В. А. МАЛЫШЕВ
Р. А. МИНЛОС

ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

В. А. МАЛЫШЕВ
Р. А. МИНЛОС

ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

МЕТОД КЛАСТЕРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

ББК 22.171
М20
УДК 519.21

Малышев В. А., Минлос Р. А. **Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений.**— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 288 с.

Теория гиббсовских случайных полей составляет новую область теории вероятностей, хотя сами эти поля являются главным объектом изучения в статистической физике и квантовой евклидовой теории поля.

В книге подробно изложен основной метод теории гиббсовских полей — метод кластерных разложений и его многочисленные применения (включая последние результаты). В начале книги даны элементарное введение в теорию гиббсовских полей и изложение общей теории семиинвариантов.

Для специалистов по теории вероятностей и математической физике, а также для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Библиогр. 152 назв.

Рецензент
кандидат физико-математических наук *С. А. Пирогов*

Вадим Александрович Малышев, Роберт Адольфович Минлос

ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

Метод кластерных разложений

Редактор *В. В. Абгарян*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *Г. В. Подвольская, М. Л. Медведская*

ИБ № 12401

Сдано в набор 05.12.84. Подписано к печати 02.08.85. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага тип. № 3. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,12. Усл. кр.-отт. 15,12. Уч.-изд. л. 15,09. Тираж 3200 экз. Заказ № 506. Цена 2 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 г. Новосибирск 77, Станиславского, 25

$М \frac{1702060000-125}{053(02)-85} 23\text{-}85$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана для широкого круга читателей: специалист по теории вероятностей увидит в ней новые и свежие темы по случайным полям; специалисту по математической физике (квантовой теории поля и статистической физике) она будет интересна углубленным изложением кластерной техники и ее разнообразных приемов; остальные математики найдут в книге немало новых алгебраических, комбинаторных и аналитических задач.

Мы занимаемся здесь явными конструкциями случайных полей. Они основаны на едином методе — так называемой гиббсовской перестройке. В чем же ее смысл? Распределение вероятностей конечной системы случайных величин $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ (конечного поля) чаще всего задается с помощью своей плотности $p(x_1, \ldots, x_n)$ относительно некоторой (обычно лебеговой) меры в R^n. Гиббсовская перестройка является естественным обобщением этого способа на случай бесконечного поля. Самые простые бесконечные случайные поля — это независимые и гауссовские поля и функционалы от них (до недавнего времени они оставались единственным хорошо изученным классом полей). При гиббсовском способе построения поля сначала вводятся поля с распределением, задаваемым конечной (локализованной) плотностью относительно независимого или гауссовского поля (конечная или локальная гиббсовская перестройка), а затем переходят к слабому пределу таких распределений (предельная гиббсовская перестройка); эта предельная мера уже сингулярна относительно исходного распределения — независимого или гауссовского. Возникающие в этом предельном переходе (термодинамическом пределе) случайные поля и составляют основной объект изучения в теории гиббсовских полей.

Мы излагаем в книге один из самых сильных методов исследования гиббсовских полей — метод кластерных разложений — и его многочисленные применения. По этому методу любую локальную характеристику поля (конечномерные распределения, средние значения локальных функций и т. п.) удается представить в виде ряда, каждый член которого зависит от конечной группы переменных поля («кластера») и явным образом выражается через них. Идея этого метода восходит к так называемым вириальным разложениям в статистической физике и, с другой стороны, к диаграммным разложениям в квантовой теории поля; в нынешней форме метод кластерных разложений представляет собой математизированное развитие этих приемов. К сожалению, для применения кластерных разложений требуется наличие «малого параметра», т. е. этот метод пока выступает в виде некоторой версии теории возмущений, хотя по своей природе он выглядит более универсальным и, видимо, должен иметь бóльшую сферу действия. Мы надеемся, что со временем удастся преодолеть эти ограничительные рамки.

Глава I является введением в гиббсовские поля, причем ее § 0 написан крайне элементарно. Читатель, интересующийся непосредственно кластерными разложениями, может эту главу опустить. В главе II собран вспомогательный материал: свойства и оценки семиинвариантов, диаграммная техника, важнейшие комбинаторные леммы. Общая схема кластерных разложений изложена в главе III, а многочисленные примеры этих разложений даны в главах IV и V. Эти главы являются центральными в книге; в них собраны основные приемы и разнообразные тонкости кластерных разложений.

Главы VI и VII посвящены приложениям — как традиционно теоретико-вероятностным, так и связанным с математической физикой.

Отметим, что наше изложение охватывает два вида случайных полей: точечные (маркированные) поля и поля на счетном множестве, причем упор делается на последних. Это объясняется, в частности, тем, что для применения кластерной техники к непрерывным (функциональным) полям (которые не включены в книгу из-за ее малого объема) требуется их предварительно редуцировать к полям на дискретном множестве.

За недостатком места мы нигде не говорим явно о связи наших построений со статистической физикой и квантовой теорией поля, хотя их дух незримо присутствует в книге и терминология хранит отпечаток их влияния.

Небольшой объем книги не дал нам также возможности изложить одно из важнейших применений техники кластерных разложений — исследование спектра трансфер-матрицы гиббсовского поля. Не включены в книгу многие приемы, используемые в теории гиббсовских полей (корреляционные неравенства, положительность при отражениях, преобразования двойственности и другие частные методы). Мы предполагаем написать продолжение этой книги, где восполним некоторые из перечисленных пробелов.

ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

(Ω, Σ, μ) — вероятностное пространство, т. е. тройка, состоящая из множества Ω, σ-алгебры Σ подмножеств Ω и вероятностной меры μ, заданной на Σ.

В случае, когда Ω — топологическое пространство, Σ обозначает его борелевскую σ-алгебру $\mathfrak{B}(\Omega)$, т. е. σ-алгебру, порожденную открытыми множествами в Ω.

В тексте Ω обычно обозначает множество конфигураций случайного поля.

μ_0 — «свободная» (невозмущенная) мера в Ω (обычно независимая или гауссовская).

Для любой случайной величины, т. е. измеримой функции ξ на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) ее среднее (математическое ожидание) обозначается

$$\langle \xi \rangle = \langle \xi \rangle_\mu = \int_\Omega \xi \, d\mu.$$

Для системы случайных величин $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ через

$$\langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle_\mu = \left\langle \prod_{i=1}^{n} \xi_i' \right\rangle_\mu = \left\langle \xi'_{\mathcal{N}} \right\rangle_\mu$$

обозначается их семиинвариант, $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ (индекс μ чаще всего опускается); при этом

$$\left\langle \xi_1'^{\,k_1}, \ldots, \xi_n'^{\,k_n} \right\rangle = \langle \underbrace{\xi_1, \ldots, \xi_1}_{k_1 \text{раз}}, \ldots, \underbrace{\xi_n, \ldots, \xi_n}_{k_n \text{раз}} \rangle.$$

G — граф, т. е. множество V (вершин) и набор неупорядоченных (возможно, совпадающих) пар элементов V (ребер).

$\mathcal{T}$ — дерево, т. е. связный граф без циклов.

$(A_1, \ldots, A_n)$ — упорядоченный и $\{A_1, \ldots, A_n\}$ — неупорядоченный наборы множеств A_i, $i = 1, \ldots, n$ (аналогичные обозначения для наборов точек).

Разбиение $\alpha = \{T_1, \ldots, T_k\}$ множества A: неупорядоченный набор непустых попарно непересекающихся подмножеств $T_i \subseteq A$, $i = 1, \ldots, k$, объединение которых $\bigcup_{i=1}^{k} T_i = A$.

$\mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$ — структура всех разбиений множества $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$.

$\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}} \subseteq \mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$ (где G — связный граф с множеством вершин $\mathcal{N}$) — структура разбиений $\mathcal{N}$, блоки которых образуют связные подграфы в G.

$\mu_{\mathfrak{A}}$ — функция Мёбиуса структуры $\mathfrak{A}$.

T — счетное (или конечное) множество, на котором задано случайное поле.

Q — пространство, в котором задано точечное поле.

S — пространство значений поля (пространство «спинов» или «зарядов»).

Λ, A, R — конечные (ограниченные) подмножества T (или Q).

Ω_Λ — пространство конфигураций поля в Λ ($\Lambda \subset T$ или $\Lambda \subset Q$).

Σ_Λ — σ-алгебра в Ω_Λ.

U_Λ — взаимодействие в Λ.

$U_{\Lambda,y} = u_\Lambda(\cdot/y)$ — взаимодействие в Λ при граничной конфигурации y.

μ_Λ — конечная гиббсовская перестройка (в Λ).

$\mu_{\Lambda,y}$ — гиббсовская перестройка при граничной конфигурации y.

Z_Λ — статистическая сумма (гиббсовской перестройки) в Λ.

$Z_{\Lambda,y}$ — статистическая сумма в Λ при граничной конфигурации y.

Γ, γ, ξ, ... — «кластеры»: связные наборы множеств (или «маркированных» множеств).

k_Λ (или k_Γ) — величины, задающие кластерное представление статистических сумм.

$b_R(F)$, $b_R^{(\Lambda)}(F)$, b_R, $b_R^{(\Lambda)}$ — величины, входящие в кластерное разложение средних (корреляционных функций, свободной энергии и т. д.).

$f_\Lambda^{(\Lambda)}$, f_Λ — корреляционные функции.

$:p(\xi_1, \ldots, \xi_n):$ — полином Вика (от гауссовской системы случайных величин $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$).

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство подмножеств T. Тогда

$d_R(\mathfrak{A};\ A_1,\ \ldots,\ A_n)$, $A_1 \subset T$, $i = 1, \ldots, n$, $R \subset T$,

— минимальная мощность набора $\{B_1,\ \ldots,\ B_s\}$ множеств $B_i \in \mathfrak{A}$ такого, что набор $\{B_1,\ \ldots,\ B_s,\ A_1,\ \ldots,\ A_n\}$ связен и $\bigcup\limits_{i=1}^{s} B_i = R$.

$d(\mathfrak{A};\ A_1,\ \ldots,\ A_n) = \min\limits_R d_R(\mathfrak{A};\ A_1,\ \ldots,\ A_n)$, т. е. минимальная мощность набора $\{B_1,\ \ldots,\ B_s\}$, $B_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1,\ \ldots,\ s$, образующего вместе с $\{A_1,\ \ldots,\ A_n\}$ связный набор.

$\widehat{d}_A(\mathfrak{A})$, $A \subset T$,— минимальная мощность связного набора $\{B_1,\ \ldots,\ B_s\}$ множеств $B_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1,\ \ldots,\ s$, такого, что $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{s} B_i$; $\widehat{d}_A = \widehat{d}_A(\mathfrak{A})$ в случае, когда $\mathfrak{A}$ — совокупность пар соседних точек $\{t,\ t'\}$ (т. е. $\rho(t,\ t') = 1$).

Система ссылок на формулы и теоремы: (1) означает формулу (1) в этом же параграфе, (2.1) — формулу (2) в § 1 этой же главы, (3.2.I) — формулу (3) в § 2 главы I; аналогично записываются ссылки на теоремы и леммы.

ГИББСОВСКИЕ ПОЛЯ (ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ)

§ 0. Первое знакомство с гиббсовскими полями

В этом вводном параграфе на простом и хорошо изученном примере так называемой модели Изинга мы продемонстрируем основные понятия и проблемы в теории гиббсовских полей, а также некоторые принятые в ней способы рассуждений.

1. Модель Изинга. Рассмотрим целочисленную решетку $\boldsymbol{Z}^\nu$ — подмножество точек $t = (t^{(1)},\ \ldots,\ t^{(\nu)}) \in R^\nu$ ν-мерного вещественного пространства с целыми координатами. Пусть $\Lambda_N = \Lambda$ — «куб» в Z^ν с центром в начале координат, т. е. множество точек Z^ν, координаты которых не превосходят по модулю N ($N > 0$ — целое число). Всякую функцию $\sigma^\Lambda = \{\sigma_t,\ t \in \Lambda\}$, определенную на множестве Λ и принимающую значения $\sigma_t = \pm 1$, будем называть *конфигурацией* (в кубе Λ), а совокупность всех таких конфигураций обозначим через Ω_Λ. Очевидно, что число конфигураций в Λ равно $2^{|\Lambda|}$, где $|\Lambda|$ — число точек в Λ.

Определим функцию на Ω_Λ

$$U_\Lambda \equiv U_\Lambda(\sigma^\Lambda) = -\left(h \sum_{t \in \Lambda} \sigma_t + \beta \sum_{\langle t, t' \rangle} \sigma_t \sigma_{t'}\right), \tag{1}$$

называемую *энергией* конфигурации σ^Λ. Суммирование во второй сумме в (1) происходит по всем неупорядоченным парам $\langle t,\ t' \rangle$, $t,\ t' \in \Lambda$, таким, что $\rho(t,\ t') = 1$ (пары «ближайших соседей»), где

$$\rho(t,\ t') = \sum_{i=1}^{\nu} |t^{(i)} - t'^{(i)}|, \tag{1'}$$

$$t = (t^{(1)},\ \ldots,\ t^{(\nu)}), \quad t' = (t'^{(1)},\ \ldots,\ t'^{(\nu)}).$$

Физическую систему, у которой фазовым пространством (множеством ее состояний) служит совокупность Ω_Λ конфигураций в Λ, а энергия конфигурации имеет вид (1), называют обычно *моделью Изинга*. Вещественные числа h и β в (1) фиксированы (параметры модели), причем в случае $\beta > 0$, который в основном и будет здесь рассматриваться, говорят о *ферромагнитной* модели Изинга.

Введем в пространстве Ω_Λ распределение вероятностей P_Λ, положив вероятность конфигурации σ^Λ равной

$$P_\Lambda(\sigma^\Lambda) = Z_\Lambda^{-1} \exp\{-U_\Lambda(\sigma^\Lambda)\}. \tag{2}$$

Нормирующий множитель Z_Λ определяется из условия

$$\sum_{\sigma^\Lambda \in \Omega_\Lambda} P_\Lambda(\sigma^\Lambda) = 1$$

и, таким образом, равен

$$Z_\Lambda = \sum_{\sigma^\Lambda \in \Omega_\Lambda} \exp\{-U_\Lambda(\sigma^\Lambda)\}. \tag{3}$$

Величина Z_Λ называется *статистической суммой* и играет важнейшую роль в дальнейшем. Распределение вероятностей (2) называется *гиббсовским* распределением вероятностей в Λ, соответствующим модели Изинга. Вообще модель определяется выбором вида взаимодействия и множества значений конфигурации (см. с. 24).

После того как мы ввели распределение вероятностей (2) в пространстве конфигураций, значения σ_t этих конфигураций можно рассматривать как случайные величины, а формулу (2) — как совместное распределение вероятностей этих случайных величин. В дальнейшем для любой функции f на пространстве Ω_Λ ее среднее по распределению (2) будет обозначаться через $\langle f\rangle_\Lambda$. Средние $\langle\sigma_T\rangle_\Lambda$ случайных величин

$$\sigma_T = \prod_{t\in T} \sigma_t, \qquad \sigma_\varnothing = 1, \tag{4}$$

где $T \subseteq \Lambda$ — произвольное подмножество Λ, называют *корреляционными функциями* (или моментами) распределения (2).

Для любого $T \subseteq \Lambda$ обозначим через $P_\Lambda^{(T)}$ совместное распределение системы случайных величин $\{\sigma_t,\ t\in T\}$, т. е. набор вероятностей

$$P_\Lambda^{(T)}\left(\bar\sigma_{t_1}, \ldots, \bar\sigma_{t_n}\right) = \Pr\left(\sigma_{t_1} = \bar\sigma_{t_1}, \ldots, \sigma_{t_n} = \bar\sigma_{t_n}\right), \tag{5}$$

где $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$, а $\left\{\bar\sigma_{t_1}, \ldots, \bar\sigma_{t_n}\right\}$ — произвольный набор значений $\bar\sigma_{t_i} = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Вероятности (5) очень просто выражаются через корреляционные функции $\langle\sigma_T\rangle_\Lambda$. Действительно,

$$P_\Lambda^{(T)}\left(\bar\sigma_{t_1}, \ldots, \bar\sigma_{t_n}\right) = \frac{1}{2^n}(-1)^k \left\langle \prod_{i=1}^n \left(\sigma_{t_i} + \bar\sigma_{t_i}\right)\right\rangle_\Lambda = \frac{(-1)^k}{2^n} \sum_{T'\subseteq T} C_{T'} \langle\sigma_{T'}\rangle_\Lambda, \tag{6}$$

где k — число значений $\bar\sigma_{t_i}$, равных -1, а

$$C_{T'} = \prod_{t\in T\setminus T'} \bar\sigma_t.$$

2. Термодинамический предельный переход. Фиксируем теперь T и будем увеличивать Λ: $\Lambda \nearrow Z^\nu$, т. е. положим $N \to \infty$. Если мы сможем доказать существование пределов

$$\lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu} \langle\sigma_T\rangle_\Lambda, \tag{7}$$

то можно сделать вывод, что корреляционные функции (и конечномерные распределения) почти не зависят от Λ при достаточно больших Λ в сравнении с T. Такой предельный переход называется *термодинамическим* предельным переходом (предел большого числа степеней свободы σ_t). Эти пределы обозначаются $\langle\sigma_T\rangle$ и называются *предельными корреляционными функциями.*

Из (6) следует, что конечномерные распределения также имеют пределы и образуют согласованное семейство конечномерных распределений. По теореме Колмогорова (см. [51]) это семейство определяет систему случайных величин $\{\sigma_t,\ t\in Z^\nu\}$, называемую (предельным) *гиббсовским случайным полем* (для модели Изинга), и их распределение P (меру) на пространстве $\Omega = \{-1, 1\}^{Z^\nu}$ бесконечных конфигураций на решетке Z^ν.

Развиваемые в этой книге методы позволят нам установить существование пределов (7) для довольно общего класса моделей. Здесь же в случае ферромагнитной модели Изинга при доказательстве предельного перехода (7) мы воспользуемся некоторым специальным приемом — так называемыми корреляционными неравенствами Гриффитса. Существование предельного распределения P вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *При $\beta \geqslant 0$ для всех конечных T существует термодинамический предел (7) корреляционных функций $\langle \sigma_T \rangle_\Lambda$.*

Замечание 1. В случае $\beta = 0$ нетрудно вычислить $\langle \sigma_T \rangle_\Lambda$:

$$\langle \sigma_T \rangle_\Lambda = \left(\frac{e^h - e^{-h}}{e^h + e^{-h}} \right)^{|T|}, \tag{8}$$

и, следовательно, $\langle \sigma_T \rangle_\Lambda$ не зависит от Λ (при $T \subseteq \Lambda$). Таким образом, термодинамический предел $\langle \sigma_T \rangle_\Lambda$ в этом случае существует и равен (8). Случайные величины σ_t являются взаимно независимыми как относительно распределений в конечных Λ, так и относительно предельного распределения.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что достаточно рассмотреть случай $h \geqslant 0$. Это видно из следующего свойства симметрии модели Изинга (в обозначениях ниже β и h в индексе указывают на зависимость гиббсовского распределения от этих параметров):

$$P_{\Lambda, \beta, h}(\sigma^\Lambda) = P_{\Lambda, \beta, -h}(-\sigma^\Lambda), \tag{9}$$

где через $-\sigma^\Lambda$ обозначена конфигурация, значения которой во всех точках $t \in \Lambda$ отличаются знаком от значений конфигурации σ^Λ. Из (9) вытекает, что

$$\langle \sigma_T \rangle_{\Lambda, \beta, h} = \begin{cases} \langle \sigma_T \rangle_{\Lambda, \beta, -h}, & |T| \text{ четно,} \\ -\langle \sigma_T \rangle_{\Lambda, \beta, -h}, & |T| \text{ нечетно.} \end{cases} \tag{10}$$

В частности, при нечетном $|T|$

$$\langle \sigma_T \rangle_{\Lambda, \beta, 0} = 0. \tag{11}$$

Доказательство соотношений (9) и (10) просто и предоставляется читателю.

Для доказательства теоремы нам понадобятся два неравенства. Удобно при этом рассмотреть более общую ситуацию. Пусть Λ — произвольное множество, Ω_Λ — совокупность всех конфигураций $\sigma^\Lambda = \{\sigma_t,\ t \in \Lambda\}$, $\sigma_t = \pm 1$, в Λ, а энергия $U_\Lambda(\sigma^\Lambda)$ конфигурации σ^Λ имеет вид

$$U_\Lambda(\sigma^\Lambda) = -\left(\sum_{t \in \Lambda} h_t \sigma_t + \sum_{t, t' \in \Lambda} \beta_{t, t'} \sigma_t \sigma_{t'} \right), \tag{12}$$

где $h_t \geqslant 0$ и $\beta_{tt'} \geqslant 0$ (сумма в (12) берется, вообще говоря, по всем парам точек $t,\ t' \in \Lambda$). Распределение P_Λ на Ω_Λ задается по-прежнему формулой (2), и $\langle\ \rangle_\Lambda$ снова обозначает среднее по этому распределению.

Лемма 2. *Верны неравенства*

$$\langle \sigma_T \rangle_\Lambda \geqslant 0 \tag{13}$$

(первое неравенство Гриффитса) и

$$\langle \sigma_T \sigma_{T'} \rangle_\Lambda - \langle \sigma_T \rangle_\Lambda \langle \sigma_{T'} \rangle_\Lambda \geqslant 0 \tag{14}$$

(второе неравенство Гриффитса).

Доказательство. Для доказательства (13) достаточно проверить, что

$$\sum_{\sigma^\Lambda \in \Omega_\Lambda} \sigma_T \exp\{-U_\Lambda(\sigma^\Lambda)\} \geqslant 0. \tag{15}$$

Разлагая экспоненту $\exp\{-U_\Lambda(\sigma_\Lambda)\}$ в ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-U_\Lambda)^n}{n!}$ и раскрывая скобки в каждом члене этого ряда с учетом того, что $\sigma_t^2 = 1$, представим левую часть неравенства (15) в виде суммы

$$\sum_{B \subseteq \Lambda} C_B \sum_{\sigma^\Lambda \in \Omega_\Lambda} \sigma_B, \tag{16}$$

где $C_B \geqslant 0$. Поскольку для любого $t \in \Lambda$

$$\sum_{\sigma_t = \pm 1} \sigma_t = 0, \tag{17}$$

сумма (16) равна $C_\varnothing$, что и доказывает (13).

Для доказательства (14) рассмотрим два независимых экземпляра распределения P_Λ, т. е. распределение на пространстве $\Omega_\Lambda \times \Omega_\Lambda$ пар $\{\sigma^\Lambda, \tilde{\sigma}^\Lambda\}$ конфигураций вида

$$\hat{P}_\Lambda(\sigma^\Lambda, \tilde{\sigma}^\Lambda) = (Z_\Lambda^{-1})^2 \exp\Big\{ \sum_{t \in \Lambda} h_t (\sigma_t + \tilde{\sigma}_t) + \sum_{t, t' \in \Lambda} \beta_{t, t'} (\sigma_t \sigma_{t'} + \tilde{\sigma}_t \tilde{\sigma}_{t'}) \Big\}. \tag{18}$$

Введем новые переменные

$$\xi_t = \sigma_t + \tilde{\sigma}_t, \quad \eta_t = \sigma_t - \tilde{\sigma}_t, \quad t \in \Lambda,$$

принимающие значения $(\xi_t, \eta_t) = (2, 0), (-2, 0), (0, 2), (0, -2)$. Вероятность (18) перепишется в этих переменных в виде

$$Z_\Lambda^{-2}\exp\left\{\sum_{t\in\Lambda} h_t\xi_t + \frac{1}{2}\sum_{t,t'\in\Lambda}\beta_{t,t'}(\xi_t\xi_{t'}+\eta_t\eta_{t'})\right\}.$$

Учитывая, что при любом $t\in\Lambda$

$$\xi_t\eta_t = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{\xi_t=-2,0,2}\xi_t^k = \sum_{\eta_t=-2,0,2}\eta_t^k \geqslant 0$$

для каждого целого $k\geqslant 0$, и повторяя доказательство неравенства (13), мы получим, что при всех T и T'

$$\langle \xi_T\eta_{T'}\rangle_{\Lambda,\Lambda} \geqslant 0, \tag{19}$$

где ξ_T и η_T определяются аналогично (4), а среднее $\langle\ \rangle_{\Lambda,\Lambda}$ вычисляется по распределению (18). Заметим, что

$$\langle\sigma_T\sigma_{T'}\rangle_\Lambda - \langle\sigma_T\rangle_\Lambda\langle\sigma_{T'}\rangle_\Lambda = \frac{1}{2}\langle(\sigma_T-\tilde\sigma_T)(\sigma_{T'}-\tilde\sigma_{T'})\rangle_{\Lambda,\Lambda'}, \tag{20}$$

и покажем, что разность $\sigma_T-\tilde\sigma_T$ и сумма $\sigma_T+\tilde\sigma_T$ представляются в виде

$$\sigma_T\pm\tilde\sigma_T = \sum_{A,B\subseteq T} C^{\pm}_{A,B}\xi_A\eta_B, \tag{21}$$

где $C^{\pm}_{A,B}\geqslant 0$. Из соотношений (19), (20) и (21) следует неравенство (15). Представление (21) можно доказать индукцией по числу $|T|$, если заметить, что при $t\notin T\subset\Lambda$

$$\sigma_{T\cup\{t\}}+\tilde\sigma_{T\cup\{t\}} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_T+\tilde\sigma_T)\xi_t + (\sigma_T-\tilde\sigma_T)\eta_t\right],$$

$$\sigma_{T\cup\{t\}}-\tilde\sigma_{T\cup\{t\}} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_T+\tilde\sigma_T)\eta_t + (\sigma_T-\tilde\sigma_T)\xi_t\right].$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы.

Производные $\dfrac{\partial}{\partial h_t}\langle\sigma_T\rangle_\Lambda$ и $\dfrac{\partial}{\partial \beta_{t,t'}}\langle\sigma_T\rangle_\Lambda$ равны

$$\frac{\partial}{\partial h_t}\langle\sigma_T\rangle_\Lambda = \langle\sigma_T\sigma_t\rangle_\Lambda - \langle\sigma_T\rangle_\Lambda\langle\sigma_t\rangle_\Lambda \geqslant 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{t,t'}}\langle\sigma_T\rangle_\Lambda = \langle\sigma_T\sigma_t\sigma_{t'}\rangle_\Lambda - \langle\sigma_T\rangle_\Lambda\langle\sigma_t\sigma_{t'}\rangle_\Lambda \geqslant 0, \tag{22}$$

т. е. корреляционные функции монотонно растут с увеличением параметров h_t и $\beta_{t,t'}$. Отсюда вытекает, что

в случае модели Изинга при $T\subseteq\Lambda_1\subset\Lambda_2$

$$\langle\sigma_T\rangle_{\Lambda_1}\leqslant\langle\sigma_T\rangle_{\Lambda_2}. \tag{23}$$

Действительно, среднее $\langle\sigma_T\rangle_{\Lambda_1}$ совпадает со средним по распределению вида (12) в Λ_2 с параметрами

$$h_t = \begin{cases} h, & t\in\Lambda_1,\\ 0, & t\in\Lambda_2\setminus\Lambda_1,\end{cases}$$

и

$$\beta_{t,t'} = \begin{cases}\beta, & t,\ t' \text{ — ближайшие соседи в } \Lambda_1,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Воспользовавшись теперь монотонностью $\langle\sigma_T\rangle$ относительно параметров h_t и $\beta_{t,t'}$, мы получим (23). Поскольку $|\langle\sigma_T\rangle|\leqslant 1$, из (23) вытекает утверждение теоремы.

3. Марковское свойство. Пусть $A\subset Z^\nu$ — некоторое множество; назовем его *границей* ∂A множество, состоящее из точек, отстоящих от A на расстояние 1:

$$\partial A = \{t\in Z^\nu\colon\ \rho(t,A)=1\}. \tag{24}$$

Пусть $\Lambda\subset Z^\nu$ — куб и $A,\ B\subset\Lambda$, причем $A\cap B=\varnothing$ и $\partial A\subset B$. Обозначим через

$$P_\Lambda^{(A)}(\bar\sigma^A/\tilde\sigma^B) = \Pr\{\sigma_t=\bar\sigma_t,\ t\in A/\sigma_{t'}=\tilde\sigma_{t'},\ t'\in B\}$$

условную вероятность того, что конфигурация σ^A принимает значения $\bar\sigma^A=\{\bar\sigma_t,\ t\in A\}$ на множестве A при условии, что ее значения на множестве B равны $\tilde\sigma^B = \{\tilde\sigma_{t'},\ t'\in B\}$.

Лемма 3. *Верны равенства*

$$P_\Lambda^{(A)}(\bar\sigma^A/\tilde\sigma^B) = P_\Lambda^{(A)}(\bar\sigma^A/\tilde\sigma^{\partial A}) = Z_A^{-1}(\tilde\sigma^{\partial A})\exp\{-(U_A(\bar\sigma^A)+U_{A,\partial A}(\bar\sigma^A,\ \tilde\sigma^{\partial A}))\}, \tag{25}$$

где $U_A(\bar\sigma^A)$ *— энергия конфигурации* $\bar\sigma^A$, *определяемая аналогично формуле* (1), $U_{A,\partial A}(\bar\sigma^A,\ \tilde\sigma^{\partial A})$ *— энергия взаимодействия между конфигурациями* $\bar\sigma^A$ *и* $\tilde\sigma^{\partial A}$:

$$U_{A,\partial A}(\bar\sigma^A,\ \tilde\sigma^{\partial A}) = -\beta\sum_{\substack{t\in A,\ t'\in\partial A\\ \rho(t,t')=1}}\bar\sigma_t\tilde\sigma_{t'}, \tag{26}$$

а $Z_A(\tilde\sigma^{\partial A})$ *— условная статистическая сумма:*

$$Z_A(\tilde\sigma^{\partial A}) = \sum_{\bar\sigma^A}\exp\{-(U_A(\bar\sigma^A)+U_{A,\partial A}(\bar\sigma^A,\ \tilde\sigma^{\partial A}))\}. \tag{27}$$

Первое равенство в (25) называется *марковским* свойством распределения P_Λ, а второе равенство выражает его *гиббсовское* свойство: условное распределение $P_\Lambda^{(A)}$ снова имеет вид, подобный распределению (2), лишь к энергии U_A добавилась энергия $U_{A,\partial A}$ взаимодействия с «граничной» конфигурацией $\tilde\sigma^{\partial A}$. Обычно распределение, задаваемое формулой в последней части равенств (25), называется *гиббсовским распределением в* A *при граничной конфигурации* $\tilde\sigma^{\partial A}$.

Доказательство леммы 3 проводится прямым вычислением: из формулы (2) получаем, что

$$P_\Lambda^{(A)}(\bar\sigma^A/\tilde\sigma^B) = \frac{P_\Lambda^{(A\cup B)}(\bar\sigma^A, \tilde\sigma^B)}{P_\Lambda^{(B)}(\tilde\sigma^B)} = \frac{\sum\limits_{\sigma^{\Lambda\setminus(A\cup B)}} \exp\{-U_\Lambda(\bar\sigma^A, \tilde\sigma^B, \sigma^{\Lambda\setminus(A\cup B)})\}}{\sum\limits_{\sigma^{\Lambda\setminus(A\cup B)},\bar\sigma^A} \exp\{-U_\Lambda(\bar\sigma^A, \tilde\sigma^B, \sigma^{\Lambda\setminus(A\cup B)})\}}, \tag{28}$$

где $\sigma^\Lambda = (\bar\sigma^A, \tilde\sigma^B, \sigma^{\Lambda\setminus(A\cup B)})$, а $\sigma^{\Lambda\setminus(A\cup B)}$ — конфигурация на множестве $\Lambda\setminus(A\cup B)$. Далее,

$$U_\Lambda(\sigma^\Lambda) = U_A(\bar\sigma^A) + U_{A,B}(\bar\sigma^A, \tilde\sigma^B) + U_B(\tilde\sigma^B) + U_{\Lambda\setminus(A\cup B)}(\sigma^{\Lambda\setminus(A\cup B)}) + U_{B,\Lambda\setminus(A\cup B)}(\tilde\sigma^B, \sigma^{\Lambda\setminus(A\cup B)}),$$

где энергии $U_{A,B}$ и $U_{B,\Lambda\setminus(A\cup B)}$ определяются аналогично (26). Отсюда числитель в последней части равенств (28) равен

$$\exp\{-(U_A(\bar\sigma^A) + U_{A,B}(\bar\sigma^A, \tilde\sigma^B) + U_B(\tilde\sigma^B))\} Z_{\Lambda\setminus(A\cup B)}(\tilde\sigma^B),$$

а знаменатель —

$$\exp\{-U_B(\tilde\sigma^B)\} Z_{\Lambda\setminus(A\cup B)}(\tilde\sigma^B) Z_A(\tilde\sigma^B),$$

где $Z_{\Lambda\setminus(A\cup B)}(\tilde\sigma^B)$ и $Z_A(\tilde\sigma^B)$ определяются аналогично (27). Подставляя эти выражения в (28) и заметив, что $U_{A,B}(\bar\sigma^A, \tilde\sigma^B) = U_{A,\partial A}(\bar\sigma^A, \tilde\sigma^{\partial A})$ и $Z_A(\tilde\sigma^B) = Z_A(\tilde\sigma^{\partial A})$, мы после очевидных сокращений приходим к (25). Лемма доказана.

Из (25) видно, что условное распределение $P_\Lambda^{(A)}(\cdot/\tilde\sigma^B)$ не зависит от Λ. Это наблюдение лежит в основе следующего определения гиббсовского случайного поля в Z^ν.

Определение 1. Говорят, что распределение вероятностей P в пространстве Ω задает *гиббсовское случайное поле* $\{\sigma_t,\ t\in Z^\nu\}$ (для модели Изинга), если для любых конечных подмножеств $A, B\subset Z^\nu$ таких, что $A\cap B=\varnothing$ и $\partial A\subseteq B$, условное распределение $P^{(A)}(\bar\sigma^A/\tilde\sigma^B)$, порождаемое распределением P, совпадает с гиббсовским распределением в A при граничной конфигурации $\tilde\sigma^{\partial A}$ (см. второе равенство в (25)).

Заметим, что в силу первого равенства в (28) и определения (7) построенное нами выше предельное гиббсовское распределение задает гиббсовское случайное поле в Z^ν и в смысле определения 1. Существуют ли другие гиббсовские поля в Z^ν для модели Изинга? Оказывается, что это зависит от размерности ν решетки Z^ν и параметров (h, β). Те значения параметров (h, β), при которых существует более одного гиббсовского поля в Z^ν, определяют на плоскости (h, β) точки, называемые *точками фазового перехода 1-го рода*.

Теорема 4. *Для ферромагнитной модели Изинга*

1) *при* $\nu=1$ *гиббсовское поле единственно*;

2) *при* $\nu\geqslant 2$ *и* $h\neq 0$ *или* $h=0$ *и* β *достаточно мало*: $0\leqslant\beta\leqslant\beta_0(\nu)$, *гиббсовское поле единственно*;

3) *при* $\nu\geqslant 2$ *точки* $(0, \beta)$, *где* β *достаточно велико*: $\beta>\beta_1(\nu)$, *являются точками фазового перехода 1-го рода.*

Здесь мы докажем только утверждения 1) и 3) этой теоремы.

Прежде чем доказывать теорему, обсудим, каким способом можно строить гиббсовские случайные поля на Z^ν для модели Изинга. Пусть $\Lambda\subset Z^\nu$ — куб, $\tilde\sigma^{\partial\Lambda}$ — некоторая конфигурация на границе $\partial\Lambda$ куба Λ и $P_{\Lambda,\tilde\sigma^{\partial\Lambda}}(\sigma^\Lambda)$ обозначает гиббсовское распределение в Λ (на пространстве Ω_Λ) с граничной конфигурацией $\tilde\sigma^{\partial\Lambda}$ (см. формулу (25)). Пусть теперь $q^{\partial\Lambda}$ — произвольное распределение вероятностей на множестве $\Omega_{\partial\Lambda}$ граничных конфигураций $\tilde\sigma^{\partial\Lambda}$. Обозначим $P_{\Lambda,q^{\partial\Lambda}}$ распределение на пространстве Ω_Λ:

$$P_{\Lambda,q^{\partial\Lambda}}(\sigma^\Lambda) = \langle P_{\Lambda,\tilde\sigma^{\partial\Lambda}}(\sigma^\Lambda)\rangle_{q^{\partial\Lambda}}, \tag{29}$$

получающееся усреднением распределений $P_{\Lambda,\tilde\sigma^{\partial\Lambda}}$ по всевозможным граничным конфигурациям $\tilde\sigma^{\partial\Lambda}$. Распределение (29) называют гиббсовским распределением в Λ при *случайной граничной конфигурации*. Наконец, кроме распределений $P_{\Lambda, \tilde{\sigma}^{\partial\Lambda}}$ и $P_{\Lambda, q^{\partial\Lambda}}$ часто рассматривают гиббсовское распределение $P_{\Lambda}^{\text{пер}}$ с так называемыми *периодическими* граничными условиями. Оно определяется аналогично распределению P_Λ (см. (2)), с той лишь разницей, что «куб» Λ надо заменить «тором» (отождествить противоположные стороны Λ) и энергию U_Λ в (2) заменить энергией $U_{\Lambda}^{\text{пер}}$ взаимодействия ближайших соседей на этом торе. Часто гиббсовское распределение (2) называют гиббсовским распределением в Λ с «пустыми граничными условиями».

Повторяя доказательство леммы 3, легко убедиться, что распределения

$$P_{\Lambda, \tilde{\sigma}^{\partial\Lambda}}, \quad P_{\Lambda, q^{\partial\Lambda}}, \quad P_{\Lambda}^{\text{пер}} \tag{30}$$

обладают гиббсовским свойством (25).

Отсюда, как и в случае гиббсовских распределений с пустыми граничными условиями, предел $P = \lim\limits_{\Lambda_n \nearrow Z^\nu} P_{\Lambda_n}$ последовательности P_{Λ_n} распределений вида (30), где Λ_n — некоторая возрастающая последовательность кубов: $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq \ldots \subseteq \Lambda_n \subseteq \bigcup \Lambda_n = Z^\nu$, задает гиббсовское поле на Z^ν. Имеет место обратное утверждение.

Лемма 5. *Любое распределение вероятностей P на пространстве Ω, задающее гиббсовское случайное поле в Z^ν, является термодинамическим пределом последовательности распределений $P_{\Lambda_n, q_n^{\partial\Lambda_n}}$ при некотором выборе $q_n^{\partial\Lambda_n}$.*

Доказательство. Для каждого куба $\Lambda \subset Z^\nu$ выберем в качестве $q^{\partial\Lambda}$ распределение вероятностей на $\Omega_{\partial\Lambda}$, индуцированное распределением P. Очевидно, что при этом $P_{\Lambda, q^{\partial\Lambda}}$ совпадает с распределением на Ω_Λ, индуцированным P, и, таким образом, $P_{\Lambda, q^{\partial\Lambda}} \to P$ (в смысле (7)) при $\Lambda \nearrow Z^\nu$.

Вернемся теперь к доказательству теоремы.

Доказательство утверждения 1) теоремы 4. *Трансфер-матрица.* Положим для простоты формул $h = 0$. Матрицу $J = \| j_{\sigma, \sigma'} \|$ второго порядка с матричными элементами $j_{\sigma, \sigma'} = e^{\beta\sigma\sigma'}$, $\sigma, \sigma' = \pm 1$,

$$J = \begin{Vmatrix} e^{\beta} & e^{-\beta} \\ e^{-\beta} & e^{\beta} \end{Vmatrix} \tag{31}$$

называют *трансфер-матрицей* модели Изинга.

Пусть $\Lambda = [-N, N] \subset Z^1$ и P_Λ — гиббсовское распределение в Λ (с пустыми граничными условиями).

Лемма 6. *Верны равенства*

$$Z_\Lambda = (J^{2N} e, \ e), \tag{32}$$

$$P_{\Lambda}^{\{t_1, \ldots, t_n\}} \left(\bar{\sigma}_{t_1}, \ldots, \bar{\sigma}_{t_n}\right) = \frac{\left(e^{(\bar{\sigma}_{t_1})}, J^{N_1} e\right)\left(e^{(\bar{\sigma}_{t_2})}, J^{t_2 - t_1} e^{(\bar{\sigma}_{t_1})}\right) \ldots \left(e, J^{N_2} e^{\bar{\sigma}_{t_4}}\right)}{(e, J^{2N} e)}, \tag{33}$$

где $e = (1, 1)$, $e^{(1)} = (1, 0)$, $e^{(-1)} = (0, 1)$, $N_1 = t_1 + N$, $N_2 = N - t_n$, $-N \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant N$.

Доказательство очевидно.

Пусть теперь $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ — два нормированных собственных вектора трансфер-матрицы J с собственными значениями λ_1 и λ_2, $\lambda_1 > |\lambda_2| \geqslant 0$. Воспользовавшись разложением

$$e = C_1 g^{(1)} + C_2 g^{(2)}, \quad e^{(\pm 1)} = B_1^{(\pm 1)} g^{(1)} + B_2^{(\pm 1)} g^{(2)},$$

получим, что при больших N и фиксированных $\{t_1, \ldots, t_n\}$

$$(J^{2N} e, e) \sim C_1^2 \lambda_1^{2N},$$

$$\left(e^{(\bar{\sigma}_{t_1})}, J^{N_1} e\right) \sim B_1^{(\bar{\sigma}_{t_1})} C_1 \lambda_1^{N_1},$$

$$\left(e, J^{N_2} e^{(\bar{\sigma}_{t_n})}\right) \sim B_1^{(\bar{\sigma}_{t_n})} C_1 \lambda_1^{N_2}$$

и, таким образом,

$$\lim_{N \to \infty} P_{\Lambda}^{\{t_1, \ldots, t_n\}} \left(\bar{\sigma}_{t_1}, \ldots, \bar{\sigma}_{t_n}\right) = B_1^{(\bar{\sigma}_{t_1})} B_1^{(\bar{\sigma}_{t_n})} \prod_{k=2}^{n} \frac{\left(e^{(\bar{\sigma}_{t_k})}, J^{t_k - t_{k-1}} e^{(\bar{\sigma}_{t_{k-1}})}\right)}{\lambda_1^{t_k - t_{k-1}}}.$$

Аналогично показывается, что для любой последовательности гиббсовских распределений $P_{\Lambda_n, q_n^{\partial\Lambda_n}}$, $\Lambda_n \nearrow Z^1$, вероятности $P_{\Lambda_n, q_n^{\partial\Lambda_n}}^{\{t_1, \ldots, t_n\}}$ имеют тот же самый предел. Доказательство первого утверждения закончено.

Замечание. Из наших рассуждений легко вывести, что предельное гиббсовское поле $\{\sigma_t, t \in Z^1\}$ является стационарной марковской цепью с матрицей переходных вероятностей

$$P_{\sigma_1\sigma_2} = \frac{J_{\sigma_1\sigma_2} g^{(1)}_{\sigma_2}}{\lambda_1 g^{(1)}_{\sigma_1}}, \quad \sigma_1\sigma_2 = \pm 1,$$

и стационарным распределением $\pi_\sigma = \left(g^{(1)}_\sigma\right)^2$, $\sigma = \pm 1$, где $g^{(1)}_1, g^{(1)}_{-1}$ — компоненты собственного вектора $g^{(1)}$.

Доказательство утверждения 3) теоремы 4.

Обозначим через $P_{\Lambda,(+)}$ гиббсовское распределение в Λ с граничной конфигурацией $\tilde\sigma_t \equiv +1$, $t \in \partial\Lambda$ ((+)-граничные условия).

Лемма 7. *Равномерно по всем кубам* $\Lambda \subset Z^\nu$, $0 \in \Lambda$,

$$\mathrm{Pr}^{\{0\}}_{\Lambda,(+)}(\sigma_0 = -1) < 1/3 \tag{34}$$

при всех достаточно больших β: $\beta > \beta_1(\nu)$.

Выведем сначала из этой леммы наше утверждение. Рассмотрим гиббсовское распределение $P_{\Lambda,(-)}$ с граничной конфигурацией $\tilde\sigma_t \equiv -1$, $t \in \partial\Lambda$ ((−)-граничное условие). В силу симметрии при $h = 0$:

$$P_{\Lambda,(+)}(\sigma^\Lambda) = P_{\Lambda,(-)}(-\sigma^\Lambda)$$

получаем, что при всех Λ

$$\mathrm{Pr}^{\{0\}}_{\Lambda,(-)}(\sigma_0 = 1) < 1/3$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Pr}^{\{0\}}_{\Lambda,(-)}(\sigma_0 = -1) > 2/3. \tag{35}$$

Неравенства (34) и (35) означают, что существуют по крайней мере два различных гиббсовских распределения в Z^ν.

Доказательство леммы 7. Для наглядности рассмотрим случай $\nu = 2$. Пусть $\tilde Z^2$ — двойственная решетка, получающаяся из решетки Z^2 сдвигом на вектор (1/2, 1/2). Для любой конфигурации σ^Λ обозначим через $\gamma = \gamma(\sigma^\Lambda)$ набор ребер $\tilde Z^2$ таких, что они разделяют две соседние вершины $t, t' \in \Lambda \cup \partial\Lambda$, в которых $\sigma_t \ne \sigma_{t'}$ ($\sigma_t = 1$ при $t \in \partial\Lambda$). Легко видеть, что к любой вершине $\tilde Z^2$ примыкает лишь четное число ребер из $\gamma(\sigma^\Lambda)$. Поэтому связные компоненты γ являются замкнутыми ломаными (возможно, самопересекающимися). Обозначим их $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ и будем называть *контурами*. Покажем, что для любого набора $\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\}$ непересекающихся контуров существует конфигурация σ^Λ такая, что $\gamma = \gamma(\sigma^\Lambda)$. Действительно, в точках $t \in \Lambda$, лежащих вне всех контуров, следует положить $\sigma_t = 1$. Далее, в точках, попавших внутрь только одного контура Γ, положим $\sigma_t = -1$, в точках, которые окружены двумя контурами, $\sigma_t = 1$ и т. д. Таким образом, между конфигурациями σ^Λ и наборами контуров γ существует взаимно однозначное соответствие. При этом

$$U_{\Lambda,(+)}(\sigma^\Lambda) = U_\Lambda(\sigma^\Lambda) + U_{\Lambda,\partial\Lambda}(\sigma^\Lambda, \tilde\sigma^{\partial\Lambda} \equiv 1) = 2\beta|\gamma| - \beta|\tilde\Lambda|,$$

$$Z_{\Lambda,(+)} = Z_\Lambda\left(\tilde\sigma^{\partial\Lambda} \equiv 1\right) = \exp\{\beta|\tilde\Lambda|\} \sum_\gamma e^{-2\beta|\gamma|},$$

где $|\gamma|$ — число ребер в γ (длина γ), $|\tilde\Lambda|$ — число ребер из $\tilde Z^2$, расположенных по соседству хотя бы с одной вершиной из Λ.

Лемма 8. *Вероятность* $P_{\Lambda,(+)}(\Gamma)$ *того, что в наборе* γ *содержится контур* Γ, *допускает оценку*

$$P_{\Lambda,(+)}(\Gamma) \leqslant e^{-2\beta|\Gamma|}.$$

Доказательство. Вероятность $P_{\Lambda,(+)}(\Gamma)$ равна

$$P_{\Lambda,(+)}(\Gamma) = \sum_{\gamma:\Gamma\in\gamma} P_{\Lambda,(+)}(\gamma) = \frac{\sum\limits_{\gamma:\Gamma\in\gamma} e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum\limits_\gamma e^{-2\beta|\gamma|}} = \frac{e^{-2\beta|\Gamma|}\sum\limits_\gamma{}' e^{-2\beta|\gamma|}}{\sum\limits_\gamma e^{-2\beta|\gamma|}} < e^{-2\beta|\Gamma|},$$

где $\sum\limits_\gamma{}'$ означает суммирование по всем γ, не содержащим контура Γ, а также никакого контура, пересекающегося с Γ. Лемма доказана.

Далее легко убедиться в том, что число контуров Γ длины n, охватывающих заданную точку $t_0 \in Z^2$, не превосходит $n^2 3^n$. Поскольку событие $\sigma_0 = -1$ при (+)-граничных условиях влечет за собой наличие хотя бы одного контура Γ, охватывающего точку 0, получаем, что

$$\mathrm{Pr}^{(0)}_{\Lambda,(+)}(\sigma_0 = -1) \leqslant \sum_{\Gamma:\Gamma \text{ охватывает } 0} P_{\Lambda,(+)}(\Gamma) \leqslant \sum_{n\geqslant 4} n^2 3^n e^{-2\beta n} < 1/3$$

при достаточно большом β. Лемма 7, а вместе с ней утверждение 3) теоремы 4 доказаны.

4. Другие модели. С тем чтобы расширить у читателя представление о том, чем же занимаются в теории гиббсовских полей, мы укажем еще несколько физических решетчатых моделей, часто встречающихся в литературе.

I. *Модель ротаторов.* Пусть $\Lambda \subset Z^\nu$ — конечное подмножество, конфигурации $\sigma^\Lambda = \{\sigma_t,\ t \in \Lambda\}$ принимают значения на n-мерной сфере: $\sigma_t \in R^n$, $|\sigma_t| = 1$, а энергия конфигурации определяется формулой

$$U_\Lambda(\sigma^\Lambda) = \sum_{t, t' \in \Lambda} J_{t-t'} \cdot (\sigma_t, \sigma_{t'}) + \sum_{t \in \Lambda} (h, \sigma_t),$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в R^n, J_t — некоторая финитная функция от $t \in Z^\nu$, $t \neq 0$, $h \in R^n$. Гиббсовское распределение P_Λ для этой модели задается формулой

$$p_\Lambda(\sigma^\Lambda) = Z_\Lambda^{-1} \exp\{-\beta U_\Lambda(\sigma^\Lambda)\}, \tag{36}$$

где $p_\Lambda(\sigma^\Lambda)$ — плотность распределения P_Λ относительно меры $\lambda_0^\Lambda = \underbrace{\lambda_0 \times \ldots \times \lambda_0}_{|\Lambda|\ \text{раз}}$ в пространстве конфигураций Ω_Λ, где λ_0 — равномерное распределение на поверхности сферы $S \subset R^n$, Z_Λ — нормирующей множитель.

