при всех n. Везде в дальнейшем мы будем считать, что это предположение выполнено. Более того, из (2) нетрудно сделать вывод, что найдутся такие $C_1 > C_2 > 0$, не зависящие от N и n, что

$$0 < C_2 < (v_1-v_2)\, l_{12}(n) < C_1 \qquad \forall n, N. \tag{17}$$

Таким образом, коэффициент при $e_2^{(N)}$ в сумме (16) является положительным и *оценивается снизу* следующим образом:

$$2\xi_2 C_2\, \gamma_{N_1,N_2} \sum_{j=1}^{n} (\sigma_2(N))^{j-1} = 2\xi_2 C_2\, \gamma_{N_1,N_2} \frac{1-(\sigma_2(N))^n}{1-\sigma_2(N)}.$$

Аналогично, для $i = 1, 3$ коэффициенты при $e_i^{(N)}$ в сумме (16) оцениваются *сверху по абсолютной величине* так:

$$2\xi_i C_1\, \gamma_{N_1,N_2} \sum_{j=1}^{n} (\sigma_i(N))^{j-1} = 2\xi_i C_1\, \gamma_{N_1,N_2} \frac{1-(\sigma_i(N))^n}{1-\sigma_i(N)}.$$

Таким образом, чтобы закончить доказательство леммы, достаточно сравнить асимптотику трех функций

$$\frac{1-(\sigma_1(N))^{N\theta(N)}}{1-\sigma_1(N)}, \quad \frac{1-(\sigma_2(N))^{N\theta(N)}}{1-\sigma_2(N)}, \quad \frac{1-(\sigma_3(N))^{N\theta(N)}}{1-\sigma_3(N)}$$

и показать, что первая и третья малы по сравнению со второй. Удобно рассмотреть отдельно два случая: а) $\theta(N) \to \infty$, $\theta(N)/N \to 0$, б) $\theta(N) \geqslant cN$, и воспользоваться леммой 3. Мы опускаем детали.

2.6. Асимптотическое поведение средних от выборочных дисперсий. Теперь мы готовы изучить асимптотику функций $R_1(t)$ и $R_2(t)$ и доказать теорему 2. Вспомним, что интервалы между скачками вложенной цепи имеют экспоненциальное распределение со средним $\gamma_{N_1,N_2} = (N\Delta)^{-1}$, поэтому при больших N связь между временем n, отсчитываемым вложенной цепью Маркова, и абсолютным *физическим* временем t имеет следующий вид: $n \sim t/\gamma_{N_1,N_2} = (N\Delta)\, t$. Поэтому вместо $R_i(t)$ мы можем рассмотреть $d_i((N\Delta)\, t)$. Напомним также, что d_1 есть первая, а d_2 — вторая компонента вектора w.

Теперь воспользуемся леммой 5, которая утверждает, что если $t(N) \to \infty$, то асимптотика $w((N\Delta)\, t(N))$ совпадает с асимптотикой вектора

$$\xi_2 \left(2\, \gamma_{N_1,N_2} (v_1 - v_2) \sum_{j=1}^{(N\Delta)\, t(N)} l_{12}(\,(N\Delta)\, t(N) - j)(\sigma_2(N))^{j-1} \right) e_2^{(N)}.$$

Так как $e_2^{(N)} = (1,1,0)^T + O(N^{-1})$, то

$$d_i((N\Delta)\, t) \sim 2\xi_2 \gamma_{N_1,N_2} (v_1 - v_2) \sum_{j=1}^{(N\Delta)\, t(N)} l_{12}((N\Delta)\, t(N) - j)(\sigma_2(N))^{j-1}.$$

Чтобы вычислить асимптотику этого выражения, обратимся к представлению (3), согласно которому можно записать

$$l_{12}(n) = C'_{1,N} + C'_{2,N} R^n, \qquad C'_{1,N} \to \frac{v_1 - v_2}{\alpha_{12} + \alpha_{21}}, \quad C'_{2,N} \to C'_{2,\infty} \quad (N \to \infty).$$

Заметим, что верна равномерная по N и n оценка

$$\left| \gamma_{N_1,N_2} \sum_{j=1}^{n} C'_{2,N} R^{n-j} (\sigma_2(N))^{j-1} \right| \leqslant (N\Delta)^{-1} |C'_{2,N}| \sum_{k=1}^{\infty} R^k = (N\Delta)^{-1} |C'_{2,N}| \frac{1}{1-R} \leqslant \text{const},$$

поскольку $1 - R = \gamma_{N_1,N_2}(\alpha_{12} + \alpha_{21})$. Рассмотрим теперь асимптотику выражения

$$2\,\xi_2\, \gamma_{N_1,N_2} (v_1 - v_2) \sum_{j=1}^{(N\Delta)\, t(N)} \frac{v_1 - v_2}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} (\sigma_2(N))^{j-1}$$
$$= 2\xi_2 \frac{1}{N\Delta} \frac{(v_1 - v_2)^2}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} \frac{1 - (\sigma_2(N))^{(N\Delta)\, t(N)}}{1 - \sigma_2(N)}.$$

В силу (12) и (13) $\sigma_2(N) = 1 - (\varkappa_2/\Delta)/N^2 + O(N^{-3})$, и, значит, задача свелась к изучению асимптотики

$$\frac{2\,\xi_2(v_1 - v_2)^2}{\varkappa_2(\alpha_{12} + \alpha_{21})}\, N\left(1 - \left(1 - \frac{(\varkappa_2/\Delta)}{N^2}\right)^{(N\Delta)\, t(N)}\right).$$

Отсюда легко следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Greenberg A., Malyshev V. A., Popov S. Yu.* Stochastic model of massively parallel simulation. — Markov Process. Related Fields, 1995, v. 1, № 4, p. 473–490.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, 740 с.
3. *Kipnis C., Landim C.* Scaling Limits of Interacting Particle Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 442 p.
4. *Manita A., Shcherbakov V.* Asymptotic analysis of a particle system with a mean-field interaction. — ArXiv:math.PR/0408372.
5. *Shcherbakov V., Manita A.* Stochastic particle system with non-local mean-field interaction. — Международная конференция «Колмогоров и современная математика» (Москва, 2003): Тезисы докладов. М.: МГУ, 2003, с. 549–550.
6. *Mitra D., Mitrani I.* Analysis and optimum performance of two message-passing parallel processors synchronized by rollback. — Performance Evaluation, 1987, v. 7, № 2, p. 111–124.

Поступила в редакцию
9.IX.2004

 *РАГИМОВ Ф. Г.**

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЦ СУММАМИ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

В настоящей работе изучаются интегральные предельные теоремы для времени пересечения нелинейных границ случайным блужданием с бесконечной дисперсией.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, время пересечения нелинейной границы, интегральная предельная теорема.

1. Введение. Пусть ξ_n, $n \geqslant 1$, — независимые одинаково распределенные случайные величины, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, и пусть $f_a(t)$, $a > 0$, $t > 0$, — некоторое семейство положительных нелинейных (неслучайных) функций.

Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \quad \text{и} \quad \tau = \tau_a = \inf\{n \geqslant 1\colon S_n > f_a(n)\}.$$

Здесь, как всегда, будем считать, что $\inf \varnothing = \infty$.

* Бакинский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики, кафедра теории вероятностей и математической статистики, ул. З. Халилова, 23, 370148 Баку, Азербайджан; e-mail: ragimovf@rambler.ru