II. *Модель с глобальной симметрией* (G-модель). Пусть G — некоторая группа и конфигурация $g^\Lambda = \{g_t,\ t \in \Lambda\}$, $\Lambda \subset Z^\nu$, принимает значения в G. Энергия конфигурации g^Λ имеет вид

$$U_\Lambda(g^\Lambda) = \sum_{\substack{\rho(t,t')=1 \\ t, t' \in \Lambda}} \psi(g_t g_{t'}^{-1}),$$

где ψ — некоторая четная функция на группе G: $\psi(g) = \psi(g^{-1})$. Гиббсовское распределение по-прежнему определяется формулой, аналогичной формуле (2) в случае дискретной группы G или формуле (36) в случае непрерывной группы G, где λ_0 — нормированная мера Хаара на G.

III. *Калибровочная G-модель* (модель с локальной G-симметрией). В этом случае конфигурации $g^\Lambda = \{g_\tau,\ \tau \in \Lambda\}$ определены на ориентированных ребрах $\tau = (t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in Z^\nu$, $\rho(t_1, t_2) = 1$, решетки Z^ν, а Λ — конечное множество ребер, и принимают значения по-прежнему в группе G. При этом $g_\tau = (g_{-\tau})^{-1}$, где $-\tau = (t_2, t_1)$, обозначает ребро, отличающееся от τ направлением. Энергия конфигурации g^Λ задается в виде

$$U_\Lambda^{\text{gauge}}(g^\Lambda) = \sum_p \psi(g_p), \tag{37}$$

где суммирование происходит по всем двумерным (неориентированным) граням p решетки Z^ν, граничные ребра которых $\partial p = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ принадлежат Λ, а

$$g_p = g_{\tau_1} g_{\tau_2} g_{\tau_3} g_{\tau_4}.$$

При этом нумерация ребер τ_i и их ориентация выбрана так, что они образуют обход p в некотором направлении. Функция ψ в (37) — некоторая функция на группе G такая, что

$$\psi(g) = \psi(g^{-1}), \quad \psi(g g_0 g^{-1}) = \psi(g_0). \tag{38}$$

При этих условиях значение $\psi(g_p)$ не зависит от направления и начала обхода p. Чаще всего функцию ψ выбирают равной

$$\psi(g) = \operatorname{Re} \chi_\alpha(g),$$

где χ_α — характер некоторого неприводимого унитарного представления группы G. Гиббсовское распределение для этой модели вводится аналогично предыдущим случаям.

IV. $(P(\varphi))_\nu$-*модель.* Конфигурация $x^\Lambda = \{x_t,\ t \in \Lambda\}$, $\Lambda \subseteq Z^\nu$, принимает произвольные вещественные значения, а энергия $U_\Lambda(x^\Lambda)$ задается в виде

$$U_\Lambda(x^\Lambda) = \sum_{\substack{(t,t') \in \Lambda \\ \rho(t,t')=1}} (x_t - x_{t'})^2 + \sum_{t \in \Lambda} (P(x_t) + m x_t^2),$$

где $m \geqslant 0$, а $P(\cdot)$ — некоторый полином четной степени с положительным старшим коэффициентом. Плотность гиббсовского распределения p_Λ в пространстве конфигураций $\Omega_\Lambda = R^{|\Lambda|}$ относительно лебеговой меры $(dx)^{|\Lambda|}$ в $R^{|\Lambda|}$ задается формулой, аналогичной (36). При этом легко показать, что нормирующий множитель $Z_\Lambda < \infty$.

Ограничимся этим перечнем. Какие же вопросы возникают в теории гиббсовских полей в связи с этими (и любыми другими) моделями?

1. Первый вопрос — существует ли предельное гиббсовское поле (т. е. предельное распределение вероятностей для бесконечных конфигураций)?

2. Второй вопрос — единственно ли оно?

Этот вопрос очень интересен, поскольку наличие нескольких предельных распределений (фаз) связано с так называемыми фазовыми переходами вещества.

3. В случае, когда взаимодействие зависит от одного или нескольких параметров, спрашивается: будут ли различные характеристики предельного поля (корреляционные функции, семиинварианты и т. д.) аналитичны относительно этих параметров (или хотя бы непрерывны или дифференцируемы)? При этом появление особенностей у корреляционных функций относительно этих параметров (разрывы, разрывы их производных и т. д.) также указывает на фазовые переходы.

4. Далее возникают вопросы об эргодических свойствах предельных гиббсовских полей: перемешивание, убывание корреляций, оценки семиинвариантов, предельные распределения для сумматорных величин и т. д.

Таков список основных тем из теории гиббсовских полей, затронутых в этой книге.

Перейдем теперь к систематическому изложению этой теории.

§ 1. Гиббсовские перестройки

1. Случайные поля. В этой книге будут изучаться следующие классы случайных полей:

(1) *Случайные поля на счетном множестве T со значениями в метрическом (полном и сепарабельном) пространстве S.* Вероятностным пространством (Ω, Σ, μ) в этом случае служит совокупность $S^T = \Omega$ функций (называемых также *конфигурациями*) $x = \{x_t, t \in T\}$, определенных на T со значениями в S (S называют часто пространством значений «спина»). В пространстве S^T вводится (метризуемая) тихоновская (см. [16]) топология.

Мы будем рассматривать вероятностные распределения μ, определенные на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(S^T) = \Sigma$ пространства S^T. Набор возникающих при этом случайных величин x_t, $t \in T$, т. е. значения случайной конфигурации x в точках $t \in T$, образует *случайное поле*.

Наиболее простой пример такого поля — поле с независимыми одинаково распределенными значениями. При этом мера μ на $\mathfrak{B}(S^T)$ определяется как произведение счетного числа одинаковых экземпляров некоторой вероятностной меры λ_0 на пространстве S.

(2) *Точечные случайные поля в сепарабельном метрическом пространстве Q со значениями в пространстве S.* В качестве вероятностного пространства в этом случае выбирается совокупность Ω всех локально конечных подмножеств $x \subseteq Q$. Подмножество x (не более чем счетное) называется *локально конечным*, если в каждом ограниченном множестве $\Lambda \subseteq Q$ содержится лишь конечное число точек из x. Ниже будет введена метризуемая топология в Ω. Всякая вероятностная мера, определенная на борелевской (относительно этой топологии) σ-алгебре $\mathfrak{B}(\Omega)$, задает по определению *случайное точечное поле* в Q (иногда мы будем говорить: чисто точечное поле, подчеркивая его отличие от вводимого ниже маркированного точечного поля).

Пусть теперь задано метрическое пространство S, которое мы будем называть пространством «зарядов» (или «марок»). Обозначим через Ω^S пространство пар $\{x, s_x\}$, где $x \in \Omega$, а s_x — функция на x со значениями в S. Такие пары будем называть *конфигурациями*. В пространстве Ω^S — так же как и в Ω — можно ввести метризуемую топологию. Всякая вероятностная мера на $\mathfrak{B}(\Omega^S)$ определяет *маркированное* случайное точечное поле в Q со значениями в пространстве зарядов S.

В теории гиббсовских полей рассматриваются также:

(3) *Обычные или обобщенные поля в пространстве R^ν.* Вероятностное пространство в этом случае — какое-нибудь линейное топологическое (локально выпуклое) пространство Ω функций — обычных или обобщенных — определенных на R^ν. Как и раньше, случайное поле определяется заданием вероятностной меры на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(\Omega)$.

Подчеркнем, что в дальнейшем, говоря о том или ином случайном поле, мы всегда подразумеваем вероятностную меру в пространстве его конфигураций.

2. Метод гиббсовских перестроек. Гиббсовская перестройка меры (случайного поля) является важным способом построения новых мер по заданной исходной мере μ_0 (или по семейству мер). Мы опишем сначала общую схему введения гиббсовских перестроек.

К о н е ч н а я г и б б с о в с к а я п е р е с т р о й к а. Пусть (Ω, Σ, μ_0) — некоторое измеримое пространство с конечной или σ-конечной мерой μ_0 (называемой обычно «*свободной*» мерой) и $U(x)$, $x \in \Omega$,— вещественная функция на Ω (принимающая, быть может, значение $+\infty$), называемая часто *энергией взаимодействия* (или *гамильтонианом*).

Меру μ с плотностью

$$\frac{d\mu}{d\mu_0}(x) = Z^{-1}\exp\{-U(x)\} \tag{1}$$

относительно меры μ_0 будем называть *гиббсовской перестройкой* меры μ_0 с помощью взаимодействия U.

При этом всегда предполагается, что нормирующий множитель Z (он называется *статистической суммой*) удовлетворяет *условию устойчивости*

$$Z = \int_\Omega \exp\{-U(x)\}\, d\mu_0(x) \neq 0, \infty. \tag{2}$$

С помощью конечной гиббсовской перестройки получаются меры, абсолютно непрерывные относительно меры μ_0. Более интересный класс мер, уже сингулярных относительно исходной меры μ_0, возникает при переходе к слабому пределу конечных гиббсовских перестроек.

3. Слабая сходимость мер. Пусть Ω — топологическое пространство, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Omega)$ — его борелевская σ-алгебра и $\Sigma \subseteq \mathfrak{B}$ — некоторая ее σ-подалгебра.

Определение 1. Пусть задано некоторое направленное семейство индексов $\mathscr{F} = \{\Lambda\}$. Скажем, что мера μ, определенная на σ-алгебре $\Sigma \subseteq \mathfrak{B}$, является *слабым пределом* последовательности мер μ_Λ, $\Lambda \in \mathscr{F}$, определенных на Σ, если для любой ограниченной непрерывной Σ-измеримой функции f, заданной на Ω,

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu_\Lambda \to \int_\Omega f(x)\, d\mu. \tag{3}$$

Можно рассмотреть более общую ситуацию. Пусть задано полное семейство $\{\Sigma_\Lambda, \Lambda \in \mathscr{F}\}$, $\Sigma_{\Lambda_1} \subseteq \Sigma_{\Lambda_2}$, $\Lambda_1 < \Lambda_2$, σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{B}$ (т. е. такое, что $\mathfrak{B}$ совпадает с наименьшей σ-алгеброй, содержащей алгебру множеств $\mathfrak{A} = \bigcup_{\Lambda \in \mathscr{F}} \Sigma_\Lambda$); σ-алгебры Σ_Λ будем называть *локальными* σ-алгебрами, а функцию f, определенную на Ω и измеримую относительно какой-нибудь из локальных алгебр,— *локальной* функцией (функцию f, измеримую относительно σ-алгебры Σ_A, $A \in \mathscr{F}$, часто будем обозначать через f_A).

Конечно-аддитивную меру μ, определенную на алгебре $\mathfrak{A}$ и такую, что ее сужение $\mu|_{\Sigma_\Lambda}$ на любую σ-алгебру Σ_Λ является σ-аддитивной мерой на Σ_Λ, называют *предмерой*. В случае, когда Ω — полное сепарабельное метрическое пространство и предмера μ — вероятностная ($\mu(A) \geqslant 0$, $A \in \mathfrak{A}$, $\mu(\Omega) = 1$), она продолжается до σ-аддитивной (вероятностной) меры, определенной на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ (теорема Колмогорова; см. [51]).

Следующее определение обобщает определение 1.

Определение 2. Пусть на каждой σ-алгебре Σ_Λ определена конечная или σ-конечная мера μ_Λ. Предмеру μ на $\mathfrak{A}$ будем называть *слабым локальным пределом* мер μ_Λ, если для любой ограниченной непрерывной локальной функции f, определенной на Ω,

$$\lim_\Lambda \int_\Omega f(x)\, d\mu_\Lambda = \int_\Omega f(x)\, d\mu. \tag{4}$$

Иными словами, предмера (или ее продолжение до меры на σ-алгебру $\mathfrak{B}$) является слабым локальным пределом мер $\{\mu_\Lambda, \Lambda \in \mathscr{F}\}$, если для любого $\Lambda_0 \in \mathscr{F}$ сужения $\mu_\Lambda|_{\Sigma_{\Lambda_0}} = \mu_\Lambda^{\Lambda_0}$, $\Lambda_0 < \Lambda$, $\Lambda \in \mathscr{F}$, мер μ_Λ на σ-алгебру Σ_{Λ_0} слабо сходятся к мере $\mu|_{\Sigma_{\Lambda_0}} = \mu_{\Lambda_0}$.

В случае, когда пространство $\Omega = S^T$ (T — счетное множество, S — метрическое пространство; см. п. 1), а индекс Λ пробегает конечные подмножества T и $\Sigma_\Lambda = \varphi_\Lambda^{-1}(\mathfrak{B}(S^\Lambda))$, где φ_Λ: $S^T \to S^\Lambda$ — отображение сужения конфигураций (см. с. 30), сходимость (4) называют *слабой сходимостью конечномерных распределений*, если μ_Λ — вероятностные меры.

Связь между определениями 1 и 2 дает

Утверждение 1. *Пусть семейство σ-алгебр $\{\Sigma_\Lambda, \Lambda \in \mathscr{F}\}$ таково, что множество $C_0(\Omega)$ локальных непрерывных ограниченных функций всюду плотно в пространстве $C(\Omega)$ всех непрерывных ограниченных функций, определенных на Ω (в равномерной метрике в $C(\Omega)$). Тогда для того, чтобы вероятностная мера μ на $\mathfrak{B}(\Omega)$ являлась слабым локальным пределом вероятностных мер $\{\mu_\Lambda\}$ (определенных каждая на σ-алгебре Σ_Λ), необходимо и достаточно, чтобы произвольные их продолжения $\tilde{\mu}_\Lambda$ до вероятностных мер на σ-алгебре $\mathfrak{B}(\Omega)$ слабо сходились к μ.*

Доказательство очевидно.

4. Предельная гиббсовская перестройка. Пусть задано полное направленное семейство $\{\Sigma_\Lambda, \Lambda \in \mathscr{F}\}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{B}(\Omega)$ и для каждого Λ определены свободная мера μ_Λ^0 и гамильтониан U_Λ так, что выполнено условие устойчивости (2). Предмеру μ на алгебре $\mathfrak{A} = \cup\Sigma_\Lambda$ (или ее σ-аддитивное продолжение на σ-алгебру $\mathfrak{B}(\Omega)$) назовем *предельной гиббсовской* мерой (или предельной гиббсовской перестройкой), если она является слабым локальным пределом гиббсовских перестроек μ_Λ мер μ_Λ^0 (с помощью взаимодействий U_Λ).

Отметим, что теория гиббсовских мер становится содержательной лишь при специальном выборе σ-алгебр Σ_Λ, мер μ_Λ^0 и гамильтонианов U_Λ. Мы опишем сейчас, как выбираются Σ_Λ, μ_Λ^0 и U_Λ применительно к трем перечисленным выше типам случайных полей.

(1) *Гиббсовские перестройки полей на счетном множестве T.* Для любого конечного $\Lambda \subset T$ введем множество конфигураций $S^\Lambda = \{x^\Lambda = (x_t,\ t \in \Lambda)\}$, определенных на Λ, снабженное тихоновской топологией и борелевской σ-алгеброй $\mathfrak{B}(S^\Lambda)$. Отображение ограничения $\varphi_\Lambda\colon x \mapsto x^\Lambda = x|_\Lambda$ определяет σ-алгебру $\Sigma_\Lambda = \varphi_\Lambda^{-1}(\mathfrak{B}(S^\Lambda)) \subset \mathfrak{B}(S^T)$, которую мы часто будем отождествлять с $\mathfrak{B}(S^\Lambda)$. Очевидно, что $\{\Sigma_\Lambda,\ \Lambda \subset T\}$ — полное семейство σ-подалгебр $\mathfrak{B}(S^T)$.

Замечание 1. Совокупность $C_0(S^T) \subset C(S^T)$ локальных ограниченных непрерывных функций на S^T, как это следует из теоремы Стоуна (см. [16]), всюду плотна в $C(S^T)$, и, таким образом, в описываемом случае применимо утверждение 1.

Гамильтонианы U_Λ задаются обычно с помощью *потенциала* $\{\Phi_A,\ A \dot\subset T,\ |A| < \infty\}$, т. е. семейства функций Φ_A на Ω, измеримых каждая относительно σ-алгебры Σ_A (т. е. Φ_A можно рассматривать как функцию, определенную на пространстве S^A). Для любого конечного A положим

$$U_\Lambda = \sum_{A \subseteq \Lambda} \Phi_A. \tag{5}$$

Часто вместо явного указания потенциала вводят формальный гамильтониан (формальную сумму)

$$U = \sum_A \Phi_A. \tag{6}$$

Замечание 2. Во многих случаях свободные меры μ_Λ^0 являются сужениями некоторой вероятностной меры μ_0, определенной на S^T, на σ-алгебры $\Sigma_\Lambda \subset \mathfrak{B}$ соответственно. В этих случаях вместо гиббсовской перестройки μ_Λ, определенной формулой (1), рассматривают меру $\hat\mu_\Lambda$ на σ-алгебре $\mathfrak{B}(S^T)$, задаваемую плотностью

$$\frac{d\hat\mu_\Lambda}{d\mu_0}(x) = Z_\Lambda^{-1} \exp\{-U_\Lambda(x)\}. \tag{7}$$

Мера $\hat\mu_\Lambda$ является «естественным» продолжением меры μ_Λ на всю σ-алгебру $\mathfrak{B}(S^T)$. Эту меру также называют конечной (т. е. заданной в конечном объеме) гиббсовской перестройкой меры μ_0.

В силу замечания 1 предельная гиббсовская мера μ на пространстве S^T (т. е. слабый локальный предел мер μ_Λ) является слабым пределом мер $\hat\mu_\Lambda$, $\Lambda \nearrow T$.

(2) *Гиббсовские перестройки точечных полей.* Пусть $\Lambda \Subset Q$ — область в Q (см. (2) в п. 1), $\Omega^s(\Lambda, n) \subset \subset (\Lambda \times S)^n/\Pi_n$ — совокупность последовательностей пар

$$\{(q_1, s_1), \ldots, (q_n, s_n)\}, \quad q_i \in Q, \quad q_i \neq q_j, \quad i \neq j, \quad s_i \in S, \tag{7'}$$

факторизованная по группе перестановок Π_n n элементов (т. е. две последовательности (7′) считаются эквивалентными, если одна из другой получается какой-нибудь перестановкой). Таким образом, на $\Omega^s(\Lambda, n)$ определяется метризуемая топология. Обозначим $\Omega^S(\Lambda) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega^S(\Lambda, n)$, $\Omega^S(\Lambda, 0) = \varnothing$ и введем в $\Omega^s(\Lambda)$ топологию объединения пространств. С помощью отображений сужения

$$\varphi_\Lambda\colon (x, s_x) \mapsto (x \cap \Lambda, s_x|_{x\cap\Lambda}) \in \Omega^S(\Lambda), \tag{7''}$$

где Λ произвольная ограниченная область в Q, в Ω^s вводится топология, являющаяся слабейшей топологией, относительно которой все отображения φ_Λ непрерывны. Определим для каждой ограниченной области $\Lambda \subset Q$ σ-подалгебру борелевской σ-алгебры $\mathfrak{B}(\Omega^s)$:

$$\Sigma_\Lambda = \varphi_\Lambda^{-1}[\mathfrak{B}(\Omega^S(\Lambda))].$$

Семейство локальных σ-алгебр Σ_Λ порождает всю борелевскую σ-алгебру $\mathfrak{B}(\Omega^s)$, и совокупность $C_0(\Omega^s)$ локальных ограниченных непрерывных функций всюду плотна в $C(\Omega^s)$ (по теореме Стоуна; см. замечание 1).

Пуассоновское поле. В качестве свободной меры μ_0 на Ω^s обычно выбирают распределение так называемого *маркированного пуассоновского* поля в Q. Оно определяется следующим образом. Пусть на пространстве Q задана положительная σ-конечная (или конечная) мера $d\lambda_0$ такая, что $\lambda_0(\Lambda) < \infty$ для любой ограниченной области Λ, а на пространстве S задана вероятностная мера ds. Мера $(d\lambda_0 \times \times ds)^n$, определенная на пространстве $(Q \times S)^n$, индуцирует на пространстве $\Omega^S(Q, n) \equiv \Omega^S_n$ фактор-меру

$$d\nu_n = (d\lambda_0 \times ds)^n/n!, \quad n > 0, \quad \nu_0(\varnothing) = 1. \tag{8}$$

Введем на пространстве $\Omega^S_{\text{фин}} = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} \Omega^S_n$ конечных конфигураций в Q меру ν, которая совпадает на каждом множестве Ω^S_n с мерой ν_n, $n = 0, 1, \ldots$

Пусть теперь $\Lambda \subset Q$ — ограниченная область и μ^0_Λ — вероятностная мера на $\Omega^S(\Lambda)$, равная

$$\mu^0_\Lambda = e^{-\lambda_0(\Lambda)} \cdot \nu \tag{9}$$

(поскольку $\Omega^S(\Lambda) \subseteq \Omega^S_{\text{фин}}$, мера ν определена и на пространстве $\Omega^S(\Lambda)$). Заметим, что $\mu^0_\Lambda(\Omega^S(\Lambda, n))$, т. е. вероятность того, что в Λ находится ровно n точек маркированного поля (с произвольными значениями зарядов), равна $\lambda^n_0(\Lambda)\, e^{-\lambda_0(\Lambda)}/n!$. Каждую меру μ^0_Λ можно считать определенной на σ-алгебре Σ_Λ. Далее нетрудно проверить, что существует единственная мера μ^0 на пространстве Ω^S, сужения которой на σ-подалгебры Σ_Λ совпадают с мерами μ^0_Λ. Порождаемое этой мерой точечное маркированное поле в Q называется *пуассоновским полем с независимыми зарядами.*

Любую функцию $\Phi[(x, s_x)]$, определенную на множестве $\Omega^S_{\text{фин}}$ конечных конфигураций (x, s_x), будем называть *потенциалом.* Для каждой ограниченной области $\Lambda \subset Q$ положим

$$U_\Lambda[(x, s_x)] = \sum_{y \subseteq x \cap \Lambda} \Phi[(y, s_y)],$$

где $s_y = s_x|_y$ — сужение функции s_x на $y \subseteq x$.

Гиббсовскую перестройку μ_Λ пуассоновского поля μ^0 определим плотностью

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu^0} = Z^{-1}_\Lambda \exp\{-U_\Lambda\}, \quad Z_\Lambda = \int_{\Omega^S} \exp\{-U_\Lambda\}\, d\mu^0. \tag{10}$$

Чаще всего рассматривают случай чисто точечного поля в пространстве R^ν. При этом пуассоновская мера μ^0 определяется с помощью лебеговой меры $d\lambda_0 = d^\nu x$ в R^ν, а взаимодействия U_Λ — с помощью двухточечного (или двухчастичного) трансляционно-инвариантного потенциала Φ:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \hat{\mu}, & |x| = 1, \\ \beta\varphi(q_1 - q_2), & x = (q_1, q_2), \\ 0, & |x| > 2; \end{cases} \tag{11}$$

здесь $\hat{\mu} \in R^1$ (так называемый химический потенциал), φ — четная функция, определенная на пространстве R^ν, а $\beta > 0$.

Мы приведем здесь одно условие устойчивости Z_Λ для случая двухчастичного потенциала вида (11).

Теорема 2. *Пусть φ — действительная четная полунепрерывная сверху функция на R^ν. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) *неравенство*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi(q_i - q_j) \geqslant 0 \tag{12}$$

выполняется для всех n и $q_i \in R^\nu$, $i = 1, \ldots, n$;

(б) *существует $B \geqslant 0$ такое, что*

$$U_\Lambda(x) \geqslant -B|x| \tag{13}$$

для всех $x \in \Omega_{\text{фин}}$ и $\Lambda \subset R^\nu$;

(в) *статистические суммы Z_Λ конечны для всех ограниченных областей Λ.*

Доказательство см. в [60]. Из условия (а), например, вытекает устойчивость Z_Λ в случае положительно определенной функции $\varphi(q)$, $q \in R^\nu$.

(3) *Гиббсовские перестройки мер в пространствах функций.* Пусть Ω — некоторое локально выпуклое пространство функций $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, $t \in R^\nu$, определенных на пространстве R^ν, со значениями в R^n.

Предположим, что топология в Ω такова, что функционалы вида $F_{t_0}(x) = x_k(t_0)$, $t_0 \in R^\nu$, $k = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны относительно нее (т. е. сходимость последовательности функций в Ω влечет за собой их поточечную сходимость). Для каждого ограниченного открытого или замкнутого множества $\Lambda \subset R^\nu$ определим σ-алгебру Σ_Λ как наименьшую σ-подалгебру борелевской σ-алгебры $\mathfrak{B}(\Omega)$, относительно которой измеримы все функционалы $\{F_{t_0},$

$t_0 \in \Lambda\}$. Допустим, что семейство σ-алгебр Σ_Λ является порождающим для σ-алгебры $\mathfrak{B}(\Omega)$.

Предположим, что на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(\Omega)$ определена вероятностная мера μ_0 (свободная мера) и каждому ограниченному открытому или замкнутому множеству $\Lambda \subset R^\nu$ поставлен в соответствие функционал $U_\Lambda(x)$, определенный на Ω так, что

1) $U_\Lambda = 0$, если $|\Lambda| = 0$, где $|\Lambda|$ — лебегова мера Λ;
2) $U_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} = U_{\Lambda_1} + U_{\Lambda_2}$, если $|\Lambda_1 \cap \Lambda_2| = 0$;
3) U_Λ измерим относительно Σ_Λ.

Семейство функционалов $\{U_\Lambda\}$, удовлетворяющее условиям 1), 2), 3), называют *локальным аддитивным* функционалом.

Предположим, что для каждой ограниченной области $\Lambda \subset R^\nu$ выполнено условие устойчивости

$$0 < \int_\Omega \exp\{-U_\Lambda(x)\} d\mu_0 < \infty, \tag{14}$$

и определим гиббсовскую перестройку μ_Λ меры μ_0 с помощью формулы (7). Далее, как и выше, определяется предельная гиббсовская перестройка меры μ_0.

Вот типичный пример локального аддитивного функционала (в случае, когда пространство Ω содержит лишь гладкие локально ограниченные функции $x(t)$):

$$U_\Lambda(x) = \int_\Lambda \Phi\left[x_i(t), \frac{\partial x_i}{\partial t^{(j)}}\right] d^\nu t, \quad t = (t^{(1)}, \ldots, t^{(\nu)}),$$

где Φ — ограниченная снизу вещественная функция от $n(\nu+1)$ переменных.

Замечание 1. В некоторых случаях можно определить локальные аддитивные функционалы и на пространстве обобщенных функций (скажем, на пространстве Шварца $\mathscr{D}'(R^\nu)$) так, чтобы они удовлетворяли условию устойчивости (14) (μ_0 — вероятностная мера на $\mathscr{D}'(R^\nu)$), и определить с их помощью гиббсовские перестройки μ_ν и предельную гиббсовскую перестройку μ.

Замечание 2. Мы так подробно рассмотрели гиббсовские перестройки мер в функциональных пространствах с помощью аддитивных локальных функционалов только потому, что этот случай охватывает большинство известных примеров таких перестроек. Разумеется, можно рассматривать и нелокальные функционалы U_Λ, например функционалы вида

$$U_\Lambda(x) = \int_\Lambda \int_\Lambda \Phi[x(t), x(t')]\, d^\nu t d^\nu t',$$

где Φ — вещественная ограниченная функция от $2n$ переменных.

Дискретизация. При применении теории кластерных разложений к функциональным полям используется метод *дискретизации*, т. е. сведения к полю на счетном множестве. А именно, пространство R^ν разбивается на конгруэнтные кубы и рассматривается поле на Z^ν (центры кубов) со значениями в пространстве спинов S, совпадающем с некоторым пространством функций, определенных на кубе. При этом взаимодействие переписывается в терминах введенного поля на Z^ν со значениями в S, а свободная мера исходного поля порождает меру на S^{Z^ν}. В этой книге мы не изучаем функциональных полей, однако с помощью метода дискретизации многие утверждения книги непосредственно и очевидным образом переносятся на функциональные поля. Отметим, что методов кластерных разложений, обходящихся без дискретизации, в настоящее время не существует (кроме разложения в ряд по семиинвариантам; см. § 6.IV).

5. Слабая компактность мер. Понятие кластерного разложения. Пусть $\mathscr{A}$ — некоторая совокупность мер, определенных на всей борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}(\Omega)$ топологического простанства Ω или на ее σ-подалгебре $\Sigma \subset \mathfrak{B}(\Omega)$. Всюду здесь под слабой компактностью множества $\mathscr{A}$ понимается секвенциальная компактность: в любом бесконечном подмножестве $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ существует слабо сходящаяся подпоследовательность $\mu_n \to \mu$, $n \to \infty$, $\mu_n \in \mathscr{B}$.

Лемма 3. *В случае, когда Ω — полное сепарабельное метрическое пространство и $\Sigma = \mathfrak{B}(\Omega)$, каждое из приводимых ниже условий достаточно для слабой компактности множества $\mathscr{A}$.*

1) *Все меры $\mu \in \mathscr{A}$ — вероятностные, и существует компактная функция $h > 0$, определенная на Ω, такая, что для любой меры $\mu \in \mathscr{A}$*

$$\int_\Omega h(x)\, d\mu < C,$$

где C не зависит от μ. Функция h на Ω называется ком-

пактной, если множество $\{x \in \Omega\colon h(x) < a\}$ компактно при любом $a > 0$.

2) *Существуют положительная мера μ_0 на $\mathfrak{B}(\Omega)$ и суммируемая по ней функция $\varphi(x) \geqslant 0$ такие, что любая мера $\mu \in \mathcal{A}$ абсолютно непрерывна относительно μ_0 и производная*

$$\left|\frac{d\mu}{d\mu_0}(x)\right| < \varphi(x), \quad x \in \Omega.$$

Утверждение 1) является простым следствием известного критерия слабой компактности, принадлежащего Прохорову (см. [6]). Вывод утверждения 2) можно найти в книге [16].

Определение 3. Пусть $\{\mu_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{F}\}$ — семейство мер, определенных каждая на σ-алгебре Σ_Λ из полного семейства $\{\Sigma_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{F}\}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{B}(\Omega)$ (здесь, как и выше, $\mathcal{F}$ — направленное семейство индексов). Мы скажем, что семейство $\{\mu_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{F}\}$ *слабо локально компактно*, если для любого $\Lambda_0 \in \mathcal{F}$ множество сужений $\left\{\mu_\Lambda^{\Lambda_0},\ \Lambda_0 < \Lambda\right\}$ мер $\{\mu_\Lambda\}$ на σ-алгебру Σ_{Λ_0} слабо компактно.

Лемма 4. *Пусть семейство мер $\{\mu_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{F}\}$ слабо локально компактно. Тогда в любой возрастающей последовательности $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \ldots < \Lambda_n < \ldots$ индексов такой, что последовательность σ-алгебр Σ_{Λ_n}, $n = 1, 2, \ldots$, полна, существуют подпоследовательность, обладающая тем же свойством, и предмера μ на $\mathfrak{A} = \cup\, \Sigma_\Lambda$ такие, что*

$$\mu = \lim_{k\to\infty} \mu_{i_k} \qquad (\mu_n = \mu_{\Lambda_n}). \tag{15}$$

Доказательство очевидно.

Введем теперь понятие кластерного разложения мер применительно к случаю полей на счетном множестве T (со значениями в пространстве S).

Пусть $G \subseteq C_0(S^T)$ — некоторое множество локальных непрерывных ограниченных функций, линейная оболочка которого всюду плотна в пространстве $C(S^T)$ всех непрерывных ограниченных функций. Пусть среднее $\langle F\rangle_\mu$ любой функции $F \in G$ по мере (или предмере) μ представлено в виде

$$\langle F\rangle_\mu = \sum_{R\subset T,\, |R|<\infty} b_R(F), \tag{16}$$

где $b_R(F)$ — некоторые величины, зависящие от F и конечных подмножеств $R \subset T$. Всякое такое представление называется обычно *кластерным разложением* меры μ. Разумеется, ценность этого разложения определяется тем, насколько «конструктивно» задаются величины $b_R(F)$. В дальнейшем мы будем каждый раз явно строить разложения (16), и утверждения о том, что та или иная мера допускает кластерное разложение, следует понимать именно в этом смысле.

Определение 4. Пусть $\{\mu_\Lambda,\ \Lambda \subset T\}$ — семейство мер, определенных каждая на σ-алгебре $\Sigma_\Lambda = \mathfrak{B}(S^\Lambda)$ ($\Lambda \subset T$, $|\Lambda| < \infty$). Мы скажем, что семейство $\{\mu_\Lambda\}$ допускает *кластерное разложение*, если

1) оно слабо локально компактно;

2) существует множество $G \subseteq C_0(S^T)$ локальных непрерывных ограниченных функций, линейная оболочка которого всюду плотна в пространстве $C(S^T)$, такое, что для любой функции $F \in G$ ее среднее $\langle F\rangle_{\mu_\Lambda} \equiv \langle F\rangle_\Lambda$ допускает разложение

$$\langle F\rangle_\Lambda = \sum_{R\subseteq\Lambda} b_R^{(\Lambda)}(F), \tag{17}$$

причем величины $b_R^{(\Lambda)}(F)$ удовлетворяют условиям:

а) существует мажоранта

$$\left|b_R^{(\Lambda)}(F)\right| < C_R(F), \qquad \sum_{R\subset T} C_R(F) < \infty; \tag{18}$$

б) существуют пределы

$$\lim_{\Lambda\nearrow T} b_R^{(\Lambda)}(F) = b_R(F). \tag{19}$$

Лемма 5. *Пусть семейство $\{\mu_\Lambda\}$ мер допускает кластерное разложение. Тогда существует слабый локальный предел*

$$\mu = \lim_{\Lambda\nearrow T} \mu_\Lambda \tag{20}$$

и μ допускает кластерное разложение.

В случае, когда все меры $\{\mu_\Lambda\}$ — вероятностные, предмера μ — также вероятностная и, следовательно, может быть продолжена до вероятностной меры на σ-алгебре $\mathfrak{B}(\Omega)$.

Доказательство. Из условия 1) и леммы 4 вытекает существование хотя бы одной слабой предельной точки у множества $\{\mu_\Lambda\}$. Из условия 2) следует ее единственность и (20). Кластерное разложение (16) для предельной меры очевидно.

Кластерное разложение мер в случае точечных полей определяется в § 6.III.

§ 2. Гиббсовские перестройки с граничными условиями и определение гиббсовских полей по условным распределениям

Изложенное выше определение предельных гиббсовских перестроек не охватывает всех интересных случаев такого рода полей, и мы дадим здесь более общее определение предельного гиббсовского поля. Ограничимся здесь лишь случаем полей на счетном множестве T (на котором задана некоторая метрика ρ) со значениями в (метрическом) пространстве S. Далее мы предположим, что в S определена конечная или σ-конечная мера λ_0, и для каждого конечного множества $\Lambda \subset T$ в качестве свободной меры μ_Λ^0 на пространстве S^Λ выберем меру $\mu_\Lambda^0 = \lambda_0^\Lambda$ — произведение $|\Lambda|$ экземпляров меры λ_0.

Наконец предположим, что потенциал $\{\Phi_A,\ A \subset T,\ |A| < \infty\}$ является финитным: $\Phi_A \equiv 0$, если $\operatorname{diam} A \equiv \max\limits_{t_1, t_2 \in A} \rho(t_1 t_2) > d$ при некоторой константе $d > 0$, и порождаемый им гамильтониан $U_\Lambda = \sum\limits_{A \subseteq \Lambda} \Phi_A$ при любом конечном $\Lambda \subset T$ удовлетворяет условию устойчивости

$$0 < \int\limits_{S^\Lambda} \exp\{-U_\Lambda(x)\}\, d\lambda_0^\Lambda < \infty.$$

Пусть μ_Λ — гиббсовская перестройка меры λ_0^Λ, и для любого $\Lambda_0 \subset \Lambda$ обозначим через $\mu_\Lambda^{\Lambda_0}\left(\cdot/\bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}\right)$ условное распределение вероятностей на множестве конфигураций $x^{\Lambda_0} \in S^{\Lambda_0}$ при условии, что фиксирована конфигурация $\bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0} \in S^{\Lambda \setminus \Lambda_0}$ в множестве $\Lambda \setminus \Lambda_0$. Элементарный подсчет (см. § 0) показывает, что плотность меры $\mu_\Lambda^{\Lambda_0}\left(\cdot/\bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}\right)$ относительно меры $\lambda_0^{\Lambda_0}$ равна

$$\frac{d\mu_\Lambda^{\Lambda_0}\left(x^{\Lambda_0}/\bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}\right)}{d\lambda_0^{\Lambda_0}} = Z_{\Lambda_0}^{-1}\left(\bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}\right) \exp\left\{-U_{\Lambda_0}\left(x^{\Lambda_0}/\bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}\right)\right\}, \tag{1}$$

где

$$Z_{\Lambda_0}\left(\bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}\right) = \int\limits_{S^{\Lambda_0}} \exp\left\{-U_{\Lambda_0}\left(x^{\Lambda_0}/\bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}\right)\right\} d\lambda_0^{\Lambda_0},$$

$$U_{\Lambda_0}\left(x^{\Lambda_0}/\bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}\right) = U_{\Lambda_0}\left(x^{\Lambda_0}\right) + \sum_{\substack{A:\ A \cap \Lambda_0 \neq \varnothing \\ A \cap (\Lambda \setminus \Lambda_0) \neq \varnothing}} \Phi_A\left(x^{\Lambda_0} \cup \bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}\right). \tag{1'}$$

Здесь $x^{\Lambda_0} \cup \bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}$ означает конфигурацию в Λ, сужения которой на Λ_0 и $\Lambda \setminus \Lambda_0$ равны x^{Λ_0} и $\bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}$ соответственно. Второе слагаемое в (1′) называется энергией взаимодействия с внешней (граничной) конфигурацией («граничный член»).

Заметим, что при фиксированном Λ_0 и достаточно большом $\Lambda \supset \Lambda_0$ (так что $\rho(\Lambda_0, T \setminus \Lambda) > d$) энергия $U_{\Lambda_0}\left(x^{\Lambda_0}/\bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}\right)$ зависит не от всей конфигурации $\bar{x}^{\Lambda \setminus \Lambda_0}$, а лишь от ее сужения $\bar{x}^{\partial_d \Lambda_0}$ на d-окрестность Λ_0: $\partial_d \Lambda_0 = \{t \in T \setminus \Lambda_0:\ \rho(t, \Lambda_0) \leqslant d\}$.

Обозначим эту энергию через

$$U_{\Lambda_0}\left(x^{\Lambda_0}/\bar{x}^{\partial_d \Lambda_0}\right), \tag{1''}$$

и пусть $\mu_{\bar{x}^{\partial_d \Lambda_0}}^{\Lambda_0}$ означает гиббсовскую перестройку меры $\lambda_0^{\Lambda_0}$ с помощью гамильтониана (1″). Мера $\mu_{\bar{x}^{\partial_d \Lambda_0}}^{\Lambda_0}$ называется *гиббсовским распределением в Λ_0 с граничной конфигурацией $\bar{x}^{\partial_d \Lambda_0}$* в окрестности $\partial_d \Lambda_0$.

Формула (1) подсказывает следующее

Определение. Вероятностную меру μ на пространстве S^T назовем *гиббсовским распределением в T* (для заданного потенциала $\{\Phi_A\}$), если для любого конечного $\Lambda \subset T$ и любой конфигурации $\bar{x} \in S^{T \setminus \Lambda}$ условное распределение $\mu(\cdot/x^{T \setminus \Lambda} = \bar{x})$ на множестве S^Λ при условии, что внешняя конфигурация $x^{T \setminus \Lambda}$ фиксирована и равна $\bar{x}$, совпадает с мерой $\mu_{\bar{x}^{\partial_d \Lambda}}^{\Lambda}$:

$$\mu\left(\cdot/x^{T \setminus \Lambda} = \bar{x}\right) = \mu_{\bar{x}^{\partial_d \Lambda}}^{\Lambda}, \tag{2}$$

где $\bar{x}^{\partial_d \Lambda}$ — сужение $\bar{x}$ на $\partial_d \Lambda$.

Это определение принадлежит Добрушину, Ланфорду и Рюэллю (ДЛР), а выражающее его уравнение (2) называют иногда *ДЛР-уравнением*.

Из определения (2) вытекает, в частности, так называемое *d-марковское свойство* гиббсовской меры μ: условная мера $\mu(\cdot/x^{T\setminus\Lambda}=\bar{x})$ при любом $\Lambda\subset T$ и $\bar{x}\in S^{T\setminus\Lambda}$ зависит лишь от значений конфигурации $\bar{x}$ на множестве $\partial_d\Lambda$.

Пусть $\Lambda\subset T$ — конечное множество и на множестве $S^{\partial_d\Lambda}$ граничных конфигураций $\bar{x}=\bar{x}^{\partial_d\Lambda}$ задано некоторое распределение вероятностей $q=q^{\partial_d\Lambda}$. Меру на S^{Λ}

$$\mu_q^{\Lambda}=\int\limits_{S^{\partial_d\Lambda}}\mu_{\bar{x}}^{\Lambda}\,dq(\bar{x}) \tag{3}$$

назовем гиббсовским распределением в Λ с *q-случайными граничными конфигурациями.*

Предложение 1. *Для того чтобы мера μ на пространстве S^T была гиббсовской, необходимо, чтобы для любой расширяющейся последовательности $\Lambda_n\nearrow T$, $n\to\infty$, конечных множеств Λ_n существовала последовательность распределений $q_n=q^{\partial_d\Lambda_n}$, определенных каждое на множестве граничных конфигураций $S^{\partial_d\Lambda_n}$ так, чтобы слабый локальный предел мер $\mu_{q_n}^{\Lambda_n}$ совпадал с μ:*

$$\lim_{n\to\infty}\mu_{q_n}^{\Lambda_n}=\mu, \tag{4}$$

и достаточно, чтобы условие (4) выполнялось для какой-нибудь расширяющейся последовательности $\Lambda_n\nearrow T$.

Следствие. *Пусть семейство гиббсовских перестроек $\{\mu_{\bar{x}}^{\Lambda}\}$ таково, что существует предел (один и тот же)*

$$\mu=\lim_{\Lambda\nearrow T}\mu_{\bar{x}}^{\Lambda}$$

для любой последовательности $\Lambda\nearrow T$ и при любом выборе граничных конфигураций $\bar{x}\in S^{\partial_d\Lambda}$. Тогда μ является единственной гиббсовской мерой на S^T.

Доказательство предложения 1. Необходимость. Выберем для каждого $\Lambda\subset T$ распределение $q=\mu|_{S^{\partial_d\Lambda}}$ на множестве $S^{\partial_d\Lambda}$, индуцированное мерой μ. Тогда очевидно, что $\mu_q^{\Lambda}=\mu|_{S_{\Lambda}}$ и (4) выполнено.

Достаточность. Для любых $\Lambda_0\subset\Lambda$ таких, что $\rho(\Lambda_0,\ T-\Lambda)>d$, и любого распределения q граничных конфигураций $\bar{x}\in S^{\partial_d\Lambda}$ условное распределение $\mu_q^{\Lambda}(\cdot/\bar{x}^{\Lambda\setminus\Lambda_0})$ на S^{Λ_0}, порожденное гиббсовской мерой μ_q^{Λ} в Λ со случайными граничными конфигурациями, совпадает (как это легко следует из (1) и (3)) с мерой $\mu^{\Lambda_0}_{\bar{x}^{\partial_d\Lambda}}$, где $\bar{x}^{\partial_d\Lambda_0}$ — сужение конфигурации $\bar{x}^{\Lambda\setminus\Lambda_0}$ на $\partial_d\Lambda_0$:

$$\mu_q^{\Lambda}\left(\cdot/\bar{x}^{\Lambda\setminus\Lambda_0}\right)=\mu^{\Lambda_0}_{\bar{x}^{\partial_d\Lambda_0}}. \tag{5}$$

Пусть теперь $\Lambda_n\nearrow T$ и q_n — последовательности такие, что выполнено (4). Поскольку для любого фиксированного $\Lambda_0\subset T$ и всех достаточно больших Λ_n выполняется равенство (5), оно верно и для предельной меры μ.

Замечание 1. Гамильтониан U_{Λ} вида (5.1) и порожденную им гиббсовскую перестройку μ_{Λ} меры λ_0^{Λ} для единообразия называют иногда энергией (и соответственно гиббсовской мерой) с «пустыми» граничными условиями. При этом их слабый локальный предел — предельная гиббсовская перестройка, как легко следует из доказанного предложения, является гиббсовским распределением в смысле определения (2).

Замечание 2. Определение (2), приведенное здесь для случая финитного потенциала и свободной меры $\mu_{\Lambda}^{0}=\lambda_0^{\Lambda}$, переносится (с некоторыми уточнениями) и на случай произвольного «быстро убывающего» потенциала $\{\Phi_A\}$, а также на случай произвольной d-марковской свободной меры μ^0 (или даже меры μ^0 с быстрым «убыванием памяти»). Кроме того, можно сформулировать определение гиббсовского поля в бесконечном пространстве, аналогичное определению (2), как для случая точечных полей, так и для случая полей в R^{ν} (с обычными или обобщенными конфигурациями). Однако в настоящее время они редко рассматриваются.

ГЛАВА II

СЕМИИНВАРИАНТЫ И КОМБИНАТОРИКА

§ 1. Семиинварианты и их элементарные свойства

Пусть задана система случайных величин $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ (среди них могут быть одинаковые). В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что все моменты этих величин конечны:

$$\langle |\xi_j^k| \rangle < \infty \tag{1}$$

для всех j и $k = 1, 2, \ldots$

Для любого непустого подмножества $T \subseteq \mathscr{N} = \mathscr{N}_n = \{1, \ldots, n\}$ обозначим

$$\xi_T = \prod_{i \in T} \xi_i, \quad \xi'_T = \{\xi_i \colon i \in T\},$$

т. е. ξ'_T есть подсистема системы $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Для $T = \varnothing$ мы обозначим $\xi_\varnothing = 1$ и введем символ $\xi'_\varnothing$.

Для любой случайной величины ξ обозначим через ξ'^k систему из k экземпляров случайной величины ξ, $\xi'^0 = \xi'_\varnothing$. Аналогичный смысл имеют обозначения

$$\xi_{\mathscr{N}}^{\varkappa} = \prod_{i=1}^{n} \xi_i^{k_i}, \quad \xi_{\mathscr{N}}'^{\varkappa} = \left\{\xi_1'^{k_1}, \ldots, \xi_n'^{k_n}\right\},$$

где $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$, $k_i \geqslant 0$,— мультииндекс.

Рассмотрим функцию

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \langle \exp(\lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_n\xi_n) \rangle,$$

определенную для всех чисто мнимых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Она совпадает с характеристической функцией системы $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ от вещественных переменных $t_j = \lambda_j/i$.

Лемма 1. *Функция $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ бесконечно дифференцируема при всех чисто мнимых λ_j. Существуют смешанные моменты $\langle \xi_{\mathscr{N}}^{\varkappa} \rangle$ для любого мультииндекса $\varkappa$. При* этом

$$\langle \xi_{\mathscr{N}}^{\varkappa} \rangle = \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial\lambda_1^{k_1} \ldots \partial\lambda_n^{k_n}} f(\lambda_1 \ldots, \lambda_n) \tag{2}$$

(как обычно, полагаем $\dfrac{\partial^0}{\partial\lambda_0^0} f = f$).

Доказательство см. в [58].

Из леммы 1 вытекает, что $\ln f$ является бесконечно дифференцируемой функцией в окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0)$.

Определение 1. *Семиинвариантом* системы $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ случайных величин называется число

$$\langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^n}{\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_n} \ln f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \big|_{\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0}. \tag{3}$$

Сокращенное обозначение для него $\langle \xi'_{\mathscr{N}} \rangle$.

Соответственно, семиинвариант системы $\xi_{\mathscr{N}}'^{\varkappa}$ обозначается

$$\langle \xi_{\mathscr{N}}'^{\varkappa} \rangle = \langle \xi_1'^{k_1}, \ldots, \xi_n'^{k_n} \rangle.$$

При этом условимся, что

$$\langle \xi'_\varnothing \rangle = 0, \quad \langle \xi'_\varnothing, \xi_1'^{k_1}, \ldots \rangle = \langle \xi_1'^{k_1}, \ldots \rangle.$$

Свойства семиинвариантов.

А. $\langle \xi_1'^{k_1}, \ldots, \xi_n'^{k_n} \rangle =$

$$= \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial\lambda_1^{k_1} \ldots \partial\lambda_n^{k_n}} \ln f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \big|_{\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0}. \tag{4}$$

Имеем

$$\left\langle \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{ij}\xi_i\right) \right\rangle = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

где $\lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{k_i} \lambda_{ij}$ при $k_i > 0$ и $\lambda_i = 0$ при $k_i = 0$.

Воспользовавшись определением (2), получим (4).

В. *Симметричность и полилинейность.*

$$\langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle = \langle \xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n} \rangle$$

для любой подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

и

$$\langle a'\xi_1' + a''\xi_1'', \xi_2, \dots, \xi_n \rangle = \\ = a' \langle \xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n \rangle + a'' \langle \xi_1'', \xi_2, \dots, \xi_n \rangle.$$

Симметричность очевидна, а полилинейность выводится из соотношения

$$\langle \exp \{ \lambda_1 (a'\xi_1' + a''\xi_1'') + \lambda_2\xi_2 + \dots + \lambda_n\xi_n \} \rangle = \\ = f(a'\lambda_1, a''\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

где $f(\lambda_1', \lambda_1'', \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ — характеристическая функция системы $\{\xi_1', \xi_1'', \xi_2, \dots, \xi_n\}$, непосредственным применением (3).

C. Если $\mathcal{N}$ можно разбить на два непустых непересекающихся подмножества: $\mathcal{N} = A \cup B$ так, что система ξ_A' независима от системы ξ_B', то

$$\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Имеем при достаточно малых $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\ln \langle \exp(\lambda_1\xi_1 + \dots + \lambda_n\xi_n) \rangle = \\ = \ln \left\langle \exp\left(\sum_{i \in A} \lambda_i \xi_i \right) \right\rangle + \ln \left\langle \exp\left(\sum_{i \in B} \lambda_i \xi_i \right) \right\rangle.$$

Применяя определение (3), получаем (5).

В частности, если хотя бы одна из величин $\xi_j = \mathrm{const}$, то семиинвариант $\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ равен нулю.

Свойство C подсказывает, что семиинвариант характеризует меру зависимости случайных величин. Заметим также, что при $n = 2$ семиинвариант совпадает с ковариацией

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \xi_1 \cdot \xi_2 \rangle - \langle \xi_1 \rangle \langle \xi_2 \rangle,$$

как это легко следует из определения.

D. *Выражение моментов через семиинварианты.*

$$\langle \xi_{\mathcal{N}} \rangle = \sum_{\alpha = \{T_1, \dots, T_k\}} \langle \xi_{T_1}' \rangle \dots \langle \xi_{T_k}' \rangle, \tag{6}$$

где сумма берется по всем разбиениям множества $\mathcal{N}$, т. е. по всем неупорядоченным наборам $\alpha = \{T_1, \dots, T_k\}$ попарно непересекающихся непустых подмножеств (блоков) $T_i \subseteq \mathcal{N}$, дающих в сумме все $\mathcal{N}$.

Доказательство. Рассмотрим формальные ряды*) Тейлора для функций f и $\ln f$ в точке $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \sum_{\varkappa} \frac{\lambda_{\mathcal{N}}^{\varkappa}}{\varkappa!} \langle \xi_{\mathcal{N}}^{\varkappa} \rangle, \\ \ln f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \sum_{\varkappa} \frac{\lambda_{\mathcal{N}}^{\varkappa}}{\varkappa!} \langle \xi_{\mathcal{N}}'^{\varkappa} \rangle, \end{aligned} \tag{7}$$

где сумма берется по всем мультииндексам $\varkappa$; при этом

$$\varkappa! = k_1! \dots k_n!, \quad \lambda_{\mathcal{N}}^{\varkappa} = \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n}.$$

Введем теперь $\xi = \lambda_1\xi_1 + \dots + \lambda_n\xi_n$ и заметим, что

$$\langle e^{\xi} \rangle = \exp(\ln \langle e^{\xi} \rangle) = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle \xi'^{,s} \rangle \right) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle \xi'^{,s} \rangle \right)^k. \tag{8}$$

Фиксируем k и вычислим коэффициент при $\lambda_1 \dots \lambda_n$ у формального ряда k-го члена суммы в правой части (8). Нетрудно видеть, что это есть сумма по всем разбиениям $\{T_1, \dots, T_k\}$ выражений вида

$$\langle \xi_{T_1}' \rangle \dots \langle \xi_{T_k}' \rangle.$$

E. *Выражение семиинвариантов через моменты.*

$$\langle \xi_{\mathcal{N}}' \rangle = \sum_{\alpha} (-1)^{k-1} (k-1)! \langle \xi_{T_1} \rangle \dots \langle \xi_{T_k} \rangle, \tag{9}$$

где сумма берется по всем разбиениям $\alpha = (T_1, \dots, T_k)$ множества $\mathcal{N}$.

Доказательство можно провести аналогично доказательству свойства D. Ниже (см. § 6) оно будет получено как частный случай формулы обращения Мёбиуса.

F. *Критерий гауссовости.* Система $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ является гауссовой тогда и только тогда, когда

$$\langle \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_s} \rangle = 0, \quad s > 2,$$

---

*) О формальных рядах см. в [63].

для произвольных (возможно, совпадающих) индексов $i_1, \dots, i_s \in \mathcal{N}$.

Это свойство следует из того, что логарифм характеристической функции гауссовой системы (и только для нее) является многочленом второй степени.

Множество всех разбиений $\mathcal{N}$ обозначим $\mathfrak{A}_{\mathcal{N}} = \mathfrak{A}$. Введем в $\mathfrak{A}$ отношение порядка $\alpha < \beta$, если каждый блок разбиения α содержится в некотором блоке разбиения β (α «мельче» β). Обозначим через $\underline{0}$ разбиение на точки (наименьший элемент), $\underline{1}$ — разбиение, состоящее из одного блока $\mathcal{N}$ (наибольший элемент). Через $\alpha \vee \beta$ обозначим наименьшее разбиение $\delta \in \mathfrak{A}$ такое, что $\alpha < \delta$ и $\beta < \delta$ (подробнее о структуре разбиений см. § 6).

Разбиение β называется *связным относительно разбиения* α, если $\alpha \vee \beta = \underline{1}$. Наглядно это значит, что $\mathcal{N}$ нельзя разбить на два подмножества, каждое из которых является объединением блоков как β, так и α.

G. *Обобщенное разложение по связным группам.* Для любого разбиения $\alpha = \{T_1, \dots, T_k\} \in \mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$,

$$\langle \xi_{T_1}, \dots, \xi_{T_k} \rangle = \sum_{\beta:\, \alpha\vee\beta=\underline{1}} \langle \xi'_{Q_1} \rangle \dots \langle \xi'_{Q_m} \rangle, \tag{10}$$

где сумма берется по всем разбиениям $\beta = \{Q_1, \dots, Q_m\}$, связным относительно α.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $|T_1| = \dots = |T_{k-1}| = 1$, $|T_k| = 2$. Иначе говоря, докажем, что $(n = k+1)$

$$\langle \xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \xi_{n-1} \cdot \xi_n \rangle = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle + \sum_{T \subseteq \{1,\dots,n-2\} = \mathcal{N}_{n-2}} \langle \xi_{n-1}, \xi'_T \rangle \langle \xi_n, \xi'_{\mathcal{N}_{n-2} \setminus T} \rangle. \tag{11}$$

Докажем это индукцией по n. Обозначив $\eta = \xi_{n-1} \cdot \xi_n$ и воспользовавшись свойством D, имеем

$$\langle \xi_1 \dots \xi_n \rangle = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle + \sum_{\substack{\{T_1,\dots,T_k\} \\ k \geq 2}} \langle \xi'_{T_1} \rangle \dots \langle \xi'_{T_k} \rangle,$$

$$\langle \xi_1 \dots \xi_{n-2} \eta \rangle = \langle \xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \eta \rangle + \sum_{\substack{\{S_1,\dots,S_k\} \\ k \geq 2}} \left[\langle \xi'_{S_1} \rangle \dots \langle \xi'_{S_k}, \eta \rangle + \langle \xi'_{S_1} \rangle \dots \langle \xi'_{S_k} \rangle \langle \eta \rangle \right], \tag{12}$$

где $\{T_i\}$ — разбиение $\mathcal{N}_n$, а $\{S_i\}$ — разбиение $\mathcal{N}_{n-2}$. Отсюда

$$\langle \xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \eta \rangle - \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle = \sum_{k \geq 2} \left[\langle \xi'_{T_1} \rangle \dots \langle \xi'_{T_k} \rangle \right] - \sum_{k \geq 2} \left[\langle \xi'_{S_1} \rangle \dots \langle \xi'_{S_k}, \eta \rangle + \langle \xi'_{S_1} \rangle \dots \langle \xi'_{S_k} \rangle \langle \eta \rangle \right].$$

Поскольку $|S_k| < n-2$, в силу индуктивного предположения имеем

$$\langle \xi'_{S_k}, \eta \rangle = \langle \xi'_{S_k}, \xi_{n-1}, \xi_n \rangle + \sum_{S' \cup S'' = S_k} \langle \xi'_{S'}, \xi_{n-1} \rangle \langle \xi'_{S''}, \xi_n \rangle.$$

Кроме того,

$$\langle \eta \rangle = \langle \xi_{n-1}, \xi_n \rangle + \langle \xi_{n-1} \rangle \langle \xi_n \rangle.$$

Подставляя обе последние формулы в (12), легко убедиться, что в правой части (12) останутся только члены

$$\sum_{T \subseteq \mathcal{N}_{n-2}} \langle \xi_{n-1}, \xi'_T \rangle \langle \xi_n, \xi'_{\mathcal{N}_{n-2} \setminus T} \rangle.$$

Перейдем к общему случаю. Пусть утверждение (10) доказано для всех разбиений множеств $\mathcal{N}_k$ с числом элементов, меньшим n, и всех разбиений $\alpha' \in \mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$, меньших разбиения α. Докажем его справедливость для разбиения α. Пусть $n \in T_k$ и

$$\eta_1 = \xi_{T_1}, \dots, \eta_{k-1} = \xi_{T_{k-1}}, \quad \eta_k = \xi_{T_k \setminus \{n\}}, \quad \eta_{k+1} = \xi_n.$$

Воспользовавшись (11), получим, что

$$\langle \xi_{T_1}, \dots, \xi_{T_{k-1}}, \xi_{T_k \setminus \{n\}} \cdot \xi_n \rangle = \langle \xi_{T_1}, \dots, \xi_{T_k \setminus \{n\}}, \xi_n \rangle + \sum_{S \subseteq \mathcal{N}_{k-1}} \langle \eta'_S, \xi_n \rangle \langle \eta'_{\mathcal{N}_{k-1} \setminus S}, \xi_{T_k \setminus \{n\}} \rangle. \tag{12a}$$

Каждый семиинвариант в правой части в силу индуктивного предположения может быть разложен по связным группам. Подставляя эти разложения в (12а), можно убедиться, что получится сумма членов вида $\langle \xi'_{Q_1} \rangle \dots \langle \xi'_{Q_m} \rangle$ для всех разбиений β, связных относительно α (и только таких).

H. *Неравенства Коши.* Пусть функция $\langle \exp(\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n) \rangle$ аналитически продолжается в замкнутый поликруг $|\lambda_1| \leq r_1, \dots, |\lambda_n| \leq r_n$ с остовом $\Gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n: |\lambda_i| = r_i,\ i = 1, \dots, n\}$ и не обращается в этом поликруге в нуль. Тогда

$$\left|\langle \xi_1'^{k_1}, \ldots, \xi_n'^{k_n}\rangle\right| \leqslant k_1! \ldots k_n! \frac{C}{r_1^{k_1} \ldots r_n^{k_n}}, \tag{13}$$

где $C = \sup\limits_{\Gamma} |\ln\langle \exp(\lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_n\xi_n)\rangle|$.

Это свойство есть перефразировка неравенств Коши (см. [66]) и получается из интегрального представления Коши для функции, аналитической в поликруге.

Условия утверждения H выполнены, например, если все ξ_i ограничены.

Даже для одной случайной величины оценка (13), вообще говоря, неулучшаема: нетрудно привести примеры, когда $|\langle \xi'^n\rangle| \geqslant C^n \cdot n!$ для любой константы C и бесконечного числа значений n.

Замечание. В ряде задач теории вероятностей и математической статистики важную роль играют асимптотические оценки семиинвариантов $\langle \xi_1'^{k_1}, \ldots, \xi_n'^{k_n}\rangle$ при фиксированном n и $k_1, \ldots, k_n \to \infty$. Эти оценки получаются обычно стандартными методами асимптотического анализа и теории функций нескольких комплексных переменных. Отметим сразу, что специфика оценок, получаемых в данной книге, связана со случаем $n \to \infty$.

I. *Выражение семиинварианта в виде момента.* Этот полезный прием заключается в следующем. Пусть задана система случайных величин $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Рассмотрим n независимых наборов случайных величин $\{\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}\}, \ldots, \{\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}\}$, каждый из которых распределен так же, как система $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Пусть $\omega = \exp\{2\pi i/n\}$ и $\tilde{\xi}_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \omega^j \xi_k^{(j)}$. Тогда

$$\langle \xi_1, \ldots, \xi_n\rangle = \frac{1}{n}\langle \tilde{\xi}_1 \ldots \tilde{\xi}_n\rangle. \tag{14}$$

Доказательство. Заметим, что циклическое отображение

$$\xi_k^{(j)} \mapsto \xi_k^{(j+1)}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad \xi_k^{(n)} \mapsto \xi_k^{(1)}$$

сохраняет вероятностные распределения, и поэтому наборы $(\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_n)$, $(\omega\tilde{\xi}_1, \ldots, \omega\tilde{\xi}_n)$ одинаково распределены. Отсюда, в частности, следует, что для $T \subseteq \mathcal{N}$

$$\langle \tilde{\xi}_T\rangle = \omega^{|T|}\langle \tilde{\xi}_T\rangle$$

и, следовательно, для $T \neq \mathcal{N}$

$$\langle \tilde{\xi}_T\rangle = 0, \quad \langle \tilde{\xi}'_T\rangle = 0.$$

Отсюда и из свойства D вытекает, что

$$\langle \tilde{\xi}'_{\mathcal{N}}\rangle = \langle \tilde{\xi}_{\mathcal{N}}\rangle. \tag{15}$$

Из свойств B и C следует, что $\langle \tilde{\xi}'_{\mathcal{N}}\rangle = n\langle \xi'_{\mathcal{N}}\rangle$, а это вместе с (15) дает (14).

J. *Формальные семиинварианты.* Пусть каждому $T \subseteq \mathcal{N}$ сопоставлено число $f(T)$. Эти числа будем называть (смешанными) моментами виртуального поля (на $\mathcal{N}$).

Определим семиинварианты виртуального поля $g(T)$, $T \subseteq \mathcal{N}$, индуктивной формулой

$$g(T) = f(T) \quad \text{для} \quad |T| = 1$$

и

$$g(T) = f(T) - \sum_{\{B_1, \ldots, B_k\}} g(B_1) \ldots g(B_k) \quad \text{для} \ |T| > 1, \tag{16}$$

где сумма берется по всем разбиениям $\{B_1, \ldots, B_k\}$ множества T с $k \geqslant 2$. Заметим, что формула (16) в точности совпадает с формулой (6). Для чисел $g(T)$ имеет место формула, аналогичная формуле (9) (см. свойство E):

$$g(\mathcal{N}) = \sum_{\alpha} (-1)^{k-1}(k-1)!\, f(T_1) \cdot \ldots \cdot f(T_k), \tag{16'}$$

где сумма берется по всем разбиениям $\alpha = \{T_1, \ldots, T_k\}$ множества $\mathcal{N}$. Формула (16′), как и формула (9), получается с помощью сравнения разложений для производящих функций

$$S_g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{T \subseteq \mathcal{N}} g(T)\lambda^T$$

и

$$S_f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{T \subseteq \mathcal{N}} f(T)\lambda^T,$$

где $\lambda^T = \prod\limits_{i \in T} \lambda_i$.

Нам понадобится аналог свойства C, которое мы надлежащим образом переформулируем. Пусть $\mathcal{N}$ является множеством вершин некоторого графа G. Обозначим G_A, $A \subset \mathcal{N}$, подграф графа G, натянутый на множество A вершин. Для $B \subset A$ назовем граф G_B компонентой G_A, если в G_A нет ребер, соединяющих B с $A \setminus B$.

Систему (виртуальное поле) $\{f(T),\ T \subseteq \mathcal{N}\}$ назовем *независимой относительно графа* G, если для всякого $A \subseteq \mathcal{N}$ и всех разбиений $\{A_1, A_2\}$ множества A таких, что G_{A_i}, $i = 1, 2$, есть компоненты G_A, имеет место равенство

$$f(A) = f(A_1) f(A_2). \tag{17}$$

Лемма 2. *Если граф G несвязен и система $f(T)$ независима относительно G, то*

$$g(\mathcal{N}) = 0. \tag{18}$$

Доказательство проведем индукцией по n. Пусть $\xi = \{A_1, A_2\}$ — разбиение $\mathcal{N}$ такое, что G_{A_1} и G_{A_2} являются компонентами графа $G = G_{\mathcal{N}}$ (ξ существует в силу несвязности графа). Из (16) имеем

$$g(\mathcal{N}) = f(\mathcal{N}) - \Sigma'_{\ldots} - \Sigma''_{\ldots}, \tag{19}$$

где в Σ' суммирование проводится по всем $\alpha < \xi$, а в Σ'' — по остальным $\alpha \neq \underline{1}$. Все члены в Σ'' равны 0 по индуктивному предположению (так как в каждом таком α существует блок, пересекающийся с A_1 и A_2). В то же время, по свойству (17),

$$\Sigma' = f(A_1) f(A_2),$$

откуда и следует лемма.

К. *Семиинварианты и перестройка меры.* Пусть (Ω, Σ, μ_0) — вероятностное пространство, $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — случайные величины с конечными моментами, U — ограниченная случайная величина. Рассмотрим новую меру (гиббсовскую перестройку μ_0)

$$\mu(A) = \frac{\langle \chi_A e^{zU} \rangle_{\mu_0}}{\langle e^{zU} \rangle_{\mu_0}}, \quad A \in \Sigma, \tag{20}$$

где z — вещественный параметр, χ_A — индикатор множества A. Тогда семиинвариант $\langle \xi_1, \ldots, \xi_k \rangle_\mu$, вычисленный относительно меры μ, является аналитической функцией z в малой окрестности нуля на плоскости z и

$$\langle \xi_1, \ldots, \xi_k \rangle_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \langle \xi_1, \ldots, \xi_k, U^{,n} \rangle_{\mu_0}. \tag{21}$$

Доказательство.

$$\langle \xi_1, \ldots, \xi_k \rangle_\mu = \frac{\partial_k}{\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_k} \ln \langle \exp\{\lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_k\xi_k\} \rangle_\mu \big|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0} =$$

$$= \frac{\partial^k}{\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_k} \ln \langle \exp\{\lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_k\xi_k + zU\} \rangle_{\mu_0} \big|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0}.$$

Разлагая последний логарифм по z, получаем (21).

§ 2. Полиномы Эрмита — Ито — Вика. Диаграммы. Интегрирование по частям

1. Полиномы Вика. Пусть ξ — гауссова случайная величина, определенная на некотором вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ). Определяемые ниже полиномы от ξ (которые мы для краткости будем называть полиномами Вика*) и использовать для них изобретенное им обозначение : :) возникают при ортогонализации системы степеней $1, \xi, \xi^2, \ldots$ в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Определение 1 (*виковская экспонента*). Положим

$$:\exp(a\xi): \overset{\text{def}}{=} \frac{\exp(a\xi)}{\langle \exp(a\xi) \rangle} = \exp\left\{a(\xi - \langle \xi \rangle) - \frac{1}{2} a^2 \langle \xi^2 \rangle\right\}, \tag{1}$$

где a — произвольное комплексное число. Разложим правую часть (1) в (сходящийся) степенной ряд по a и коэффициент при $a^n/n!$ обозначим $:\xi^n:$, т. е.

$$:\exp(a\xi): \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} :\xi^n:. \tag{2}$$

Легко видеть, что $:\xi^n:$ является полиномом n-й степени по ξ со старшим коэффициентом 1, т. е.

$$:\xi^n: = \xi^n + Q(\xi), \tag{3}$$

где Q — полином степени не выше $n-1$. Полином $:\xi^n:$ называется *виковской степенью*. Например,

$$:\xi^0: = :1: = 1, \quad :\xi: = \xi - \langle \xi \rangle.$$

*) Эти полиномы, как мы увидим ниже, совпадают с известными полиномами Эрмита (см. [62]); в форме стохастических интегралов они появились в работе Ито (см. [23]).

Если $\langle\xi\rangle = 0$, то

$$:\xi^2: = \xi^2 - \langle\xi^2\rangle, \quad :\xi^3: = \xi^3 - 6\xi\langle\xi^2\rangle,$$
$$:\xi^4: = \xi^4 - 6\xi^2\langle\xi^2\rangle + 3(\langle\xi^2\rangle)^2. \tag{4}$$

Для любого полинома $P(\xi) = a_n\xi^n + \ldots + a_0$ от случайной величины ξ полином $:P(\xi):$ определим по линейности:

$$:P(\xi): = a_n :\xi^n: + \ldots + a_0.$$

Подчеркнем, что операция $P \mapsto :P:$ зависит от распределения ξ (точнее, от $\langle\xi\rangle$ и $\langle\xi^2\rangle$).

Будем далее рассматривать случай, когда $\langle\xi\rangle = 0$.

Лемма 1. 1) *Полиномы* $:\xi^n:$ *и* $:\xi^m:$ *ортогональны в пространстве* $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ *при* $n \neq m$ *и*

$$\langle :\xi^n: :\xi^n: \rangle = n!\langle\xi^2\rangle^n. \tag{5}$$

2) *Полином* $:\xi^n:$ *ортогонален всем степеням* ξ^m *при* $m < n$.

3) *Система полиномов* $\{:\xi^n:,\ n = 0, 1, \ldots\}$ *полна в пространстве* $L_2(\Omega, \Sigma(\xi), \mu|_{\Sigma(\xi)})$, *где* $\Sigma(\xi) \subseteq \Sigma$ — *наименьшая* σ-*алгебра, относительно которой измерима* ξ. *Иначе говоря, полиномы*

$$h_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{n!}\,\langle\xi^2\rangle^{n/2}} :\xi^n: \tag{6}$$

образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega, \Sigma(\xi), \mu|_{\Sigma(\xi)})$.

Доказательство. Напишем

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n\beta^m}{n!m!} \langle :\xi^n: :\xi^m: \rangle =$$
$$= \langle :\exp(\alpha\xi): :\exp(\beta\xi): \rangle = \frac{\langle \exp[(\alpha+\beta)\xi] \rangle}{\langle \exp(\alpha\xi)\rangle \langle \exp(\beta\xi)\rangle} =$$
$$= \exp(\alpha\beta\langle\xi^2\rangle) = \sum_n \frac{\alpha^n\beta^n}{n!}\langle\xi^2\rangle^n. \tag{7}$$

Сравнивая коэффициенты при степенях $\alpha^n\beta^m$ в первой и последней частях этого равенства, получаем утверждение 1). Из него и из (3) вытекает, что полиномы $1, :\xi:, \ldots, :\xi^n:$ образуют ортогональный базис в пространстве $L^{(n)} \subset L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ полиномов от ξ степени не выше n. Отсюда и из 1) получаем утверждение 2). Таким образом, система $:\xi^n:$ является ортогональной системой полиномов со старшими коэффициентами, равными единице, и, следовательно,

$$:\xi^n: = \langle\xi^2\rangle^{n/2} H_n(\xi/\langle\xi^2\rangle^{1/2}),$$

где $\{H_n(x)\}$ — полиномы Эрмита (с единичными старшими коэффициентами; см. [62]).

Утверждение 3) вытекает из полноты системы $H_n(x)$ в пространстве $L_2\left(R^1, (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}dx\right)$ (см. [62]).

Следствие 1. *В разложении* (3) *полином* $Q \in L^{(n-1)}$ *с точностью до знака совпадают с проекцией вектора* ξ^n *на подпространство* $L^{(n-1)}$. *Иными словами,* $:\xi^n:$ *есть перпендикуляр в* $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$, *опущенный из вектора* ξ^n *на это подпространство.*

Из определения 1 легко следует, что

$$\frac{d}{d\xi} :\xi^n: = n :\xi^{n-1}:. \tag{8}$$

Определение 2. В случае произвольной гауссовой системы $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ с $\langle\xi_1\rangle = \langle\xi_2\rangle = \ldots = \langle\xi_n\rangle = 0$ *полином* Вика $:P:$, где P — однородный полином от $\xi_1, \ldots, \xi_n$ степени k, определяется как перпендикуляр в пространстве $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$, опущенный из вектора P на замкнутое подпространство $L^{(k-1)}$, порожденное всеми полиномами от $\xi_1, \ldots, \xi_n$ степени меньше k.

Для монома $\xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n} \equiv \xi_{\mathcal{N}}^{\varkappa}$, $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$, полином $:\xi_{\mathcal{N}}^{\varkappa}:$ будем называть *виковским* мономом.

Заметим, что в случае $n = 1$ определение 2 операции $:\ :$ совпадает с предыдущим определением 1 при $\langle\xi\rangle = 0$. Поэтому справедлива формула

$$:\exp\left(\sum_i a_i\xi_i\right): = \exp\left\{\sum_i \xi_i a_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_i a_j \langle\xi_i\xi_j\rangle\right\} =$$
$$= \sum_{\varkappa} \frac{a_{\mathcal{N}}^{\varkappa}}{\varkappa!} :\xi_{\mathcal{N}}^{\varkappa}:, \tag{9}$$

где $\varkappa! = k_1! \ldots k_n!$, $a_{\mathcal{N}}^{\varkappa} = a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}$. Из этой формулы можно найти явное разложение $:\xi_{\mathcal{N}}^{\varkappa}:$ по степеням $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Аналогичное разложение $:P:$ для любого полинома $P = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ находится по линейности.

Лемма 2. 1) *Если* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *взаимно ортогональны (и, следовательно, независимы), то*

$$:\xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n}: = :\xi_1^{k_1}: \ldots :\xi_n^{k_n}: \tag{10}$$

и все эти виковские мономы попарно ортогональны в $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$.

2) *В случае произвольной гауссовой системы* $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *система полиномов* $\{:\xi^{\varkappa}_{\mathcal{N}}:$, $\varkappa$ — *произвольный мультииндекс*$\}$ *полна в пространстве* $L_2(\Omega, \Sigma', \mu|_{\Sigma'})$, *где* Σ' — *наименьшая* σ-*алгебра, относительно которой измеримы* $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Доказательство. Равенство (10) следует из равенства

$$:\exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i\right): = \prod_{i=1}^{n} :\exp(a_i\xi_i):, \tag{11}$$

вытекающего из (1), ортогональность же следует из леммы 1.

Для доказательства 2) в подпространстве $L^{(1)}$ выберем ортонормированный базис $\eta_1, \ldots, \eta_n$. При этом каждый полином $:P(\xi_1, \ldots, \xi_n):$ раскладывается по мономам (виковским) $:\eta_1^{k_1}\eta_2^{k_2}\ldots\eta_n^{k_n}:$ и, наоборот, мономы $:\eta^{\varkappa}_{\mathcal{N}}:$ представляются в виде линейной комбинации мономов $:\xi^{\varkappa}_{\mathcal{N}}:$. Полнота же мономов $:\eta^{\varkappa}_{\mathcal{N}}:$ в $L_2(\Omega, \Sigma', \mu|_{\Sigma'})$ вытекает из утверждения 1) и леммы 1.

Как и выше (см. (8)), верна формула

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i} :\xi_1^{k_1}\ldots\xi_n^{k_n}: = k_i :\xi_1^{k_1}\ldots\xi_i^{k_i-1}\ldots\xi_n^{k_n}: \quad i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Замечание. Предыдущие построения обобщаются и на случай счетного набора $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ гауссовых случайных величин. В частности, если у всех ξ_n нулевые средние, $\langle\xi_n\rangle = 0$, и $\langle\xi_n\xi_{n'}\rangle = \delta_{nn'} = \begin{cases}1, & n = n',\\ 0, & n \neq n',\end{cases}$ то нормированные мономы Вика

$$h_{\{k_1,\ldots,k_n,\ldots\}} = \frac{1}{\prod_i (k_i!)^{1/2}} :\xi_1^{k_1}\ldots\xi_n^{k_n}\ldots: = \prod_i \frac{:\xi_i^{k_i}:}{(k_i!)^{1/2}}, \tag{12a}$$

где $(k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ — произвольная финитная последовательность целых чисел $k_i \geqslant 0$, $k_i = 0$ при $i > i_0$, образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Omega, \Sigma', \mu|_{\Sigma'})$.

2. Диаграммы. При вычислениях с функционалами от гауссовых систем чрезвычайно удобна диаграммная техника. Она обладает геометрической наглядностью и избавляет от громоздких формул с большим количеством индексов. Мы изложим эту технику для гауссовых систем случайных величин $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ с $\langle\xi_i\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть задано разбиение $\alpha = \{T_1, \ldots, T_k\} \in \mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$. Мы укажем, как вычисляются следующие моменты и семиинварианты:

$$\begin{array}{ll} 1. & \langle\xi_{T_1}\xi_{T_2}\ldots\xi_{T_k}\rangle = \langle\xi_{\mathcal{N}}\rangle.\\ 2. & \langle\xi_{T_1}, \xi_{T_2}, \ldots, \xi_{T_k}\rangle.\\ 3. & \langle:\xi_{T_1}:\ldots:\xi_{T_k}:\rangle.\\ 4. & \langle:\xi_{T_1}:, \ldots, :\xi_{T_k}:\rangle. \end{array} \tag{13}$$

Заметим, что если n нечетно, то все величины в (13) равны 0. Действительно, перейдем к системе случайных величин $\xi_i' = -\xi_i$ и заметим, что система $\{\xi_1', \ldots, \xi_n'\}$ имеет то же самое совместное распределение, что и исходная система. Таким образом, все величины (13) для новой системы такие же, как и для старой, а с другой стороны, они отличаются множителем $(-1)^n$.

Итак, будем рассматривать только четное n.

Обозначим через $\mathfrak{A}^2_{\mathcal{N}} \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$ совокупность всех разбиений $\beta = \{(i_1, i_1'), \ldots, (i_k, i_k')\}$ множества $\mathcal{N}$ на пары.

Всякую пару $G = (\alpha, \beta)$, где $\alpha = \{T_1, \ldots, T_s\} \in \mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$, $\beta = \{(i_1, i_1'), \ldots, (i_k, i_k')\} \in \mathfrak{A}^2_{\mathcal{N}}$, назовем (вакуумной) *диаграммой* для гауссовой системы $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. С каждой диаграммой свяжем граф, множеством вершин V которого служат блоки разбиения α, а множеством ребер E — блоки разбиения β. При этом скажем, что ребро $(i, i') \in E$ связывает вершины $T_j, T_{j'} \in \alpha$, если $i \in T_j$, $i' \in T_{j'}$.

Мы будем называть диаграмму *связной*, *без петель* и т. д., если соответствующий граф связен, не имеет петель и т. д.

Заметим, что диаграмма связна тогда и только тогда, когда разбиение β связно относительно разбиения α (см. с. 46).

Каждой диаграмме G сопоставим величину $I(G)$, называемую ее вкладом:

$$I(G)=\prod_{(i,i')\in E}\langle\xi_i\xi_{i'}\rangle, \tag{14}$$

где произведение берется по всем блокам $(i,\ i')$ разбиения β.

Лемма 3. *Значения величин* (13) *равны*

$$\sum I(G),$$

где суммы берутся соответственно по совокупностям диаграмм $G(\alpha,\ \beta)$ с фиксированным $\alpha=(T_1,\ \ldots,\ T_k)$:

1) *по всем диаграммам;*
2) *по всем связным диаграммам;*
3) *по всем диаграммам без петель;*
4) *по всем связным диаграммам без петель.*

Доказательство. 1) является переформулировкой свойства D семиинвариантов;

2) является переформулировкой свойства G семиинвариантов.

Удобно доказательства утверждений 3) и 4) дать немного позже. Введем диаграммы более общего вида. Диаграммой будем называть пару $G(\alpha,\ \beta)$, где $\alpha\in\mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$ — произвольное разбиение, а $\beta\in\mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$ — разбиение, каждый блок которого содержит не более двух элементов. Диаграмме G сопоставим граф со «свободными отростками». Множество его вершин V определяется так же, как и раньше, множество E его ребер — множество блоков $(i,\ i')$ разбиения β, состоящих из двух элементов, а множество L его свободных отростков — совокупность одноэлементных блоков $\{l\}$ разбиения β. При этом скажем, что отросток $\{l\}\in L$ выходит из вершины $T_j\in V$, если $l\in T_j$. Вкладом диаграммы назовем случайную величину

$$I(G)=\Bigl[\prod_{(i,i')\in E}\langle\xi_i\xi_{i'}\rangle\Bigr]\prod_{T_j\in V}:\prod_{l\in T_j:\{l\}\in L}\xi_l:. \tag{15}$$

Лемма 4. *Имеют место формулы*

$$\xi_{\mathcal{N}}=\sum I(G), \tag{16}$$

где сумма берется по всем диаграммам $G=(\alpha,\ \beta)$ с $\alpha=\underline{1}$, у которых четность числа отростков $|L|$ совпадает с четностью n, и

$$:\xi_{\mathcal{N}}:=\sum(-1)^{(n-|L|)/2}I(G), \tag{17}$$

где сумма берется по всем диаграммам $G(\alpha,\ \beta)$ с $\alpha=\underline{0}$, у которых число отростков имеет четность, совпадающую с четностью n.

Доказательство. Из сравнения коэффициентов при $a_1a_2\ldots a_n$ в обеих частях равенства

$$\exp\Bigl\{\sum_i a_i\xi_i-\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_ia_j\langle\xi_i\xi_j\rangle\Bigr\}=\sum_{\varkappa}\frac{a_{\mathcal{N}}^{\varkappa}}{\varkappa!}:\xi_{\mathcal{N}}^{\varkappa}: \tag{18}$$

(см. формулу (9)) получаем равенство

$$:\xi_{\mathcal{N}}:=\sum_{\substack{T\subseteq\mathcal{N},\\ |\mathcal{N}\setminus T|\text{ четно}}}A_T\xi_T, \tag{18а}$$

где

$$A_T=(-1)^{|\mathcal{N}\setminus T|/2}\sum_{\beta\in\mathfrak{A}^2_{\mathcal{N}\setminus T}}\prod_{(i,i')\in\beta}\langle\xi_i\xi_{i'}\rangle, \tag{18б}$$

где сумма берется по всем разбиениям множества $\mathcal{N}\setminus T$ на пары. Равенства (18а) и (18б) и означают (17). Переписав (18) в виде

$$:\exp\Bigl(\sum_i a_i\xi_i\Bigr):\ \exp\Bigl(\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_ia_j\langle\xi_i\xi_j\rangle\Bigr)=$$

$$=\exp\Bigl(\sum_i a_i\xi_i\Bigr)=\sum_{\varkappa}\frac{a_{\mathcal{N}}^{\varkappa}}{\varkappa!}\xi_{\mathcal{N}}^{\varkappa}$$

и повторив предыдущие рассуждения, придем к (16).

Замечание. Из (18а) и (18б) и утверждения 1) леммы 3 получаем, что

$$:\xi_{\mathcal{N}}:=\sum_{\substack{T\subseteq\mathcal{N},\\ |\mathcal{N}\setminus T|\text{ четно}}}(-1)^{|\mathcal{N}\setminus T|/2}\langle\xi_{\mathcal{N}\setminus T}\rangle\,\xi_T.$$

Аналогично получаем, что

$$\xi_{\mathcal{N}}=\sum_{\substack{T\subseteq\mathcal{N},\\ |\mathcal{N}\setminus T|\text{ четно}}}\langle\xi_{\mathcal{N}\setminus T}\rangle:\xi_T:.$$

Лемма 5. *Для любого разбиения $\alpha=\{T_1,\ \ldots,\ T_k\}$*

$$:\xi_{T_1}:\ldots:\xi_{T_k}:=\sum_{G=(\underline{0},\beta)}(-1)^{(n-|L|)/2}I(G) \tag{19}$$

и

$$\xi_{T_1} \ldots \xi_{T_k} = \sum_{G=(\alpha,\beta)} I(G), \tag{20}$$

где сумма берется по всем диаграммам вида $G = (\underline{0}, \beta)$ *в первом случае и вида* $G = (\alpha, \beta)$ *во втором и таким, что в обоих случаях:*

1) $\beta \leqslant \alpha$;

2) *для всех* $i = 1, \ldots, k$ $|T_i| - |L_i|$ *четно, где* $L_i \subset L$ — *множество отростков* $\{l\} \in \beta$, *выходящих из* T_i: $l \in T_i$.

Доказательство обеих формул (19) и (20) получается перемножением формул (17) для $:\xi_{T_i}:$ и (16) для ξ_{T_i}.

Лемма 6. *Пусть даны гауссова система случайных величин* $\{\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m\}$ *и дифференцируемая функция* F *от* n *вещественных переменных такие, что случайные величины* $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *и* $F'_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *при всех* i *принадлежат* $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ (F'_i — *частная производная* F *по* i-*му аргументу*). *Тогда*

$$\langle :\eta_1 \ldots \eta_m : F(\xi_1, \ldots, \xi_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \eta_1 \xi_i\rangle \langle :\eta_2 \ldots \eta_m : F'_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)\rangle. \tag{21}$$

Доказательство. В частном случае, когда $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = :\xi_1 \ldots \xi_n:$, формула (21), как следует из (12), принимает вид

$$\langle :\eta_1 \ldots \eta_m : :\xi_1 \ldots \xi_n:\rangle = \sum_i \langle \eta_1 \xi_i\rangle \langle :\eta_2 \ldots \eta_m : :\xi_1 \ldots \check{\xi}_i \ldots \xi_n:\rangle \tag{21a}$$

(значок $\vee$ над переменной ξ_i означает, что ее следует вычеркнуть). Формула (21а) получается так: воспользуемся равенством (19) при $k = 2$, применим к нему усреднение $\langle\ \rangle$ и с помощью утверждения 1) леммы 3 представим это среднее в виде суммы произведений попарных средних $\langle \xi_i \xi_{i'}\rangle$, $\langle \eta_j \eta_{j'}\rangle$ и $\langle \xi_i \eta_j\rangle$. Выделив коэффициент при $\langle \eta_1 \xi_i\rangle$, мы опять с помощью равенства (19) и леммы 3 убедимся в том, что он имеет вид такой, как в (21а). В общем случае произвольной функции F мы можем ее разложить в ряд по мономам Вика и, применив к каждому слагаемому формулу (21а), придем к (21).

Доказательство утверждений 3) и 4) леммы 3.

Докажем оба утверждения 3) и 4) по индукции по числу n случайных величин $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Пусть утверждение 3) выполнено для всех $n < m$. Тогда, применяя к среднему $\langle :\xi_{T_1}: \ldots :\xi_{T_k}:\rangle$, где $\alpha = \{T_1, \ldots, T_k\}$ — разбиение множества $\mathcal{N} = (1, \ldots, n)$, формулу (21) и используя индуктивное предположение, получаем, что утверждение 3) справедливо и при $n = m$. Перейдем к утверждению 4) и снова допустим, что оно верно при $n < m$. Обозначая $\eta_i = :\xi_{T_i}:$ и применяя формулу (6.1), получим, что

$$\langle \eta_1, \ldots, \eta_k\rangle = \langle \eta_1 \ldots \eta_k\rangle - \sum_{\substack{\delta=\{Q_1,\ldots,Q_p\} \\ p>1}} \langle \eta'_{Q_1}\rangle \ldots \langle \eta'_{Q_p}\rangle. \tag{21б}$$

Первое слагаемое в силу утверждения 3) равно сумме диаграмм без петель, а сумма $\sum_\delta$ в силу индуктивного предположения, примененного к каждому множителю $\langle \eta'_{Q_i}\rangle$, равна сумме всех несвязных диаграмм без петель, т. е. в (21б) остаются только связные диаграммы без петель. Лемма 3 доказана.

3. Формулы интегрирования по частям. Одна из таких формул — это формула (21). Мы установим еще две формулы такого типа.

Лемма 7. *Пусть дана гауссова система* $\{\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m\}$ *и пусть функции* $F_0 = :\eta_1 \ldots \eta_m:$, $F_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, F_s(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *обладают следующим свойством: все смешанные моменты для них и их первых частных производных существуют. Тогда*

$$\langle F_0, F_1, \ldots, F_s\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} \langle \eta_1 \xi_i\rangle \left\langle \frac{\partial F_0}{\partial \eta_1}, F_1, \ldots, \frac{\partial F_j}{\partial \xi_i}, \ldots, F_s\right\rangle. \tag{22}$$

Доказательство. Разложим семиинвариант в левой части (22) по моментам с помощью (9.1) и для момента, содержащего F_0, воспользуемся формулой интегрирования по частям (21). Полученное выражение преобразуем, снова используя формулу (9.1), в правую часть (22).

Замечание 1. Термин «интегрирование по частям» в (21) и (22) объясняется тем, что, например, формула (21) с $m = 1$ может быть получена обычным интегрированием по частям интеграла

$$\int\limits_{R^{n+1}} yF(x_1, \ldots, x_n)\, p(y, x_1, \ldots, x_n)\, dy\, dx_1 \ldots dx_n,$$

где p — гауссова плотность.

Лемма 8. *Пусть в R^n задано семейство гауссовых мер μ_s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, с нулевыми средними и ковариациями c_s, гладко зависящими от s. Обозначим $\langle \cdot \rangle_s = \langle \cdot \rangle_{\mu_s}$. Для любой дважды дифференцируемой функции $F(x_1, \ldots, x_n)$, для которой при всех s конечны средние $\langle F \rangle_s$, $\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_s$, $\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle_s$ и дисперсии функции F и ее частных производных до второго порядка включительно, верно равенство*

$$\langle F \rangle_1 - \langle F \rangle_0 = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} \int\limits_0^1 \left[\frac{d}{ds} \langle x_i x_j \rangle_s \right] \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle_s ds. \tag{23}$$

Доказательство. Как и при доказательстве формулы (21), достаточно рассмотреть случай $F = x_1 \ldots x_n$. Применим формулу

$$\langle F \rangle_1 - \langle F \rangle_0 = \int\limits_0^1 \left[\frac{d}{ds} \langle F \rangle_s \right] ds \tag{24}$$

и заметим, что, как следует из утверждения леммы 3,

$$\frac{d}{ds} \langle x_1 \ldots x_n \rangle_s = \sum_{i<j} \left[\frac{d}{ds} \langle x_i x_j \rangle_s \right] \langle x_1 \ldots \check{x}_i \ldots \check{x}_j \ldots x_n \rangle_s. \tag{25}$$

Из (24) и (25) получаем (23).

§ 3. Оценки моментов и семиинвариантов функционалов от гауссовых систем

Пусть T и A — счетные (или конечные) множества и задана гауссова система $\{\xi_{t\alpha},\ t \in T,\ \alpha \in A\}$, причем выполнены условия: при всех t и α

$$\langle \xi_{t\alpha} \rangle = 0,$$

$$\sum_{t' : t' \neq t} \sum_{\alpha' \in A} |\langle \xi_{t\alpha} \xi_{t'\alpha'} \rangle| < d < \infty. \tag{1}$$

Пусть γ обозначает любую целочисленную, неотрицательную финитную функцию, определенную на множестве A: $\gamma = \{m(\alpha),\ \alpha \in A\}$, $m(\alpha) \geqslant 0$ — целые числа и величина $|\gamma| = \sum_{\alpha \in A} m(\alpha)$. Обозначим

$$\gamma! = \prod_{\alpha \in A} m(\alpha)! \quad \text{и} \quad \gamma!! = \prod_{\alpha \in A} m(\alpha)!!,$$

где $m!! = m(m-2) \ldots$

Обозначим через $:\xi_t^\gamma:$ виковский моном

$$:\xi_t^\gamma: = :\prod_{\alpha \in A} \xi_{t\alpha}^{m(\alpha)}:. \tag{1a}$$

Обозначим через $\sum\limits_{(t_2, \ldots, t_n)}$ $\left(\sum\limits_{\{t_2, \ldots, t_n\}} \right)$ сумму по всем упорядоченным (соответственно неупорядоченным) наборам попарно различных элементов $t_2, \ldots, t_n \in T$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (1). Тогда для любого конечного упорядоченного набора функций $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\gamma_i = \{m_i(\alpha),\ \alpha \in A\}$ и $t = t_1 \in T$ справедлива оценка*

$$\sum_{(t_2, \ldots, t_n)} \left| \langle :\xi_{t_1}^{\gamma_1}:, :\xi_{t_2}^{\gamma_2}:, \ldots, :\xi_{t_n}^{\gamma_n}: \rangle \right| \leqslant (n-1)!\, d^{N/2} \prod_{i=1}^n \gamma_i!!, \tag{2}$$

где $N = \sum_{i=1}^n |\gamma_i|$ (N — четное число).

Доказательство. Согласно лемме 3.2

$$\sum_{(t_2, \ldots, t_n)} \left| \langle :\xi_{t_1}^{\gamma_1}:, \ldots, :\xi_{t_n}^{\gamma_n}: \rangle \right| \leqslant \sum |I(G)|, \tag{3}$$

где суммирование в правой части происходит по некоторой совокупности связных вакуумных диаграмм без петель. Опишем эти диаграммы. Они задаются:

1) последовательностью вершин $V = (t_1, \ldots, t_n)$, где t_1 фиксировано и все точки t_i попарно различны; при этом каждой вершине t_i соответствует множество отростков $\{i, \alpha, k\}$, $\alpha \in \operatorname{supp} \gamma_i$, $k = 1, \ldots, m_i(\alpha)$;

2) разбиением множества отростков на пары (ребра)

$$\{(i_l, \alpha_l, k_l), (i'_l, \alpha'_l, k'_l)\}, \quad l = 1, \ldots, N/2.$$

Для заданной диаграммы G упорядочим все ее ребра по следующему правилу. Первый шаг: выходя из точки t_1 по отростку $(1,\ \alpha_1,\ 1) = (i_1,\ \alpha_1,\ k_1)$, где α_1 — наименьшее из $\alpha \in \operatorname{supp}\gamma_1$, приходим по соответствующему ребру $\{(i_1,\ \alpha_1,\ k_1),\ (i_1', \alpha_1', k_1')\}$ в точку $t_{i_1'}$. Назовем отростки $(i_1,\ \alpha_1,\ k_1)$ и (i_1', α_1', k_1'), входящие в это ребро, «использованными». Опишем теперь общий индуктивный шаг. Пусть уже упорядочено s ребер

$$\{(i_1, \alpha_1, k_1), (i_1', \alpha_1', k_1')\}, \ldots, \{(i_s, \alpha_s, k_s), (i_s', \alpha_s', k_s')\}.$$

При построении $(s+1)$-го ребра возникает два случая.

1-й случай. Пусть среди отростков (i_s', α_s', k), $k = 1, \ldots, m_{i_s'}(\alpha_s')$, имеются неиспользованные. Возьмем такой отросток с наименьшим $k = k_{s+1}$ и положим $(i_{s+1}, \alpha_{s+1}, k_{s+1}) = (i_s', \alpha_s', k_{s+1})$.

2-й случай. Если такого отростка нет, то берем первый (в лексикографическом порядке) из неиспользованных отростков в посещенных точках (они существуют в силу связности диаграммы). Обозначим его $(i_{s+1},\ \alpha_{s+1},\ k_{s+1})$.

В результате такого упорядочения ребер G получим соответствующую последовательность пар

$$\left\{(t_1, \alpha_1), \left(t_{i_1'}, \alpha_{i_1'}\right)\right\}, \ldots, \left\{\left(t_{i_{N/2}}, \alpha_{i_{N/2}}\right), \left(t_{i_{N/2}'}, \alpha_{i_{N/2}'}\right)\right\}. \qquad (4)$$

При этом вклад $I(G)$ этой диаграммы G равен

$$I(G) = \left\langle \xi_{t_1,\alpha_1} \cdot \xi_{t_{i_1'}\alpha_{i_1'}} \right\rangle \ldots \left\langle \xi_{t_{i_{N/2}}\alpha_{i_{N/2}}} \xi_{t_{i_{N/2}'}\alpha_{i_{N/2}'}} \right\rangle.$$

Заметим, что при фиксированных $(t_1,\ \ldots,\ t_n)$ и $(\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_n)$ существует не более

$$\prod_{i,\alpha} m_i(\alpha)\,(m_i(\alpha) - 2) \ldots \qquad (5)$$

диаграмм, приводящих к одной и той же последовательности (4). Действительно, первый раз по ходу нашего движения по ребрам мы можем попасть в пару $(t_i,\ \alpha)$ по одному из $m_i(\alpha)$ отростков. Так как мы покидаем эту пару каждый раз по точно определенному отростку, то второй раз мы можем попасть в нее $(m_i(\alpha) - 2)$ способами и т. д.

Введем обозначения

$$(x_m, \alpha_m) = \left(t_{i_m}, \alpha_{i_m}\right), \quad (x_m', \alpha_m') = \left(t_{i_m'}, \alpha_{i_m'}\right)$$

и рассмотрим совокупность $\mathfrak{A}$ последовательностей пар

$$\{(x_1, \alpha_1), (x_1', \alpha_1')\}, \ldots, \{(x_{N/2}, \alpha_{N/2}), (x_{N/2}', \alpha_{N/2}')\}, \qquad (6)$$

получающихся из всех диаграмм G, по которым происходит суммирование в (3).

Последовательности из $\mathfrak{A}$ обладают следующими свойствами:

1) $x_m = x_l'$ для некоторого $l < m$, $m = 1,\ \ldots,\ N/2$, $x_1 = t_1$;

2) пара $(x_m,\ \alpha_m)$ однозначно определяется по всем предыдущим парам

$$\{(x_1, \alpha_1), (x_1', \alpha_1')\}, \ldots, \{(x_{m-1}, \alpha_{m-1}), (x_{m-1}', \alpha_{m-1}')\};$$

3) все точки x_m, x_m' исчерпывают некоторое n-точечное множество $S \subset T$;

4) существует не более $(n-1)!$ последовательностей $(t_2,\ \ldots,\ t_n)$ таких, для которых последовательность (4) совпадает с заданной последовательностью (6).

Для доказательства 4) отнесем каждой последовательности (4) перестановку π, которая получается, если занумеровать точки $t_2,\ \ldots,\ t_n$ в порядке их первого появления в последовательности (4). Зная перестановку π, мы можем занумеровать элементы множества $S = (t_1,\ \ldots,\ t_n)$ так, чтобы последовательность (6) совпала с (4).

Лемма 2. *Пусть задана совокупность $\mathfrak{A}$ последовательностей пар вида* (6), *удовлетворяющих условиям* 1) *и* 2). *Тогда*

$$\sum_{\mathfrak{A}} \prod_{m=1}^{N/2} \left| \left\langle \xi_{x_m\alpha_m} \xi_{x_m'\alpha_m'} \right\rangle \right| = d^{N/2}. \qquad (7)$$

Доказательство легко получается индукцией по четным N.

Из формул (5), (7) и свойства 4) вытекает оценка (2).

Лемма 1 доказана.

Оценки семиинвариантов. Фундаментальная лемма 1 имеет разнообразные применения. Мы воспользуемся ею для оценки семиинвариантов произвольных функционалов от гауссовых систем.

Пусть гауссова система $\{\xi_{t\alpha},\ t \in T,\ \alpha \in A\}$ дополнительно к условиям (1) удовлетворяет условию: для любых $t \in T$

$$\langle \xi_{t\alpha},\ \xi_{t\alpha'} \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} = \begin{cases} 1, & \alpha = \alpha', \\ 0, & \alpha \neq \alpha'. \end{cases} \tag{8}$$

Из условия (8), леммы 2.2 и замечания на с. 54 следует, что нормированные мономы

$$h_{\gamma t} = \frac{:\xi_t^\gamma:}{(\gamma!)^{1/2}}, \tag{9}$$

где γ пробегает все целочисленные финитные функции на A, образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega, \Sigma_t, \mu_t)$, а $\Sigma_t = \Sigma(\{\xi_{t\alpha}\})$ — наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все величины $\xi_{t\alpha}$, $\alpha \in A$, а $\mu_t = \mu|_{\Sigma_t}$. Через F_t будем обозначать случайную величину, измеримую относительно σ-алгебры Σ_t, и пусть $F_t \in L_2(\Omega, \Sigma_t, \mu_t)$, т. е. F_t имеет конечное среднее $\langle F_t \rangle$ и конечную дисперсию $D_t = \langle (F_t - \langle F_t \rangle)^2 \rangle$. Тогда F_t можно разложить в ряд по мономам $h_{\gamma t}$, сходящийся в среднем квадратичном:

$$F_t = \sum_\gamma a_{\gamma t} h_{\gamma t}. \tag{10}$$

По равенству Парсеваля

$$\sum_{\gamma \neq \widehat{0}} |a_{\gamma t}|^2 = D_t, \tag{11}$$

где $\widehat{0}$ обозначает нулевую функцию: $\widehat{0} = \{m(\alpha) \equiv 0\}$.

Теорема 3. *Пусть $\{\xi_{t\alpha},\ t \in T,\ \alpha \in A\}$ — гауссова система случайных величин, удовлетворяющая условиям (1) и (8), причем в условии (1) константа $d < 1$. Пусть, далее, $\{F_t,\ t \in T\}$ — некоторая другая система случайных величин, такая, что для любого $t \in T$ $F_t \in L_p(\Omega, \Sigma_t, \mu_t)$ при любом $p \geqslant 1$ и ее коэффициенты Фурье $\{a_{\gamma t}\}$ в разложении (10) удовлетворяют оценке*

$$|a_{\gamma t}| < a_\gamma \tag{12}$$

для любой функции γ, причем

$$\sum_{\gamma \neq \widehat{0}} |a_\gamma|^2 = D < \infty. \tag{13}$$

Тогда для любого конечного подмножества $Q = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ существуют моменты $\left\langle \prod_{i=1}^n F_{t_i} \right\rangle$ и, следовательно, существуют семиинварианты $\langle F_{t_1}, \ldots, F_{t_n} \rangle \equiv \langle F'_Q \rangle$.

При этом

$$\langle F'_Q \rangle = \sum_{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)} \prod_{i=1}^n a_{\gamma_i t_i} \langle h_{\gamma_1 t_1}, \ldots, h_{\gamma_n t_n} \rangle \tag{13'}$$

и ряд (13′) абсолютно сходится.

При любом $t_1 \in T$ и любом целом $n \geqslant 1$

$$\sum_{\substack{Q \subset T: \\ t_1 \in Q, |Q| = n}} |\langle F'_Q \rangle| \leqslant \begin{cases} \sum\limits_{\gamma \neq \widehat{0}} |a_{\gamma t_1}| \widetilde{C}(\gamma) \Big(\sum\limits_{\gamma \neq \widehat{0}} a_\gamma \widetilde{C}(\gamma) \Big)^{n-1} & (14) \\ \qquad \text{при любом } A, & \\ D_{t_1}^{1/2} D^{(n-1)/2} C^{|A| n}, \quad |A| < \infty, & (15) \end{cases}$$

где

$$\widetilde{C}(\gamma) = \prod_{\alpha \in A} (m(\alpha) + 1)^{1/2} d^{m(\alpha)/2},$$

а

$$C = \left(\sum_{m=1}^\infty m d^{m-1} \right)^{1/2}.$$

Доказательство. В силу неравенства Гёльдера

$$\left| \left\langle \prod_{t \in Q} |F_t| \right\rangle \right| \leqslant \prod_{i=1}^n \|F_{t_i}\|_{L_n} \tag{15'}$$

и, следовательно, момент $\left\langle \prod_{i=1}^n F_{t_i} \right\rangle$, а также семиинвариант $\langle F'_Q \rangle$ существуют. Далее, для любого целого N напишем разложение $F_{t_1} = \sum_{\gamma_1 : |\gamma_1| \leqslant N} a_{\gamma_1 t_1} h_{\gamma_1 t_1} + F_{t_1}^{(N)}$. Тогда

$$\langle F'_Q \rangle = \sum_{\gamma_1 : |\gamma_1| \leqslant N} a_{\gamma_1 t_1} \langle h_{\gamma_1 t_1}, F'_{Q \setminus \{t_1\}} \rangle + \langle F_{t_1}^{(N)}, F'_{Q \setminus \{t_1\}} \rangle. \tag{15''}$$

Снова с помощью неравенства Гёльдера получим, что

$$\left| \langle F_{t_1}^{(N)},\ F'_{Q \setminus \{t_1\}} \rangle \right| < \left\| F_{t_1}^{(N)} \right\|_{L_2} \cdot C_Q,$$

где константа C_Q не зависит от N.

Переходя в (15″) к пределу при $N \to \infty$, получим, что

$$\langle F'_Q \rangle = \sum_{\gamma_1} a_{\gamma_1 t_1} \langle h_{\gamma_1 t_1},\ F'_{Q \setminus \{t_1\}} \rangle,$$

где ряд сходится в том смысле, что его частные суммы

$$\sum_{\gamma_1 : |\gamma_1| \leqslant N} \to \langle F'_Q \rangle \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{15'''}$$

Продолжая аналогичным образом дальше, получим, что

$$\langle F'_Q\rangle = \sum_{\gamma_1}\ldots\sum_{\gamma_n} a_{\gamma_1 t_1}\ldots a_{\gamma_n t_n}\langle h_{\gamma_1 t_1},\ldots,h_{\gamma_n t_n}\rangle, \qquad (16a)$$

где ряд суммируется повторным образом: сначала по индексу γ_n (в смысле, аналогичном (15‴)), затем по индексу γ_{n-1} и т. д. Из оценки (2) при $d<1$ легко следует абсолютная сходимость ряда (13′) и, следовательно, повторный ряд (16a) равен ряду (13′).

Воспользовавшись (13′) и применяя лемму 1, получим, что

$$\sum_{\substack{Q\subset T:\\ t_1\in Q,|Q|=n}} |\langle F'_Q\rangle| = \sum_{\{t_2,\ldots,t_n\}} |\langle F_{t_1}, F_{t_2},\ldots,F_{t_n}\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n-1)!}\sum_{(t_2,\ldots,t_n)}\ \sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\\ \gamma_i\neq\widehat{0},\,i=1,\ldots,n}} \frac{|a_{\gamma_1 t_1}|\ldots|a_{\gamma_n t_n}|}{\prod_{i=1}^{n}(\gamma_i!)^{1/2}}\times$$

$$\times\left|\left\langle :\xi_{t_1}^{\gamma_1}:,\ldots,:\xi_{t_n}^{\gamma_n}:\right\rangle\right| \leqslant \sum_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)} |a_{\gamma_1 t_1}|\prod_{i=2}^{n} a_{\gamma_i}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n} d^{|\gamma_i|/2}\frac{\gamma_i!!}{(\gamma_i!)^{1/2}} < \left(\sum_{\gamma_1}|a_{\gamma_1 t_1}|\prod_{\alpha\in A}(m(\alpha)+1)^{1/2} d^{m(\alpha)/2}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{\gamma} a_\gamma\prod_{\alpha\in A}(m(\alpha)+1)^{1/2} d^{m(\alpha)/2}\right)^{(n-1)/2}, \qquad (16)$$

что и совпадает с (14). Здесь мы воспользовались легко проверяемым неравенством $m!!/(m!)^{1/2}\leqslant(m+1)^{1/2}$.

Оценка (15) получается из (16) с помощью неравенства Коши — Буняковского:

$$\sum_{\gamma_1\neq\widehat{0}} |a_{\gamma_1 t_1}|\prod(m(\alpha)+1)^{1/2} d^{m(\alpha)/2} <$$

$$< \left(\sum_{\gamma_1\neq\widehat{0}}|a_{\gamma_1 t_1}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\gamma}\prod_{\alpha}(m(\alpha)+1)\,d^{m(\alpha)}\right)^{1/2} =$$

$$= D_{t_1}^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{\infty} m d^{m-1}\right)^{|A|/2}.$$

Аналогично оценивается сумма во второй скобке в (16).

Оценки моментов.

Теорема 4. 1) *Пусть система* $\{\xi_{t\alpha},\ t\in T,\ \alpha\in A\}$ *гауссовых случайных величин удовлетворяет условиям* (1). *Тогда для любого множества точек* $\{t_1,\ldots,t_n\}\subset T$ *и любого набора функций* $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ *верна оценка*

$$\left|\left\langle :\xi_{t_1}^{\gamma_1}:\ldots:\xi_{t_n}^{\gamma_n}:\right\rangle\right| \leqslant d^{N/2}\prod_{i=1}^{n}\gamma_i!! \qquad (17)$$

(*обозначения те же, что и в лемме* 1).

2) *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда для любого конечного* $Q\subseteq T$

$$\left|\left\langle\prod_{t\in Q}F_t\right\rangle\right| \leqslant \begin{cases}\prod_{t\in Q}\sum_{\gamma}|a_{\gamma t}|\,\widetilde{C}(\gamma), & A \text{ произвольно}, \qquad (18)\\ \left(\prod_{t\in Q}D_t^{1/2}\right)C^{|A|\,|Q|}, & |A|<\infty, \qquad (19)\end{cases}$$

где константы $\widetilde{C}(\gamma)$ *и* C *те же, что и в оценках* (14) *и* (15).

Доказательство. Утверждение 2) может быть доказано повторением доказательства леммы 1. Поскольку в (17) входит момент виковских мономов для фиксированного набора точек $t_1,\ldots,t_n$, а не сумма по таким наборам, как в оценке (2), уже несущественно, что диаграммы в (3) могут быть и несвязными. Мы приведем другое независимое доказательство оценки чуть более слабой, чем (17). Воспользуемся равенством

$$\left\langle\prod_{t\in Q}:\exp\left\{\sum_{\alpha\in A}\xi_{t\alpha}z_{t\alpha}\right\}:\right\rangle =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{t\neq t'} z_{t\alpha}z_{t'\alpha'}\langle\xi_{t\alpha}\xi_{t'\alpha'}\rangle\right\} = \Phi(\{z_{t\alpha}\}), \qquad (20)$$

где $\{z_{t\alpha},\ t\in Q,\ \alpha\in A\}$ — произвольный финитный набор комплексных параметров.

Из легко проверяемой оценки

$$|\Phi(\{z_{t\alpha}\})| \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}d\sum_{\substack{t\in Q\\ \alpha\in A}}|z_{t\alpha}|^2\right\} \qquad (21)$$

и формулы Коши

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n} :\xi_{t_i}^{\gamma_i}: \right\rangle = \frac{\prod \gamma_j!}{\prod_j (2\pi i)^{|\operatorname{supp}\gamma_j|}} \int_{|z_{t_i\alpha}|=r_{i\alpha}} \cdots \int \Phi(\{z_{t\alpha}\}) \prod_{i=1}^{n} \prod_{\alpha\in\operatorname{supp}\gamma_i} z_{t_i\alpha}^{-(m_i(\alpha)+1)} \times \prod dz_{t_i\alpha},$$

где интегрирование происходит по полиокружности $|z_{t_i\alpha}| = r_{i\alpha}$ в пространстве переменных $\{z_{t_i\alpha},\ \alpha\in\operatorname{supp}\gamma_i,\ i=1,\ldots,n\}$, а $r_{i\alpha}=\sqrt{m_i(\alpha)/d}$, получаем неравенство

$$\left|\left\langle \prod_{i=1}^{n} :\xi_{t_i}^{\gamma_i}: \right\rangle\right| \leqslant d^{N/2}\prod_{i=1}^{n}\left[(\gamma_i!)^{1/2}\prod_{\alpha\in\operatorname{supp}\gamma_i}(2\pi(m_i(\alpha)+1)^{1/4})\right].$$

Утверждение 2) доказывается в полной аналогии с доказательством теоремы 3.

§ 4. Связность и суммирование по деревьям

В этом параграфе мы введем понятия связности и d-связности, часто используемые в дальнейшем тексте, и установим простые факты, относящиеся к этим понятиям, в частности, оценки для некоторых сумм по совокупности связных графов.

Связность. Пусть T — счетное множество и $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — конечный или бесконечный набор (неупорядоченный) его подмножеств. Набор Γ называется *связным*, если связен следующий граф G_Γ: его вершинами служат элементы множества $(1, 2, \ldots, n)$, а ребрами — те пары (i, j), для которых множества A_i и A_j пересекаются: $A_i \cap A_j \neq \varnothing$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная или счетная система подмножеств T, удовлетворяющая условиям:

1) Мощность всех подмножеств $A\in\mathfrak{A}$ ограничена:

$$|A| \leqslant M, \quad A\in\mathfrak{A}. \tag{1}$$

2) Каждая точка $t\in T$ содержится не более чем в K множествах из $\mathfrak{A}$ (M и K — некоторые константы).

Для любой точки $t\in T$ обозначим через $S_{n,t}$ максимальное число связных наборов $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$, состоящих из n (возможно, совпадающих) множеств $A_i\in\mathfrak{A}$, $i=1,\ldots,n$, и таких, что $t\in\widetilde{\Gamma}\equiv\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Пусть $S_n = \max_{t\in T} S_{n,t}$.

Лемма 1. *Существуют такие константы $C = C(M, K)$ и $B = B(M, K)$, что для любого n*

$$S_n \leqslant BC^n. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через $\widehat{S}_n$ максимальное число связных наборов $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$, состоящих из n попарно различных множеств $A_i\in\mathfrak{A}$ ($t\in\widetilde{\Gamma}$). Числа $\widehat{S}_n$ удовлетворяют следующим рекуррентным неравенствам:

$$\widehat{S}_1 \leqslant K,$$

$$\widehat{S}_n \leqslant K \sum_{s=1}^{\min(n-1,M)} C_M^s \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_s):\\ n_1+\ldots+n_s=n-1}} \widehat{S}_{n_1}\ldots\widehat{S}_{n_s},\ n>1, \tag{3}$$

где суммирование $\sum_{(n_1,\ldots,n_s)}$ происходит по всем упорядоченным наборам $(n_1, \ldots, n_s)$, $s>0$, таким, что $n_1+\ldots+n_s = n-1$, $n_i \geqslant 0$. Неравенство (3) выводится следующим образом. Пусть $n>1$ и A_1 — первое (относительно какого-нибудь упорядочения в системе $\mathfrak{A}$) из множеств набора $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$, содержащих фиксированную точку $t\in T$. При этом набор $\{A_2, \ldots, A_n\}$ распадается на s связных компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, $\widetilde{\Gamma}_i\cap\widetilde{\Gamma}_j \neq \varnothing$, $i\neq j$. Пусть t_i — первая (в смысле некоторого упорядочения в T) точка в $\widetilde{\Gamma}_i\cap A_1$, $i=1,\ldots,s$.

Фиксируем теперь A_1, число $s\leqslant|A_1|$, точки $t_1,\ldots,t_s\in A_1$ и числа $n_i = |\Gamma_i|$, $i=1,\ldots,s$, такие, что $n_1+\ldots+n_s = n-1$. Тогда число наборов Γ множеств из $\mathfrak{A}$, распадающихся ровно на s связных компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, состоящих каждая из n_i различных подмножеств и содержащих соответственно точки $t_1, \ldots, t_s$, не превосходит

$$\widehat{S}_{n_1}\ldots\widehat{S}_{n_s}. \tag{4}$$

Суммируя далее (4) по всем наборам $(n_1, \ldots, n_s)$, по выборам точек $t_1, \ldots, t_s\in A_1$, по числам s, а также по всем множествам A_1, содержащим точку t, и учитывая условия 1) и 2), получим (3).

Введем далее числа $\bar{S}_n$, $n \geqslant 1$, определяемые рекуррентно:

$$\bar{S}_1 = K,$$

$$\bar{S}_n = K \sum_{s=1}^{\min(n-1, M)} C_M^s \sum_{\substack{(n_1, \ldots, n_s):\\ n_1 + \ldots + n_s = n-1}} \bar{S}_{n_1} \cdots \bar{S}_{n_s}, \quad n > 1. \quad (5)$$

Очевидно, что $\hat{S}_n \leqslant \bar{S}_n$. Введем функцию

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{S}_n z^n$$

(предполагая, что ряд в правой части сходится при достаточно малых z). Из (5) находим, что $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$f(z) = Kz(f(z) + 1)^M,$$

которое мы перепишем в виде

$$z = W/(K(1+W)^M) \equiv F(W),$$

где $W = f(z)$. Поскольку функция $F(W)$ комплексного переменного W аналитична в окрестности точки $W = 0$ и $F'(0) \neq 0$, обратная функция $W = f(z)$ аналитична и ограничена в некотором круге $\{|z| < r\}$, $r > 0$. Отсюда получаем, что

$$\hat{S}_n < B(1/r)^n, \quad (5')$$

где $B = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Переходя к числу S_n произвольных связных наборов $\Gamma = (A_1, \ldots, A_n)$, $t \in \tilde{\Gamma}$, заметим, что каждый такой набор можно записать в виде $\Gamma = \{(A_1, k_1), \ldots, (A_s, k_s)\}$, $A_i \neq A_j$, $i \neq j$, где $(A_1, \ldots, A_s)$ — связный набор попарно различных множеств из $\mathfrak{A}$, а $k_i > 0$ — кратность, с которой множество A_i входит в Γ, $i = 1, \ldots, s$. Очевидно, что $k_1 + \ldots + k_s = n$, и поэтому число упорядоченных наборов $(k_1, \ldots, k_s)$ не превосходит C_{n-1}^{s-1}. Отсюда и из (5′) получаем (2).

Приведем одно важное следствие из доказанной леммы.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда существуют такие константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $B_1 > 0$ и $\lambda_0 > 0$ (зависящие от M и K), что для всех $0 < \lambda < \lambda_0$, любого конечного множества $Q \subset T$ и любого n*

$$\sum_{\Gamma} \lambda^{|\Gamma|} \leqslant B_1 (C_1 \lambda)^n C_2^{|Q|}, \quad (5'')$$

где суммирование происходит по всем наборам $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_m\}$, $A_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, \ldots, m$, таким, что $|\Gamma| = m \geqslant n$ и набор $(\Gamma, Q) \equiv \{A_1, \ldots, A_m, Q\}$ связен.

Доказательство. Обозначим через $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, $s = 1, 2, \ldots$ связные компоненты набора Γ. Очевидно, что $\tilde{\Gamma}_i \cap Q \neq \varnothing$, и пусть t_i — первая (относительно некоторого упорядочения в T) точка из множества $\tilde{\Gamma}_i \cap Q$.

Как следует из предыдущей леммы, сумма $\sum \lambda^{|\Gamma|}$ по всем таким наборам Γ, у которых фиксированы число s компонент Γ_i, их мощности $|\Gamma_i| = n_i$, $i = 1, \ldots, s$, и точки $t_i \in Q$, $i = 1, \ldots, s$, не превосходит $B^s (C\lambda)^{n_1} \ldots (C\lambda)^{n_s} = B^s (C\lambda)^N$, где $N = |\Gamma|$. Число упорядоченных наборов $(n_1, \ldots, n_s)$ таких, что $n_1 + \ldots + n_s = N$, не превосходит 2^N, а число наборов (уже неупорядоченных) попарно различных точек $\{t_1, \ldots, t_s\} \subseteq Q$ не больше чем $C_{|Q|}^s$. Отсюда получаем (5″) с $\lambda_0 < 1/(2C)$, $C_1 = 2C$, $C_2 = B + 1$, $B_1 = (1 - 2C\lambda_0)^{-1}$.

$\mathfrak{A}$-связность и d-связность. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство подмножеств. Конечное множество $R \subset T$ назовем *$\mathfrak{A}$-составным*, если существует набор множеств $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_k\}$, $B_i \in \mathfrak{A}$, такой, что

$$\tilde{\Gamma} = R. \quad (6)$$

$\mathfrak{A}$-составное множество R называется *$\mathfrak{A}$-связным*, если набор $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_k\}$, $B_i \in \mathfrak{A}$, в (6) можно выбрать связным; всякое максимальное $\mathfrak{A}$-связное подмножество $R \subseteq A$ множества A называется *компонентой $\mathfrak{A}$-связности A* (т. е. в A нет никакого $\mathfrak{A}$-связного подмножества $R' \subseteq A$ такого, что $R \subset R'$).

Лемма 3. *Всякое $\mathfrak{A}$-составное множество R однозначно разбивается на свои компоненты $\mathfrak{A}$-связности:*

$$R_1', \ldots, R_p', \quad R_i' \cap R_j' = \varnothing, \quad i \neq j, \quad R = \bigcup_{i=1}^{p} R_i'.$$

Доказательство просто, и мы его опускаем.

Пусть теперь $\{A_1, \ldots, A_k\}$ — некоторый набор конечных подмножеств $A_i \subset T$; мы скажем, что $\mathfrak{A}$-составное множество R является *$\mathfrak{A}$-связным относительно набора*

$\{A_1, \ldots, A_k\}$, если связен набор множеств $\{R'_1, \ldots, R'_p, A_1, \ldots, A_k\}$, где $R'_i \subseteq R$ — компоненты $\mathfrak{A}$-связности R.

Пусть семейство $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям 1) и 2) и $L_{t,n}(\mathfrak{A})$ — число $\mathfrak{A}$-связных множеств мощности n, содержащих фиксированную точку $t \in T$, и

$$L_n \equiv L_n(\mathfrak{A}) = \max_{t \in T} L_{t,n}(\mathfrak{A}).$$

Лемма 4. *Существуют такие константы $C_3 = C_3(\mathfrak{A})$ и $B_2 = B_2(\mathfrak{A})$, что при любом $n \geqslant 1$*

$$L_n \leqslant B_2 (C_3)^n. \tag{7}$$

Доказательство. Очевидно, что число $\mathfrak{A}$-связных множеств R мощности n и таких, что $t \in R$, не больше, чем число связных наборов $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_s\}$, $B_i \in \mathfrak{A}$, таких, что $s \leqslant n$ и $t \in \widetilde{\Gamma}$. Из леммы 1 вытекает оценка (7).

Введем теперь следующие величины.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство множеств и R — $\mathfrak{A}$-связное множество. Положим

$$d_R(\mathfrak{A}) = \min_{\Gamma:\, \widetilde{\Gamma} = R} |\Gamma|, \tag{8}$$

где минимум берется по всем связным наборам $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_s\}$, $B_i \in \mathfrak{A}$, таким, что $\widetilde{\Gamma} = R$.

Пусть $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ — некоторый набор множеств и множество R $\mathfrak{A}$-связно относительно $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Положим

$$d_R(\mathfrak{A}, \mathscr{A}) = \min_{\Gamma:\, \widetilde{\Gamma} = R} |\Gamma|, \tag{9}$$

где минимум берется по всем наборам $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_s\}$, $B_i \in \mathfrak{A}$, таким, что $\{B_1, \ldots, B_s, A_1, \ldots, A_k\}$ — связный набор и $\widetilde{\Gamma} = R$. Легко видеть, что

$$d_R(\mathfrak{A}, \mathscr{A}) = \sum d_{R'_i}(\mathfrak{A}), \tag{10}$$

где $R'_1, \ldots, R'_p$ — компоненты $\mathfrak{A}$-связности множества R.

Положим теперь для любого множества A

$$\widehat{d}_A(\mathfrak{A}) = \min_{R \supseteq A} d_R(\mathfrak{A}), \tag{11}$$

где минимум берется по всем $\mathfrak{A}$-связным множествам R, содержащим A ($\widehat{d}_A(\mathfrak{A}) = \infty$, если такого множества R нет).

Далее положим

$$d(\mathfrak{A}, \mathscr{A}) = \min_R d_R(\mathfrak{A}, \mathscr{A}), \tag{12}$$

где $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ и минимум берется по всем множествам R, являющимся $\mathfrak{A}$-связными относительно набора $\mathscr{A}$ (в случае, когда такого множества нет, полагаем $d(\mathfrak{A}, \mathscr{A}) = \infty$).

Пусть $H_{t,r}$, $t \in T$, $r \geqslant 1$, — число конечных подмножеств $A \subset T$ таких, что $\widehat{d}_A(\mathfrak{A}) = r$, $t \in A$, и $H_r = \max_{t \in T} H_{t,r}$.

Лемма 5. *Пусть семейство $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Тогда существуют такие константы $C_4 = C_4(\mathfrak{A})$ и $B_3 = B_3(\mathfrak{A})$, что для любого $r \geqslant 1$*

$$H_r < B_3 C_4^r. \tag{13}$$

Доказательство легко следует из леммы 4.

Лемма 6. *Пусть семейство $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Тогда при достаточно малом λ верна оценка*

$$\sum_R \lambda^{d_R(\mathfrak{A}, \{A_1, \ldots, A_k\})} \leqslant \widehat{C}_5^{\sum_{i=1}^k |A_i|} (C_5 \lambda)^{d(\mathfrak{A}, \{A_1, \ldots, A_k\})}, \tag{13'}$$

где $\widehat{C}_5$, C_5 — константы, зависящие от $\mathfrak{A}$, $\{A_1, \ldots, A_k\}$ — произвольный набор подмножеств T, а суммирование происходит по всем множествам R, $\mathfrak{A}$-связным относительно набора $\{A_1, \ldots, A_k\}$.

Доказательство. Пусть $R'_1, \ldots, R'_l$ — компоненты $\mathfrak{A}$-связности R. Тогда с помощью (10) и определения (12) получим, что сумма в левой части (13′) допускает оценку

$$\sum_R \lambda^{d_R(\mathfrak{A}, \{A_1, \ldots, A_k\})} \leqslant (\varkappa^{-1}\lambda)^{d(\mathfrak{A}, \{A_1, \ldots, A_k\})} \sum_R \prod_{i=1}^l \varkappa^{d_{R'_i}(\mathfrak{A})},$$

где $\varkappa = \varkappa(\mathfrak{A}) < 1$ будет указано ниже. Далее, сумма $\sum\limits_R$ в последнем неравенстве не превосходит

$$\sum_{\{R'_1, \ldots, R'_l\}} \prod_{i=1}^l \varkappa^{d_{R'_i}(\mathfrak{A})} \leqslant \prod_{t \in \bigcup_{i=1}^k A_i} \sum_{R:\, t \in R} \varkappa^{d_R(\mathfrak{A})}, \tag{13''}$$

где сумма $\sum\limits_{\{R_1',\ldots,R_l'\}}$ в левой части означает сумму по всевозможным неупорядоченным наборам попарно непересекающихся множеств R_i', $\mathfrak{A}$-связным относительно множества $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, а сумма $\sum\limits_{R:\,t\in R}$ в правой части означает сумму по таким множествам, содержащим фиксированную точку $t\in\bigcup A_i$. Далее, в силу леммы 1,

$$\sum_{R,\,t\in R}\varkappa^{d_R(\mathfrak{A})}\leqslant B\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}C^n\varkappa^n=\widetilde{C}<\infty$$

при $\varkappa<C^{-1}$, где C и B определены в (2). Отсюда правая часть (13″) не превосходит $\widetilde{C}^{|\cup A_i|}<\widehat{C}^{\Sigma|A_i|}$ (где $\widehat{C}=\max\{\widetilde{C},\ 1\}$), и мы приходим к (13′). Лемма доказана.

Пусть теперь множество T снабжено некоторой метрикой ρ такой, что все шары радиуса $r>0$

$$B_t^{(r)}=\{t'\in T,\ \rho(t,\ t')\leqslant r\}$$

имеют ограниченную мощность

$$|B_t^{(r)}|\leqslant C(r)<\infty \tag{14}$$

(r произвольно).

Часто мы будем рассматривать случай $T=Z^\nu$, $\nu\geqslant 1$, и метрику ρ на Z^ν (см. § 0.I):

$$\rho(t,\ t')\equiv|t-t'|=\sum_{i=1}^{\nu}|t^{(i)}-t'^{(i)}|, \tag{14′}$$

где $t^{(i)}$ и $t'^{(i)}$ — координаты векторов $t,\ t'\in Z^\nu$.

Рассмотрим в качестве семейства $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_d$ совокупность всех подмножеств $B\subset T$ таких, что $\operatorname{diam}B\leqslant d$. Заметим, что если для метрики ρ выполнено условие (14), то семейство $\mathfrak{A}_d$ обладает свойствами 1) и 2) и всякое подмножество $R\subset T$ является $\mathfrak{A}_d$-составным. Всякое $\mathfrak{A}_d$-связное множество R называют просто d-связным (аналогично d-связным относительно набора $\{A_1,\ \ldots,\ A_k\}$, $A_i\subset T$). В случае метрики ρ, у которой

$$\min_{t_1,t_2:\,t_1\neq t_2}\rho(t_1,\ t_2)=1, \tag{14″}$$

величину $\widehat{d}_A(\mathfrak{A}_{d=1})$ будем обозначать просто через $\widehat{d}_A$. Заметим, что в случае $T=Z^\nu$ и метрики (14′) величина $\widehat{d}_A$ равна минимальной длине дерева $\mathcal{T}$, у которого множество вершин совпадает с A (длина $\mathcal{T}$ равна сумме длин ребер). Пусть для метрики ρ выполнены (14) и (14″) и $\mathfrak{A}$ — семейство подмножеств, удовлетворяющее условиям:

1′) Диаметры всех множеств $B\in\mathfrak{A}$ ограничены:

$$\operatorname{diam}B<r,\quad B\in\mathfrak{A}.$$

2′) Для любых соседних точек $t_1,\ t_2\in T$, $\rho(t_1,\ t_2)=1$, величина $\widehat{d}_{\{t_1,t_2\}}(\mathfrak{A})$ ограничена:

$$\widehat{d}_{\{t_1,t_2\}}(\mathfrak{A})<v;$$

здесь r и v — константы.

Лемма 7. *Пусть T 1-связно и выполнены условия 1′), 2′) и условия (14) и (14″). Тогда существуют константы C_6 и $\widehat{C}_6$ (зависящие только от r и v и метрики ρ) такие, что для любого $A\subset T$*

$$C_6\widehat{d}_A\leqslant\widehat{d}_A(\mathfrak{A})\leqslant\widehat{C}_6\widehat{d}_A. \tag{15}$$

Доказательство. В силу (2′) каждое 1-связное множество A может быть покрыто связным набором $\Gamma=\{B_1,\ \ldots,\ B_s\}$, $B_i\in\mathfrak{A}$, таким, что $|\Gamma|\leqslant C_6|A|$. Отсюда следует правое неравенство (15). В силу 1-связности T и условий 1′), (14) и (14″) для каждого $B\in\mathfrak{A}$ $\widehat{d}_B\leqslant K$, где $K=K(v,\ \rho)$. Отсюда вытекает левое неравенство (15).

Суммирование по деревьям. Пусть $\mathcal{N}$ — конечное множество (элементы которого мы для удобства перенумеруем: $\mathcal{N}=(1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Обозначим через $\mathcal{G}(\mathcal{N})$ совокупность связных (неориентированных) графов G, у которых множество вершин совпадает с $\mathcal{N}$, а через $\mathcal{T}(\mathcal{N})\subseteq\mathcal{G}(\mathcal{N})$ обозначим соответствующую совокупность деревьев. Иногда еще рассматривают связные графы с кратными ребрами, т. е. пару $\gamma=\{G,\ k_G\}$, где $G\in\mathcal{G}(\mathcal{N})$, а $k_G=\{k(i,\ j),\ (i,\ j)\in G\}$ — положительная целочисленная функция, определенная на ребрах графа G (кратности ребер). Совокупность таких графов обозначим через $\widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{N})$.

Пусть $\varphi=\{\varphi(i,\ j),\ (i,\ j)\in\mathcal{N},\ i\neq j\}$ — симметричная вещественная функция, определенная на парах различных элементов $\mathcal{N}$. Вкладом связного графа $G\subset\mathcal{G}(\mathcal{N})$

назовем число

$$I(G, \varphi) = \prod_{(i,j)\in G} \varphi(i, j),$$

а вкладом $I(\gamma, \varphi)$ графа $\gamma = (G, k_G)$ с кратными ребрами — число

$$I(\gamma, \varphi) = \prod_{(i,j)\in G} [\varphi(i, j)]^{k(i,j)}.$$

Лемма 8. *Верно неравенство*

$$\left|\sum_{G\in\mathscr{G}(\mathscr{N})} I(G, \varphi)\right| \leqslant e^{S(\varphi)} \sum_{\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{N})} I(\tau, |\varphi|), \qquad (16)$$

где $S(\varphi) = \sum_{i<j} |\varphi(i, j)|$.

В случае, когда $\max|\varphi(i, j)| < 1$, *верно равенство*

$$\sum_{\gamma\in\widehat{\mathscr{G}}(\mathscr{N})} I(\gamma, \varphi) = \sum_{G\in\mathscr{G}(\mathscr{N})} I(G, \psi), \qquad (17)$$

где $\psi(i, j) = \varphi(i, j)/(1 - \varphi(i, j))$.

Доказательство. Заметим, что каждый связный граф $G\in\mathscr{G}(\mathscr{N})$ может быть хотя бы одним способом представлен в виде $G = \tau \cup \widehat{\Gamma}$, где $\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{N})$ — дерево с вершинами $(1, \ldots, n)$, а $\widehat{\Gamma}$ — граф (вообще говоря, несвязный), у которого множество вершин $V(\widehat{\Gamma}) \subseteq \mathscr{N}$, и его ребра отличны от ребер τ. Таким образом,

$$\left|\sum_{G\in\mathscr{G}(\mathscr{N})} I(G, \varphi)\right| \leqslant \sum_{\widehat{\Gamma}} \prod_{(i,j)\in\widehat{\Gamma}} |\varphi(i, j)| \sum_{\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{N})} I(\tau, |\varphi|), \qquad (18)$$

где $\sum_{\widehat{\Gamma}}$ означает суммирование по всем графам $\widehat{\Gamma}$ (включая и пустой) таким, что $V(\widehat{\Gamma}) \subseteq \mathscr{N}$.

С другой стороны,

$$\sum_{\widehat{\Gamma}} \prod_{(i,j)\in\widehat{\Gamma}} |\varphi(i, j)| = \prod_{i<j} (1 + |\varphi(i, j)|) \leqslant e^{S(\varphi)}. \qquad (19)$$

Из (18) и (19) вытекает (16). Равенство (17) очевидно.

Пусть для каждого $\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{N})$ число $l_\tau(i)$ означает степень вершины $i\in\mathscr{N}$ (т. е. число ребер τ, инцидентных i). Поскольку число ребер любого дерева $\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{N})$ равно $n-1$, имеем

$$l_\tau(1) + \ldots + l_\tau(n) = 2(n-1). \qquad (20)$$

Лемма 9. *Для любого набора* $(\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_n)$ *положительных целых чисел, удовлетворяющих условию* (20), *обозначим через* $V_n(\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_n)$ *число деревьев* $\tau\in\mathscr{T}(\mathscr{N})$, *у которых степени вершин фиксированы и равны*

$$l_\tau(i) = \bar{l}_i, \quad i\in\mathscr{N}.$$

Тогда

$$V_n(\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_n) \leqslant \frac{2^{n-2}(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} \bar{l}_i!}. \qquad (21)$$

Доказательство. Вершину $i\in\mathscr{N}$ дерева τ назовем внутренней, если $l_\tau(i) > 1$, и концевой, если $l_\tau(i) = 1$. Пусть $M = \{i_1, \ldots, i_m\} \subset \mathscr{N}$ — множество внутренних вершин τ и $i \notin M$ — его концевая вершина с наименьшим номером.

Стирая эту вершину и выходящее из нее ребро (i, i_s), где $i_s\in M$, мы получим дерево $\tau'\in\mathscr{T}(\mathscr{N}')$, где $\mathscr{N}' = \mathscr{N}\setminus\{i\}$, у которого степень вершины i_s уменьшалась на единицу, а степени остальных вершин не изменялись. Отсюда получаем рекуррентное равенство

$$V_n(\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_n) = \sum_{i_s\in M} V_{n-1}(\bar{l}_1, \ldots, \check{\bar{l}}_i, \ldots, \bar{l}_{i_s} - 1, \ldots, \bar{l}_n). \qquad (22)$$

Из (22) индукцией по числу n легко выводится (21), если учесть, что $\sum_{i_s\in M} l_{i_s} \leqslant 2(n-2)$ (у всякого дерева имеются по крайней мере две концевые вершины).

Пусть T — счетное множество и $\varphi = \{\varphi(t_1, t_2),\ t_1, t_2 \in T,\ t_1 \neq t_2\}$ — симметричная функция от несовпадающих переменных $t_1, t_2 \in T$ такая, что

$$\sup_{t_1\in T} \sum_{t_2\in T} |\varphi(t_1, t_2)| = D < \infty. \qquad (23)$$

Лемма 10. *Для любого* $\bar{t}\in T$ *и целого* $n \geqslant 2$ *имеет место оценка*

$$\left|\sum_{\substack{A\subset T:\\ \bar{t}\in A, |A|=n}} \sum_{\tau\in\mathscr{T}(A)} \prod_{t\in A} l_\tau(t)! \prod_{(t,t')\in\tau} \varphi(t, t')\right| \leqslant (8D)^{n-1}. \qquad (24)$$

Доказательство. Верно равенство

$$\sum_{\substack{A\subset T, \bar{t}\in A,\\ |A|=n}} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{(t_2, \ldots, t_n),\, t_i \neq \bar{t}},$$

где сумма справа означает суммирование по всем упорядоченным наборам из $(n-1)$ попарно различных точек из T, отличных от точки $\bar{t}$. Таким образом, левая часть (24) может быть переписана в виде

$$\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\tau\in\mathcal{T}(\mathcal{N})}\prod_{i\in\mathcal{N}} l_\tau(i)!\sum_{\substack{(t_2,\ldots,t_n):\\ t_i\neq\bar{t},\, i\geqslant 2}}\prod_{(i,j)\in\tau}\varphi(t_i,t_j), \qquad (24')$$

где $\mathcal{N}=(1,\ldots,n)$, а $t_1=\bar{t}$. Далее, при фиксированном дереве $\tau\in\mathcal{T}(\mathcal{N})$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{\substack{\{t_2,\ldots,t_n\}:\\ t_i\neq\bar{t}=t_1}}\prod_{(i,j)\in\tau}\varphi(t_i,t_j)\right|\leqslant D^{n-1}. \qquad (25)$$

Действительно, пусть i_1 — какая-нибудь концевая вершина дерева τ, i_2 $(i_2\neq i_1)$ — концевая вершина дерева $\tau'=\tau\setminus\{i_1\}$, полученного вычеркиванием вершины i_1 вместе с выходящим из нее ребром (i_1, j_1), i_3 — концевая вершина дерева $\tau''=\tau'\setminus\{i_2\}$ и т. д. Тогда

$$\left|\sum_{\substack{\{t_2,\ldots,t_n\}:\\ t_i\neq\bar{t}=t_1}}\prod_{(i,j)\in\tau}\varphi(t_i,t_j)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{t_{i_{n-1}}}|\varphi(t_1,t_{i_{n-1}})|\sum_{t_{i_{n-2}}}\ldots\sum_{t_{i_1}}|\varphi(t_j,t_{i_1})|.$$

Теперь, воспользовавшись (23), получаем (25). Поскольку существует не более $2^{2(n-1)}$ последовательностей $(\bar{l}_1,\ldots,\bar{l}_n)$, удовлетворяющих условию (20), мы из (24′), (25) и оценки (21) получаем (24).

Следствия из леммы 10. 1) *Из неравенства* (24) *вытекает более слабое неравенство*

$$\left|\sum_{\substack{A\subset T,\,\bar{t}\in A,\\ |A|=n}}\sum_{\tau\in\mathcal{T}(A)}\prod_{(t,t')\in\tau}\varphi(t,t')\right|<(8D)^{n-1}. \qquad (26)$$

2) *Из* (26) *и* (16) *следует, что*

$$\left|\sum_{\substack{A\subset T\\ \bar{t}\in A,|A|=n}}\sum_{G\in\mathcal{G}(A)}\prod_{(t,t')\in G}\varphi(t,t')\right|<(8D')^{n-1}, \qquad (27)$$

где $D'=e^{D/2}D$.

3) *В случае, когда* $\sup\limits_{t,t'\in T}|\varphi(t,t')|=d<1$, *из* (27) *и* (17) *получаем, что*

$$\left|\sum_{\substack{A\subset T,\\ \bar{t}\in A,|A|=n}}\sum_{\gamma=(G,k_G)\in\hat{\mathcal{G}}(A)}\prod_{(t,t')\in G}[\varphi(t,t')]^{k(t,t')}\right|\leqslant$$
$$\leqslant(8D'')^{n-1}, \qquad (28)$$

где $D''=\exp\left\{\frac{1}{2}D(1-d)^{-1}\right\}d(1-d)^{-1}$.

§ 5. Оценки числа пересечений

Пусть T — счетное множество с метрикой ρ, удовлетворяющей условиям (14.4) и (14″.4), и $\alpha=(A_1,\ldots,A_N)$ — набор конечных подмножеств T (не обязательно различных). Определим $v_i=v_i(\alpha)$, $i=1,\ldots,N$, как число множеств $A_j\in\alpha$, $j=1,\ldots,N$, таких, что $A_i\cap A_j\neq\varnothing$, а $n_i=n_i(\alpha)$ — как число множеств $A_j\in\alpha$, $j=1,\ldots,N$, совпадающих с A_i.

Теорема 1. *Существует константа* $\bar{C}=\bar{C}(\rho)$ *такая, что для любого набора* $\alpha=(A_1,\ldots,A_N)$ 1-*связных конечных подмножеств* $A_i\subset T$ *верно неравенство*

$$\bar{C}\sum_{i=1}^{N}|A_i|+\sum_{i=1}^{N}\ln n_i\geqslant\sum_{i=1}^{N}\ln v_i. \qquad (1)$$

Доказательство. Каждый набор $\alpha=(A_1,\ldots,A_N)$ можно записать в виде $\alpha=\{(\bar{A}_1,n_1),\ldots,(\bar{A}_s,n_s)\}$, где $\{\bar{A}_1,\ldots,\bar{A}_s\}$ — набор всех попарно различных множеств из α, а n_i, $i=1,\ldots,s$,— кратность, с которой множество $\bar{A}_i$ повторяется в наборе α.

Разобьем теперь набор множеств $\{\bar{A}_1,\ldots,\bar{A}_s\}$ на блоки $\mathcal{B}_{kr}$: $\mathcal{B}_{kr}=\{\bar{A}_i:\ n_i=k,\ |\bar{A}_i|=r\}$, и пусть α_{kr} — мощность блока $\mathcal{B}_{kr}$, а число пар (i,j) таких, что $\bar{A}_i\in\mathcal{B}_{kr}$, $\bar{A}_j\in\mathcal{B}_{k'r'}$, $\bar{A}_i\cap\bar{A}_j\neq\varnothing$, обозначим через $\alpha_{kr,k'r'}$.

Очевидные свойства введенных чисел:

1) $\sum\limits_{k,r}k\alpha_{kr}=N$ (нормировка);

2) $\alpha_{kr,k'r'}=\alpha_{k'r',kr}$ (симметрия);

3) как следует из леммы 4.4, для любого A_i число множеств $\bar{A}_j$ мощности r, пересекающих A_i, не превосходит

$|A_i|B_2(C_3)^r$ и, следовательно,

$$\sum_k \alpha_{kr,k'r'} \leqslant B_2 C_3^r r' \alpha_{k'r'}. \qquad (2)$$

Далее,

$$\sum_{\substack{A_i:|A_i|=r,\\ n_i=k}} v_i = k\sum_{k'r'} k' a_{kr,k'r'}, \qquad (3)$$

где сумма $\sum_{A_i}$ берется по всем множествам $A_i \in \alpha$ мощности $|A_i| = r$ и кратности $n_i = k$. Отсюда, пользуясь известным неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим $(a_1 a_2 \ldots a_l)^{1/l} \leqslant (a_1 + \ldots + a_l)/l$, где $l \geqslant 1$, $a_1 > 0$, ..., $a_l > 0$, получаем после логарифмирования, что

$$\sum_{\substack{A_i:|A_i|=r,\\ n_i=k}} \ln v_i \leqslant k\alpha_{kr} \ln \frac{\sum_{k'r'} k'\alpha_{kr,k'r'}}{\alpha_{kr}}. \qquad (4)$$

Таким образом, из (4) следует, что неравенство (1) вытекает из неравенства

$$\widetilde{C}Nd + \sum_{kr} m_{kr} \ln m_{kr} > \sum_{kr} m_{kr} \ln \beta_{kr}, \qquad (5)$$

где обозначено $m_{kr} = k\alpha_{kr}, \beta_{kr} = \sum_{k'r'} k\alpha'_{kr,k'r'}$ и $d = \frac{1}{N}\sum_i A_i = \frac{1}{N}\sum_{kr} kr\alpha_{kr}$ (средняя мощность множеств из набора α).

Из (2) вытекает, что

$$\sum_k \beta_{kr} = \sum_{k'r'} k' \sum_k a_{kr,k'r'} \leqslant B_2 C_3^r \sum k' r' \alpha_{k'r'} = BC_3^r Nd. \qquad (6)$$

Далее, с помощью стандартного вычисления условного максимума функции $\sum_{l=1}^{q} b_l \ln x_l$, $x_1 > 0$, ..., $x_q > 0$, при условии, что $\sum_{l=1}^{q} x_l = \text{const}$, находим из (6), что при любом фиксированном r

$$\sum_k m_{kr} \ln \beta_{kr} \leqslant \sum_k m_{kr} \ln m_{kr} - \\ - N_r \ln (N_r/N) + N_r(\ln B_2 + r \ln C_3 + \ln d), \qquad (7)$$

где $N_r = \sum_k m_{kr}$ — число множеств мощности r в наборе α. Суммируя далее (7) по r и замечая, что $\sum_r N_r r = dN$, получаем, что для доказательства (5) достаточно доказать неравенство

$$-\sum_r p_r \ln p_r < \ln d + 1, \qquad (8)$$

где $p_r = N_r/N$. Снова вычисляя условный максимум функции $-\sum_r x_r \ln x_r$, $x_r \geqslant 0$, при условиях $\sum_r x_r = 1$, $\sum_r r x_r = d$, находим, что этот максимум достигается при значениях x_r: $x_r = \frac{1}{d-1}\left(\frac{d-1}{d}\right)^r$ и равен $\ln d + (d-1)\ln\left(\frac{d}{d-1}\right) < \ln d + 1$. Теорема доказана.

Предположим теперь, что T — 1-связное множество, а $\{A_1, \ldots, A_N\}$ — произвольный набор подмножеств A_i.

Теорема 2. *Существует константа $\widetilde{C} = \widetilde{C}(\rho)$ такая, что для всякого набора α верно неравенство*

$$\widetilde{C}\sum_1^N \hat{d}_{A_i} + \sum_1^N \ln n_i \geqslant \sum_1^N \ln v_i \qquad (9)$$

($\hat{d}_A$ — *минимальная мощность 1-связного множества $B \subset T$, содержащего A*; см. (11.4)).

Доказательство этой теоремы проводится так же, как доказательство теоремы 1, с той лишь разницей, что блоки $\mathscr{B}_{kr}$ определяются следующим образом: $\mathscr{B}_{kr} = \left\{\overline{A}_i:\ n_i = k,\ \hat{d}_{\overline{A}_i} = r\right\}$. При этом свойство, аналогичное свойству 3), следует из леммы 5.4.

Пусть задано некоторое множество $S = \{t_1, \ldots, t_m\} \subset T$ точек $t_i \neq t_j$, $i \neq j$, и набор $\alpha = (A_1, \ldots, A_N)$ подмножеств A_i разбит на m поднаборов $\delta_1, \ldots, \delta_m$, $\delta_k \subseteq \alpha$, $k = 1, \ldots, m$, так, что выполнено условие

$$t_k \in \bigcap_{A_i \in \delta_k} A_i, \quad k = 1, \ldots, m. \qquad (9')$$

Лемма 3. *Для любого разбиения $\delta_1, \ldots, \delta_m$ набора α, удовлетворяющего (9′), верна оценка*

$$\sum_{i=1}^N |A_i| + \sum_{k=1}^m |\delta_k| \ln |\delta_k| \geqslant \sum_{i=1}^N \ln n_i. \qquad (10)$$

Доказательство. Пусть $\{\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_s\}$ — совокупность попарно различных множеств из набора α и $n_i^{(k)}$ — число множеств из набора δ_k, совпадающих с $\bar{A}_i$, $k = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, s$. Поскольку $\sum_{i=1}^{s} n_i^{(k)} = |\delta_k|$, из очевидного неравенства $\sum_{i=1}^{s} n_i^{(k)} \ln\left(n_i^{(k)}/|\delta_k|\right) \leqslant 0$, $k = 1, \ldots, m$, вытекает, что

$$\sum_{i,k} n_i^{(k)} \ln n_i^{(k)} \leqslant \sum_k |\delta_k| \ln |\delta_k|. \tag{11}$$

Пусть множество $\bar{A}_i$ входит ровно в r поднаборов $\delta_{k_1}, \delta_{k_2}, \ldots, \delta_{k_r}$. В этом случае множество точек $\{t_{k_1}, t_{k_2}, \ldots, t_{k_r}\} \subseteq \bar{A}_i$ и $|\bar{A}_i| \geqslant r$.

Воспользовавшись известным энтропийным неравенством: для любых $b_1 \geqslant 0, \ldots, b_r \geqslant 0$

$$\sum_{p=1}^{r} b_p \ln b_p \geqslant \left(\sum_{p=1}^{r} b_p\right) \ln \frac{1}{r} \left(\sum_{p=1}^{r} b_p\right)$$

и тем, что $\sum_{p=1}^{r} n_i^{(k_p)} = n_i$ (n_i — кратность множества $\bar{A}_i$ в наборе α), получаем, что $\sum_k n_i^{(k)} \ln n_i^{(k)} \geqslant n_i \ln (n_i/r)$ и, следовательно,

$$n_i |\bar{A}_i| + \sum_k n_i^{(k)} \ln n_i^{(k)} \geqslant n_i \ln n_i. \tag{12}$$

Просуммировав (12) по i и воспользовавшись (11), получим (10).

Из этой леммы и теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Существует такая константа $\widehat{C}$, что для любого набора множеств $\alpha = (A_1, \ldots, A_N)$, любого множества точек $\{t_1, \ldots, t_m\}$, $t_i \neq t_j$, $i \neq j$, и любого разбиения $\delta_1, \ldots, \delta_m$ набора α, удовлетворяющего условию (9′), верна оценка*

$$\widehat{C} \sum_{i=1}^{N} \widehat{d}_{A_i} + \sum_{k=1}^{m} |\delta_k| \ln |\delta_k| \geqslant \sum_{i=1}^{N} \ln v_i. \tag{13}$$

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — система конечных подмножеств T, удовлетворяющая условиям 1′) и 2′) § 4, и $\widehat{d}_A(\mathfrak{A})$ — минимальная мощность связного набора множеств из $\mathfrak{A}$, покрывающего A (см. 11.4)). Тогда из (13) и леммы 7.4 находим, что

$$C^* \sum_{i=1}^{N} \widehat{d}_{A_i}(\mathfrak{A}) + \sum_{k=1}^{m} |\delta_k| \ln |\delta_k| \geqslant \sum_{i=1}^{N} \ln v_i, \tag{14}$$

где $C^* = C^*(\mathfrak{A}, \rho)$ — абсолютная константа.

§ 6. Структуры и вычисление их функций Мёбиуса

Структуры. Пусть дано конечное частично упорядоченное множество P с отношением порядка $\leqslant$. Верхняя грань множества $X \subset P$ определяется как элемент $p \in P$ такой, что $x \leqslant p$ для всех $x \in X$. Наименьшая верхняя грань $\sup X$ есть верхняя грань, которая $\leqslant$ всех других верхних граней.

Аналогично определяется и наибольшая нижняя грань $\inf X$ множества $X \subset P$. Упорядоченное множество P называется *структурой*, если любые два элемента $p_1, p_2 \in P$ имеют наименьшую верхнюю грань $p_1 \vee p_2 \equiv \sup\{p_1, p_2\}$ и наибольшую нижнюю грань $p_1 \wedge p_2 \equiv \inf\{p_1, p_2\}$. Далее, P всегда предполагается структурой. Наибольший и наименьший элементы P обозначаются $\underline{0}$ и $\underline{1}$ соответственно.

Пример 1. $P = \mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$ есть множество всех разбиений $\alpha = \{A_1, \ldots, A_k\}$ множества $\mathcal{N} = (1, 2, \ldots, n)$, причем $\alpha \leqslant \beta = \{B_1, \ldots, B_l\}$, если каждый блок A_i разбиения α содержится в некотором блоке β (α «мельче» β) (см. § 1).

Пример 2. Пусть G — связный граф, множество вершин которого есть $\mathcal{N}$, и пусть $\mathfrak{A}_{\mathcal{N}}^{G} \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$ есть множество всех разбиений $\alpha = \{A_1, \ldots, A_k\}$ таких, что каждый блок A_i есть связный подграф G.

Легко убедиться, что $\mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$ и $\mathfrak{A}_{\mathcal{N}}^{G}$ — структуры.

Для каждой структуры P через P^* будем обозначать двойственную ей структуру, элементами которой являются элементы P, а отношение порядка изменено на противоположное:

$$x \leqslant y \text{ в } P^*, \quad \text{если} \quad y \leqslant x \text{ в } P.$$

Для любых двух элементов $x, y \in P$, $x < y$, множество $[x, y] = \{z \in P:\ x \leqslant z \leqslant y\}$ называется *сегментом*. Очевидно, что всякий сегмент также является структурой.

Элементарные сведения о функциях Мёбиуса. Рассмотрим множество всех (комплексных или вещественных) функций $f(x, y)$ двух переменных $x, y \in P$ таких, что $f(x, y)$ может быть отлична от нуля, лишь если $x \leqslant y$. Это множество функций образует алгебру (инцидентности) над числовым полем с обычными поточечными сложением и умножением на скаляр и с умножением, имеющим вид свертки

$$(f \times g)(x, y) = \sum_{z \in [x, y]} f(x, z)\, g(z, y).$$

Эта алгебра имеет единицу — символ Кронекера $\delta(x, y)$. Определим ζ-функцию:

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leqslant y, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

Лемма 1. *ζ-функция обратима в алгебре инцидентности.*

Доказательство. Определим функцию Мёбиуса $\mu_P = \mu(x, y)$ структуры P рекуррентно:

$$\mu(x, x) = 1, \qquad \mu(x, y) = -\sum_{z: x \leqslant z < y} \mu(x, z). \tag{2}$$

Легко убедиться, что $\mu \times \zeta = \zeta \times \mu = \delta$.

Лемма 2 (формула обращения Мёбиуса). *Пусть f — функция на P и*

$$g(x) = \sum_{y \leqslant x} f(y). \tag{3}$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{y \leqslant x} g(y)\, \mu(y, x). \tag{4}$$

Доказательство. В самом деле,

$$\sum_{y \leqslant x} g(y)\, \mu(y, x) = \sum_{y \leqslant x} \sum_{z \leqslant y} f(z)\, \mu(y, x) =$$
$$= \sum_z f(z) \sum_{z \leqslant y \leqslant x} \zeta(z, y)\, \mu(y, x) = \sum_z f(z)\, \delta(z, x) = f(x).$$

Следующие свойства функций Мёбиуса, необходимые нам в дальнейшем, легко следуют из определения (2):

1. Пусть $x < y$, $z, z' \in [x, y]$. Тогда

$$\mu_P(z, z') = \mu_{[x, y]}(z, z'). \tag{5}$$

2. Пусть P^* — структура, двойственная к P. Тогда

$$\mu_P(x, y) = \mu_{P^*}(y, x). \tag{6}$$

3. Пусть $P \times Q$ — декартово произведение структур P и Q, т. е. множество пар (p, q), $p \in P$, $q \in Q$, причем $(p_1, q_1) \leqslant (p_2, q_2)$ тогда и только тогда, когда $p_1 \leqslant p_2$, $q_1 \leqslant q_2$. В этом случае

$$\mu_{P \times Q}[(p_1, q_1), (p_2, q_2)] = \mu_P(p_1, p_2)\mu_Q(q_1, q_2). \tag{7}$$

4. (Принцип включения — исключения.) Пусть P — структура всех подмножеств x некоторого множества; $x \leqslant y$ означает, что $x \subseteq y$. Тогда

$$\mu_P(x, y) = (-1)^{|y| - |x|}, \qquad x \leqslant y, \tag{8}$$

где $|x|$ — число элементов в x.

Это следует из того, что P изоморфна декартовой степени двухточечных структур: $\{\underline{0}, \underline{1}\}$, где $\underline{0} < \underline{1}$, а $\mu_{\{\underline{0}, \underline{1}\}}(\underline{0}, \underline{1}) = -1$.

Из (8) и (4) следует, что если для любой функции $f(x)$, определенной на подмножествах, положить $g(x) = \sum_{y \subseteq x} f(y)$, то

$$f(x) = \sum_{y \subseteq x} g(y)\, (-1)^{|x \setminus y|}.$$

Эта формула и называется обычно *принципом включения — исключения.*

Соответствия Галуа. Пусть P и Q — две структуры. Соответствием Галуа между P и Q называется пара отображений ρ: $P \to Q$ и π: $Q \to P$ такая, что

1) ρ и π меняют порядок элементов: $\rho(a) \leqslant \rho(b)$, если $b \leqslant a$, $a, b \in P$, и аналогично для π.

2) $\pi(\rho(p)) \geqslant p$ и $\rho(\pi(q)) \geqslant q$ для всех $p \in P$ и $q \in Q$.

Лемма 3. *Пусть ρ, π задают соответствие Галуа. Пусть, кроме того, $\pi(\underline{1}) = \underline{0}$ и $\pi(q) \neq \underline{0}$ при $q \neq \underline{1}$. Тогда*

$$\mu_Q(\underline{0}, \underline{1}) = \sum_{a: \rho(a) = \underline{0}} \mu_P(\underline{0}, a). \tag{9}$$

Доказательство. Из определения соответствия Галуа следует, что $\pi(x) \geqslant b$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant \rho(b)$ (так как $\pi(x) \geqslant b$ влечет за собой $x \leqslant \rho(\pi(x)) \leqslant \leqslant \rho(b)$ и обратно). Иначе говоря, это означает, что

$$\sum_{a: a \geqslant b} \delta_P(\pi(x), a) = \zeta_Q(x, \rho(b)). \tag{10}$$

Зафиксируем x и рассмотрим $\zeta_Q(x, \rho(b))$ и $\delta_P(\pi(x), a)$ как функции на P (от b и a соответственно). Применим к (10) формулу обращения Мёбиуса:

$$\delta_P(\pi(x), \underline{0}) = \sum_{a \geqslant \underline{0}} \zeta_Q(x, \rho(a))\, \mu_{P*}(a, \underline{0}) =$$
$$= \sum_{a \geqslant \underline{0}} \zeta_Q(x, \rho(a))\, \mu_P(\underline{0}, a). \quad (11)$$

Положим $n = \zeta - \delta$. Из условия леммы следует, что

$$\delta_P(\pi(x), \underline{0}) = 1 - n_Q(x, \underline{1}).$$

Перепишем (11) в виде

$$1 - n_Q(x, \underline{1}) = \zeta_Q(x, \rho(\underline{0})) + \sum_{\underline{0} < a} \mu_P(\underline{0}, a)\, \zeta_Q(x, \rho(a)).$$

Поскольку $\rho(\underline{0}) = \rho(\pi(\underline{1})) = \underline{1}$ имеем $\zeta_Q(x, \rho(\underline{0})) = 1$. Следовательно, $-n_Q(x, \underline{1}) = \sum_{\underline{0}<a} \mu_P(\underline{0}, a)\, \zeta_Q(x, \rho(a))$. Так как $\mu = \delta - \mu n$, получаем

$$\mu_Q(\underline{0}, \underline{1}) = -\sum_{\underline{0} \leqslant x < \underline{1}} \mu_Q(\underline{0}, x)\, n_Q(x, \underline{1}) =$$
$$= \sum_{\underline{0} \leqslant x < \underline{1}} \sum_{a > \underline{0}} \mu_Q(\underline{0}, x)\, \mu_P(\underline{0}, a)\, \zeta_Q(x, \rho(a)) =$$
$$= \sum_{a > \underline{0}} \mu_P(\underline{0}, a)\, \delta_Q(\underline{0}, \rho(a)) = \sum_{a:\, \rho(a) = \underline{0}} \mu_P(\underline{0}, a).$$

Лемма 4. *Пусть L — структура, а подмножество $R \subset L$ таково, что $\underline{1} \notin R$, $\underline{0} \notin R$ и для каждого $x \in L$, $x \neq \underline{0}$, найдется $y \in R$ такое, что $y \leqslant x$. Пусть $k \geqslant 2$ и q — число подмножеств $X \subset R$ таких, что $|X| = k$ и $\sup X = \underline{1}$. Тогда*

$$\mu_L(\underline{0}, \underline{1}) = q_2 - q_3 + q_4 - \ldots \quad (12)$$

Доказательство. Пусть в лемме 3 $Q = L^*$, а P — структура всех подмножеств R. Определим $\pi\colon Q \to P$ так: $\pi(x)$, $x \in Q$, есть множество элементов $y \in R$ таких, что $y \leqslant x$. Для $A \subseteq R$ положим $\rho(A) = \sup A$ в L. Тогда (12) следует из (8) и леммы 3.

Явное вычисление функции Мёбиуса. Определим ранг $r(p)$ элемента $p \in P$ как максимальное число r такое, что существует последовательность $x_1, \ldots, x_{r+1} \in P$ такая, что $\underline{0} = x_1 < x_2 < \ldots < x_{r+1} = p$. Элементы ранга 1 называются *атомами*.

Пусть R — множество атомов P. Структура P называется *геометрической* структурой (или M-структурой), если

1. Любой элемент P является наименьшей верхней гранью некоторого множества атомов.

2. Если p — атом, a — произвольный элемент, то либо $p \leqslant a$, либо $p \vee a$ покрывает a (т. е. не существует элемента x такого, что $a < x < p \vee a$)*).

Множество атомов X называется *независимым*, если $r(\sup X) = |X|$, и *порождающим*, если $\sup X = \underline{1}$.

Замечание 1. Легко проверить, что структуры $\mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$ и $\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$, введенные в примерах 1 и 2,— геометрические структуры. Разбиение $\alpha \in \mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$ в том и только в том случае является атомом, если ровно один его блок состоит из двух элементов, а остальные содержат по одному элементу. В случае, когда этот двухэлементный блок соответствует ребру графа G, разбиение $\alpha \in \mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$ по-прежнему является атомом в этой структуре. Таким образом, атомы из $\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$ можно отождествить с ребрами графа G. Пусть, как и выше, $G_X \subseteq G$ обозначает подграф графа G, натянутый на множество ребер X (атомов структуры $\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$). Тогда множества вершин связных компонент G_X совпадают с блоками разбиения $\sup X \in \mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$, содержащими более одного элемента.

Множество атомов $X \subset \mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$ независимо в том и только в том случае, когда G_X есть лес, т. е. G_X не содержит замкнутого пути. Множество атомов X является порождающим в $\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$ в том и лишь в том случае, когда G_X связен и его множество вершин совпадает с $\mathcal{N}$.

Лемма 5. *В геометрической структуре число элементов во всяком независимом порождающем множестве атомов равно $r(\underline{1})$.*

Мы приведем доказательство этой леммы лишь для случая структуры $\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$. Действительно, если X — независимое и порождающее множество атомов (ребер G), то G_X — дерево с множеством вершин $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ и, таким образом, число его ребер $|X| = n - 1$. С другой стороны, во всякой цепочке разбиений

$$\underline{0} = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{r+1} = \underline{1} \quad (12')$$

*) Другие эквивалентные определения геометрической структуры приведены в [7].

число блоков $|\alpha_i| \leqslant n-(i-1)$, $i=1, \ldots, r+1$, и, следовательно, $r \leqslant n-1$. Легко при этом указать цепочку (12′) с $r=n-1$, т. е.

$$r(\underline{1}) = n-1. \qquad (12'')$$

Подмножество атомов T называется *током*, если T не является независимым, но все его (собственные) подмножества независимы.

Замечание 2. Подмножество атомов T образует ток в $\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$ тогда лишь, когда соответствующее множество ребер G (указанное в замечании 1) является замкнутым путем без самопересечений, т. е. каждая вершина G принадлежит либо двум ребрам T, либо не принадлежит ни одному ребру T. Действительно, в графе $G_T \subset G$, составленном из ребер T, существует замкнутый путь. Обозначим множество его ребер через $C \subseteq T$. Поскольку C не является независимым множеством, имеем $C=T$.

Предположим теперь, что множество R всех атомов P занумеровано каким-либо образом: $a_1, \ldots, a_k$. Если $T = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}\}$ — ток, $i_1 < \ldots < i_l$, то

$$T' = \varphi(T) = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{l-1}}\}$$

называется *разомкнутым* током. Через $\varphi^{-1}(T')$ обозначим некоторый ток T такой, что $\varphi(T) = T'$ (при условии, что T существует). Очевидно, в случае структуры $\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$ такой ток единствен.

Теорема 6. *Пусть P — геометрическая структура. Тогда*

$$\mu_P(\underline{0}, \underline{1}) = (-1)^{r(\underline{1})} m_1,$$

где m_1 — число подмножеств $X \subset R$ множества атомов таких, что

1) $|X| = r(\underline{1})$;

2) *X не содержит разомкнутых токов.*

Доказательство. Для фиксированной нумерации элементов множества R всех атомов мы можем занумеровать множество всех разомкнутых токов $T'_1, \ldots, T'_h$ таким образом, что

$$f(T'_s) \leqslant f(T'_j), \quad \text{если} \quad s < j, \qquad (13)$$

где $f(T') = i_k$ есть номер (в зафиксированной нумерации R) последнего атома в $T = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, $i_1 < \ldots < i_k$.

Обозначим R^i_j множество всех порождающих подмножеств $X \subset R$ таких, что $|X| = j$ и X не содержит $T'_1, \ldots, T'_i$; $R^{i,A}_j$ — множество всех порождающих подмножеств $X \subset R$ таких, что $|X| = j$, X не содержит $T'_1, \ldots, T'_{i-1}$, но содержит ток $\varphi^{-1}(T'_i)$; $R^{i,B}_j$ — множество всех порождающих подмножеств $X \subset R$ таких, что $|X| = j$, X не содержит $T'_1, \ldots, T'_{i-1}$, содержит T'_i, но не содержит $\varphi^{-1}(T'_i)$. Тогда для $i = 0, 1, \ldots$ имеем

$$|R^i_j| = |R^{i+1}_j| + |R^{i+1,A}_j| + |R^{i+1,B}_j|. \qquad (14)$$

Докажем, что для всех $i = 0, 1, \ldots$

$$\mu_P(\underline{0}, \underline{1}) = |R^i_2| - |R^i_3| + |R^i_4| - \ldots \qquad (15)$$

индукцией по i. Для $i=0$ это утверждение леммы 4. Для всякого $i>0$ по индукции и согласно формуле (14) имеем

$$\mu_P(\underline{0}, \underline{1}) = |R^{i-1}_2| - |R^{i-1}_3| + |R^{i-1}_4| - \ldots =$$
$$= |R^i_2| - |R^i_3| + |R^i_4| - \ldots + |R^{i,A}_2| +$$
$$+ (|R^{i,B}_2| - |R^{i,A}_3|) - (|R^{i,B}_3| - |R^{i,A}_4|) + \ldots$$

Но $R^{i,A}_2 = 0$, поскольку ток не может содержать в точности два элемента (всякие два атома образуют независимое подмножество).

Определим взаимно однозначное соответствие ζ между $R^{i,B}_j$ и $R^{i,A}_{j+1}$ следующим способом: для $X \in R^{i,B}_j$ положим

$$\zeta(X) = X \cup \{\varphi^{-1}(T'_i)/T'_i\};$$

$\zeta(X) \in R^{i,A}_{j+1}$, так как элемент $a_l = \varphi^{-1}(T'_i) \setminus T'_i$ не может принадлежать ни одному из $T'_1, \ldots, T'_{i-1}$ согласно выбранной нумерации системы разомкнутых токов: если при некотором $j<i$ $a_k \in T'_j$, то $l > f(T'_i) \geqslant f(T'_j) \geqslant k$. Из (15) при $i=h$ следует, что $\mu_P(\underline{0}, \underline{1}) = (-1)^{r(\underline{1})} \left|R^h_{r(\underline{1})}\right|$, так как если X не содержит разомкнутых токов (а следовательно, не содержит вообще токов), то X независимо. Поскольку X в то же время является порождающим, оно содержит в точности $r(\underline{1})$ элементов, поэтому $|R^h_j| = 0$ для $j = r(\underline{1})$. Теорема доказана.

Следствие. *В случае структуры* $\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$, *как следует из* (12″),

$$\mu_{\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}}(\underline{0}, \underline{1}) = (-1)^{n-1} m_1,$$

где m_1 — *число подмножеств* X *ребер* G *таких, что* $|X| = n-1$ *и* X *не содержит разомкнутых токов.*

§ 7. Оценка семиинвариантов частично зависимых случайных величин

Напомним, что в § 1 было определено виртуальное поле $\{f(T),\ T \subseteq \mathcal{N}\}$ на множестве $\mathcal{N}$ (как совокупность его «моментов») и введены формальные семиинварианты $\{g(T),\ T \subseteq \mathcal{N}\}$ с помощью рекуррентной формулы (16.1), которую мы перепишем в виде

$$\begin{aligned} f(T) &= \sum g(B_1) \ldots g(B_k), && |T| > 1, \\ f(T) &= g(T), && |T| = 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где сумма берется по всем разбиениям $\{B_1, \ldots, B_k\}$ множества T.

Пусть теперь $\mathcal{N}$ конечно и $\alpha = \{A_1, \ldots, A_k\}$ — любое его разбиение. Положим

$$f(\alpha) = \prod_{i=1}^{k} f(A_i), \quad g(\alpha) = \prod_{i=1}^{k} g(A_i). \tag{2}$$

Пусть $\mathfrak{A}_{\mathcal{N}} = \mathfrak{A}_n$ — структура всех разбиений множества $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ (см. § 6). Из соотношения (1) получаем, что

$$f(\alpha) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} g(\beta). \tag{3}$$

Из формулы обращения Мёбиуса (см. (4.6)) следует, что

$$g(\alpha) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \mu_{\mathfrak{A}_{\mathcal{N}}}(\beta, \alpha) f(\beta). \tag{4}$$

Сравнивая (4) при $\alpha = \underline{1}$ с формулой (1.16′), получаем, что

$$\mu_{\mathfrak{A}_{\mathcal{N}}}(\beta, \underline{1}) = (-1)^{|\beta|-1}(|\beta|-1)!, \tag{5}$$

где $|\beta|$ — число блоков в разбиении β.

Если заметить, что для всякого $\alpha \geqslant \beta$ сегмент $[\beta, \alpha] \subseteq \mathfrak{A}_{\mathcal{N}}$ изоморфен декартову произведению структур

$\mathfrak{A}_{n_1} \times \ldots \times \mathfrak{A}_{n_s}$, где $s = |\alpha|$, а n_i — число блоков разбиения β, содержащихся в i-м блоке α, то получим, что

$$\mu_{\mathfrak{A}_{\mathcal{N}}}(\beta, \alpha) = \mu_{\mathfrak{A}_{n_1}}(\underline{0}, \underline{1}) \ldots \mu_{\mathfrak{A}_{n_s}}(\underline{0}, \underline{1}) = (-1)^{n-s} \prod_{i=1}^{s} (n_i - 1)!. \tag{6}$$

Пусть G — граф с множеством вершин $\mathcal{N}$ и пусть виртуальное поле $\{f(T),\ T \subseteq \mathcal{N}\}$ независимо относительно графа G (см. определение (1.17)). (Для всех рассматриваемых ниже графов будем предполагать, что между любыми двумя вершинами имеется не более одного ребра.)

Обозначим для любого $A \subseteq \mathcal{N}$

$$C_f(A) = \max \left| \prod_{i=1}^{k} f(B_i) \right|, \tag{7}$$

где максимум берется по всем разбиениям $\{B_1, \ldots, B_k\}$ множества A.

Теорема 1. *Пусть виртуальное поле независимо относительно графа* G *и подграф* G_A, *натянутый на вершины множества* $A \subseteq \mathcal{N}$, *связен. Тогда*

$$|g(A)| \leqslant C_f(A) \frac{3}{2} \prod_{t \in A} (3v_t), \tag{8}$$

где $v_t = v_t^{(A)}$ — *число ребер в* G_A, *инцидентных вершине* $t \in A$.

Следствие. *Пусть* μ_0 — *распределение независимого поля* $\{x_t,\ t \in T\}$ *на множестве* T *и* $F_{A_1}, \ldots, F_{A_N}$ — *набор ограниченных локальных функций (среди которых могут быть и совпадающие). Тогда*

$$|\langle F_{A_1}, \ldots, F_{A_N} \rangle_{\mu_0}| \leqslant \prod_{i=1}^{N} \sup |F_{A_i}| \prod_{i=1}^{N} \overline{C}^{\partial A_i} \prod_{i=1}^{N} n_i, \tag{8′}$$

где $\overline{C}$ — *абсолютная константа,* n_i, $i = 1, \ldots, N$, — *число множеств* A_j *в наборе* $\{A_1, \ldots, A_N\}$, *совпадающих с множеством* A_i.

Оценка (8′) вытекает из (7), (8) и теоремы 2.5.

Для доказательства теоремы 1 заметим, что с помощью леммы 2.1 можно переписать формулу (3) в виде

$$f(\alpha) = \sum_{\beta:\, \beta \leqslant \alpha} g(\beta), \quad \beta \in \mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}. \tag{9}$$

(определение структуры $\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$ см. в предыдущем параграфе).

Если рассматривать α в (9) только принадлежащие $\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$, то можно использовать формулу обращения Мёбиуса для $\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$ и записать для $\alpha \in \mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$

$$g(\alpha) = \sum_{\substack{\beta \leqslant \alpha \\ \beta \in \mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}}} \mu_{\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}}(\beta, \alpha) f(\beta). \tag{10}$$

Лемма 2. *Верна оценка*

$$\left| \mu_{\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}}(\underline{0}, \underline{1}) \right| \leqslant \prod_{t \in \mathcal{N}} v_t. \tag{11}$$

Доказательство. Используем следствие из теоремы 6.6. Тогда $\left| \mu_{\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}}(\underline{0}, \underline{1}) \right| \leqslant m_1 \leqslant \widetilde{m}_1$, где $\widetilde{m}_1$ — число подмножеств X множества ребер G таких, что $|X| = n-1$ и X не содержит ни одного тока. Для оценки $\widetilde{m}_1$ заметим сначала, что X должно быть связным деревом. Определим взаимно однозначное отображение φ_X множества X на некоторое $A \subset \mathcal{N}$, такое, что $|A| = n-1$, следующим образом. Рассмотрим произвольное ребро $\gamma_1 \in X$ и выберем в качестве $\varphi_X(\gamma_1)$ любую из двух вершин, инцидентных γ_1. Предположим по индукции, что определены $\varphi_X(\gamma_1), \ldots, \varphi_X(\gamma_m)$ для $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in X$, причем $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ — связное множество ребер. Пусть V_m есть множество вершин, инцидентных каким-либо из $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Выберем $\gamma_{m+1} \in X$ таким, что одна из его вершин принадлежит V_m; это возможно в силу связности X. Кроме того, обе вершины γ_{m+1} не могут принадлежать V_m, иначе $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{m+1}\}$ содержало бы цикл, поскольку $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ связно по построению. Положим $\varphi_X(\gamma_{m+1})$ равным той из двух вершин γ_{m+1}, которая принадлежит V_m, если она не совпадает ни с одной из ранее определенных вершин $\varphi_X(\gamma_1), \ldots, \varphi_X(\gamma_m)$, и другой — в противном случае.

Определим отображение ψ_X множества $\mathcal{N}$ в множество всех ребер G, положив $\psi_X(t) = \gamma$, если $\varphi_X(\gamma) = t$, $t \in \mathcal{N}$, а в случае, если не существует такого γ, положим $\psi_X(t)$ равным любому γ, инцидентному t. Отображения различны для различных X, поэтому число всевозможных X не превосходит числа всех отображений множества $\mathcal{N}$ в множество ребер G, ставящих в соответствие каждому $t \in \mathcal{N}$

инцидентное ему ребро. Число таких отображений равно $\prod_{t \in \mathcal{N}} v_t$. Лемма доказана.

Теорема очевидным образом следует из (10) при $G = G_A$, $\alpha = \underline{1}$, если будет доказана

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}} \left| \mu_{\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}}(\beta, \underline{1}) \right| \leqslant \frac{3}{2} \prod_{t \in \mathcal{N}} 3 v_t. \tag{12}$$

Заметим, что

$$\mu_{\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}}(\beta, \underline{1}) = \mu_{\mathfrak{A}^{G(\beta)}_{|\beta|}}(\underline{0}, \underline{1}), \tag{13}$$

где граф $G(\beta)$ получается из G отождествлением вершин, принадлежащих одному блоку разбиения β, т. е. верши- нами $G(\beta)$ являются блоки β. Вершины B_i и B_j соединены ребром в $G(\beta)$, если в G существовало ребро между какими-либо $b_1 \in B_i$ и $b_2 \in B_j$.

Равенство (13) вытекает из свойства 1 функции Мёбиуса (см. § 6), а также из того факта, что сегмент $[\beta, \underline{1}] \subset \mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$ изоморфен структуре $\mathfrak{A}^{G(\beta)}_{|\beta|}$.

Доказательство леммы 3. Доказательство основано на некотором специальном процессе постепенного «склепвания» вершин графа G, в результате которого возникают все разбиения $\beta \in \mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$. Этот процесс удобно представлять в виде построения некоторого дерева $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G)$, вершины которого помечаются парами (β, D), где $\beta \in \mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$, а D — некоторое подмножество блоков разбиения β. Кроме того, каждая вершина $t \in \mathcal{G}$ окрашена в свой цвет — красный или голубой. Процесс построения дерева $\mathcal{G}$ состоит из последовательных шагов; вершинам, построенным на k-м шаге, приписывается порядок k. При этом каждая вершина $\bar{t}$ $(k+1)$-го порядка соединена ребром с одной и только одной вершиной t k-го порядка (будем говорить, что $\bar{t}$ лежит под t). Перейдем к построению дерева $\mathcal{G}$.

1. На первом шаге строится единственная вершина 1-го порядка, помеченная парой $(\beta = 0, D = \varnothing)$ и красного цвета.

2. Второй шаг. Занумеруем все элементы множества $\mathcal{N}$ (вершины графа G) так, что

$$v_1 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant v_n \tag{14}$$

(v_i — число ребер в графе G, инцидентных i-й вершине). Вершины 2-го порядка строятся так. Единственная голубая вершина 2-го порядка помечается парой ($\beta=\underline{0}$, $D=\{1\}$). Далее вводится v_1 красных вершин 2-го порядка, помеченных парами $\{\beta_t, D_t=\varnothing\}$, где β_t пробегает все атомы структуры $\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$, которые соответствуют ребрам графа G, инцидентным вершине 1.

3. Пусть построены все вершины $\mathcal{G}$ вплоть до k-го порядка. Пусть $t=(\beta_t, D_t)$, $\beta_t\in\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$, — какая-нибудь вершина k-го порядка и $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — вершины графа $G(\beta_t)$ (блоки β_t), не принадлежащие D_t и занумерованные так, что $v^t_{\xi_1}\leqslant v^t_{\xi_2}\leqslant\ldots\leqslant v^t_{\xi_m}$, где $v^t_{\xi_i}$ — число ребер графа $G(\beta_t)$, инцидентных вершине ξ_i, $i=1, \ldots, m$. Каждая такая вершина t соединена ребром не более чем с одной голубой и не более чем с $v^t_{\xi_1}$ красными вершинами $(k+1)$-го порядка. Голубая вершина строится в случае, когда $m>0$ и ей соответствует пара $(\beta_t, \underline{D_t}\cup\{\xi_1\})$, а красные вершины помечаются парами вида $(\bar\beta_t, D_t)$, где разбиения $\bar\beta_t$ получаются из разбиения β_t склеиванием блока ξ_1 с любым из блоков $\xi_2, \ldots, \xi_m$, соединенных с ним ребром графа $G(\beta_t)$ (при этом блоки из множества D_t не меняются и служат блоками разбиения $\bar\beta_t$).

Предложение 4. *Для всякого разбиения $\beta\in\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$ найдется красная вершина $t\in\mathcal{G}$ такая, что $\beta=\beta_t$.*

Доказательство. Мы проведем его индукцией по числу n элементов множества $\mathcal{N}$. Из нашего построения видно, что для любой вершины $t=(\beta_t, D_t)$ (порядка k) у всех вершин $\bar t=(\beta_{\bar t}, D_{\bar t})$, лежащих ниже t (т. е. вершин порядка, большего k, которые можно соединить с t, проходя по вершинам порядка, большего k), разбиение $\beta_{\bar t}\geqslant\beta$, причем блоки β_t из множества D_t остаются блоками разбиения $\beta_{\bar t}$ и попадают в множество $D_{\bar t}$.

Пусть $\beta\in\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}$ — некоторое разбиение. Рассмотрим три случая.

1. $\beta=\underline{0}$. Тогда $\beta=\beta_t$, где t — 1-я вершина.

2. Пусть $\beta\neq\underline{0}$ и вершина $1\in\mathcal{N}$ графа G (нумерация вершин G та же, что в (14)) составляет отдельный блок разбиения β. Тогда голубая вершина 2-го порядка имеет вид $t=(\beta=0, D=\{1\})$ и поддерево $\mathcal{G}'\subset\mathcal{G}$, натянутое

на t и на вершины $\mathcal{G}$, лежащие ниже t, изоморфно дереву $\mathcal{G}(G')$ (при перекраске вершины t в красный цвет), где $G'\subset G$ — подграф G, натянутый на множество вершин $\mathcal{N}'=\mathcal{N}\setminus\{1\}$. Далее следует воспользоваться предположением индукции.

3. Вершина 1 входит в блок B разбиения β, $|B|\geqslant 2$. Выберем теперь красную вершину $t=(\beta_t, \varnothing)\in\mathcal{G}$ 2-го порядка, получающуюся склеиванием вершины 1 с какой-нибудь другой вершиной из блока B. Разбиение $\beta_t\leqslant\beta$, и поддерево $\mathcal{G}'\subset\mathcal{G}$, начинающееся в вершине t, изоморфно дереву $\mathcal{G}(G(\beta_t))$. Теперь снова применяем предположение индукции.

Положим для каждого $t\in\mathcal{G}$

$$\gamma_t=\prod_{\xi\in G(\beta_t)} v^t_{\xi}.$$

Пусть t — вершина k-го порядка, а t' — вершина $(k+1)$-го порядка, лежащая под t. Если t' — голубая, то по построению

$$\gamma_t=\gamma_{t'}. \tag{15}$$

Если t' — красная, то

$$\frac{\gamma_{t'}}{\gamma_t}\leqslant\frac{v^t_{\xi_1}+v^t_{\xi_r}-2}{v^t_{\xi_1}v^t_{\xi_r}}\leqslant\frac{2}{v^t_{\xi_1}}, \tag{16}$$

где ξ_r — вершина, с которой склеена ξ_1 при построении $G(\beta_{t'})$. Из (16) получим, что $\sum_{t'}\gamma_{t'}\leqslant 2\gamma_t$, где суммирование берется по всем красным вершинам ($(k+1)$-го порядка), расположенным под t. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\text{красным } t\\ \text{порядка } k+1}}\gamma_t &\leqslant 2\sum_{\substack{\text{красным } t\\ \text{порядка } k}}\gamma_t+2\sum_{\substack{\text{голубым } t\\ \text{порядка } k}}\gamma_t\leqslant\\ &\leqslant 2\sum_{\substack{\text{красным } t\\ \text{порядка } k}}\gamma_t+2\sum_{\substack{\text{красным } t\\ \text{порядка } k-1}}\gamma_t+2\sum_{\substack{\text{голубым } t\\ \text{порядка } k-1}}\gamma_t\leqslant\ldots\\ &\ldots\leqslant 2\sum_{\substack{\text{красным } t\\ \text{порядка } \leqslant k}}\gamma_t.\end{aligned}$$

Положим $a_k=\sum_{\substack{\text{красным } t\\ \text{порядка } k}}\gamma_t$. Имеем $a_{k+1}\leqslant 2\sum_{i=1}^{k} a_i$, откуда следует, что $a_k\leqslant 3^k a_1$.

Учитывая предложение 4, лемму 2 и (13), имеем

$$\sum_{\beta\in\mathfrak{A}^G_{\mathcal{N}}} |\mu(\beta, \underline{1})| \leqslant \sum_{\text{красным } t} \gamma_t \leqslant a_1 \sum_{k=1}^{n} 3^k \leqslant \frac{3}{2} \prod_{t\in\mathcal{N}} 3v_t.$$

Лемма 3 доказана.

§ 8. Абстрактные диаграммы (алгебраический подход)

В теории точечных случайных полей часто оказываются удобными диаграммы общего вида (и не относящиеся уже ни к каким гауссовым случайным величинам). Мы изложим здесь эти понятия и связанные с ними алгебраические конструкции, ограничившись случаем чисто точечных полей.

Алгебраический подход. Пусть Q — некоторое (метрическое) пространство и λ — непрерывная мера в Q (т. е. мера $\lambda(\{t\})$ любого одноточечного множества $\{t\}\in Q$ равна нулю). Пусть $\Omega_{\text{фин}}$ — совокупность всех конечных подмножеств Q (с σ-алгеброй $\mathfrak{B}$, определенной в § 1.I) и $\mathcal{A}$ — совокупность всех измеримых (комплексных) функций $\psi(x)$, $x\in\Omega_{\text{фин}}$, на Ω. Относительно умножения

$$(\psi_1\times\psi_2)(x) = \sum_{\substack{x_1,x_2:\\ x_1\cap x_2=\varnothing,\, x_1\cup x_2=x}} \psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2), \tag{1}$$

где суммирование происходит по упорядоченным парам непересекающихся подмножеств (x_1, x_2), $x_i\subset x$, $i=1, 2$, таких, что $x_1\cup x_2=x$ (включая и пары $(\varnothing, x)$ и $(x, \varnothing)$), совокупность $\mathcal{A}$ образует коммутативную алгебру с единицей

$$\mathbb{1}(x) = \begin{cases} 1, & x=\varnothing,\\ 0, & x\neq\varnothing.\end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что для всякого элемента $\psi\in\mathcal{A}$ любая его степень $(\psi)^{\times n} \equiv \underbrace{\psi\times\ldots\times\psi}_{n\text{ раз}}$ равна

$$(\psi)^{\times n}(x) = \sum_{k=1}^{|x|} \psi^{n-k}(\varnothing) \sum^{(k)}_{\{x_1,\ldots,x_k\}} \prod_{i=1}^{k}\psi(x_i),$$
$$(\psi)^{\times n}(\varnothing) = \psi^n(\varnothing), \tag{3}$$

где сумма $\sum^{(k)}_{\{x_1,\ldots,x_k\}}$ берется по всем разбиениям множества x, состоящим из k блоков $\Bigl($т. е. по неупорядоченным наборам $\{x_1, \ldots, x_k\}$ попарно непересекающихся непустых подмножеств $x_i\subseteq x$ таких, что $\bigcup_{i=1}^{k} x_i = x\Bigr)$.

Обозначим через $\mathcal{A}_+\subset\mathcal{A}$ идеал алгебры $\mathcal{A}$, состоящий из функций таких, что $\psi(\varnothing)=0$. Введем отображение $\mathcal{A}_+\to\mathbb{1}+\mathcal{A}_+$:

$$\psi\mapsto \operatorname{Exp}\psi = \mathbb{1}+\psi+\frac{1}{2!}(\psi)^{\times 2}+\ldots+\frac{1}{n!}(\psi)^{\times n}+\ldots \tag{4}$$

Из формулы (3) находим, что

$$(\operatorname{Exp}\psi)(\varnothing) = 1,$$
$$(\operatorname{Exp}\psi)(x) = \sum_{\{x_1,\ldots,x_k\}} \prod_{i=1}^{k}\psi(x_i), \quad x\neq\varnothing, \tag{5}$$

где сумма берется по всем разбиениям множества x.

Лемма 1. *Обратное отображение к отображению* (4), *определенное на множестве* $\mathbb{1}+\mathcal{A}_+$, *существует, и*

$$(\operatorname{Exp})^{-1}(\mathbb{1}+\psi) \equiv \operatorname{Log}(\mathbb{1}+\psi) =$$
$$= \psi-\frac{1}{2}(\psi)^{\times 2}+\frac{1}{3}(\psi)^{\times 3}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n}(\psi)^{\times n}+\ldots, \tag{6}$$

или, в согласии с формулой (3),

$$(\operatorname{Log}(\mathbb{1}+\psi))(\varnothing) = 0,$$
$$(\operatorname{Log}(\mathbb{1}+\psi))(x) = \sum_{\{x_1,\ldots,x_k\}} (-1)^{k-1}(k-1)!\prod_{i=1}^{k}\psi(x_i),$$
$$x\neq\varnothing, \tag{7}$$

где сумма берется по всем разбиениям множества x.

Доказательство просто, и мы его опускаем. Заметим, что формула (5) похожа на формулу, выражающую моменты через семиинварианты, а формула (7) — на формулу, выражающую семиинварианты через моменты. (См. § 1, свойства D и E.)

Пусть $\psi\in\mathcal{A}$ и $\xi=\{\xi(t),\ t\in Q\}$ — ограниченная измеримая финитная (комплексная) функция на пространстве Q ($\xi(t)=0$ вне некоторой ограниченной области $\Lambda\subset$

$\subset Q$). Определим функционал от ξ:

$$\psi(\xi) = \int \psi(x) \left(\prod_{t \in x} \xi(t) \right) d\nu_\lambda(x) \tag{8}$$

в предположении, что интеграл в правой части (8) абсолютно сходится. Здесь ν_λ — мера на $\Omega_{\text{фин}}$, определяемая с помощью меры λ в Q (см. § 1.I). Если интеграл (8) существует для всех финитных функций ξ, принадлежащих круговой области

$$D_r = \{\xi\colon \max |\xi(t)| < r, \quad \xi \text{ финитна}\} \tag{9}$$

при некотором $r > 0$, то функционал $\psi(\xi)$ аналитичен в D_r. Пусть $\tilde{\mathscr{A}} \subseteq \mathscr{A}$ — множество тех функций $\psi \in \mathscr{A}$, для которых функционал $\psi(\xi)$ определен в некоторой области D_r. Легко проверить, что $\tilde{\mathscr{A}} \subset \mathscr{A}$ является подалгеброй $\mathscr{A}$ и отображение $\psi \mapsto \psi(\xi)$, $\psi \in \tilde{\mathscr{A}}$, есть гомоморфизм $\tilde{\mathscr{A}}$ в множество аналитических ростков в точке $\xi = 0$ (т. е. функционалов от ξ, аналитических в некоторой области D_r вида (9), $r > 0$). Иначе говоря,

$$\psi_1(\xi) \cdot \psi_2(\xi) = (\psi_1 \times \psi_2)(\xi), \quad \psi_1, \psi_2 \in \tilde{\mathscr{A}}. \tag{10}$$

Диаграммы. *Диаграммой* (мультиграфом) назовем пару $G = (x, \Gamma)$, где $x \in \Omega_{\text{фин}}$, $x \neq \varnothing$, — множество вершин G, а $\Gamma = \{x_1, \ldots, x_s\}$ — произвольный неупорядоченный набор подмножеств $x_i \subseteq x$, $|x_i| \geqslant 2$, которые называются (мульти) ребрами G. Для диаграммы $G = \{x, \Gamma\}$ связные компоненты $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$ набора $\Gamma = \{x_1, \ldots, x_s\}$ определяют связные диаграммы $G_j = (y_j, \Gamma_j)$, где

$$y_j = \bigcup_{x_i \in \Gamma_j} x_i,$$

называемые связными компонентами G. Для двух диаграмм $G_1 = (x_1, \Gamma_1)$ и $G_2 = (x_2, \Gamma_2)$, у которых $x_1 \cap x_2 = \varnothing$, определим их объединение $G_1 \cup G_2 = (x_1 \cup x_2, \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ ($\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — набор, получающийся объединением наборов Γ_1 и Γ_2).

Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторое семейство диаграмм, обладающее следующими свойствами:

1) для любой диаграммы $G \in \mathfrak{G}$ все ее связные компоненты $G_j \in \mathfrak{G}$;

2) для любых двух диаграмм $G_1 = (x_1, \Gamma_1)$, $G_2 = (x_2, \Gamma_2)$, у которых $x_1 \cap x_2 = \varnothing$, диаграмма $G_1 \cup G_2 \in \mathfrak{G}$.

Всякий такой класс диаграмм будем называть *допустимым.* Вот примеры допустимых семейств диаграмм:

1) все диаграммы без кратных ребер (т. е. в наборе $\Gamma = \{x_1, \ldots, x_s\}$ все x_i различны);

2) все диаграммы $G = (x, \Gamma)$, у которых число ребер $x_i \in \Gamma$, инцидентных любой точке $t \in X$, не превосходит некоторого заданного числа.

Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторый допустимый класс диаграмм. Для любой функции $\psi \in \mathscr{A}_+$ определим две функции $Z \in \mathscr{A}_+$ и $F \in \mathscr{A}_+$ на $\Omega_{\text{фин}}$ по формулам

$$Z(x) = \sum_{G = (x, \Gamma) \in \mathfrak{G}}^{(x)} \prod_{x_i \in \Gamma} \psi(x_i), \tag{11}$$

$$F(x) = \sum_{G = (x, \Gamma) \in \mathfrak{G}_{\text{св}}}^{(x)} \prod_{x_i \in \Gamma} \psi(x_i), \tag{12}$$

где суммирование $\sum\limits_{G \in \mathfrak{G}}^{(x)}$ означает суммирование по диаграммам из $\mathfrak{G}$ с множеством вершин x, а $\sum\limits_{G \in \mathfrak{G}_{\text{св}}}^{(x)}$ означает аналогичную сумму по связным диаграммам из $\mathfrak{G}$.

Как легко следует из определений (11) и (12), функции Z и F связаны соотношением

$$Z = \operatorname{Exp} F. \tag{13}$$

Предположим, что Z и F принадлежат $\tilde{\mathscr{A}}$, и определим функционалы $Z(\xi)$ и $F(\xi)$ по формуле (8):

$$Z(\xi) = \int_{\Omega_{\text{фин}}} Z(x) \prod_{t \in x} \xi(t)\, d\nu_\lambda,$$

$$F(\xi) = \int_{\Omega_{\text{фин}}} F(x) \prod_{t \in x} \xi(t)\, d\nu_\lambda.$$

Лемма 2. *Функционалы* $Z(\xi)$ *и* $F(\xi)$ *связаны соотношением*

$$Z(\xi) = \exp\{F(\xi)\}. \tag{14}$$

Доказательство непосредственно следует из (10) и (13).

ГЛАВА III

ОБЩАЯ СХЕМА КЛАСТЕРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

§ 1. Кластерное представление статистической суммы и ансамбль подмножеств

Развиваемая здесь кластерная техника относится к случайным полям на счетном множестве T. Отметим, что для того, чтобы применить эту технику к точечным и функциональным полям, следует их предварительно редуцировать к полям на счетном множестве, как это объяснялось в главе I. Для точечных полей, однако, существует особая техника (см. § 6).

Пусть T — счетное множество и для каждого конечного $\Lambda \subset T$ определены гиббсовские перестройки в Λ и их статистические суммы Z_Λ (см. § 1.I). Основной шаг в построении кластерных разложений состоит в получении кластерного представления статистических сумм Z_Λ.

Предположим, что на T определена метрика $\rho(\cdot, \cdot)$, причем для всякого $d > 0$ мощность d-окрестности любой точки $t \in T$ не превосходит $v = v(d) < \infty$. Фиксируем $d > 0$ и назовем разбиение $\alpha = \{A_1, \ldots, A_n\}$ множества Λ *допустимым* (точнее, *d-допустимым*), если для любых двух различных его блоков A_i и A_j, $|A_i| \geqslant 2$, $|A_j| \geqslant 2$, имеет место неравенство $\rho(A_i, A_j) \geqslant d$.

Определение 1. Будем говорить, что статистические суммы допускают *кластерное представление*, если каждому конечному множеству $A \subset T$ поставлено в соответствие число k_A так, что выполнены следующие условия:

1) (кластерное представление) для всех конечных $\Lambda \subset T$

$$Z_\Lambda = \sum_\alpha k_{A_1} \ldots k_{A_n}, \tag{1}$$

где сумма берется по всем допустимым разбиениям $\alpha = (A_1, \ldots, A_n)$ множества Λ;

2) (кластерная оценка) для всех $t \in T$ и всех $n \geqslant 2$

$$\sum_{A:\, t \in A, |A| = n} |k_A| \leqslant c\lambda^n, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

где $\lambda \geqslant 0$ называется *параметром кластерности*, а $c > 0$ достаточно мало (см. ниже);

3) для $|A| = 1$

$$|k_A| \geqslant k > \lambda. \tag{3}$$

Замечание 1. Часто бывает удобно несколько более общее определение кластерного представления Z_Λ, $\Lambda \subset T$:

$$Z_\Lambda = \sum k_{\Gamma_1} \ldots k_{\Gamma_n}, \tag{4}$$

где «кластер» $\Gamma = (A, \vartheta)$ есть пара: конечное подмножество $A = A(\Gamma) \subset \hat{T}$ некоторого счетного множества $\hat{T}$ (часто $\hat{T}$ совпадает с T), $A(\Gamma)$ называется *носителем* кластера, ϑ — элемент некоторого абстрактного пространства, своего для каждого A, k_{Γ_i} — числа, сопоставленные кластерам. Суммирование в (4) происходит по всем неупорядоченным наборам кластеров таким, что набор их носителей образует допустимое разбиение множества $\hat{\Lambda} \subset \hat{T}$, где $\hat{\Lambda}$ однозначно определяется по $\Lambda \subset T$. При этом требуется:

1) для любого $\hat{t} \in \hat{T}$ и любого $n \geqslant 2$

$$\sum_{\substack{\Gamma:\, \hat{t} \in A(\Gamma), \\ |A(\Gamma)| = n}} |k_\Gamma| < c\lambda^n; \tag{5}$$

2) для любого $\hat{t} \in \hat{T}$ имеется ровно один кластер Γ с $A(\Gamma) = \{\hat{t}\}$ и при этом

$$|k_\Gamma| \geqslant K > \lambda \tag{6}$$

(для λ и c выполнены те же условия, что и выше).

Заметим, что если $\hat{T} = T$ и для любого конечного $A \subset T$ положить $k_A = \sum\limits_{\Gamma: A(\Gamma) = A} k_\Gamma$, то из (4) получаем (1). При этом ансамбль кластеров вводится аналогично рассматриваемому ниже ансамблю подмножеств.

Как получить кластерное представление статистических сумм Z_Λ — это особая задача, которая будет разбираться в следующих главах (см. также § 5 этой главы). В одних случаях это представление получается очень просто (§ 5), а в других — сложнее (§ 7.IV, § 8.IV). Но коль скоро оно получено, дальнейшее построение кластерных разложений проводится по единой схеме, к которой мы и переходим.

Лемма 1. *Семейство величин* $\{Z_\Lambda, \Lambda\subset T, |\Lambda|<\infty\}$ *допускает кластерное представление* (1) (*для всех конечных* $\Lambda\subset T$) *тогда и только тогда, когда для любого конечного непустого множества* $B\subset T$ *и всех* $t\in B$ *выполнены следующие соотношения*:

$$Z_B = k_{\{t\}} Z_{B\setminus\{t\}} + \sum_{A\subseteq\Lambda:\, t\in A} k_A \Big[\prod_{s\in\bar A} k_{\{s\}}\Big] Z_{B\setminus\bar A}, \tag{7}$$

где полагается $Z_\varnothing=1$, $\bar A=\bar A_d=\{t\colon \rho(t, A)<d\}$, $|A|\geqslant 2$ *и* $\bar A=A$ *при* $|A|=1$.

Доказательство. Положим в (1) $\Lambda=B$, и для фиксированной точки $t\in\Lambda=B$ пусть $t\in A_1$. Обозначая $A=A_1$ и суммируя в (1) по $A_2, \ldots, A_n$, получим формулу (7). Обратно, в силу рекуррентного характера соотношений (7) и того, что $Z_\varnothing=1$, удовлетворяющая им система величин Z_Λ единственна и, следовательно, имеет вид (1).

Лемма 2. *Пусть система величин* $\{Z_\Lambda, \Lambda\subset T\}$ *допускает кластерное представление* (1) (*или, что одно и то же, удовлетворяет соотношениям* (7)) *так, что выполнены условия* (2) *и* (3), *причем константа* c *в* (2) *достаточно мала. Тогда при всех конечных* $\Lambda\subset T$

$$Z_\Lambda\neq 0. \tag{8}$$

Доказательство этой леммы, а также ее значительные уточнения будут получены в качестве следствия дальнейших построений. В этом же параграфе и двух последующих мы будем, не оговаривая этого особо, предполагать, что k_A таковы, что условие (8) выполнено. Заметим, что при $k_A\geqslant 0$ это условие выполнено очевидным образом.

Ансамбль подмножеств. Полезно интерпретировать разложение (1) и вводимые дальше понятия с помощью «ансамбля подмножеств», который мы сейчас опишем. Для любого фиксированного Λ введем пространство элементарных событий $\mathfrak{A}(\Lambda)$ — множество всех допустимых разбиений Λ. «Вероятностью» допустимого разбиения $\alpha=\{A_1, \ldots, A_n\}$ назовем число

$$p^{(\Lambda)}(\alpha) = Z_\Lambda^{-1} k_{A_1}\ldots k_{A_n}. \tag{9}$$

Отметим, что в случае, когда некоторые k_A отрицательны (или комплексны), числа $p^{(\Lambda)}(\alpha)$ не являются обычными вероятностями.

Пусть $\Gamma=\{A_1, \ldots, A_n\}$ — произвольный допустимый (т. е. такой, что $\rho(A_i, A_j)\geqslant d$, если $|A_i|\geqslant 2$, $|A_j|\geqslant 2$) неупорядоченный набор попарно непересекающихся подмножеств Λ. Обозначим

$$\tilde\Gamma = \bigcup_{i=1}^n A_i, \qquad \tilde{\bar\Gamma} = \bigcup_{i=1}^n \bar A_i.$$

Определим «вероятность» Γ как

$$\rho^{(\Lambda)}(\Gamma) = \sum_{\alpha:\,\Gamma\subseteq\alpha} \rho^{(\Lambda)}(\alpha) = k_{A_1}\ldots k_{A_n} \prod_{t\in\tilde{\bar\Gamma}\setminus\tilde\Gamma} k_{\{t\}}\, \frac{Z_{\Lambda\setminus\tilde{\bar\Gamma}}}{Z_\Lambda}, \tag{10}$$

где сумма берется по всем допустимым разбиениям α таким, что каждое $A_i\in\Gamma$ является блоком в разбиении α. Функцию $\rho^{(\Lambda)}(\Gamma)$, определенную на множестве допустимых наборов Γ, назовем *корреляционной функцией* ансамбля подмножеств Λ.

Теорема 3. *Пусть статистические суммы* Z_Λ, $\Lambda\subset T$, *допускают кластерное представление* (1) *с условиями* (2) *и* (3) *и константа* c *в* (2) *удовлетворяет условию* $c<c_0(\lambda/k)$, *где* c_0 *определено в* (23′). *Тогда существует предельная корреляционная функция* $\rho(\Gamma)$, *где* Γ — *конечный допустимый набор множеств, такая, что*

$$\lim_{\Lambda\nearrow T} \rho^{(\Lambda)}(\Gamma) = \rho(\Gamma). \tag{11}$$

Эта теорема будет доказана в § 3.

Особую роль играют отношения

$$f_A^{(\Lambda)} = \frac{Z_{\Lambda\setminus A}}{Z_\Lambda}\prod_{t\in A} k_{\{t\}}, \quad f_\varnothing=1. \tag{12}$$

Если $A=\{t_1, \ldots, t_h\}$, то очевидно, что

$$f_A^{(\Lambda)} = \rho^{(\Lambda)}(\Gamma), \tag{13}$$

где набор $\Gamma=\{\{t_1\}, \ldots, \{t_h\}\}$ состоит из одноточечных подмножеств. Таким образом, в случае, когда выполнены условия теоремы 1, существует предел

$$\lim_{\Lambda\nearrow T} f_A^{(\Lambda)} \overset{\text{def}}{=} f_A = \rho(\Gamma). \tag{14}$$

Из (10) и (12) находим, что

$$\rho^{(\Lambda)}(\Gamma) = g_{A_1}\ldots g_{A_n} f^{(\Lambda)}_{\tilde{\bar\Gamma}}, \quad \Gamma=\{A_1, \ldots, A_n\}, \tag{15}$$

где обозначено

$$g_A = k_A\Big/\prod_{t\in A} k_{\{t\}}. \tag{15′}$$

Из (15) видно, что существование предела (11) достаточно доказать для частного случая (14).

Как видно из (12), величины $f_A^{(\Lambda)}$ являются рациональными функциями от переменных $\{g_B,\ |B|\geqslant 2,\ B\subseteq\Lambda\}$, причем $f_A^{(\Lambda)}(g_B\equiv 0)=1$. Таким образом, $f_B^{(\Lambda)}$ разлагается в степенной ряд по этим переменным, сходящийся в некоторой окрестности нуля, которая зависит, вообще говоря, от A и Λ. Однако, как мы покажем ниже (это и есть основная цель кластерных разложений), эта окрестность может быть выбрана единой для всех $A\subseteq\Lambda$, и ее размеры не зависят от Λ.

Обозначим через $\eta=\{A_1,\ \ldots,\ A_n\}$ произвольный неупорядоченный набор подмножеств, $|A_i|\geqslant 2$, $i=1,\ \ldots,\ n$, среди которых могут быть и одинаковые, и пусть $g_\eta=\prod\limits_{A\in\eta} g_A$. Тогда искомые ряды имеют вид

$$f_A^{(\Lambda)}=\sum_\eta D^{(\Lambda)}(A;\ \eta)\,g_\eta. \tag{16}$$

Коэффициенты $D^{(\Lambda)}(A;\ \eta)$ нетрудно представить в явном виде через функции, подобные функциям Мёбиуса для некоторых структур (см. § 6.II). Однако такое представление этих коэффициентов мало помогает исследованию сходимости ряда (16). Поэтому вводится другое представление для этих рядов, к которому мы сейчас и переходим.

Фиксируем для каждого конечного $D\subset T$ точку $t=t_D\in D$.

Лемма 4. *При любом выборе точек $t_D\in D$ система величин $\{f_D^{(\Lambda)},\ D\subseteq\Lambda\}$ удовлетворяет соотношениям*

$$f_D^{(\Lambda)}-f_{D\setminus\{t_D\}}^{(\Lambda)}+\sum\nolimits^{(D)} g_A f^{(\Lambda)}_{D\cup(\overline{A}\cap\Lambda)}=0 \tag{17}$$

при $|D|\geqslant 2$, *и при* $|D|=1$

$$f_D^{(\Lambda)}+\sum\nolimits^{(D)} g_A f^{(\Lambda)}_{D\cup(\overline{A}\cap\Lambda)}=1, \tag{17$'$}$$

где суммирование в $\sum^{(D)}$ *происходит по множествам* $A\subseteq\Lambda$ *таким, что* $A\cap D=\{t_D\}$ *и* $|A|\geqslant 2$.

Доказательство. Формула (7), в которой множество $B\subset\Lambda$ заменено на $\Lambda\setminus B$, после деления на Z_Λ и умножения на $\prod\limits_{t'\in B} k_{\{t'\}}$ перепишется так:

$$f_B^{(\Lambda)}=f^{(\Lambda)}_{B\cup\{t\}}+\sum g_A f^{(\Lambda)}_{B\cup(\overline{A}\cap\Lambda)}.$$

Полагая здесь $t=t_D$ и $B=D\setminus\{t_D\}$, получим (17) и (17′).

Систему (17), (17′) удобно записать в операторном виде. Для этого рассмотрим линейное пространство $\mathscr{B}^{(\Lambda)}$ комплексных векторов $\varphi^{(\Lambda)}=\{\varphi_A^{(\Lambda)},\ A\subseteq\Lambda\}$, координаты которых занумерованы всеми непустыми подмножествами $A\subset\Lambda$ (верхний индекс (Λ) для краткости иногда будет опускаться).

Определим оператор R (обобщенный «сдвиг») в $\mathscr{B}^{(\Lambda)}$:

$$(R\varphi)_A=\begin{cases}\varphi_{A\setminus\{t_A\}}, & |A|\geqslant 2,\\ 0, & |A|=1,\end{cases}$$

и оператор $K=K^{(\Lambda)}$ в $\mathscr{B}^{(\Lambda)}$:

$$(K\varphi)_A=-\sum\nolimits^{(A)} g_B\varphi_{A\cup(\overline{B}\cap\Lambda)}. \tag{18}$$

Обозначим через $\delta=\delta^{(\Lambda)}$ вектор с координатами

$$\delta_A=\begin{cases}1, & |A|=1,\\ 0, & |A|>1.\end{cases}$$

В этих обозначениях система уравнений (17), (17′) перепишется в виде

$$f^{(\Lambda)}-(R+K)f^{(\Lambda)}=\delta. \tag{19}$$

Для ее исследования введем в $\mathscr{B}^{(\Lambda)}$ норму

$$\|\varphi\|_M=\sup_{A\subseteq\Lambda}|\varphi_A|\frac{1}{M^{|A|}}, \tag{20}$$

где $M>0$ — некоторая константа, которая будет указана ниже.

Заметим, что $\|R\|<1/M$, а из (2) и (3) следует, что при $\frac{\lambda}{k}M^v<1$ (напомним, что v обозначает максимальную мощность d-окрестности любой точки $t\in T$)

$$\|K\|<\frac{1}{M}\sup\sum\nolimits^{(A)}|g_B|\,M^{|\overline{B}\cap\Lambda|}\leqslant\frac{c}{M}\sum_{n\geqslant 2}(M^v\lambda/k)^n. \tag{21}$$

Таким образом, из (21) следует, что

$$\|R+K\|\leqslant\left(\frac{\lambda}{k}\right)^{1/v}\frac{1}{x^{1/v}}\left(1+c\frac{x^2}{1-x}\right),$$

где $x=(\lambda/k)M^v$.

Обозначим через $h(c)$ величину

$$h(c) = \min_{0<x<1} \frac{1}{x^{1/v}}\left(1 + c\,\frac{x^2}{1-x}\right),$$

а через $x_0 = x_0(c) \in (0,\ 1)$ — точку, в которой достигается этот минимум. Выбирая

$$M = [(\lambda/k)^{-1} x_0(c)]^{1/v}, \tag{22}$$

получим, что

$$\varepsilon_0 \equiv \|R + K\| \leqslant (\lambda/k)^{1/v} h(c). \tag{22'}$$

Мы всегда будем предполагать, что

$$(\lambda/k)^{1/v} h(c) < 1, \tag{23}$$

и ссылаться в дальнейшем на это условие как на условие кластерности.

Поскольку $h(0) = 1$, функция $h(c)$ монотонна при $c > 0$ и неограниченно возрастает при $c \to \infty$; при $\lambda/k < 1$ существует единственный положительный корень $c_0 = c_0(\lambda/k)$ уравнения

$$(\lambda/k)^{1/v} h(c_0) = 1, \tag{23'}$$

причем $c_0(\lambda/k) \to \infty$ при $\lambda/k \to 0$.

Очевидно, что условие кластерности (23) выполнено при $\lambda/k < 1$ и $c < c_0(\lambda/k)$. Из (22′) и (23) следует, что $\varepsilon_0 < 1$ и решение уравнения (19) существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$|f_A^{(\Lambda)}| < \frac{\|\delta\|}{1-\varepsilon_0} M^{|A|} < \frac{1}{M(1-\varepsilon_0)}\left[\left(\frac{\lambda}{k}\right)^{-1} x_0(c)\right]^{|A|/v}. \tag{24}$$

Кроме того, это решение можно представить в виде ряда

$$f^{(\Lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} (R+K)^n \delta = \sum_{m_1=0}^{\infty} R^{m_1}\delta + $$
$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{(m_1,\ldots,m_{p+1})}^{\infty} R^{m_1} K R^{m_2} K \ldots R^{m_p} K R^{m_{p+1}} \delta, \tag{25}$$

где последняя сумма берется по всем (упорядоченным) наборам неотрицательных целых чисел $(m_1, \ldots, m_{p+1})$, $m_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, p+1$, а ряд сходится относительно нормы (20) в $\mathscr{B}^{(\Lambda)}$.

§ 2. Кластерное разложение корреляционных функций

Из разложения (25.1) легко вывести окончательное представление $f_A^{(\Lambda)}$ в виде (16.1), а именно, мы представим решение уравнения (19.1) в геометрически наглядном виде, удобном для дальнейших применений (в виде ряда по «связным группам кластеров»).

Для этого введем ориентированный граф (связное дерево), множеством вершин которого является множество $\mathscr{F} = \mathscr{F}(T)$ всех конечных подмножеств T. При этом из вершины $A \in \mathscr{F}$ выходит ребро в вершину $B \in \mathscr{F}$ тогда и только тогда, когда $B = A \setminus \{t_A\}$. Мы скажем, что вершина B лежит ниже вершины A, если существует путь по графу $\mathscr{F}$, начинающийся в A и кончающийся в B. Самой нижней вершиной дерева $\mathscr{F}$ является $\varnothing$. Ниже вершины A лежит ровно $|A|$ других вершин.

Обозначим через γ набор непустых подмножеств

$$\gamma = (B_1, A_1; \ldots; B_p, A_p), \quad p = p(\gamma) \geqslant 1, \tag{1}$$

такой, что

1) для всех $i = 2, \ldots, p$ либо B_i лежит ниже $C_i = B_{i-1} \cup \bar{A}_{i-1}$, либо $B_i = C_i$; обозначим $m_i = |C_i \setminus B_i|$;

2) $A_i \cap B_i = \{t_{B_i}\}$, $|A_i| \geqslant 2$, для всех $i = 1, \ldots, p$; обозначим для каждого набора (1) через $\eta = \eta(\gamma)$ упорядоченный набор $(A_1, \ldots, A_p)$, и пусть

$$g_\gamma = g_{\eta(\gamma)} = \prod_{i=1}^{p} g_{A_i}. \tag{2}$$

Назовем носителем γ множество $\operatorname{supp}\gamma = \tilde{\eta}(\gamma) = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$.

Лемма 1. *Если выполнено условие* (23.1), *то*

$$f_A^{(\Lambda)} = 1 + \sum\nolimits^{(\Lambda, A)} (-1)^{p(\gamma)} g_\gamma, \tag{3}$$

где суммирование происходит по всем наборам γ вида (1) *таким, что* 1) $\operatorname{supp}\gamma \subseteq A$; 2) $B_i \subseteq \Lambda$; 3) *либо $B_1 = \Lambda$, либо B_1 лежит ниже A. При этом ряд в правой части* (3) *абсолютно сходится.*

Замечание 1. В случае, когда $d = 1$, т. е. $\bar{A} = A$, всякий набор γ вида (1), входящий в сумму (3), можно однозначно представить в виде пути по графу $\mathscr{F}$:

$$(C_1, B_1; C_2, B_2; \ldots; C_p, B_p), \quad C_1 = A,$$

где переход в $B_i \subseteq C_i$ уводит вниз по $\mathscr{F}$, а переход в $C_{i+1} \supseteq B_i$ поднимает вверх.

Доказательство леммы 1. Введем в $\mathscr{B}^{(\Lambda)}$ базис $\{\chi^{(A)},\ A\subseteq\Lambda,\ A\neq\varnothing\}$, где $\chi^{(A)}=\{\chi^A_B\}$, $\chi^A_B=\delta_{AB}$ (символ Кронекера).

Легко видеть, что в этом базисе матричные элементы $(R^m)_{C,B}$ оператора R^m равны

$$(R^m)_{C,B}=\begin{cases}1, & \text{если } B \text{ лежит ниже } C \text{ в } \mathscr{F} \text{ и } |C\setminus B|=m,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}\tag{4}$$

а матричные элементы оператора K равны

$$(K)_{B,C}=\begin{cases}-g_A, & \text{если существует такое } A\subseteq\Lambda, \text{ что}\\ & |A|\geqslant 2,\ B\cap A=\{t_B\},\ C=B\cup(\bar A\cap\Lambda)\\ & \text{(если такое } A \text{ существует, то оно}\\ & \text{единственно),}\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}\tag{5}$$

Замечая, что $\delta=\sum\limits_{t\in\Lambda}\chi^{\{t\}}$, из формулы (25.1) находим, что

$$f_A^{(\Lambda)}=\sum_{t\in\Lambda}\Bigg[\sum_{m_1}\left(R^{m_1}\right)_{A,\{t\}}+$$
$$+\sum_{p\geqslant 1}\ \sum_{(m_1,\ldots,m_{p+1})}\ \sum_{B_1,\ldots,B_p}\left(R^{m_1}\right)_{A,B_1}(K)_{B_1,C_1}\left(R^{m_2}\right)_{C_1,B_2}\cdots$$
$$\cdots(K)_{B_p,C_p}\left(R^{m_{p+1}}\right)_{C_p,\{t\}}\Bigg].\tag{6}$$

Очевидно, что для любого $A\subset\Lambda$

$$\sum_{t\in\Lambda}\sum_m\left(R^m\right)_{A,\{t\}}=1,$$

а из (4) и (5) видно, что каждое отличное от нуля слагаемое во второй сумме соответствует некоторому набору γ вида (1) (причем все такие наборы представлены в этой сумме) и равно $(-1)^{p(\gamma)}g_\gamma$. Таким образом, представление (3) доказано.

Заметим, что в случае, когда $-g_A\geqslant 0$ для всех A, каждое слагаемое в (6) положительно и сходимость ряда (3) следует из (24.1) и (25.1). Для доказательства абсолютной сходимости ряда (3) при произвольных g_A следует в приведенных выше рассуждениях заменить $-g_A$ на $|g_A|$, что не изменяет нормы оператора K.

Следствие 1. *Из разложения* (3) *непосредственно вытекает разложение* (16.1), *если положить для любого непустого набора* $\eta=\{A_1,\ldots,A_p\}$ *коэффициент* $D(A,\eta)$ *равным* $(-1)^{|\eta|}$, *умноженному на число наборов* γ *в представлении* (3), *для которых* $\eta=\eta(\gamma)$, *а* $D(A,\varnothing)=1$.

Замечание 2. Можно получить представление (16.1) и выражения для коэффициентов $D(A,\eta)$ непосредственной подстановкой ряда (16.1) в уравнения (17.1), (17′.1). При этом возникает следующая рекуррентная система уравнений для $D(A,\eta)$:

$$D(A,\eta)-D(A\setminus\{t_A\},\eta)+$$
$$+\sum_{\substack{B\in\eta,\\ B\cap A=\{t_A\}}}D\left(A\cup(\bar B\cap\Lambda),\eta\setminus\{B\}\right)=0,$$
$$|A|\geqslant 2,\quad \eta\neq\varnothing,$$
$$D(A,\eta)+\sum_{B\in\eta}D\left(A\cup(\bar B\cap\Lambda),\ \eta\setminus\{B\}\right)=0,$$
$$A=\{t\},\quad \eta\neq\varnothing,\quad t=t_A\in B,$$
$$D(A,\varnothing)=1.$$

Полезно пересуммировать ряд (3). Обозначим

$$b_R^{(\Lambda)}(A)=\sum_{\operatorname{supp}\gamma=R}^{(\Lambda,A)}(-1)^{p(\gamma)}g_\gamma,\tag{7}$$

где сумма берется по всем γ, определенным в (3) и таким, что $\operatorname{supp}\gamma=R$. Тогда (3) переписывается в виде

$$f_A^{(\Lambda)}=1+\sum_{R\subseteq\Lambda}b_R^{(\Lambda)}(A).\tag{8}$$

§ 3. Предельная корреляционная функция и кластерное разложение мер

Докажем теорему 1.1.

Лемма 1. *При условии* (23.1) *существует предел* (14.1), *причем* f_A *удовлетворяют оценке* (24.1) *и*

$$f_A=1+\sum^{(T,A)}(-1)^{p(\gamma)}g_\gamma=1+\sum_{R\subset T}b_R(A),\tag{1}$$

где

$$b_R(A)=\sum_{\gamma:\operatorname{supp}\gamma=R}^{(T,A)}(-1)^{p(\gamma)}g_\gamma=\lim_{\Lambda\nearrow T}b_R^{(\Lambda)}(A)\tag{2}$$

и в $\sum^{(T,A)}$ *происходит суммирование по всем наборам*

γ вида (1.2) таким, что либо $B_1 = A$, либо B_1 лежит ниже A в графе $\mathscr{F}$. Ряд (1) абсолютно сходится.

Доказательство. Любой член ряда $\sum^{(T,A)} |g_\gamma|$ входит при всех достаточно больших Λ в $\sum^{(\Lambda,A)} |g_A|$. В силу равномерной по Λ ограниченности этих сумм ряд $\sum^{(T,A)} |g_\gamma|$ сходится. Отсюда следует (1). Из выражений (2) и (7.2) видно, что

$$b_R(A) = b_R^{(\Lambda)}(A) \tag{3}$$

для всех $A \subset \Lambda$ и таких R, что $\bar{R} \subset \Lambda$. Из (3) вытекает (2). Лемма доказана.

Из сказанного и формулы (15.1) и следует утверждение теоремы 1.1, причем

$$\rho(\Gamma) = \left(\prod_{A\in\Gamma} g_A\right) f_{\overline{\overline{\Gamma}}}. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть $\{\mu_\Lambda, \Lambda \subset T\}$ — семейство гиббсовских перестроек мер μ_Λ, $\Lambda \subset T$, полученных с помощью взаимодействий $\{\tilde{U}_\Lambda, \Lambda \subset T\}$. Предположим, что*

1) Семейство мер $\{\mu_\Lambda, \Lambda \subset T\}$ слабо локально компактно.

2) Статистические суммы Z_Λ допускают кластерное представление (1.1), причем выполнены оценки (2.1), (3.1) и условие кластерности (23.1).

3) Существует множество $G \subseteq C_0(\Omega)$ локальных функций, линейная оболочка которого всюду плотна в пространстве $C(\Omega)$ всех ограниченных непрерывных функций, такое, что для любой функции $F \equiv F_A \in G$ ее среднее $\langle F_A \rangle_{\mu_\Lambda} \equiv \langle F_A \rangle_\Lambda$, $A \subseteq \Lambda$, имеет вид

$$\langle F_A \rangle_\Lambda = k_\varnothing(F_A) f_A^{(\Lambda)} + \sum_{R \subseteq \Lambda} k_R(F_A) f_{A\cup R}^{(\Lambda)}, \tag{5}$$

где $f_B^{(\Lambda)}$ — корреляционная функция, а $k_R(F_A)$ — некоторые величины, допускающие оценку

$$|k_R(F_A)| < m(F_A) \sum_{\substack{\Gamma=\{B_1,\ldots,B_n\} \\ \overline{\overline{\Gamma}}=R}} \prod_{j=1}^{n} r_{B_i}^{(A)}. \tag{6}$$

Здесь $m(F_A)$ — константа, зависящая лишь от A и F_A и не зависящая от R, а суммирование происходит по всем d-допустимым наборам $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_n\}$ конечных подмножеств B_i, $|B_i| \geqslant 2$, $B_i \cap A \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$. При этом числа $r_B^{(A)} \geqslant 0$ удовлетворяют условию: для любых $t \in T$ и $n \geqslant 2$

$$\sum_{\substack{B:\, t\in B \\ |B|=n}} r_B^{(A)} < b_A \left(\frac{\lambda}{k}\right)^n, \tag{7}$$

где $b_A > 0$ — некоторая константа (зависящая от A), а параметры $0 < \lambda < k < \infty$ те же, что и в оценках (2.1) и (3.1). Тогда семейство мер $\{\mu_\Lambda, \Lambda \in T\}$ допускает кластерное разложение.

Доказательство. Положим для $F_A \in G$

$$b_R^{(\Lambda)}(F_A) \doteq k_R(F_A) f_{R\cup A}^{(\Lambda)}. \tag{8}$$

Из (6) и (24.1) находим, что выполнена оценка (18.1.I), в которой

$$C_R(F_A) = m(F_A) \frac{M^{|A|}}{M(1-\varepsilon_0)} \sum_{\Gamma=\{B_1,\ldots,B_n\}} \prod_{i=1}^{n} r_{B_i}^{(A)} M^{v|B_i|}. \tag{9}$$

Отсюда с помощью (22.1) и (7) получаем, что

$$\sum_R C_R(F_A) \leqslant m(F_A) \frac{M^{|A|}}{M(1-\varepsilon_0)} \left[\frac{b_A x_0^2(c)}{1-x_0(c)}\right]^{|A|} < \infty.$$

Далее, из (14.1) вытекает, что

$$\lim_{\Lambda\nearrow T} b_R^{(\Lambda)}(F_A) = k_R(F_A) f_{A\cup R} \equiv b_R(F_A).$$

Таким образом, выполнены условия (17.1.I), (18.1.I) и (19.1.I). Лемма доказана.

Кроме кластерного разложения средних $\langle F_A \rangle_\Lambda$ с величинами $b_R^{(\Lambda)}(F_A)$ вида (8), из представления (5) и разложения (8.2) следует другое разложение для средних:

$$\langle F_A \rangle_\Lambda \equiv \sum_{R \subseteq \Lambda} \tilde{b}_R^{(\Lambda)}(F_A), \tag{10}$$

где величины $\tilde{b}_R^{(\Lambda)}(F_A)$ равны

$$\tilde{b}_R^{(\Lambda)}(F_A) = \sum_{\substack{R', R'' \subseteq \Lambda, \\ R' \cup R'' = R}} k_{R'}(F_A)\, b_{R''}^{(\Lambda)}(A \cup R'). \tag{11}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия 2) и 3) предыдущей леммы. Тогда величины $\tilde{b}_R^{(\Lambda)}(F_A)$ удовлетворяют условиям и (19.1.I) из § 1.1.*

Доказательство. Существование предела

$$\lim_{\Lambda\nearrow T}\tilde b_R^{(\Lambda)}(F_A)=\tilde b_R(F_A)=\sum_{\substack{R',R''\subset T,\\ R'\cup R''=R}} k_{R'}(F_A)\,b_{R''}(A\cup R')$$

вытекает из леммы 1. Далее,

$$|\tilde b_R^{(\Lambda)}(F_A)|\leqslant \sum_{R',R'',R'\cup R''=R}|k_{R'}(F_A)|\,\bar b_{R''}^{(\Lambda)}(A\cup R')\leqslant$$
$$\leqslant \sum_{R',R''}|k_{R'}(F_A)|\,\bar b_R(A\cup R')=\tilde C_R(F_A),$$

где через $\bar b_R^{(\Lambda)}(B)\geqslant b_R^{(\Lambda)}(B)$ обозначены величины в разложении (8.2) корреляционной функции $\bar f_B^{(\Lambda)}>0$, определяемой величинами $\{-|g_B|\}$ (сравни с доказательством леммы 1.2). Аналогичный смысл имеют величины $\bar b_R(B)=\lim\limits_{\Lambda\nearrow T}\bar b_R^{(\Lambda)}(B)$.

Очевидно, что

$$\sum_R \tilde C_R(F_A)=\sum_R|k_R(F_A)|\,\bar f_{A\cup R}<\infty,$$

как следует из предыдущей леммы.

Кластерное разложение вида (10) с величинами (11) обладает в некоторых случаях, как мы увидим ниже, одним примечательным свойством. Оно понадобится нам лишь в § 3.VI.

Определение. Кластерное разложение средних $\langle F_A\rangle_\mu$, $F_A\in G$, μ — мера в пространстве S^T,

$$\langle F_A\rangle_\mu=\sum_{R\subset T} b_R(F_A) \tag{12}$$

называется *регулярным*, если выполнены следующие условия:

1) Существует некоторое семейство конечных подмножеств $\mathfrak A$, удовлетворяющее условиям 1), 2) из § 4.II и такое, что в разложении (12)

$$b_R(F_A)\neq 0 \tag{13}$$

лишь в том случае, если множество R является $\mathfrak A$-связным относительно A (см. § 4.II).

2) В случае, когда $F_A=F_{A_1}\cdot F_{A_2}$, $F_A, F_{A_1}, F_{A_2}\in G$, и $A_1\cap A_2=\varnothing$, $A_1\cup A_2=A$ и множество R не является $\mathfrak A$-связным относительно $\{A_1, A_2\}$, а $b_R(F_A)\neq 0$, выполняется равенство

$$b_R(F_A)=b_{R_1}(F_{A_1})\cdot b_{R_2}(F_{A_2}), \tag{14}$$

где

$$R_1=\bigcup_{j:R'_j\cap A_1\neq\varnothing}R'_j,\quad R_2=\bigcup_{j:R'_j\cap A_2\neq\varnothing}R'_j,$$

а $R'_1,\ldots,R'_p$ — компоненты $\mathfrak A$-связности множества R (см. § 4.II). Заметим, что так как R $\mathfrak A$-связно относительно A, то $R_1\cup R_2=R$ (и при этом $R_1\cap R_2=\varnothing$).

В случае, когда кроме условий 1) и 2) выполнено еще следующее условие 3), разложение (12) называется *экспоненциально-регулярным*:

3) Для всех $F_A\in G$ и всех R, $\mathfrak A$-связных относительно A, выполнена оценка

$$|b_R(F_A)|<C(F_A)\cdot\lambda^{d_R(\mathfrak A,\{A\})}, \tag{15}$$

где $C(F_A)$ — константа, зависящая лишь от F_A, $0<\lambda<1$, а $d_R(\mathfrak A, \{A\})$, напомним (см. (9.4.II)),— минимальная мощность набора $\Gamma=\{B_1,\ldots,B_s\}$, $B_i\in\mathfrak A$, $i=1,\ldots,s$, такого, что набор $\{B_1,\ldots,B_s, A\}$ связен и $\tilde\Gamma=R$.

Регулярное (или экспоненциально-регулярное) кластерное разложение средних $\langle F_A\rangle_\Lambda$ для семейства мер $\{\mu_\Lambda, \Lambda\subset T\}$ определяется аналогично, причем требуется, чтобы константы $C(F_A)$ и параметр λ в оценке (15) не зависели от $\Lambda\subset T$.

Пусть задано семейство гиббсовских перестроек $\{\mu_\Lambda, \Lambda\subset T\}$ и статистические суммы Z_Λ допускают кластерное представление (1.1) с $d=1$, причем

$$k_A\neq 0,\quad A\subset T,\quad |A|\geqslant 2, \tag{16}$$

лишь в случае, когда множество A $\mathfrak A$-связно ($\mathfrak A$ — некоторое семейство подмножеств, удовлетворяющее условиям 1) и 2) § 4.II) и выполнена оценка

$$\begin{aligned}|k_A|&\leqslant \bar c\,\bar\lambda^{d_A(\mathfrak A)},\quad |A|>2,\\ |k_{\{t\}}|&\geqslant 1,\end{aligned} \tag{17}$$

где $\bar c>0$, $\bar\lambda<1$ — некоторая достаточно малая константа. Тогда, как следует из леммы 2.4.II, выполнены условия (2.1) (с параметром $\lambda=c\bar\lambda$, где $c=c(\mathfrak A)$ — константа) и (3.1), а также условие кластерности (23.1), и, следовательно, существует корреляционная функция $f_A^{(\Lambda)}$, допускающая разложение (8.2). Пусть, кроме того, для любой функции $F_A \in G$ (см. лемму 2) ее среднее $\langle F_A \rangle_\Lambda$ допускает разложение (5) так, что величины $k_R(F_A)$ удовлетворяют условиям 1), 2) и 3) в определении экспоненциально-регулярного кластерного разложения, причем

$$|k_R(F_A)| < \bar{C}(F_A)\,(\bar{\lambda})^{d_R(\mathfrak{A}, \{A\})}, \tag{18}$$

где $\bar{C}(F_A)$ — константа, зависящая только от F_A, а $\bar{\lambda}$ то же, что и в (17).

Л е м м а 4. *При указанных выше предположениях выполнены условия* (6) *и* (7) *леммы* 2 *и разложение* (10) *является экспоненциально-регулярным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка (6) есть следствие (18), если положить

$$r_B^{(A)} = \begin{cases} (\bar{\lambda})^{d_B(\mathfrak{A})}, & \text{если } B \in \mathfrak{A} \text{ связно и } B \cap A \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При этом оценка (7), где $\lambda = c\bar{\lambda}$, снова вытекает из леммы 2.4.II. Условие 1) в определении регулярного разложения вытекает непосредственно из формулы (11), если заметить, что оно выполнено для величин $b_R^{(\Lambda)}(A)$, как это следует из (7.2). Условие 2) следует из (11), аналогичного условия 2) для величин $k_R(F_A)$ и того обстоятельства, что величины $b_R^{(\Lambda)}(A)$ обладают свойством, аналогичным (14):

$$b_R^{(\Lambda)}(A_1 \cup A_2) = b_{R_1}^{(\Lambda)}(A_1) \cdot b_{R_2}^{(\Lambda)}(A_2),$$

где $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и множество R не является $\mathfrak{A}$-связным относительно $\{A_1, A_2\}$ (но $\mathfrak{A}$-связно относительно $A_1 \cup A_2$), R_1 и R_2 определены в (14). Для того чтобы проверить условие (15) экспоненциальной регулярности, положим

$$k_A = (\varkappa^{-1}\bar{\lambda})^{d_A(\mathfrak{A})}\bar{k}_A$$

и

$$k_R(F_A) = (\varkappa^{-1}\bar{\lambda})^{d_R(\mathfrak{A}, \{A\})}\bar{k}_R(F_A),$$

где $\varkappa$, $0 < \varkappa < 1$,— константа, которую мы определим ниже. Заметим, что $\bar{k}_A$ и $\bar{k}_A(F_A)$ удовлетворяют оценкам (17) и (18) соответственно, в которых $\bar{\lambda}$ заменено на $\varkappa$. Выбирая теперь $\varkappa \ll 1$ достаточно малым, но таким, что и $\varkappa^{-1}\lambda$ тоже достаточно мало, мы получим, что для величин $\bar{k}_A$ выполнено условие кластерности, а величины $\bar{k}_R(F_A)$

удовлетворяют условиям (7) и (8). При этом из (7.2) следует, что

$$|b_R(A)| < (\varkappa^{-1}\lambda)^{d_R(\mathfrak{A}, \{A\})}\bar{b}_R(A), \tag{19}$$

где величины $\bar{b}_R(A) > 0$ задают разложение корреляционной функции $\bar{f}_A$, определяемой с помощью $\bar{g}_B = -|\bar{k}_B|$. Далее, из формул (11) и (19) мы находим, что

$$|\tilde{b}_R(F_A)| < (\varkappa^{-1}\lambda)^{d_R(\mathfrak{A}, \{A\})}\bar{b}_R(F_A),$$

где $\bar{b}_R(F_A)$ определены формулой (11), в которой величины $k_{R''}(F_A)$ и $b_{R'}(A)$ заменены на $\bar{k}_{R''}(F_A)$ и $\bar{b}_{R'}(A)$ соответственно. Далее следует воспользоваться рассуждениями из леммы 3. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. В некоторых случаях величины k_A, входящие в кластерное представление (1.1) статистических сумм, и величины $k_R(F_A)$ в разложении (5) для средних $\langle F_A \rangle_\Lambda$ могут зависеть от множества Λ: $k_A = k_A^{(\Lambda)}$ и $k_R(F_A) = k_A^{(\Lambda)}(F_A)$. Так, например, бывает при кластерном разложении мер $\{\mu_\Lambda, y^{\partial\Lambda}\}$, где $y^{\partial\Lambda}$ — граничная конфигурация; см. § 2.I. Однако если величины $k_A^{(\Lambda)}$ равномерно по Λ удовлетворяют кластерной оценке (2.1) и условию (3.1), а величины $k_R^{(\Lambda)}(F_A)$ — оценкам (6) и (7), и существуют пределы

$$k_A = \lim_{\Lambda \nearrow T} k_A^{(\Lambda)}, \quad k_R(F_A) = \lim_{\Lambda \nearrow T} k_R^{(\Lambda)}(F_A), \tag{20}$$

то все построения этой главы сохраняют силу и в этом случае.

§ 4. Кластерное разложение и асимптотика свободной энергии. Аналитичность корреляционных функций

В предыдущих параграфах мы предполагали, что статистические суммы Z_Λ отличны от нуля. Теперь мы докажем лемму 2.1, т. е. покажем, что условие $Z_\Lambda \neq 0$ является следствием кластерного представления (1.1).

В конечномерном комплексном пространстве $\tilde{\mathscr{B}}^{(\Lambda)} \subset \mathscr{B}^{(\Lambda)}$ векторов $\{g_B\colon B \subseteq \Lambda,\ |B| \geqslant 2\}$ рассмотрим круговую область

$$\Pi_{\varkappa, c}^{(\Lambda)} = \Big\{ \sum_{B:\, t \in B,\, |B| = n} |g_B| < c\varkappa^n;\ t \in \Lambda,\ n \geqslant 2 \Big\}. \tag{1}$$

Как показано в § 2, ряд (3.2) равномерно по Λ и абсолютно сходится в любой области $\Pi_{\varkappa,c}^{(\Lambda)}$, где $\varkappa<1$, $c<c_0(\varkappa)$ (см. (23′.1)), и определяет в этой области аналитическую функцию $f_\Lambda^{(\Lambda)}(\{g_B\})$.

Введем многочлен от $\{g_B,\ B\subseteq\Lambda\}$:

$$Q_\Lambda=Z_\Lambda\Big/\prod_{t\in\Lambda}k_{\{t\}}=\sum_{\Gamma=\{B_1,\ldots,B_n\}}\prod_{i=1}^{n}g_{B_i},\tag{2}$$

где сумма берется по всем d-допустимым наборам Γ множеств $B_i\subseteq\Lambda$. Для всех значений $\{g_B\}$, для которых $Q_\Lambda\neq0$, имеет место равенство

$$Q_\Lambda\cdot f_\Lambda^{(\Lambda)}=1,\tag{3}$$

вытекающее из (12.1). В частности, равенство (3) выполняется для всех вещественных положительных наборов $\{g_B\}$ из области $\Pi_{\varkappa,c}^{(\Lambda)}$. Множество $\widetilde{\Pi}_{\varkappa,c}^{(\Lambda)}\subset\Pi_{\varkappa,c}^{(\Lambda)}$ таких наборов является множеством единственности для области $\Pi_{\varkappa,c}^{(\Lambda)}$.

Напомним, что множество D_0, содержащееся в области $D\subset\mathbb{C}^n$, называется множеством единственности для D, если любые две аналитические в области D функции, совпадающие на D_0, совпадают во всем D.

Лемма 1. *Всякая область D_0 в вещественном пространстве $R^n=\{(z_1,\ldots,z_n)\colon \operatorname{Im} z_i=0,\ i=1,\ldots,n\}\subset\mathbb{C}^n$ является множеством единственности для любой содержащей ее области $D\subseteq\mathbb{C}^n$.*

Доказательство проводится индукцией по числу переменных n. В случае $n=1$ утверждение хорошо известно. Для произвольного n достаточно рассмотреть случай, когда D является выпуклой окрестностью D_0, целиком содержащейся в трубе $\{(z_1,\ldots,z_n)\colon(\operatorname{Re}z_1,\ldots,\operatorname{Re}z_n)\in D_0\}$. Рассматривая сечение области D гиперплоскостями $z_n=\text{const}$, мы сводим наше утверждение для случая n переменных к случаю $(n-1)$-го переменного. Лемма доказана.

В силу леммы 1 равенство (3) сохраняется во всей области $\Pi_{\varkappa,c}^{(\Lambda)}$. Отсюда и вытекает лемма 2.1.

Из доказанной леммы и того обстоятельства, что $Q_\Lambda(g_B\equiv0)=1$, следует, что в области $\Pi_{\varkappa,c}^{(\Lambda)}$ определена

аналитическая функция F_Λ:

$$F_\Lambda(\{g_B\})=\ln Q_\Lambda(\{g_B\}),\tag{4}$$

$$F_\Lambda(\{g_B\equiv0\})=0.\tag{5}$$

Функция F_Λ допускает разложение в степенной ряд по переменным $\{g_B\}$, сходящийся в круговой области $\Pi_{\varkappa,c}^{(\Lambda)}$.

Лемма 2. *Этот степенной ряд имеет вид, аналогичный (3.2):*

$$F_\Lambda=\sum_{t\in\Lambda}\sum_{\gamma}{}^{(\Lambda,\{t\})}\big((-1)^{p(\gamma)}g_\gamma\big)\Big/\sum_{A\in\eta(\gamma)}|A|,\tag{6}$$

где сумма $\sum\limits_{\gamma}^{(\Lambda,\{t\})}$ *по всем наборам γ вида (1.2) определена в лемме 1.2.*

Следствие 1. *Если переписать разложение (6) в виде*

$$F_\Lambda=\sum_{\eta}d_\eta^{(\Lambda)}g_\eta,\tag{7}$$

аналогичном (16.1), то из формулы (6) следует, что коэффициенты $d_\eta^{(\Lambda)}$ имеют вид

$$d_\eta^{(\Lambda)}=\sum_{t\in\Lambda}D^{(\Lambda)}(\eta,\{t\})\Big/\sum_{A\in\eta}|A|,\tag{8}$$

где $D^{(\Lambda)}$ — коэффициенты в разложении (16.1).

Следствие 2. *Из (2) и (6) находим, что*

$$\ln Z_\Lambda=\sum_{t\in\Lambda}\Big[\ln k_{\{t\}}+\sum_{\gamma}{}^{(\Lambda,\{t\})}\Big((-1)^{p(\gamma)}g_\gamma\Big/\sum_{A\in\eta(\gamma)}|A|\Big)\Big].\tag{9}$$

Доказательство леммы 2. Фиксируем набор параметров $\{g_A^0,\ A\subseteq\Lambda\}\in\Pi_{\varkappa,c}^{(\Lambda)}$ и рассмотрим однопараметрическое семейство наборов $\{g_A^s,\ A\subseteq\Lambda\}\in\Pi_{\varkappa,c}^{(\Lambda)}$:

$$g_A^s=g_A^0e^{-s|A|},\quad 0\leqslant s<\infty.\tag{10}$$

Полагая

$$F_\Lambda^s=F_\Lambda(\{g_A^s\}),\quad Q_\Lambda^s=(\{g_A^s\}),\quad g_\eta^s=\prod_{A\in\eta}g_A^s$$

и используя (10.1), (14.1), (3.2), получаем, что

$$\frac{dF^s_\Lambda}{ds}=\frac{1}{Q^s_\Lambda}\sum_\eta g^s_\eta\Big(-\sum_{A\in\eta}|A|\Big)=-\sum_{A\subset\Lambda,|A|\geqslant 2}|A|\,\rho^{(\Lambda)}(\{A\})=$$

$$=\sum_{A\subseteq\Lambda}|A|(-g^s_A)\cdot f^{(\Lambda)}_{\overline{A}\cap\Lambda}(\{g^s_B\})=\sum_{t\in\Lambda}\sum_\gamma^{(\Lambda,\{t\})}(-1)^{p(\gamma)}g^s_\gamma. \quad (11)$$

Проинтегрировав (11) по s от 0 до ∞ и воспользовавшись тем, что $F^s_\Lambda\to 0$ при $s\to\infty$ и $\int_0^\infty g^s_\eta ds=g^0_\mu\Big/\sum_{A\in\eta}|A|$, получим (6). Лемма 2 доказана.

Введем величины

$$\begin{aligned}\widehat{b}^{(\Lambda)}_R(t)&=\sum_{\gamma:\,\mathrm{supp}\,\gamma=R}^{(\Lambda,\{t\})}(-1)^{p(\gamma)}\Big(g_\gamma\Big/\sum_{A\in\eta(\gamma)}|A|\Big),\\ \widehat{b}_R(t)&=\sum_{\gamma:\,\mathrm{supp}\,\gamma=R}^{(T,\{t\})}(-1)^{p(\gamma)}\Big(g_\gamma\Big/\sum_{A\in\eta(\gamma)}|A|\Big)\end{aligned} \quad (12)$$

(сумма $\sum^{(T,\{t\})}$ определена в лемме 1.3).

Очевидно, что

$$\widehat{b}^{(\Lambda)}_R(t)=\widehat{b}_R(t) \quad (13)$$

для любых t и R таких, что $t\in R$, $\overline{R}\subseteq\Lambda$. При этом

$$F_\Lambda=\sum_{t\in\Lambda}\sum_{R:\,t\in R,\overline{R}\subseteq\Lambda}\widehat{b}^{(\Lambda)}_R(t)=\sum_{t\in\Lambda}\sum_{R:\,t\in R}\widehat{b}_R(t)+\Delta F_\Lambda, \quad (14)$$

где «граничная часть»

$$\Delta F=\sum_{t\in\Lambda}\Bigg[\sum_{\substack{R:\,t\in R\subset\Lambda,\\ \overline{R}\cap(T\setminus\Lambda)\neq\varnothing}}\big(\widehat{b}^{(\Lambda)}_R(t)-\widehat{b}_R(t)\big)-\sum_{R:\,t\in R\not\subset\Lambda}\widehat{b}_R(t)\Bigg]. \quad (15)$$

При этом первая сумма в правой части (14) называется объемной частью F_Λ. Такое название оправдывается следующей теоремой, которую мы сформулируем в общем виде.

Пусть G — некоторая транзитивная группа преобразований множества T, сохраняющая метрику ρ, причем стационарная подгруппа каждой точки конечна. Эти условия, в частности, выполнены, когда $T=Z^\nu$, а $G=Z^\nu$ — группа трансляций Z^ν.

Обозначим через r любой класс конгруэнтных (относительно G) множеств из T, и пусть для любого $\Lambda\subset T$ $S_\Lambda(r)$ означает число множеств $R\in r$ таких, что $R\cap\Lambda\neq\varnothing$, $\overline{R}\cap(T\setminus\Lambda)\neq\varnothing$.

Мы скажем, что возрастающая последовательность конечных подмножеств $\Lambda_n\subset T$ стремится при $n\to\infty$ к T *в смысле Ван-Хова*, если $\cup\Lambda_n=T$ и для любого класса r

$$S_{\Lambda_n}(r)/|\Lambda_n|\to 0,\quad n\to\infty. \quad (16)$$

Теорема 3. *Пусть в кластерном представлении* (1.1) *величины k_A инвариантны относительно G, т. е.*

$$k_{gA}=k_A. \quad (17)$$

Тогда для любой последовательности Λ_n, стремящейся к T в смысле Ван-Хова, существует предел

$$f=\lim\frac{\ln Z_{\Lambda_n}}{|\Lambda_n|}=\sum_{R:\,t\in R}\widehat{b}_R(t)+\ln k, \quad (18)$$

где $t\in T$ — произвольная фиксированная точка, а $k\equiv k_{\{t\}}$.

Доказательство. Заметим, что при условии (17) суммы $\sum_{R:\,t\in R}\widehat{b}_R(t)$ одинаковы для всех t, и тогда из (14) находим, что

$$\frac{F_\Lambda}{|\Lambda|}=\sum_{R:\,t\in R}\widehat{b}_R(t)+\frac{\Delta F}{|\Lambda|}. \quad (19)$$

Вторая сумма в (15) допускает оценку

$$\Big|\sum_{t\in\Lambda_n}\sum_{R:\,t\in R\not\subset\Lambda_n}\widehat{b}_R(t)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\substack{R\not\subset\Lambda,\\ R\cap\Lambda\neq 0}}\sum\frac{1}{|R|}\sum_{\gamma:\,\mathrm{supp}\,\gamma=R}^{(T,\{t\})}|g_\gamma|<\sum_r S_{\Lambda_n}(r)\,C_r, \quad (20)$$

где

$$C_r=C_R=\sum_{t\in R}\frac{1}{|R|}\sum_{\gamma:\,\mathrm{supp}\,\gamma=R}^{(T,\{t\})}|g_\gamma|$$

для любого $R\in r$. Поскольку

$$\sum_r\varkappa_r C_r=\sum_{R:\,t_0\in R}C_R\leqslant\sum_{\gamma'}^{(T,\{t_0\})}|g_\gamma|<\infty, \quad (21)$$

где $\varkappa_r$ — число множеств из класса r, содержащих произвольную фиксированную точку $t_0\in T$ $(\varkappa_r\leqslant|R|\,|G_{t_0}|$, G_{t_0} — стационарная группа точки t_0), из (21), оценки $S_{\Lambda_n}(r)\leqslant|\Lambda_n|\varkappa_r$ и условия (16) получаем, что сумма в левой части (20) имеет порядок $o(|\Lambda_n|)$. Аналогично оценивается и первая сумма в (15). Теорема доказана.

Пусть теперь величины $k_\Lambda = k_\Lambda(z_1, \ldots, z_m)$ являются аналитическими функциями от комплексных параметров $z_1, \ldots, z_m$ в области $D \subset \mathbb{C}^m$, причем условия (1.1), (2.1), (3.1) и (23.1) выполнены равномерно в D.

Теорема 4. *При сформулированных предположениях корреляционные функции $\rho^{(\Lambda)}(\Gamma)$, $\rho(\Gamma)$, а также $\ln Z_\Lambda$ и (в случае выполнения условий теоремы 3) величина f являются аналитическими функциями в D.*

Доказательство вытекает из представлений (3.2), (15.1), (1.3), (3.3), (9), (12), (18).

§ 5. Области кластерных разложений в модели Изинга

Этот параграф является продолжением § 0.I и одновременно служит введением к двум следующим главам. Здесь на достаточно простом примере дается представление о том, как получается кластерное представление статистических сумм. Мы рассматриваем модель Изинга и используем обозначения из § 0.I.

В плоскости параметров (β, h) мы выделяем четыре области, в каждой из которых кластерное представление статистической суммы для модели Изинга выглядит по-своему. При этом оказывается удобным получать кластерное представление не самой статистической суммы, а величины, отличающейся от нее некоторым простым множителем.

I. *Высокотемпературная область* (*малые* β). Мы получим здесь кластерное представление статистической суммы Z_Λ с пустыми граничными условиями (см. § 2.I).

При $\beta = 0$ предельная мера $\mu_{h,\,\beta=0}$ для модели Изинга является мерой с независимыми значениями (см. § 0.I). Естественно предположить, что для малых β предельная гиббсовская мера будет определять поле, близкое к независимому, а кластерное представление статистической суммы Z_Λ можно получить разложением $\exp(-U_\Lambda)$ в ряд по β. Объединяя в этом разложении члены с одинаковыми наборами носителей потенциала и усредняя их затем по мере μ_0, мы получим желаемое представление. Технически это удобно сделать так: заметим, что $(\langle\cdot\rangle_{\mu_{h,\beta=0}} = \langle\cdot\rangle_h)$

$$Z_\Lambda = \left\langle \exp\left(\beta \sum_{t,t'}^{(\Lambda)} \sigma_t\sigma_{t'}\right)\right\rangle_h (e^h + e^{-h})^{|\Lambda|},$$

и выведем кластерное представление для

$$\left\langle \exp\left(\beta \sum_{t,t'}^{(\Lambda)} \sigma_t\sigma_{t'}\right)\right\rangle_h,$$

где $\sum_{t,t'}^{(\Lambda)}$ означает сумму по парам ближайших соседей в Λ:

$$\left\langle \exp\left(\beta \sum_{t,t'}^{(\Lambda)} \sigma_t\sigma_{t'}\right)\right\rangle_h = \left\langle \prod_{t,t'}^{(\Lambda)} [\exp(\beta\sigma_t\sigma_{t'}) - 1 + 1]\right\rangle_h = 1 + \sum_\Gamma \left\langle \prod_{\{t,t'\}\in\Gamma} [\exp(\beta\sigma_t\sigma_{t'}) - 1]\right\rangle_h, \quad (1)$$

а сумма $\sum_\Gamma$ берется по всем неупорядоченным непустым наборам Γ различных пар $\{t, t'\}$ ближайших соседей.

Разбив Γ на связные компоненты $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ и воспользовавшись независимостью случайных величин $\prod_{\{t,t'\}\in\Gamma_i} [\exp(\beta\sigma_t\sigma_{t'}) - 1]$, $i = 1, \ldots, s$, получим искомое кластерное представление (4.1), в котором

$$k_\Gamma = \left\langle \prod_{\{t,t'\}\in\Gamma} [\exp(\beta\sigma_t\sigma_{t'}) - 1]\right\rangle_h. \quad (2)$$

Таким образом, кластером здесь является связный набор пар ближайших соседей с носителем $\tilde\Gamma$ и кластерная оценка (5.1) следует из (2) и из леммы 1.4.II.

II. *Область большой намагниченности* (*большие* $|h|$). Мы рассмотрим случай $h > 0$, h велико, и получим кластерное представление статистических сумм $Z_{\Lambda,+}$ для (+)-граничных условий. Аналогично могут быть рассмотрены симметричный случай $h < 0$ и представление статистической суммы Z_Λ с (—)-граничными условиями.

В нашей области значения $\sigma_t = -1$ принимаются с малой вероятностью (точнее, каждое значение $\sigma_t = -1$ дает малый множитель $z = e^{-h}$ в соответствующем слагаемом статистической суммы). В связи с этим определим кластер как максимальное 1-связное множество тех точек $t \in Z^\nu$, в которых $\sigma_t = -1$. Точнее, пусть для каждой конфигурации σ^Λ

$$B_-(\sigma^\Lambda) = \{t \in \Lambda:\ \sigma_t = -1\}, \quad B(\sigma^\Lambda) = \overline{B_-(\sigma^\Lambda)},$$

где для любого $B \subset Z^\nu$ обозначено

$$\bar{B} = \{t \in Z^\nu:\ \rho(t, B) \leqslant 1\}.$$

Для любого $B \subset Z^\nu$ обозначим $\gamma(B)$ совокупность ребер (т. е. пар ближайших соседей $\{t, t'\}$) таких, что $t' \in \partial_i B$, $t \in \operatorname{Int} B$, где $\partial_i B = \{t \in B,\ \rho(t, Z^\nu \backslash B) = 1\}$, $\operatorname{Int} B = B \backslash \partial_i B$. Тогда статистическая сумма $Z_{\Lambda,+}$ может быть записана в виде ($\langle\cdot\rangle_0 = \langle\cdot\rangle_{\beta=0,\,h=0}$)

$$Z_{\Lambda,+} = \exp[h|\Lambda| + \beta|\Lambda^{(2)}|]\langle\exp\{-2\beta|\gamma(B(\sigma^\Lambda))| - \\ - 2h|\operatorname{Int} B(\sigma^\Lambda)|\}\rangle_0, \quad (3)$$

где $\Lambda^{(2)}$ — множество всех ребер $\{t, t'\}$ таких, что $t \in \Lambda$, $t' \in \bar{\Lambda}$.

Мы получим сейчас кластерное представление для

$$2^{|\Lambda|} Z_{\Lambda,+} \exp\{-h|\Lambda| - \beta|\Lambda^{(2)}|\} = \\ = 1 + \sum_{B \subset \bar{\Lambda}} \exp\{-2\beta|\gamma(B)| - 2h|\operatorname{Int} B|\}, \quad (4)$$

где суммирование происходит по всем непустым $B \subset \bar{\Lambda}$ таким, что любая их 1-связная компонента имеет непустую внутренность. Положим для всякого 1-связного множества B с непустой внутренностью

$$k_B = \exp\{-2\beta|\gamma(B)| - 2h|\operatorname{Int} B|\}. \quad (5)$$

Пусть $k_{\{t\}} = 1$ и $k_B = 0$ для остальных B. Тогда из (4) получается кластерное представление (1.1) с $d = 2$.

Заметив, что $|\operatorname{Int} B| \geqslant |B|/(2\nu + 1)$, $|\gamma(B)| \leqslant 2\nu|\operatorname{Int} B|$, а число 1-связных множеств мощности n, содержащих фиксированную точку t, не превосходит $\operatorname{const}(\bar{C})^n$, $\bar{C} = \bar{C}(\nu)$ (см. лемму 4.4.II), получаем оценку (2.1) с

$$c = 1, \quad \lambda = \bar{C}\exp\{-2(h - 2\nu\beta)/(2\nu + 1)\}. \quad (6)$$

При достаточно больших $h > 0$ выполнено условие кластерности (23.1).

III. *Низкотемпературная ферромагнитная область фазовых переходов* I *рода* ($h = 0$, $\beta > 0$ *и велико*). Мы снова воспользуемся обозначениями § 0.I и для простоты примем $\nu = 2$.

В качестве множества $\hat{T}$ (см. замечание 1.1) возьмем множество всех ребер двойственной решетки $\tilde{Z}_2$ и положим $\hat{\Lambda} = \tilde{\Lambda}$; где $\tilde{\Lambda}$ — множество ребер двойственной решетки, пересекающих ребра из $\Lambda^{(2)}$ (т. е. целиком лежащих внутри $\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \partial\Lambda$). Кластером назовем произвольный контур $\Gamma \subset \hat{\Lambda}$ (т. е. связную замкнутую ломаную, составленную из ребер $\hat{\Lambda}$). Тогда кластерное представление для величины $Z_{\Lambda,+} e^{-\beta|\hat{\Lambda}|}$ примет вид

$$Z_{\Lambda,+} e^{-\beta|\hat{\Lambda}|} = \sum_{\sigma^\Lambda} \exp\{-2\beta|\gamma(\sigma^\Lambda)|\} = \\ = \sum_{\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n\}} \prod_{i=1}^{n} \exp\{-2\beta|\Gamma_i|\}, \quad (7)$$

где $\gamma(\sigma^\Lambda) \subseteq \hat{\Lambda}$ — граница конфигурации σ^Λ, а последняя сумма в (7) берется по всем наборам попарно непересекающихся контуров. Таким образом, (7) даст искомое кластерное представление, в котором

$$k_\Gamma = \begin{cases} \exp\{-2\beta|\Gamma|\}, & \text{если } \Gamma \subset \hat{\Lambda} \text{ — контур},\\ 1, \ |\Gamma| = 1, \ \Gamma \subset \hat{\Lambda}, & \\ 0 \text{ для остальных подмножеств } \Gamma \subseteq \hat{\Lambda}. & \end{cases}$$

Кластерная оценка (2.1) для этих величин k_Γ доказывается аналогично предыдущим случаям.

IV. *Низкотемпературная ферромагнитная область единственности* ($h \neq 0$, $\beta > 0$ *и велико*). Мы по-прежнему рассмотрим случай $\nu = 2$ и получим здесь кластерное представление для величины

$$\tilde{Z}_{\Lambda,+} = Z_{\Lambda,+}\exp\{-\beta|\Lambda^{(2)}| - h|\Lambda|\} = \\ = \sum_{\sigma^\Lambda \in \Omega_\Lambda^{(+)}} \exp\{-2\beta|\gamma(\sigma^\Lambda)| - 2h|B_-(\sigma^\Lambda)|\} \quad (8)$$

при $h > 0$. Здесь, как и выше, $B_-(\sigma^\Lambda) \subseteq \Lambda$ — множество точек в Λ, в которых конфигурация σ^Λ принимает значение $\sigma = -1$, $\gamma(\sigma^\Lambda) \subseteq \tilde{\Lambda}$ — граница конфигурации σ^Λ, а $\Omega_\Lambda^{(+)} \subset \Omega_\Lambda$ — совокупность конфигураций в Λ, граница которых состоит только из контуров, и множество $B_-(\sigma^\Lambda)$ лежит внутри $\gamma(\sigma^\Lambda)$ (т. е. любая точка $t \in B_-(\sigma^\Lambda)$ отделена от $\partial\Lambda$ каким-нибудь контуром $\Gamma \subset \gamma(\sigma^\Lambda)$). Аналогично определяется множество $\Omega_\Lambda^{(-)} \subset \Omega_\Lambda$. Обозначим для любого контура Γ

$$\mathring{\Gamma} = \operatorname{Int}\Gamma \backslash \partial_i(\operatorname{Int}\Gamma),$$

где $\operatorname{Int}\Gamma \subset Z^2$ — совокупность точек, ограниченных контуром Γ. Очевидно, что $\partial\mathring{\Gamma} = \partial_i(\operatorname{Int}\Gamma)$. Выберем теперь $\widehat{T}$ и $\widehat{\Lambda}$, как и в предыдущем случае. Контур $\Gamma' \subset \widehat{T}$ назовем внутренним относительно контура $\Gamma \subset \widehat{\Lambda}$, если Γ' лежит в $\operatorname{Int}\Gamma$ и внутри Γ' нет точек $\partial\Lambda$. Тогда легко видеть, что

$$\widetilde{Z}_{\Lambda,+} = \sum_{\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n\}}{}' \exp\left(-2\beta \sum_{i=1}^{n} |\Gamma_i| - 2h \sum_{i=1}^{n} \left|\partial\mathring{\Gamma}_i\right|\right) \prod \widetilde{Z}_{\mathring{\Gamma}_i,-}, \tag{9}$$

где сумма берется по всевозможным наборам попарно непересекающихся контуров $\Gamma_i \subset \widehat{\Lambda}$, ни один из которых не является внутренним относительно другого. Здесь через $\widetilde{Z}_{\Lambda,-}$, $\Lambda \subset Z^2$, обозначена сумма, аналогичная (8), взятая лишь по множеству конфигураций $\Omega_\Lambda^{(-)} \subset \Omega_\Lambda$. Полагая для каждого контура $\Gamma \subset \widehat{T}$

$$k_\Gamma = \exp\{-2\beta|\Gamma| - 2h|\partial\mathring{\Gamma}|\} \frac{\widetilde{Z}_{\mathring{\Gamma},-}}{\widetilde{Z}_{\mathring{\Gamma},+}}, \tag{10}$$

получим из (9), что

$$\widetilde{Z}_{\Lambda,+} = \sum_{\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n\}}{}' \prod_{i=1}^{n} k_{\Gamma_i} \widetilde{Z}_{\mathring{\Gamma}_i,+}. \tag{11}$$

Повторяя многократно разложение (11) для каждой суммы $\widetilde{Z}_{\mathring{\Gamma}_i,+}$, получим окончательно, что

$$\widetilde{Z}_{\Lambda,+} = \sum_{\gamma=\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n\}} \prod k_\Gamma, \tag{12}$$

где сумма берется по всем наборам γ попарно непересекающихся контуров.

Лемма 1. *Для любого конечного множества Λ при $h > 0$*

$$\widetilde{Z}_{\Lambda,-}/\widetilde{Z}_{\Lambda,+} \leqslant 1. \tag{13}$$

Доказательство. При $h = 0$ $\widetilde{Z}_{\Lambda,-} = \widetilde{Z}_{\Lambda,+}$. Далее,

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{\widetilde{Z}_{\Lambda,-}}{\widetilde{Z}_{\Lambda,+}}\right) = \frac{\widetilde{Z}_{\Lambda,-}}{\widetilde{Z}_{\Lambda,+}}\left(\frac{(\widetilde{Z}_{\Lambda,-})'_h}{\widetilde{Z}_{\Lambda,-}} - \frac{(\widetilde{Z}_{\Lambda,+})'_h}{\widetilde{Z}_{\Lambda,+}}\right). \tag{14}$$

Как легко следует из (8),

$$(\widetilde{Z}_{\Lambda,+})'_h/\widetilde{Z}_{\Lambda,+} = -2\langle B_-(\sigma^\Lambda)\rangle_{\Lambda,+} = \sum_{t\in\Lambda} \langle\sigma_t\rangle_{\Lambda,+} - |\Lambda|, \tag{15}$$

где $\langle\cdot\rangle_{\Lambda,+}$ — среднее по гиббсовскому распределению в Λ с $(+)$-граничными условиями. Поскольку при отображении $\sigma^\Lambda \mapsto \sigma^{-\Lambda}$ будет $\Omega_{\Lambda,-} \to \Omega_{\Lambda,+}$ и $B_-(\sigma^\Lambda) = \Lambda \setminus B_-(-\sigma^\Lambda)$, получим, что

$$(\widetilde{Z}_{\Lambda,-})'_h/\widetilde{Z}_{\Lambda,-} = -2|\Lambda| + 2\langle B_-(\sigma^\Lambda)\rangle_{\Lambda,+} = \\ = -\sum \langle\sigma_t\rangle_{\Lambda,+} - |\Lambda|. \tag{16}$$

Так как $\langle\sigma_t\rangle_{\Lambda,t} > 0$ при $h > 0$ (неравенство Гриффитса; см. (13.0.I)), из (14), (15) и (16) находим, что при $h > 0$

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{\widetilde{Z}_{\Lambda,-}}{\widetilde{Z}_{\Lambda,+}}\right) \leqslant 0,$$

откуда и вытекает (13).

Из (13) и (10) легко следуют кластерные оценки (2.1) для величин k_Γ.

§ 6. Точечный ансамбль

Мы будем здесь придерживаться обозначений § 1.I и рассмотрим чисто точечное поле в пространстве Q, в котором задана непрерывная мера λ (т. е. такая, что мера любого одноточечного множества $\lambda(\{t\}) = 0$, $t \in Q$). Обобщение приводимых здесь построений на случай маркированного точечного поля не представляет затруднений. Случай же чисто дискретной меры λ сводится к изучению полей на счетном множестве.

Пусть на множестве $\Omega_{\text{фин}} \subset \Omega$ конечных конфигураций (подмножеств) $x \subset Q$ определена функция $k(x)$ такая, что для любой ограниченной области $\Lambda \subset Q$

$$\int\int_{y\in\Omega(\Lambda),\, x\in\Omega_{\text{фин}}} k(x \cup y)\, d\nu(x)\, d\nu(y) < \infty. \tag{1}$$

Напомним, что $\Omega(\Lambda)$ — совокупность конфигураций в области Λ, а мера ν на пространстве $\Omega_{\text{фин}}$ (или ее сужение $\nu|_\Lambda$ на пространство $\Omega(\Lambda) \subset \Omega_{\text{фин}}$) определяется формулой (8.1.I).

Из (1) следует, что для любой ограниченной области Λ

$$\int\limits_{\Omega(\Lambda)} |k(y)|\,d\nu(y) < \infty \tag{1а}$$

и для ν-почти всех $y \in \Omega_{\text{фин}}$ конечен интеграл

$$\int\limits_{\Omega_{\text{фин}}} |k(y \cup x)|\,d\nu(x) < \infty. \tag{1б}$$

Допустим, что плотности $p_\Lambda = \frac{d\mu_\Lambda}{d\nu}$ гиббсовских перестроек $\{\mu_\Lambda,\ \Lambda \subset Q$ — ограниченная область$\}$ относительно меры $\nu = \nu|_\Lambda$ на пространстве $\Omega(\Lambda)$ представимы в виде

$$\begin{aligned} p_\Lambda(x) &= Z_\Lambda^{-1} \textstyle\sum^{(x)} k(x_1) \ldots k(x_n), \quad x \neq \varnothing, \\ p_\Lambda(\varnothing) &= Z_\Lambda^{-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\sum^{(x)}$ означает сумму по всем разбиениям $x = x_1 \cup \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$ на непустые подмножества $x_i \subseteq x$, $i = 1, \ldots, n$; $n = 1, \ldots, |x|$, а статистическая сумма Z_Λ равна

$$Z_\Lambda = \int\limits_{\Omega(\Lambda)} \left(\textstyle\sum^{(x)} k(x_1) \ldots k(x_n)\right) d\nu(x). \tag{3}$$

Это представление Z_Λ также называется кластерным представлением.

Лемма 1. *Верна следующая формула:*

$$\int\limits_{\Omega_{\text{фин}}} F(x) \left(\sum_{(x_1, \ldots, x_p)} \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_p(x_p) \right) d\nu =$$

$$= \overbrace{\int\limits_{\Omega_{\text{фин}}} \int\limits_{\Omega_{\text{фин}}}}^{p\text{ раз}} F(x_1 \cup \ldots \cup x_p)\,[\varphi_1(x_1) \ldots \varphi_p(x_p)]\,d\nu(x_1) \ldots$$

$$\ldots d\nu(x_p) \tag{4}$$

в предположении, что один из интегралов в (4) абсолютно сходится. Здесь F, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ — произвольные функции, определенные на пространстве $\Omega_{\text{фин}}$, а $\sum\limits_{(x_1, \ldots, x_p)}$ берется по всем упорядоченным наборам из непустых попарно непересекающихся подмножеств $x_i \subseteq x$, $i = 1, \ldots, p$, таких, что $\bigcup x_i = x$.

Доказательство этой леммы легко следует из определения меры ν; см. § 1.I (подробнее см. в [45]).

Воспользовавшись формулой (4), неравенством (1а) и представлением (3), легко находим, что

$$Z_\Lambda = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \int\limits_{\Omega(\Lambda)} \left\{ \sum_{\substack{(x_1, \ldots, x_n) \\ \bigcup_{i=1}^n x_i = x}} k(x_1) \ldots k(x_n) \right\} d\nu(x) =$$

$$= 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \left[\int\limits_{\Omega(\Lambda)} k(x)\,d\nu(x) \right]^n = \exp\left\{ \int\limits_{\Omega(\Lambda)} k(x)\,d\nu(x) \right\}. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* (1). *Тогда для любых ограниченных областей $A \subseteq \Lambda \subset Q$ плотность $p_\Lambda^{(A)}(y) = d\mu_\Lambda|_A / d\nu$ сужения $\mu_\Lambda|_A$ меры μ_Λ на σ-алгебру Σ_A имеет вид*

$$p_\Lambda^{(A)}(y) = (\tilde{Z}_\Lambda^{(A)})^{-1} \textstyle\sum^{(y)} r_\Lambda^{(A)}(y_1) \ldots r_\Lambda^{(A)}(y_n), \tag{6}$$

где

$$r_\Lambda^{(A)}(y) = \int\limits_{\Omega(\Lambda \setminus A)} k(y \cup x)\,d\nu(x), \tag{7}$$

$$\tilde{Z}_\Lambda^{(A)} = \exp\left\{ \int\limits_{\Omega(A)} r_\Lambda^{(A)}(y)\,d\nu(y) \right\}. \tag{8}$$

Существует предельная предмера (или мера) μ на пространстве Ω:

$$\mu = \lim_{\Lambda \nearrow Q} \mu_\Lambda$$

(в смысле слабой локальной сходимости), причем для любого $A \subset Q$ плотность $\rho^{(A)}(y) = d\mu|_A / d\nu$ ее сужения на Σ_A равна

$$p^{(A)}(y) = \lim_{\Lambda \nearrow Q} p_\Lambda^{(A)}(y) = (\tilde{Z}^{(A)})^{-1} \textstyle\sum^{(y)} \prod\limits_{i=1}^n r^{(A)}(y_i), \tag{9}$$

где

$$r^{(A)}(y) = \lim_{\Lambda \nearrow Q} r_\Lambda^{(A)}(y) = \int\limits_{\Omega_{\text{фин}}(Q \setminus A)} k(x \cup y)\,d\nu(x) \tag{10}$$

и

$$\tilde{Z}^{(A)} = \lim_{\Lambda \nearrow Q} Z_\Lambda^{(A)} = \exp\left\{ \int\limits_{\Omega(A)} r^{(A)}(y)\,d\nu(y) \right\}. \tag{11}$$

Разложения (6) и (9) принято называть кластерными разложениями гиббсовских перестроек μ_Λ и предельной меры μ соответственно.

Доказательство. Из очевидного свойства меры ν: $d\nu(x \cup y) = d\nu(x) d\nu(y)$, $x \cap y = \varnothing$, получаем, что

$$p_\Lambda^{(A)}(y) = \int_{\Omega(\Lambda \setminus A)} p_\Lambda(y \cup x)\, d\nu(x).$$

Воспользовавшись равенством

$$\sum\nolimits^{(y \cup x)} k(x_1) \ldots k(x_n) = \sum_{\substack{z_1, z_2:\\ z_1 \cap z_2 = \varnothing,\\ z_1 \cup z_2 = x}} \Big[\widetilde{\sum}^{(y \cup z_1)} k(y_1 \cup x_1') \ldots k(y_n \cup x_{n'}')\Big] \times \Big[\sum\nolimits^{(z_2)} k(x_1'') \ldots k(x_{n''}'')\Big],$$

где $\widetilde{\sum}^{(y \cup z_1)}$ означает суммирование по всем разбиениям $y \cup z_1 = (y_1 \cup x_1') \cup \ldots \cup (y_n \cup x_{n'}')$, $y_i \subseteq y$, $x_i' \subseteq z_1$, в которых y_i — непустые подмножества y, и применяя затем несколько раз лемму 1, мы и приходим к разложению (6). Из условий (1) и (1а) выводим существование предела (9) (и также пределов (10) в (11)), а затем отсюда выводим существование предельной меры μ на Ω.

МАЛЫЕ ПАРАМЕТРЫ ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

§ 1. Гиббсовские перестройки независимого поля с ограниченным потенциалом

Пусть S — полное сепарабельное метрическое пространство и μ_0 — вероятностная мера на S^T, являющаяся произведением вероятностных мер ν_t на S (вообще говоря, различных для различных $t \in T$); обозначим $\langle \cdot \rangle_0 = \langle \cdot \rangle_\mu$

Пусть задан потенциал $\{\Phi_A,\ A \subset T,\ |A| < \infty\}$ и μ_Λ — гиббсовская перестройка меры μ_0 с плотностью

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu_0} = Z_\Lambda^{-1} \exp(-U_\Lambda), \quad U_\Lambda = \sum_{A \subseteq \Lambda} \Phi_A. \tag{1}$$

При этом мы условимся считать, что одноточечный потенциал $\Phi_{\{t\}} = 0$, изменив в противном случае меры ν_t на S на меры $\tilde{\nu}_t$ с плотностью $\dfrac{d\tilde{\nu}_t}{d\nu_t} = C_t^{-1} \exp(-\Phi_{\{t\}})$, $C_t =$

$$= \int_S \exp\{-\Phi_{\{t\}}\}\, d\nu_t.$$

В этом параграфе предполагается ограниченность потенциала $\{\Phi_A\}$:

$$\sup_x |\Phi_A(x)| \equiv b_A < \infty \tag{2}$$

для всех конечных $A \subset T$, причем для всех $t \in T$ и $n \geqslant 2$

$$\sum_{\substack{A:\, t \in A,\\ |A| = n}} b_A < c\lambda^n, \tag{2'}$$

где $c > 0$ и λ, $0 < \lambda < 1$, — некоторые параметры.

Если ввести величины $\varkappa_A(x) = e^{-\Phi_A(x)} - 1$, то условия (2) и (2′) эквивалентны тому, что $\hat{\varkappa}_A = \sup_x |\varkappa_A(x)| < \infty$

и для всех $t\in T$ и $n\geqslant 2$

$$\sum_{\substack{A:\,t\in A,\\ |A|=n}} \hat{\varkappa}_A < \bar{c}\lambda^n, \quad \text{где} \quad ce^{-c}\leqslant \bar{c}\leqslant ce^{c}. \tag{3}$$

Условия устойчивости (2.1.I) выполнены очевидным образом.

Теорема 1. *В случае, когда выполнены условия* (2) *и* (2′) *и константа c достаточно мала: $c<c_0(\lambda)$, система мер $\{\mu_\Lambda,\ \Lambda\subset T\}$ допускает кластерное разложение.*

Доказательство. Для любого конечного множества $B\subset T$ и любой Σ_A-измеримой ограниченной функции F_A на $\Omega=S^T$ обозначим

$$k_B(F_A)=\sum_G \left\langle F_A \prod_{A_i\in\zeta}\varkappa_{A_i}\right\rangle,$$

$$k_B=k_B(\mathbb{1}),\quad |B|\geqslant 2,\quad k_{\{t\}}=1,\quad t\in T, \tag{4}$$

где сумма берется по всем неупорядоченным наборам $\zeta=\{A_1,\ \ldots,\ A_n\}$ конечных множеств таким, что $\tilde{\zeta}=B$ и набор $\{A,\ A_1,\ \ldots,\ A_n\}$ связен. В случае $F_A=\mathbb{1}$ связным предполагается сам набор ζ.

Лемма 2. *Статистические суммы Z_Λ допускают кластерное представление с числами k_B, определенными формулами* (4), *причем в случае, когда $\bar{c}<(1-\lambda)^2/4$, для всех $t\in T$ и $n\geqslant 2$*

$$\sum_{\substack{B:\,t\in B,\\ |B|=n}} |k_B| < \frac{4\bar{c}}{1-\lambda}(\bar{\lambda})^n,\quad \bar{\lambda}=\lambda(2-\lambda)<1. \tag{5}$$

Кроме того, для любой локальной ограниченной функции F_A имеет место разложение

$$\langle F_A\rangle_\Lambda=\langle F_A\rangle_0 f_A^{(\Lambda)}+\sum_{\substack{R\subset\Lambda,\\ R\cap A\neq\varnothing}} k_R(F_A)\cdot f_{R\cup A}^{(\Lambda)}. \tag{6}$$

Доказательство. Для вывода кластерного представления Z_Λ поступим так же, как в § 5.III в высокотемпературной области. Заметим, что

$$Z_\Lambda=\left\langle \prod_{A\subset\Lambda}(1+\varkappa_A)\right\rangle_0=\sum_\zeta\left\langle\prod_{A\in\zeta}\varkappa_A\right\rangle_0, \tag{7}$$

где сумма берется по всем наборам ζ попарно различных множеств $A_1,\ \ldots,\ A_n\subset\Lambda$. Для каждого набора $\zeta=(A_1,\ \ldots,\ A_n)$ обозначим $\varkappa_\zeta=\prod_{A\in\zeta}\varkappa_A$. Пусть $\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_k$ — связные компоненты набора ζ. Случайные величины $\varkappa_{\zeta_1},\ \ldots,\ \varkappa_{\zeta_k}$ независимы, и, следовательно, $\langle\varkappa_\zeta\rangle_0=\prod_{i=1}^k\langle\varkappa_{\zeta_i}\rangle_0$. При этом (7) переписывается в виде

$$Z_\Lambda=\sum_{\{\zeta_1,\ldots,\zeta_k\}}\prod_{i=1}^k\langle\varkappa_{\zeta_i}\rangle_0. \tag{8}$$

Из (8) с помощью определения (4) получим кластерное представление (1.1.III). Перейдем к выводу оценки (5). Очевидно, что для всех $\xi\geqslant 1$ и $t\in T$

$$h_t(\xi)\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{B:\,t\in B}|k_B|\,\xi^{|B|}\leqslant\sum_{\zeta:\,t\in\tilde{\zeta}}\prod_{A\in\zeta}\hat{\varkappa}_A\xi^{|A|}\leqslant\sum_{k=1}^\infty S_k(\xi), \tag{9}$$

где

$$S_k^{(t)}(\xi)=\sum_{\substack{\zeta:\,t\in\tilde{\zeta}\\ |\zeta|=k}}\prod_{A\in\zeta}\hat{\varkappa}_A\xi^{|A|},\quad S_k(\xi)=\sup_{t\in T}S_k^{(t)}(\xi).$$

Здесь во всех суммах наборы ζ предполагаются связными. Заметим, что величины $S_k(\xi)$ удовлетворяют следующим рекуррентным неравенствам:

$$S_k(\xi)\leqslant\bar{c}\sum_{m=2}^\infty(\lambda\xi)^m\sum_{s=0}^{\min(k-1,m)}C_m^s\sum_{(k_1,\ldots,k_s)}S_{k_1}(\xi)\ldots S_{k_s}(\xi), \tag{10}$$

где суммирование в последней сумме происходит по упорядоченным наборам $(k_1,\ \ldots,\ k_s)$ целых чисел таких, что $k_1+\ldots+k_s=k-1$ и $k_i\geqslant 1$, $i=1,\ \ldots,\ s$. Неравенства (10) выводятся аналогично неравенствам (3.4.II).

Введем далее числа $\bar{S}_k=\bar{S}_k(\xi)$, определяемые рекуррентно по формуле

$$\bar{S}_k=\bar{c}\sum_{m=2}^\infty(\lambda\xi)^m\sum_{s=0}^{\min(k-1,m)}C_m^s\sum_{(k_1,\ldots,k_s)}\bar{S}_{k_1}\ldots\bar{S}_{k_s},\quad k>1, \tag{11}$$

$$\bar{S}_1=S_1=\bar{c}\sum_{m=2}^\infty(\lambda\xi)^m.$$

Очевидно, что $S_k(\xi) \leqslant \bar{S}_k$. Введем функцию

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{S}_k z^k \tag{12}$$

в предположении, что ряд в правой части сходится для достаточно малых z.

Из (11) при условии, что

$$|\lambda\xi(1 + f(z))| < 1, \tag{13}$$

получаем уравнение

$$f(z) = \bar{c}z \frac{[\lambda\xi(1 + f(z))]^2}{1 - \lambda\xi(1 + f(z))}. \tag{14}$$

С помощью явного решения этого уравнения (сводящегося к квадратному уравнению) легко убедиться, что существует аналитическая в окрестности $z = 0$ функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям (13) и (14). При условии, что

$$\lambda\xi < 1/(2 - \lambda) \quad \text{и} \quad \bar{c} < (1 - \lambda)^2/4, \tag{15}$$

эта функция аналитична в круге $|z| < 1$, удовлетворяет в этом круге условию (13) и ограничена величиной $4\bar{c}/(1 - \lambda)$. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k(\xi) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \bar{S}_k(\xi) = f(1) \leqslant 4\bar{c}/(1 - \lambda).$$

Отсюда следует, что при $|\xi| < 1/[\lambda(2 - \lambda)]$ и любом $t \in T$ функция $h_t(\xi)$ аналитична по ξ и не превосходит $4\bar{c}/(1 - \lambda)$. Отсюда с помощью формулы Коши и получаем оценку (5). Разложение (6) выводится аналогично кластерному представлению статистических сумм. Лемма доказана.

Из (4) следует, что

$$|k_R(F_A)| < \sup_x |F_A(x)| \sum_{\substack{\Gamma = \{B_1, \ldots, B_n\}, \tilde{\Gamma} = R, \\ B_i \cap A \neq \varnothing}} \prod |k_{B_i}|.$$

Таким образом, при $4c/(1 - \lambda) < c_0(\lambda)$ (см. (23′.1.III)) кластерное представление Z_Λ удовлетворяет условию кластерности (23.1.III), а разложение средних $\langle F_A \rangle_\Lambda$ имеет вид (5.3.III) и удовлетворяет условиям (6.3.III) и (7.3.III).

Далее, как легко видеть из (1), (2), (2′), плотность $d\mu_{\Lambda A}/d\mu_0$ сужения меры μ_Λ на σ-алгебру Σ_A, $A \subset \Lambda$, допускает оценку

$$\left| \frac{d\mu_\Lambda|_A}{d\mu_0} \right| < e^{m|A|} \left| \frac{Z_{\Lambda \setminus A}}{Z_\Lambda} \right| = e^{m|A|} \left| f_A^{(\Lambda)} \right|,$$

где $m = \sup_t \sum_{B: t \in B} b_B < \infty$. Отсюда и из леммы 3.1.I следует слабая локальная компактность семейства мер $\{\mu_\Lambda, \Lambda \subset T\}$. Теорема доказана.

Замечание. В случае, когда потенциал $\{\Phi_A\}$ финитен: $\Phi_A \equiv 0$ при $\operatorname{diam} A > R$ и достаточно мал: $\sup_x |\Phi_A(x)| < \beta$ для всех носителей A ($\beta \ll 1$ — малое число), выполнены все условия теоремы 1. При этом разложение вида (10.3.III) для средних $\langle F_A \rangle_\Lambda$ оказывается экспоненциально-кластерным (см. § 3.III), если в качестве семейства $\mathfrak{A}$ выбрать совокупность носителей потенциала $\{\Phi_A\}$, т. е. множеств $A \subset T$, для которых $\Phi_A \not\equiv 0$. Этот факт легко вытекает из доказательства теоремы 1 и леммы 4.3.III.

§ 2. Неограниченное взаимодействие в финитной части потенциала

В этом параграфе мы обобщим теорему 1.1 на случай, когда потенциал Φ_A для некоторых $A \subset T$ неограничен. Именно, предположим, что потенциал $\{\Phi_A\}$, задающий гиббсовскую перестройку (1.1), представим в виде суммы двух потенциалов

$$\Phi_A = \hat{\Phi}_A + \Psi_A, \quad A \subset T, \tag{1}$$

где $\hat{\Phi}_A$ удовлетворяет условиям (2.1), (2′.1), а потенциал Ψ_A — условиям:

1) Ψ_A финитен, т. е. все его носители имеют ограниченный диаметр: $\operatorname{diam} A \leqslant R$; отсюда $|A| \leqslant D = D(R)$, и каждая точка $t \in T$ принадлежит не более чем M носителям ($M = M(R)$);

2) $\Psi_A \geqslant 0$ для всех A; (2)

3) для любого носителя A потенциала Ψ_A

$$\left\langle \left| e^{-\Psi_A} - 1 \right| \right\rangle_0 < \delta, \tag{2′}$$

где δ — достаточно малая константа.

Как и раньше, мы считаем, что одночастичный потенциал $\Psi_{\{t\}} \equiv 0$, $t \in T$.

Теорема 1. *Пусть $\widehat{\Phi}_A$ в (1) удовлетворяет условиям теоремы 1.1, а константа $\delta > 0$ в (2) достаточно мала: $\delta < \delta_0(c, \lambda)$. Тогда семейство гиббсовских перестроек μ_Λ, определяемое формулой (1.1), допускает кластерное разложение.*

Замечание. Потенциал вида

$$\Phi_A = \widehat{\Phi}_A + \beta\Psi_A, \tag{3}$$

где $\widehat{\Phi}_A$ удовлетворяет условиям (2.1), (2'.1) с достаточно малой константой c, а Ψ_A — финитный равномерно ограниченный снизу потенциал, для достаточно малых β удовлетворяет условиям теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Статистическая сумма Z_A, как и в случае ограниченного потенциала, допускает кластерное представление с числами k_B, определяемыми формулой (4.1). Докажем для них кластерную оценку

$$\sum_{\substack{B:\ t\in B,\\ |B|=n}} |k_B| < \frac{8d}{1-\lambda}(\bar{\lambda})^n, \quad \bar{\lambda} = \lambda(2-\lambda) < 1, \tag{4}$$

где

$$d = \max\left\{\bar{c},\ \frac{(1+\bar{c})M}{\lambda^D}\,\delta^{1/(1+MD)}\right\}.$$

Имеем

$$e^{-(\widehat{\Phi}_A+\Psi_A)} - 1 =$$

$$= \left(e^{-\widehat{\Phi}_A} - 1\right)\left(e^{-\Psi_A} - 1\right) + \left(e^{-\widehat{\Phi}_A} - 1\right) + \left(e^{-\Psi_A} - 1\right).$$

Воспользовавшись (3.1), получим, что

$$\left|e^{-(\widehat{\Phi}_A+\Psi_A)} - 1\right| \leqslant \varkappa_A^{(1)} + \varkappa_A^{(2)}(\bar{c}+1), \tag{5}$$

где

$$\varkappa_A^{(1)} = \left|e^{-\widehat{\Phi}_A} - 1\right|, \quad \varkappa_A^{(2)} = \left|e^{-\Psi_A} - 1\right|.$$

Таким образом, из (5) и (4.1) находим, что

$$|k_B| < \sum_{\Gamma,\Gamma'} (1+\bar{c})^{k'} \left\langle \prod_{A_i\in\Gamma} \varkappa_{A_i}^{(1)} \cdot \prod_{A'_j\in\Gamma'} \varkappa_{A'_j}^{(2)} \right\rangle_0, \tag{6}$$

где суммирование происходит по всем парам наборов $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_k\}$, $\Gamma' = \{A'_1, \ldots, A'_{k'}\}$ попарно различных множеств, причем набор $\Gamma \cup \Gamma'$ связен и $B = \widetilde{\Gamma} \cup \widetilde{\Gamma}'$, а множества $A'_j \in \Gamma'$ являются носителями потенциала Ψ. Заметим, что для каждого набора $\Gamma' = \{A'_1, \ldots, A'_{k'}\}$ можно выбрать поднабор $\Gamma'' \subset \Gamma'$, состоящий из не менее чем $[k'/(1+MD)] + 1$ попарно непересекающихся множеств. Поскольку $\varkappa_A^{(2)} \leqslant 1$, то

$$\left\langle \prod_{A\in\Gamma} \varkappa_A^{(1)} \prod_{A'\in\Gamma'} \varkappa_{A'}^{(2)} \right\rangle_0 \leqslant \prod_{A\in\Gamma} \widehat{\varkappa}_A^{(1)} \delta^{|\Gamma'|/(1+MD)}.$$

Таким образом, для любого $\xi > 1$

$$h_t(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{B:t\in B} k_B \xi^{|B|} \leqslant \sum_{\Gamma,\Gamma'} a^{|\Gamma'|} \Bigl(\prod_{A'\in\Gamma'} \xi^{|A'|}\Bigr)\Bigl(\prod_{A\in\Gamma} \widehat{\varkappa}_A^{(1)} \xi^{|A|}\Bigr) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{k,k',\\ k+k'>0}} S_{kk'}(\xi),$$

где

$$S_{kk'} = \sup_{t\in\Gamma} \sum_{\substack{\Gamma,\Gamma':\\ t\in\widetilde{\Gamma}\cup\widetilde{\Gamma}',\\ |\Gamma|=k,\,|\Gamma'|=k'}} a^{k'} \Bigl(\prod_{A'\in\Gamma'} \xi^{|A'|}\Bigr)\Bigl(\prod_{A\in\Gamma} \widehat{\varkappa}_A^{(1)} \xi^{|A|}\Bigr),$$

$$a = (1+\bar{c})\delta^{1/(1+MD)}.$$

Как и выше, получаем следующие рекуррентные неравенства для $S_{kk'}$:

$$S_{kk'}(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant \bar{c} \sum_{m\geqslant 2} (\lambda\xi)^m \sum_{s=0}^{\min(m,k+k'-1)} C_m^s \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_s=k-1,\\ k'_1+\ldots+k'_s=k'}} S_{k_1k'_1} \ldots S_{k_sk'_s} +$$

$$+ a \sum_{m=1}^{D} N_m \xi^m \sum_{s=0}^{\min(m,k+k'-1)} C_m^s \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_s=k,\\ k'_1+\ldots+k'_s=k'-1}} S_{k_1k'_1} \ldots S_{k_sk'_s},$$

которые выводятся аналогично неравенствам (10.1).

Здесь $N_m < M$ — максимальное число носителей потенциала Ψ мощности m, содержащих фиксированную точку. Поскольку $N_m \leqslant M\lambda^m/\lambda^D$, $m = 2, \ldots, D$, числа $S_{kk'} \leqslant \bar{S}_{kk'}$, где $\bar{S}_{kk'}$ рекуррентно определяются из равенств

$$\overline{S}_{kk'} = d \sum_{m=2}^{\infty} (\lambda\xi)^m \sum_{s=0}^{\min(m,k+k'-1)} C_m^s \times$$

$$\times \left[\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_s=k-1,\\ k_1'+\ldots+k_s'=k'}} \overline{S}_{k_1k_1'} \ldots \overline{S}_{k_sk_s'} + \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_s=k,\\ k_1'+\ldots+k_s'=k'-1}} \overline{S}_{k_1k_1'} \ldots \overline{S}_{k_sk_s'} \right], \qquad (7)$$

$$d = \max(\bar{c},\ aM/\lambda^D).$$

Введем функцию

$$\varphi(z_1,\ z_2) = \sum_{k,k'} \overline{S}_{kk'} z_1^k z_2^{k'}$$

и при условии, что $\lambda\xi|1+\varphi(z_1,\ z_2)| \leqslant 1$, из (7) находим, что $\varphi(z_1,\ z_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi = 2d\frac{z_1+z_2}{2}\frac{[\lambda\xi(1+\varphi)]^2}{1-\lambda\xi(1+\varphi)}.$$

Таким образом, $\varphi = f_{2d}((z_1+z_2)/2)$, где $f_{\bar{c}}(z)$ означает решение уравнения (14.1). Используя результаты предыдущего параграфа, находим, что при $\xi = 1/[\lambda(2-\lambda)]$ и $d < (1-\lambda)^2/8$ функция φ аналитична в поликруге $|z_1| \leqslant 1$, $|z_2| \leqslant 1$ и ограничена в нем константой $8d/(1-\lambda)$. Отсюда, аналогично предыдущему, получаем оценку (4). Остальная часть доказательства вполне аналогична доказательству теоремы 1.1.

§ 3. Гиббсовская перестройка d-зависимого поля

Случайное поле $\{\xi_t,\ t \in T\}$ на произвольном множестве T (не обязательно счетном) с метрикой $\rho(\cdot,\ \cdot)$ (например, $T = Z^\nu$ или $T = R^\nu$) называется *d-зависимым*, если для любого конечного множества $\{t_1,\ \ldots,\ t_n\}$, $t_i \in T$ и $\rho(t_i,\ t_j) > d$, случайные величины $\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}$ являются взаимно независимыми.

Пусть теперь T счетно и мера μ_0 на S^T определяет d-зависимое поле со значениями в S.

Теорема 1. *Теоремы 1.1 и 1.2 остаются справедливыми в случае, когда фигурирующая в них свободная мера μ_0 является d-зависимой. (При соответствующем изменении допустимых границ для малых констант c и δ.)*

Доказательство повторяет доказательства теорем 1.1 и 1.2, с той разницей, что в кластерном представлении статистических сумм следует рассматривать d-допустимые разбиения. При этом k_B определяется по-прежнему формулой (4.1), где сумма берется по d-связным наборам ξ. Это значит, напомним, что ζ нельзя разбить па два таких поднабора ζ' и ζ'', что расстояние между $\tilde{\zeta}'$ и $\tilde{\zeta}''$ больше d. Необходимые при этом изменения в рассуждениях очевидны.

Замечание. Можно привести много примеров d-зависимых трансляционно-инвариантных случайных полей в R^ν. С помощью описанного в § 1.I приема укрупнения (дискретизации) мы можем строить и изучать гиббсовские перестройки таких полей.

§ 4. Гиббсовское точечное поле в R^ν

Рассмотрим гиббсовские перестройки $\{\mu_\Lambda,\ \Lambda \subset R^\nu\}$ (Λ — ограниченная область) чисто точечного пуассоновского поля μ^0 в R^ν, задаваемого лебеговой мерой $d\lambda$ в R^ν. Плотность $p_\Lambda(x) = \frac{d\mu_\Lambda}{d\nu}(x)$, $x \in \Omega(\Lambda)$, меры μ_Λ относительно меры ν па $\Omega(\Lambda)$ (отличающейся лишь множителем $\exp\{\lambda(\Lambda)\}$ от меры $\mu_0|_\Lambda$; см. (9.1.I)) равна

$$p_\Lambda(x) = Z_\Lambda^{-1} \exp\{-\beta U_\Lambda(x)\}, \qquad (1)$$

где взаимодействие имеет вид (11.1.I):

$$U_\Lambda(x) = \hat{\mu}|x| + \sum_{(t,t') \subseteq x} \varphi(t-t'), \qquad (2)$$

причем функция φ ограничена снизу и удовлетворяет условиям:

1) устойчивости: для любого $x \in \Omega_{\text{фин}}$

$$\sum_{(t,t') \subseteq x} \varphi(t-t') > -B|x|, \qquad (3)$$

где $B \geqslant 0$ — некоторая константа, не зависящая от x;

2) регулярности:

$$C(\beta) \equiv \int_{R^\nu} \left| e^{-\beta\varphi(t)} - 1 \right| d^\nu t < \infty \qquad (4)$$

при некотором $\beta > 0$ (а следовательно, и при всех $\beta > 0$).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3) *и* (4) *и величина* $z=e^{-\beta\hat{\mu}}$ (*активность*) *достаточно мала. Тогда существует функция* $k(x)$, $x\in\Omega_{\text{фин}}$, *определенная на пространстве* $\Omega_{\text{фин}}$, *удовлетворяющая условию* (1.6.III) *и такая, что для плотности* $p_\Lambda(x)$ *и статистической суммы* Z_Λ *верны представления* (2.6.III) *и* (3.6.III) *соответственно, в которые входит функция* $k(x)$.

Из этой теоремы и теоремы 2.6.III следует, что гиббсовские меры $\{\mu_\Lambda, \Lambda\subset R^\nu\}$ допускают кластерное разложение (6.6.III) и существует предельная мера (или предмера) μ на пространстве Ω, также допускающая кластерное разложение (9.6.III).

Доказательство. Напишем для $x\in\Omega_{\text{фин}}$, $|x|\geqslant 2$,

$$e^{-\beta U(x)}=z^{|x|}\prod_{\{t,t'\}\subseteq x}\left(1+\left(e^{-\beta\varphi(t-t')}-1\right)\right)=$$

$$=z^{|x|}\left(1+\sum_{\Gamma}\prod_{\{t,t'\}\in\Gamma}\left(e^{-\beta\varphi(t-t')}-1\right)\right),\tag{5}$$

где $\sum\limits_{\Gamma}$ берется по всевозможным графам Γ, построенным на подмножествах $\tilde{x}(\Gamma)\subseteq x$. Обозначим через k_Γ выражение

$$k_\Gamma=z^{|\tilde{x}|}\prod_{\{t,t'\}\in\Gamma}\left(e^{-\beta\varphi(t-t')}-1\right).\tag{6}$$

Каждый граф Γ распадается на свои связные компоненты $\gamma_1,\ldots,\gamma_s$, и при этом

$$k_\Gamma=k_{\gamma_1}\ldots k_{\gamma_s}.\tag{7}$$

Введем для каждого множества $x\in\Omega_{\text{фин}}$ функцию

$$k(x)=\begin{cases} z, & |x|=1,\\ \sum\limits_{\gamma}^{(x)}k_\gamma, & |x|\geqslant 2,\end{cases}\tag{8}$$

где сумма $\sum\limits_{\gamma}^{(x)}$ берется по всевозможным связным графам γ, множество вершин которых совпадает с x. Из (5), (6), (7), (8) получаем представление (2.6.III):

$$p_\Lambda(x)=Z_\Lambda^{-1}\sum{}^{(x)}k(x_1)\ldots k(x_n).\tag{9}$$

Покажем, что $k(x)$ удовлетворяет условию (1.6.III).

Лемма 2. *Для функции* $k(x)$ *справедлива оценка*

$$|k(x)|\leqslant\left(|z|e^{2\beta B}\right)^{|x|}\sum_{\mathcal{T}}^{(x)}\prod_{(t,t')\in\mathcal{T}}\left|\left(e^{-\beta\varphi(t-t')}-1\right)\right|,\tag{10}$$

где сумма $\sum\limits_{\mathcal{T}}^{(x)}$ *берется по всем деревьям* $\mathcal{T}$, *множество вершин которых совпадает с* x.

Доказательство. Введем функцию $\bar{k}(x,y)$, $x,y\in\Omega_{\text{фин}}$, $x\cap y=\varnothing$, $x\neq\varnothing$:

$$\bar{k}(x,y)=\sum_{\Gamma}^{(x,y)}k_\Gamma,$$

где сумма берется по всем графам Γ, множество вершин которых есть $x\cup y$, причем каждая связная компонента $\gamma\subset\Gamma$ графа Γ содержит хотя бы одну вершину из множества x. Легко проверить, что $\bar{k}(x,y)$ удовлетворяет следующим соотношениям. Пусть $t_1\in x$ — какая-нибудь точка из множества $x\in\Omega_{\text{фин}}$, для которой выполнено условие

$$\sum_{t\in x'}\varphi(t_1-t)>-2B,\tag{11}$$

где $x'=x\setminus\{t_1\}$. Из условия устойчивости (3) следует, что хотя бы одна такая точка $t_1\in x$ найдется. Верны равенства

$$\bar{k}(x,y)=ze^{-\beta\sum\limits_{t\in x'}\varphi(t_1-t)}\Bigg[\bar{k}(x',y)+$$

$$+\sum_{\substack{u\subseteq y,\\ u\neq\varnothing}}\bar{k}(x'\cup u,y\setminus u)\prod_{t\in u}\left(e^{-\beta\varphi(t_1-t)}-1\right)\Bigg],\quad y\neq\varnothing,\tag{12}$$

$$\bar{k}(x,\varnothing)=e^{-\beta U(x)}.$$

При этом мы полагаем, что $\bar{k}(\varnothing,y)=0$.

Заметим, что равенства (12) носят рекуррентный характер: значение $\bar{k}(x,y)$ при $|x|+|y|=n$ выражается через значения $\bar{k}(\tilde{x},\tilde{y})$ при $|\tilde{x}|+|\tilde{y}|=n-1$. Отсюда и из (11) следует, что $\bar{k}(x,y)$ мажорируется: $|\bar{k}(x,y)|\leqslant\leqslant Q(x,y)$ решением $Q(x,y)\geqslant 0$ системы соотношений

$$Q(x,y)=|z|e^{2\beta B}\Bigg[Q(x',y)+$$

$$+\sum_{\substack{u\subseteq y,\\ u\neq\varnothing}}Q(x'\cup y,y\setminus u)\prod_{t\in u}\left|e^{-\beta\varphi(t_1-t)}-1\right|\Bigg],\quad y\neq 0,\tag{13}$$

$$Q(x,\varnothing)=|z|e^{2\beta B|x|},\quad Q(\varnothing,y)=0.$$

С помощью индукции по числу $n=|x|+|y|$ легко убедиться, что решение системы (13) имеет вид

$$Q(x, y)=\sum_{(y_1,\ldots,y_s)} Q(\{t_1\}, y_1), Q(\{t_2\}, y_2), \ldots, Q(\{t_s\}, y_s), \tag{14}$$

где $x=\{t_1, \ldots, t_s\}$, а сумма берется по упорядоченным наборам $(y_1, \ldots, y_s)$ попарно непересекающихся множеств $y_i\subseteq y$ (возможно, и пустым) таким, что $\bigcup_{i=1}^{s} y_i=y$ и

$$Q(\{t\}, y)=\left(|z|\,e^{2\beta B}\right)^{|y|+1}\sum_{\mathcal{T}}\prod_{\{t',t''\}\in\mathcal{T}}\left|e^{-\beta\varphi(t'-t'')}-1\right|, \tag{15}$$

где сумма берется по всем деревьям $\mathcal{T}$, множество вершин которых есть $\{t\}\cup y$. Поскольку $k(x)=\bar{k}(\{t\}, x')$, из (15) следует оценка (10). Лемма доказана.

Далее, из (10)

$$\int_{y\in\Omega(\Lambda)}\int_{x\in\Omega_{\text{фин}}}|k(x\cup y)|\,d\nu(x)\,d\nu(y)\leqslant\sum_{m,n,m>0}\frac{(|z|\,e^{2\beta B})^{m+n}}{m!\,n!}\times$$

$$\times\sum_{\mathcal{T}}\overbrace{\int_{\Lambda}\cdots\int_{\Lambda}}^{m\ \text{раз}}\overbrace{\int_{R^{\nu}}\cdots\int_{R^{\nu}}}^{n\ \text{раз}}\prod_{(i,j)\in\mathcal{T}}\left|e^{-\beta\varphi(t_i-t_j)}-1\right|\prod_{i=1}^{m+n}dt_i, \tag{16}$$

где сумма $\sum_{\mathcal{T}}$ берется по всем деревьям, множество вершин которых есть $\mathcal{N}_{m+n}=\{1, \ldots, m+n\}$, а интегрирование по первым m переменным $(t_1, \ldots, t_m)$ происходит по множеству Λ, а по остальным переменным $(t_{m+1}, \ldots$ $\ldots, t_{m+n})$ — по всему пространству R^{ν}. Легко проверить, что для любого дерева $\mathcal{T}$

$$\overbrace{\int_{\Lambda}\int_{\Lambda}\cdots\int_{\Lambda}}^{m\ \text{раз}}\overbrace{\int_{R^{\nu}}\cdots\int_{R^{\nu}}}^{n\ \text{раз}}\prod_{(i,j)\in\mathcal{T}}\left|e^{-\beta\varphi(t_i-t_j)}-1\right|\prod_{i=1}^{m+n}dt_i\leqslant$$

$$\leqslant|\Lambda|\,(C(\beta))^{m+n-1}. \tag{17}$$

Поскольку (как следует, например, из (21.4.II)) число деревьев, имеющих k вершин, не превосходит $c^k k!$, где c — константа (точное значение этого числа — k^{k-2} (см.

[52])), из (16) и (17) находим, что при

$$|z|<\frac{1}{2c}\left[e^{2\beta B}C(\beta)\right]^{-1} \tag{18}$$

интеграл (16) конечен. Теорема доказана.

§ 5. Модели с непрерывным временем

Здесь мы рассмотрим гиббсовские поля $\{\xi_{t,s},\ t\in T,$ $s\in R^1\}$, принимающие конечное множество значений $Q=$ $=(q_1, \ldots, q_l)$ и заданные на «пространстве — времени» $T\times R^1$, где «пространство» T счетно, а «время» R^1 непрерывно.

Определим сначала свободную меру μ_0. Пусть задана стационарная эргодическая цепь Маркова $\xi(s)$ с непрерывным временем и множеством значений Q. Ей соответствует мера ν_0 на пространстве Ω_0 кусочно-постоянных (и непрерывных справа) траекторий (функций) $\{\xi(s),$ $s\in R^1\}$, $\xi(s)\in Q$, определенных на R^1.

Рассмотрим пространство $\Omega=\Omega_0^T$ с мерой $\mu_0=\nu_0^T$, т. е. набор $\{\xi_t,\ t\in T\}$ независимых между собой одинаковых цепей $\{\xi_t(s)=\xi_{t,s}\}$, приписанных каждой точке $t\in T$.

Определим гиббсовскую перестройку $\mu_{\Lambda\times L}$ меры μ_0 ($\Lambda\subset T$ — конечное подмножество T, $L=[l_1, l_2]\subset R^1$ — конечный отрезок):

$$\frac{d\mu_{\Lambda\times L}}{d\mu_0}=Z^{-1}_{\Lambda\times L}\exp\{U_{\Lambda\times L}\}, \tag{1}$$

где

$$U_{\Lambda\times L}=\beta\sum_{\langle t,t'\rangle}^{(\Lambda)}\int_{L}\Phi(\xi_t(s), \xi_{t'}(s))\,ds; \tag{2}$$

$\sum\limits_{\langle t,t'\rangle}^{(\Lambda)}$ означает сумму по $t,\ t'\in\Lambda$, $\rho(t, t')=1$, Φ — некоторая вещественная симметрическая функция на $Q\times Q$.

Теорема 1. *При достаточно малых β статистические суммы $Z_{\Lambda\times L}$ допускают кластерное представление, а меры $\mu_{\Lambda\times L}$ — кластерное разложение (и тем самым существует предельная мера $\mu=\lim\limits_{\Lambda\nearrow T,\,L\nearrow R^1}\mu_{\Lambda\times L}$ на пространстве Ω).*

Поскольку случайное поле $\xi_{t,s}$ определено не на счетном множестве, утверждения теоремы, строго говоря, нуждаются в уточнении. А именно, рассмотрим множество $T\times Z_a^1$, где $Z_a^1=\{an,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$ — решетка с шагом $a>0$, который мы выберем достаточно большим. Пусть $S_{t,n}$ — пространство траекторий $S_{t,s}$, $an\leqslant s\leqslant a(n+1)$, на полуинтервале $[an,\ a(n+1)]$, приписанных точке $t\in T$. Очевидно, что $\Omega=\prod_{t,n} S_{t,n}$ и в случае отрезка $L=[n_1a,\ n_2a]$, где n_1, n_2 $(n_1<n_2)$ — целые числа, взаимодействие (2) может быть представлено в виде

$$U_{\Lambda\times L}=\sum_{\delta\subset\Lambda\times L_a}\Phi_\delta,$$

где

$$\delta=\delta(t,t',n)=\{t,t'\}\times\{na,(n+1)a\}\subset T\times Z_a^1, \tag{3}$$

$\{t,\ t'\}\subset T$ — пара ближайших соседей, $L_a=L\cap Z_a^1=\{na,n_1\leqslant n\leqslant n_2-1\}$ и

$$\Phi_\delta=\beta\int_{na}^{(n+1)a}\Phi(\xi_t(s),\xi_{t'}(s))\,ds. \tag{4}$$

Таким образом, меру $\mu_{\Lambda\times L}$ (при $L=[n_1a,\ n_2a]$) можно рассматривать как перестройку случайного поля на счетном множестве $T\times Z_a^1$ со значениями в пространствах $S_{t,n}$; именно при таком рассмотрении мер $\mu_{\Lambda\times L}$ мы установим их кластерное разложение.

Доказательство. Обозначим через $\hat q=\hat q(\Lambda,\ L_a)$ совокупность значений, принимаемых случайными траекториями $\xi_t(s)$ в точках $\Lambda\times L_a$, и пусть $\mu_0^{\hat q}(\cdot)=\mu_0(\cdot\,|\,\hat q)$ — условное распределение на Ω при фиксированной совокупности $\hat q$. Распределение же значений $\hat q$ (относительно меры μ_0) обозначим $p_0(\hat q)$. Относительно условного распределения $\mu_0^{\hat q}$ значения $\xi_t(s)$, принимаемые траекториями на различных отрезках $\varepsilon_{t,n}=\{t\}\times[na,\ (n+1)a]\subset\Lambda\times L$, взаимно независимы.

Положим $V_\delta=e^{\Phi_\delta}-1$, где δ — множество вида (3), и для любого неупорядоченного набора $\Delta=\{\delta_1,\ \ldots,\ \delta_k\}$ таких попарно различных множеств обозначим $V_\Delta=\prod_{\delta\in\Delta}V_\delta$.

Отсюда

$$Z_{\Lambda\times L}=\langle\exp U_{\Lambda\times L}\rangle_{\mu_0}=\sum_{\hat q}\Big\langle\prod_{\delta\subset\Lambda\times L_a}e^{\Phi_\delta}\Big\rangle_{\mu_0^{\hat q}}p_0(\hat q)=$$
$$=\sum_{\Delta}^{(\Lambda\times L_a)}\sum_{\hat q}\langle V_\Delta\rangle_{\mu_0^q}p_0(q), \tag{5}$$

где $\sum_{\Delta}^{(\Lambda\times L_a)}$ берется по всем наборам Δ (включая и пустой), лежащим в $\Lambda\times L_a$.

Набор $\Delta=\{\delta(t_1,\ t_1',\ n_1),\ldots,\delta(t_k,t_k',\ n_k)\}$ назовем связным, если $n_1=n_2=\ldots=n_k$ и связен набор $\{\{t_1,t_1'\},\ldots,\{t_k,t_k'\}\}$, и пусть $\Delta_1,\ \ldots,\ \Delta_p$ — связные компоненты набора Δ в (5). Из независимости V_{Δ_i} при разных Δ_i находим, что

$$Z_{\Lambda\times L}=\sum_{\Gamma=(\Delta_1,\ldots,\Delta_p)}^{(\Lambda\times L_a)}\sum_{\hat q}\prod_i\langle V_{\Delta_i}\rangle_{\mu_0^{\hat q}}p_0(\hat q), \tag{6}$$

где $\sum_{\Gamma}^{(\Lambda\times L_a)}$ берется по множествам Γ связных наборов Δ_i (каждый из которых максимален, т. е. объединение $\Delta_1\cup\Delta_2$, где Δ_1, Δ_2 — любые два набора из Γ, уже несвязно).

Далее,

$$p_0(\hat q)=\prod_{(t,s)\subset\Lambda\times L_a}p_0(q_{t,s})\prod_{\substack{t\in\Lambda,\\ n_1\leqslant n<n_2}}\frac{p_a(q_{t,a(n+1)},q_{t,an})}{p_0(q_{t,\ a(n+1)})}, \tag{7}$$

где $p_0(q)$ — стационарные вероятности процесса $\xi(s)$, а $p_a(q_2,\ q_1)=\Pr(\xi(a)=q_2,\ \xi(0)=q_1)$ — переходные вероятности процесса $\xi(s)$ за время a. В силу эргодичности процесса $\xi(s)$

$$\min_q p_0(q)=p_0>0 \tag{8}$$

и

$$|p_a(q_2,\ q_1)-p_0(q_2)|<Ce^{-\tau a}, \tag{9}$$

где $C>0$, $\tau>0$ — некоторые константы.

Обозначим для множеств вида

$$\alpha=\alpha_{t,n}=\{t\}\times\{na,\ (n+1)a\}\subset T\times Z_a \tag{10}$$

через r_α величину

$$r_\alpha = \frac{p_a(q_{t,(n+1)a},\ q_{t,na})}{p_0(q_{t,(n+1)a})} - 1$$

и для каждого неупорядоченного набора $\eta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ попарно различных множеств α вида (10) положим $r_\eta = \prod_{\alpha \in \eta} r_\alpha$.

Таким образом, если обозначить через $\widehat{\mu}_0^a$ вероятностное распределение в пространстве $\widehat{Q}^{T \times Z_a}$, равное бесконечному произведению мер p_0 на Q в каждой точке $(t, na) \in T \times Z_a$, то из (6) и (7) следует, что

$$Z_{\Lambda \times L} = \sum_{\Gamma = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_p\}}^{(\Lambda \times L_a)} \ \sum_{\eta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}}^{(\Lambda \times L_a)} \left\langle \prod_{\Delta \in \Gamma} \langle V_\Delta \rangle_{\mu_0^{\widehat{q}}} r_\eta \right\rangle_{\widehat{\mu}_0^a}. \qquad (11)$$

Пару (Γ, η), $\Gamma = \{\Delta_i\}$, $\eta = \{\alpha_j\}$, назовем связной, если набор множеств $\{\alpha, \ldots, \alpha_l, \widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_p\}$ связен в $\Gamma \times Z_a$, и пусть $(\Gamma_1, \eta_1), \ldots, (\Gamma_m, \eta_m)$ — связные компоненты пары (Γ, η) в сумме (11). Так как величины

$$g_{(\Gamma_i, \eta_i)} = \prod_{\Delta \in \Gamma_i} \langle V_\Delta \rangle_{\mu_0^{\widehat{q}}} r_{\eta_i}$$

для разных компонент (Γ_i, η_i) независимы, из (11) получаем окончательно кластерное представление статистической суммы $Z_{\Lambda \times L}$ вида (1.1.III), где $k_B = 1$ для $B \subset T \times Z_a$, $|B| = 1$, и

$$k_B = \sum_{(\Gamma, \eta)}^{(B)} \langle g_{(\Gamma, \eta)} \rangle_{\widehat{\mu}_0^a}, \quad |B| \geqslant 2, \qquad (12)$$

где сумма $\sum\limits_{(\Gamma, \eta)}^{(B)}$ берется по всем связным парам (Γ, η) таким, что $\left(\bigcup\limits_{\Delta \in \Gamma} \widetilde{\Delta}\right) \cup \widetilde{\eta} = B$ (если таких пар нет, то $k_B = 0$).

Из (12), (8), (9) и (4) и леммы 1.4.II следует, что при надлежащем выборе $a > 0$

$$\sum_{\substack{B:\ t \in B,\\ |B| = n}} |k_B| < c\lambda^n,$$

где $\lambda = \lambda(\beta) = \min C \left[\frac{1}{p_0} e^{-\tau a} + k a \beta e^{k a \beta}\right] \to 0$ при $\beta \to 0$,

C и c — абсолютные константы, $k = \max |\Phi|$.

Кластерное разложение средних $\langle F_A \rangle_{\Lambda \times L}$ вида (5.3.III), (6.3.III), (7.3.III) от ограниченных локальных функций F_A получается аналогично. Наконец, с помощью предыдущих рассмотрений легко проверить, что плотности $\dfrac{d\mu_{\Lambda \times L}|_{A \times l}}{d\mu_0|_{A \times l}}$, где $\mu_{\Lambda \times L}|_{A \times l}$ и $\mu_0|_{A \times l}$ — сужения мер $\mu_{\Lambda \times L}$ и μ_0 на σ-алгебру $\Sigma_{A \times l}$, $A \subset T$, $l \subset R^1$, ограничены константой, не зависящей от Λ и L. Таким образом, семейство мер $\mu_{\Lambda \times L}$ слабо локально компактно (см. лемму 3.1.I). Теорема доказана.

§ 6. Разложение по семиинвариантам. Возмущение гауссова поля

Пусть μ_0 — некоторая вероятностная мера на S^T, а $\{\mu_\Lambda, \Lambda \subset T\}$ — система ее гиббсовских перестроек с помощью одноточечного потенциала. Точнее, пусть взаимодействие имеет вид

$$U_\Lambda = \beta \sum_{t \in \Lambda} \Phi_{\{t\}}, \qquad (1)$$

где β — вещественный параметр. Мы предположим, что для любого $t \in T$ все моменты конечны:

$$\langle |\Phi_{\{t\}}|^k \rangle_0 < \infty, \quad k > 0. \qquad (2)$$

Пусть, кроме того, на пространстве S определена компактная функция h (см. § 1.I) такая, что

$$\langle h(x(t)) \rangle_0 < \infty \qquad (2')$$

для любого $t \in T$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (2′) *и существует некоторый класс G локальных функций такой, что*

а) *линейная оболочка $G \cap C(\Omega)$ всюду плотна в $C(\Omega)$;*

б) *$h_{\{t\}} \in G$ для любого $t \in T$ $(h_{\{t\}}(x) = h(x(t)))$.*

Пусть для любой функции $F_A \in G$ выполнены оценки: для всех $n = 1, 2, \ldots$, любых целых чисел $k_1 > 0, \ldots, k_n > 0$

$$\sum_{(t_1, \ldots, t_n)} \left| \left\langle F_A, \Phi_{\{t_1\}}^{k_1}, \ldots, \Phi_{\{t_n\}}^{k_n} \right\rangle_0 \right| \leqslant$$
$$\leqslant n!\, C(F_A)\, k_1! \ldots k_n!\, \overline{C}^{(k_1 + \ldots + k_n)}, \qquad (3)$$

где суммирование происходит по всем упорядоченным на-

борам $(t_1, \ldots, t_n)$ *попарно различных точек, константа* $C(F_A)$ *зависит лишь от функции* F_A, *а* $\bar{C}$ *не зависит от* n, F_A *и* $k_1, \ldots, k_n$. *Тогда при достаточно малых* $\beta > 0$ *система мер* $\{\mu_\Lambda, \Lambda \subset T\}$ *допускает кластерное разложение.*

Доказательство. Воспользуемся формулой (21.1.II) и получим, что

$$\langle F_A \rangle_\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle F_A, U_\Lambda^{'n} \rangle_0 =$$

$$= \langle F_A \rangle_0 + \sum_{\{(t_1,k_1),\ldots,(t_s,k_s)\}} \prod_{i=1}^{s} \frac{(-\beta)^{k_i}}{k_i!} \left\langle F_A, \Phi_{\{t_1\}}^{'k_1}, \ldots, \Phi_{\{t_s\}}^{'k_s} \right\rangle_0, \tag{4}$$

где сумма $\sum\limits_{\{(t_1,k_1),\ldots,(t_s,k_s)\}}$, $s > 0$, берется по всем неупорядоченным наборам пар (t_i, k_i), $t_i \in \Lambda$, k_i — целое число, а $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$. Положим

$$b_R(F_A) = \sum_{(k_1,\ldots,k_s)} \prod \frac{(-\beta)^{k_i}}{k_i!} \left\langle F_A, \Phi_{\{t_1\}}^{'k_1}, \ldots, \Phi_{\{t_s\}}^{'k_s} \right\rangle,$$

где $R = \{t_1, \ldots, t_s\}$. Из (4) следует, что

$$\langle F_A \rangle = b_\varnothing(F_A) + \sum_{R \subseteq \Lambda, R \neq \varnothing} b_R(F_A), \tag{5}$$

и из (3) получаем, что для чисел $b_R(F_A)$ выполнены условия (18.1.I) и (19.1.I). Поскольку для любого $A \subset T$ функция $h_A(x) = \sum\limits_{t \in A} h(x(t))$, $x \in S^A$, — компактная функция на S^A и из условия теоремы и предыдущих оценок следует, что $\langle h_A \rangle_\Lambda < M_A$, где M_A — зависит лишь от A и не зависит от Λ, из леммы 3.1.I вытекает, что семейство $\{\mu_\Lambda, \Lambda \subset T\}$ слабо локально компактно. Теорема доказана.

Замечание. Разложение (5) можно получить и для потенциалов $\{\Phi_A, A \subset T\}$ общего вида, если записать взаимодействие U_Λ в виде $U_\Lambda = \sum \Phi_{\{t\}}^{(\Lambda)}$, где $\Phi_{\{t\}}^{(\Lambda)} = \sum\limits_{A \subset \Lambda : t \in A} \frac{1}{|A|} \Phi_A$. В предположении, что для $\Phi_{\{t\}}^{(\Lambda)}$ выполнена оценка (2) и равномерно по Λ условие (3), снова приходим к (5).

Теорема 1 применяется редко, так как оценку (3) можно получить, грубо говоря, только для ограниченных потенциалов $\Phi_{\{t\}}$. Однако даже в этом случае возникают трудности с оценкой семиинвариантов вида (3) при $k_i > 1$ (совпадающие точки). Обоих этих недостатков лишен следующий подход.

Пусть для любого $s > 0$ определен момент

$$\langle e^{-s\Phi_{\{t\}}} \rangle_0 < \infty, \quad t \in T. \tag{6а}$$

Тогда при любом Λ статистическая сумма $Z_\Lambda < \infty$ и может быть представлена в кластерном виде (1.1.III) с величинами

$$k_A = \langle \Psi_A' \rangle_0, \quad A \subset T, \tag{6б}$$

где Ψ_A' — система величин $\{\Psi_t = \exp\{-\beta\Phi_t\}, t \in A\}$. Это следует из формулы разложения момента по семиинвариантам:

$$Z_\Lambda = \left\langle \prod_{t \in \Lambda} \Psi_t \right\rangle_0 = \sum_{\{A_1,\ldots,A_k\}} \left\langle \Psi_{A_1}' \right\rangle_0 \ldots \left\langle \Psi_{A_k}' \right\rangle_0 \tag{6в}$$

(см. 6.1.II).

Рассмотрим теперь локальную функцию F_A вида

$$F_A = \prod_{t \in A} f_t, \tag{7}$$

где f_t — $\Sigma_{\{t\}}$-измеримая функция такая, что

$$\langle (|f_t|\Psi_t)^k \rangle_0 < \infty \tag{8а}$$

для всех $t \in A$, $k > 0$.

Вводя обозначение

$$R_t = \begin{cases} f_t \Psi_t, & t \in A, \\ \Psi_t, & t \in \Lambda \setminus A, \end{cases}$$

и разлагая $\langle F_A \rangle_\Lambda$ по семиинвариантам, получаем, что

$$\left\langle \prod_{t \in A} f_t \right\rangle_\Lambda = Z_\Lambda^{-1} \left\langle \prod_{t \in \Lambda} R_t \right\rangle_0 = Z_\Lambda^{-1} \sum_{\{A_1,\ldots,A_k\}} \langle R_{A_1}' \rangle_0 \ldots$$

$$\ldots \langle R_{A_k}' \rangle_0 = \sum_\Gamma^{(\Lambda)} \left(\prod_{B \in \Gamma} g_B \right) f_\Gamma^{(\Lambda)}, \tag{8б}$$

где сумма берется по всем наборам $\Gamma = \{B_1, \ldots, B_k\}$, $B_i \subseteq \Lambda$, $B_i \cap A \neq \varnothing$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$ и $A \subseteq \tilde{\Gamma}$.

При этом

$$g_B = \langle R'_B \rangle_0 \Big/ \prod_{t \in B} \langle \Psi_t \rangle_0, \tag{9}$$

а $f_A^{(\Lambda)}$ — корреляционная функция в ансамбле подмножеств, определяемом величинами (6б).

Лемма 2. *Пусть выполнено* (6а), *а также выполняются следующие условия:*

1) *Для любого* $t \in T$

$$\langle \Psi_t \rangle_0 > k > 0. \tag{10}$$

2) *Для всех*

$$\sum_{A:\, t \in A, |A| = n} |\langle \Psi'_A \rangle_0| < c \lambda^n, \tag{11}$$

где параметры c *и* λ, $0 < \lambda < k < \infty$, *удовлетворяют условию кластерности* (23.1.III).

3) *Для каждой* $\Sigma_{\{t\}}$*-измеримой функции* f_t, *удовлетворяющей условию* (8а), *существует такая константа* $c(f_t) > 0$, *что для любого конечного набора таких функций* $\{f_t,\ t \in A\}$, *любой точки* $t_0 \in T$ *и любого* $n > 1$

$$\sum_{\substack{B:\, t_0 \in B, \\ |B| = n}} \langle R'_B \rangle_0 \Big/ \prod_{t \in B \cap A} c(f_t) < b_A \lambda^n, \tag{12}$$

где b_A *не зависит от функций* f_t, *числа* n *и точки* $t_0 \in T$.

4) *Существует компактная функция* h *на* S *такая, что для любого* t *функция* $h_t = h(x(t))$ *удовлетворяет условию* (8а).

Тогда система мер $\{\mu_\Lambda,\ \Lambda \subset T\}$ *допускает кластерное разложение.*

Доказательство. Из условий (10) и (11) с помощью (6b) получаем кластерное представление Z_Λ. Из (8б) и (12) находим, что выполнено разложение (5.3.III), где

$$k_R(F_A) = \sum_{\Gamma:\, \tilde{\Gamma} = R}^{(\Lambda)} \prod_{B \in \Gamma} g_B,$$

и оценка (6.3.III), в которой

$$m(F_A) = \prod_{t \in A} c(f_t), \quad r_B = \frac{|\langle R'_B \rangle_0|}{\prod_{t \in A \cap B} c(f_t) \prod_{t \in B} \langle \Psi_t \rangle_0}.$$

Поскольку условие (8а) выполнено для всех ограниченных непрерывных функций f_t и линейная оболочка конечных произведений $\prod_{t \in A} f_t$ таких функций всюду плотна в $C(\Omega)$ (теорема Стоуна [16]), а в силу условия 4) семейство мер $\{\mu_\Lambda,\ \Lambda \in T\}$ слабо локально компактно, из леммы 2.3.III вытекает наша лемма.

Мы воспользуемся этой леммой для получения кластерных разложений гиббсовских перестроек гауссова поля.

Пусть μ_0 — гауссова мера на пространстве R^T, причем для любого $t \in T$

$$\langle x_t \rangle_0 = 0, \quad \langle x_t^2 \rangle = 1,$$
$$\sum_{t':\, t' \neq t} |\langle x_t, x_{t'} \rangle_0| < d < 1, \tag{13}$$

а взаимодействие U_Λ имеет вид (1), где $\Phi_t = \Phi(x(t))$ удовлетворяет условию (6а).

Теорема 3. *При сформулированных выше предположениях и достаточно малом* $\beta > 0$ *статистические суммы* Z_Λ *допускают кластерное представление, а меры* μ_Λ — *кластерное разложение.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий леммы 2. Условие 1) очевидно, а условие 2) вытекает из теоремы 1.2.II, где $\lambda = C\delta(\beta)$, $C = C(d)$ — константа, а $\delta(\beta) = \langle |\Psi_t - 1|^2 \rangle_0$. Из (6а) следует, что $\delta(\beta) \to 0$ при $\beta \to 0$.

Условие 3) проверяется аналогично для всех функций $f \in \bigcap_{p > 1} L_p\left(R^1, e^{-x^2/2} dx\right)$ (для этих же функций выполнено (8а)). При этом нужно положить $c(f_t) = \|f_t\|_{L_p}$, p — какое-нибудь число, большее двух. В качестве компактной функции из 4) можно выбрать $h(x) = x^2$.

§ 7. Возмущение гауссова поля с медленным убыванием корреляций

Здесь излагается другой прием кластерного разложения гиббсовских перестроек гауссова поля на Z^ν с помощью взаимодействия вида (1.6). В этом методе требования, предъявляемые к ковариации невозмущенного поля, менее ограничительны, чем в предыдущем (см. (13.6), теорема 3.6), но потенциал взаимодействия $\Phi_t(x)$ должен быть достаточно гладкой (аналитической) функцией $x \in R^1$.

Итак, пусть $T = Z^\nu$, $S = R^1$ и μ_0 — распределение гауссова поля $\{x_t,\ t \in Z^\nu\}$, $x_t \in R^1$, с нулевым средним $\langle x_t \rangle_0 = 0$ и матрицей ковариаций

$$B = \{b_{t,t'},\ t, t' \in Z^\nu\},$$

где $b_{t,t'} = \langle x_t x_{t'} \rangle_0$, такой, что для любого $t \in Z^\nu$

$$b_{t,t} = 1, \quad \sup_{t \in Z^\nu} \sum_{t' \in Z^\nu} |b_{t,t'}| < \infty. \tag{1}$$

Мы рассматриваем гиббсовские перестройки $\{\mu_\Lambda,\ \Lambda \subset Z^\nu\}$ меры μ_0, задаваемые взаимодействием вида (1.6) с потенциалом

$$\Phi_{\{t\}}(x) = P(x_t), \tag{2}$$

где $P(z) = z^l + a_1 z^{l-1} + \ldots$ — полином четной степени со старшим коэффициентом, равным 1.

Теорема 1. *При достаточно малых* β, $0 < \beta < \beta_0$ *(где* β_0 *зависит от ковариации* B *и полинома* P*) статистические суммы* Z_Λ *гиббсовских перестроек* μ_Λ *допускают кластерное представление, а меры* μ_Λ *— кластерное разложение.*

Доказательство. Для любого множества $D \subset Z^\nu$ и любого числа s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, обозначим через $L(D, s)$ отображение, действующее в множестве бесконечных симметрических матриц

$$C = \{C_{t,t'}\}_{t,t' \in Z^\nu}$$

по формуле

$$[L(D, s)\, C]_{t,t'} = \begin{cases} C_{t,t'}, & \text{если } t, t' \in D \text{ или } t, t' \in Z^\nu \setminus D, \\ sC_{t,t'} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Легко проверить, что $L(D, s)$ переводит положительно определенную матрицу снова в положительно определенную матрицу.

Пусть, далее, $\{f_t,\ t \in \Lambda\}$, $\Lambda \subset Z^\nu$,— некоторый набор бесконечно дифференцируемых функций от $x \in R^1$, ограниченных вместе со всеми своими производными. Применяя формулу интегрирования по частям (23.2.II) к среднему $\left\langle \prod_{t \in \Lambda} f_t(x(t)) \right\rangle_0$, получаем, что для произвольно выбранной точки $t_0 \in \Lambda$

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{t \in \Lambda} f_t(x(t)) \right\rangle_0 &= \\ &= \langle f_{t_0}(x(t_0)) \rangle_0 \left\langle \prod_{t \in \Lambda \setminus \{t_0\}} f_t(x(t)) \right\rangle_0 + \\ &+ \int_0^1 \Big[\sum_{t_1 \in \Lambda \setminus \{t_0\}} \langle x(t_0)\, x(t_1) \rangle_0 \Big\langle f'_{t_0}(x(t_0)\, f'_{t_1}(x(t_1)) \times \\ &\qquad \times \prod_{t \in \Lambda \setminus \{t_0, t_1\}} f_t(x(t)) \Big\rangle_{\{t_0\}, s} \Big]\, ds, \end{aligned} \tag{4}$$

где через $\langle \cdot \rangle_{D,s}$ обозначено среднее по гауссовой мере с матрицей ковариаций $L(D, s)\, B$, $f' = \frac{df}{dx}$. Последовательно применяя этот прием, мы выведем следующую формулу:

$$\langle f_\Lambda \rangle_0 = \langle f_{t_0} \rangle_0 \langle f_{\Lambda \setminus \{t_0\}} \rangle_0 + \sum_{\substack{B \subseteq \Lambda:\, t_0 \in B, \\ |B| \geqslant 2}} k_B^{t_0} \langle f_{\Lambda \setminus B} \rangle_0, \tag{5}$$

где обозначено для любого $A \subseteq \Lambda$ $f_A = \prod_{t \in A} f_t$, а величины $k_B^{t_0}$ определяются следующим образом. Обозначим через

$$\tau = \{(t_0, t_1), (t_{i_2}, t_2), \ldots, (t_{i_n}, t_n)\} \tag{5'}$$

последовательность из n пар (t_{i_m}, t_m) точек решетки Z^ν такую, что $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i_m < m$, $m = 2, \ldots, n$, а через $s = (s_1, \ldots, s_n)$ — последовательность из n чисел $0 \leqslant s_i \leqslant 1$. Для каждой последовательности τ и любого $k \leqslant n$ обозначим $D_k(\tau) = D_k$ множество $D_k = \{t_0, \ldots, t_k\}$ и через $\mu_{\tau,s}$ обозначим гауссову меру с нулевым средним и матрицей ковариаций $\mathscr{B}_{\tau,s} = L(D_{n-1}, s_n) \ldots L(D_0, s_1) \mathscr{B}$ (обозначим при этом $\langle \cdot \rangle_{\mu_{\tau,s}} = \langle \cdot \rangle_{\tau,s}$). В этих обозначениях

$$k_B^{t_0} = \sum_\tau \prod_{m=1}^n \langle x(t_{i_m})\, x(t_m) \rangle_0 \int_0^1 \varphi(\tau, s) \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\tau} \prod_{i=0}^n f_{t_i} \right\rangle_{\tau,s} ds, \tag{6}$$

где сумма берется по всем τ таким, что $D_0(\tau) = \{t_0\}$, $D_n(\tau) \equiv D_n = B$ $(|B| = n + 1)$. При этом

$$\varphi(\tau, s) = \prod_{m=2}^n \prod_{i=i_m+1}^{m-1} s_i \tag{7}$$

(мы полагаем $\prod\limits_{i=i_m+1}^{m-1} s_i = 1$ при $i_m+1=m$) и

$$\frac{\partial}{\partial x_\tau} = \prod_{m=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x(t_{i_m})\,\partial x(t_m)} = \frac{\partial^{2n}}{\prod\limits_{i=1}^{n} \partial x(t_i)^{n_{t_i}}}, \tag{8}$$

где n_t — число пар в τ, содержащих точку t. Наконец,

$$\int_0^1 \dots ds = \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{n\ \text{раз}} \dots \prod_{i=1}^{n} ds_i.$$

Введем лексикографическое упорядочение точек решетки Z^ν и из рекуррентного соотношения (5) получим, что

$$Z_\Lambda = k_{\{t_0\}} Z_{\Lambda\setminus\{t_0\}} + \sum_{\substack{B\subset\Lambda:\, t_0\in B,\\ |B|\geqslant 2}} k_B Z_{\Lambda\setminus B}, \tag{9}$$

где t_0 — наименьшая точка в Λ, а величина $k_B = k_B^{t_0}$, $|B|\geqslant 2$, определяется по формуле (6), в которой

$$f_t(x) = \exp\{-\beta P(x)\},$$
$$k_{\{t_0\}} = \langle \exp\{-\beta P(x(t_0))\}\rangle_0. \tag{10}$$

Формула (9) эквивалентна (см. лемму 1.1.III) кластерному представлению (1.1.III) статистической суммы Z_Λ с величинами k_B.

Перейдем теперь к кластерной оценке.

Во-первых, с помощью неравенства Иенсена получим, что при достаточно малых $\beta > 0$

$$k_{\{t\}} > \exp\{-\beta\langle P(x(t))\rangle_0\} > K > 0. \tag{11}$$

Во-вторых, заметим, что для любого n

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-\beta P(x)} = \beta^{n/l}\frac{\partial^n}{\partial \xi^n} e^{-P^\beta(\xi)} = \beta^{n/l}\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\exp(-P^\beta(\xi+z))}{z^{n+1}}\,dz, \tag{12}$$

где $\xi = \beta^{1/l}x$, $P^\beta(x) = \xi^l + a_1\beta^{1/l}\xi^{l-1} + a_2\beta^{2/l}\xi^{l-2} + \dots$

Поскольку $\operatorname{Re} P^\beta(z) > -C$ в полосе $|\operatorname{Im} z|\leqslant 1$, из представления (12) находим, что

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}\exp\{-\beta P(x)\}\right| < \beta^{n/l} e^C n!. \tag{13}$$

Из этой оценки получаем, что

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_\tau}\prod_{t\in D(\tau)} e^{-\beta P(x(t))}\right\rangle_{\tau,s}\Bigg| < (C_1\beta^{1/l})^{2n}\prod_{t\in D(\tau)} n_t!,\quad C_1 = e^C. \tag{14}$$

Для каждой последовательности τ обозначим через $\mathcal{T}(\tau)$ дерево с множеством вершин $D(\tau)$, среди которых выделена вершина $t_0\in D(\tau)$, и множеством ребер $\{t_{i_m}, t_m\}\in\tau$.

Лемма 2. *Пусть фиксировано множество $D\subset Z^\nu$ (с выделенной точкой $t_0\in D$) и дерево $\mathcal{T}$, множество вершин которого совпадает с D. Тогда*

$$\sum_{\tau:\mathcal{T}(\tau)=\mathcal{T}}\int_0^1 \varphi(\tau,s)\,ds = 1. \tag{15}$$

Доказательство. Заметим, что при фиксированном $\mathcal{T}$ и выделенной вершине t_0 последовательность τ такая, что $\mathcal{T}(\tau)=\mathcal{T}$, однозначно определяется нумерацией $\hat\tau$: $t_1, \dots, t_n$ точек множества $D\setminus\{t_0\}$; при этом нумерация должна быть такой, что для каждой точки $t_m\in D$ существует одно и только одно ребро дерева $\mathcal{T}$, соединяющее t_m с какой-нибудь точкой $t_j\in D$ с меньшим номером: $j<m$. Каждую такую нумерацию $\hat\tau$ можно представлять себе как траекторию случайного блуждания по множеству D, начинающегося в точке t_0 и определяемого следующим правилом: при условии, что при первых k шагах мы посетили точки $t_1, \dots, t_k\in D$, следующая — $(k+1)$-я точка выбирается с одинаковой вероятностью среди еще не посещенных вершин $\mathcal{T}$, которые соединены ребром хотя бы с одной из точек $t_0, \dots, t_k$. Число таких вершин равно $n_{t_0}+n_{t_1}+\dots+n_{t_k}-2k$, где n_t — степень вершины $t\in\mathcal{T}$, и, таким образом, вероятность каждой траектории $\hat\tau$ равна

$$\Pr(\hat\tau) = \frac{1}{n_{t_0}}\cdot\frac{1}{n_{t_0}+n_{t_1}-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n_{t_0}+\dots+n_{t_{n-1}}-2(n-1)}. \tag{16}$$

С другой стороны, легко проверить, что

$$\varphi(\tau, s) = s_1^{n_{t_0}-1} s_2^{n_{t_0}+n_{t_1}-3} \ldots s_n^{n_{t_0}+\ldots+n_{t_{n-1}}-2(n-1)-1}, \tag{17}$$

где τ — последовательность вида (5′), соответствующая нумерации $\hat{\tau}$. Из (16) и (17) получаем, что

$$\Pr(\hat{\tau}) = \int_0^1 \varphi(\tau, s)\, ds.$$

Отсюда и следует (15).

Воспользовавшись (6), (14) и (15), находим, что

$$|k_B| \leqslant \sum_{\mathscr{T}} (C_1^2 \beta^{2/l})^{|B|-1} \prod_{(t,t') \in \mathscr{T}} |b_{tt'}| \prod_{t \in B} (n_t!), \tag{18}$$

где суммирование берется по всем деревьям $\mathscr{T}$, множество вершин которых совпадает с B. Из оценки (1) и леммы 10.4.II вытекает кластерная оценка для величин k_B с параметром кластерности $\bar{C}\beta^{1/l}$.

Для вывода кластерного разложения мер μ_Λ рассмотрим функции F_A вида

$$F_A = \prod_{t \in A} g_t(x(t)), \tag{19}$$

где $g_t(x)$, $x \in R^1$,— аналитическая и ограниченная функция в полосе $(\operatorname{Im} z) \leqslant 1$:

$$|g_t(z)| < L, \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant 1, \quad t \in A. \tag{20}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, мы получим кластерное разложение среднего $\langle F_A \rangle_\Lambda$, имеющее вид (5.3.III) с оценкой (6.3.III), в которой

$$m_A(F_A) = L^{|A|},$$

а

$$r_B = \sum_{\tau} (C_1 \beta^{1/l})^{\tilde{n}} \prod_{(t,t') \in \mathscr{T}} |b_{tt'}| \prod_{t \in B} n_t!,$$

где сумма $\sum_{\mathscr{T}}$ имеет тот же смысл, что и в (18), а $\tilde{n} = \sum_{t \in B \setminus A} n_t$. Поскольку $\tilde{n} \geqslant |B - A|$, снова с помощью леммы 10.4.II получаем оценку (7.3.III).

Линейные комбинации функций вида (19), удовлетворяющих условию (20), всюду плотны в пространстве $C(\Omega)$ (теорема Стоуна). Кроме того, с помощью предыдущих построений находим, что для функции $h(x) = x^2$ среднее

$$\langle h(x(t)) \rangle_\Lambda < C,$$

где константа C не зависит ни от t, ни от Λ. Таким образом, семейство мер $\{\mu_\Lambda, \Lambda \subset T\}$ слабо локально компактно, и, применяя лемму 2.3.III, получаем утверждение теоремы.

§ 8. Перестройка d-марковского гауссова поля (интерполяция обратной ковариации)

Излагаемый здесь метод позволяет получать кластерное разложение среднего $\langle F_A \rangle_\Lambda$ функции F_A без предположения гладкости взаимодействия, как это требовалось в предыдущем параграфе. Однако при этом предполагается, что корреляции $\langle x(t)x(t') \rangle_0$ исходного гауссова поля убывают экспоненциально: $\langle x(t)\, x(t') \rangle_0 \sim e^{-\alpha\rho(t,t')}$ при $\rho(t, t') \to \infty$ со сколь угодно малым показателем $\alpha > 0$.

В основе приводимого здесь метода интерполяции лежит следующая простая формула.

Лемма 1. *Пусть $f(s_1, \ldots, s_n)$ — гладкая вещественная функция, определенная при $0 \leqslant s_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$; тогда*

$$f(1, \ldots, 1) = f(0, \ldots, 0) + \sum_A \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s_A} f(s_A, 0)\, ds_A, \tag{1}$$

где суммирование происходит по всем непустым подмножествам $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и где обозначено

$$\frac{\partial}{\partial s_A} = \prod_{i \in A} \frac{\partial}{\partial s_i}, \quad ds_A = \prod_{i \in A} ds_i, \quad f(s_A, 0) = f(s_1', \ldots, s_n'),$$

а

$$s_i' = \begin{cases} s_i, & i \in A; \\ 0 & i \notin A. \end{cases}$$

Доказательство получается применением формулы Ньютона — Лейбница

$$\psi(1) = \psi(0) + \int_0^1 \frac{d\psi}{ds}\, ds \tag{2}$$

последовательно к каждому из переменных $s_1, \ldots, s_n$.

Рассмотрим гауссово поле $\{x(t),\ t\in Z^\nu\}$ со средним нуль и матрицей ковариаций $B=\{b_{t,t'},\ t,\ t'\in Z^\nu\}$, $b_{t,t'}=\langle x(t)\,x(t')\rangle_{\mu_0}$, где μ_0 — соответствующая этому полю мера в пространстве $\Omega=R^{Z^\nu}$. Предположим, что это поле d — марковское; это означает, что матрица $A=B^{-1}=\{a_{t,t'},\ t,\ t'\in Z^\nu\}$ обратной ковариации финитна, т. е.

$$a_{t,t'}=0 \text{ при } \rho(t,\ t')>d \tag{3}$$

для некоторого числа d, $0<d<\infty$. Метрика ρ определяется формулой (1.0.I).

Далее всегда будет предполагаться, что матрица A удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{t':t'\neq t}|a_{t,t'}|<\delta\,|a_{t,t}|, \tag{4}$$

для некоторого $0<\delta<1$

$$a_{t,t}>\varkappa_1>0 \tag{5}$$

и

$$a_{t,t}<\varkappa_2<\infty \tag{6}$$

равномерно по $t\in Z^\nu$.

Лемма 2. *Пусть задана положительно определенная матрица* $\mathscr{A}=\{a_{t,t'},\ t,\ t'\in T\}$, *где* T — *конечное или счетное множество с некоторой метрикой* ρ, *удовлетворяющая условиям* (3)—(5). *Тогда существует обратная матрица* $\mathscr{A}^{-1}=\{a_{t,t'}^{(-1)}\}$, *являющаяся положительно определенной. Ее матричные элементы удовлетворяют условиям*

$$\left|a_{t,t'}^{(-1)}\right|\leqslant\sigma e^{-m_0\rho(t,t')}, \tag{7}$$

где $\sigma>0$ *и* $m_0>0$ *зависят лишь от* d, δ *и* $\varkappa_1$.

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{E}$ класс матриц $A=\{a_{t,t'},\ t,\ t'\in T\}$ с конечной нормой

$$\|A\|=\sup_{t\in T}\sum_{t'\in T}|a_{t,t'}|. \tag{8}$$

Легко проверить, что относительно этой нормы $\mathscr{E}$ образует банахову алгебру. Любую матрицу A, удовлетворяющую условиям леммы, можно представить в виде

$$A=A_0+A_1=A_0(E+D), \tag{8'}$$

где A_0 — диагональная матрица, диагональные элементы A_1 равны нулю и $D=A_0^{-1}A_1$.

Из условия (4) вытекает, что

$$\|D\|\leqslant\delta. \tag{9}$$

Отсюда

$$A^{-1}=(E+D)^{-1}A_0^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-D)^nA_0^{-1}. \tag{10}$$

Как следует из (3), матричные элементы

$$\left((-D)^nA_0^{-1}\right)_{t,t'}=0, \tag{11}$$

если $\rho(t,\ t')>nd$. Отсюда

$$\left|a_{t,t'}^{(-1)}\right|=\left|\sum_{n\geqslant\frac{1}{d}\rho(t,t')}\left((-D)^nA_0^{-1}\right)_{t,t'}\right|\leqslant\frac{\delta^{\frac{1}{d}\rho(t,t')}}{\varkappa_1(1-\delta)}. \tag{12}$$

Лемма доказана.

Замечание. Разложение (10), переписанное в виде

$$a_{t,t'}^{(-1)}=\sum\left(a_{t_1,t_1}\right)^{-1}\left(-a_{t_1,t_2}\right)\left(a_{t_2,t_2}\right)^{-1}\ldots\left(a_{t_n,t_n}\right)^{-1},$$

где сумма берется по наборам $(t_1,\ \ldots,\ t_n)$ с $t_1=t$ и $t_n=t'$, $t_i\neq t_{i+1}$, иногда называют представлением матрицы ковариаций в терминах случайных блужданий (см. [83]).

Рассмотрим гауссову меру μ_Λ^0 на R^Λ, $\Lambda\subset Z^\nu$, определяемую плотностью (относительно лебеговой меры $(dx)^\Lambda$ в R^Λ)

$$D_\Lambda\exp\{-(A_\Lambda x^\Lambda,\ x^\Lambda)\}, \tag{13}$$

где A_Λ — ограничение матрицы A на Λ, т. е.

$$a_{t,t'}^\Lambda=\begin{cases}a_{t,t'}, & t,\ t'\in\Lambda,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

а D_Λ — нормирующий множитель.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi(x)$ — *ограниченная снизу функция от* $x\in R$ *и* $\beta>0$. *Тогда система мер* μ_Λ, *определяемых плотностью*

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu_\Lambda^0}=Z_\Lambda^{-1}\exp\left\{-\beta\sum_{t\in\Lambda}\Phi(x(t))\right\}, \tag{14}$$

допускает кластерное разложение.

Доказательство. Пусть $\eta=\{\Delta_n,\ n\in Z^\nu\}$ — разбиение решетки Z^ν на непересекающиеся конгруэнтные кубы Δ с достаточно большой стороной $L>d$, которую мы укажем ниже. Пусть Λ является объединением кубов $\Delta:\Lambda=\bigcup\limits_{\Delta\in\eta_\Lambda}\Delta,\ \eta_\Lambda\subset\eta$.

Пусть, далее, $\bar{s}=\{s_\Delta,\ \Delta\in\eta_\Lambda\}$ — набор чисел $0\leqslant s_\Delta\leqslant 1$. Для каждого $\bar{s}$ определим матрицу

$$A_\Lambda(\bar{s})=\{a^\Lambda_{t,t'}(\bar{s}),\ t,\ t'\in\Lambda\}, \tag{15}$$

где

$$a^\Lambda_{t,t'}(\bar{s})=a_{t,t'}\left[\delta_{\Delta(t),\Delta(t')}+s_{\Delta(t)}s_{\Delta(t')}\left(1-\delta_{\Delta(t),\Delta(t')}\right)\right], \tag{16}$$

где $\Delta(t)$ — куб из η_Λ, содержащий точку t. Матрица $A_\Lambda(\bar{s})$ является положительно определенной. Это вытекает из следующего представления матрицы $A_\Lambda(\bar{s})$:

$$A_\Lambda(\bar{s})=\Bigl(\prod_{\Delta\in\eta_\Lambda}L(\Delta,\ s_\Delta)\Bigr)A_\Lambda, \tag{17}$$

где $L(\Delta,\ s_\Delta)$ — преобразование в пространстве симметрических матриц, введенное в предыдущем параграфе (см. (3.7)); преобразование $L(\Delta,\ s_\Delta)$ сохраняет положительную определенность матриц. Кроме того, $A_\Lambda(\bar{s})$ удовлетворяет требованиям (3)—(6). Обозначим через $\mu^0_\Lambda(\bar{s})$ гауссову меру со средним нуль и матрицей ковариаций $(A_\Lambda(\bar{s}))^{-1}$; очевидно, $\mu^0_\Lambda=\mu^0_\Lambda(\bar{1})$, где $\bar{1}$ — набор $\bar{s}$ с $s_\Delta\equiv 1$. Обозначим $\langle\cdot\rangle_{\mu^0_\Lambda(\bar{s})}=\langle\cdot\rangle_{\bar{s}}$.

Статистическая сумма $Z_\Lambda=\langle\exp\{-U_\Lambda\}\rangle_{\mu^0_\Lambda}$, $U_\Lambda=\beta\sum\limits_{t\in\Lambda}\Phi(x(t))$, представляется в виде (см. лемму 1)

$$Z_\Lambda=\langle\exp\{-U_\Lambda\}\rangle_{\bar{1}}=\langle\exp\{-U_\Lambda\}\rangle_{\bar{0}}+\\ +\sum_{\gamma\subseteq\eta_\Lambda}\int\frac{\partial}{\partial\bar{s}_\gamma}\langle\exp\{-U_\Lambda\}\rangle_{\bar{s}_\gamma}d\bar{s}_\gamma, \tag{18}$$

где сумма берется по всем непустым $\gamma\subseteq\eta_\Lambda$, а $\bar{s}_\gamma$ — набор $\{s_\Delta\}$, у которого все $s_\Delta=0$ при $\Delta\notin\gamma$. Через $\bar{0}$ обозначен набор с $s_\Delta\equiv 0$.

Два куба $\Delta,\ \Delta'\in\eta$ назовем соседними, если расстояние между ними $\rho(\Delta,\Delta')=\min\limits_{t\in\Delta,t'\in\Delta'}\rho(t,\ t')\leqslant\nu$. Набор кубов $\gamma\subseteq\eta_\Lambda$ назовем ν-связным, если при любом его разбиении на два непересекающихся поднабора γ' и γ'' в них найдутся соседние кубы $\Delta'\in\gamma'$ и $\Delta''\in\gamma''$.

Очевидно, что

$$\left\langle e^{-U_\Lambda}\right\rangle_{\bar{0}}=\prod_{\Delta\in\eta_\Lambda}\left\langle e^{-U_\Delta}\right\rangle_{\bar{0}} \tag{19}$$

и

$$\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial\bar{s}_\gamma}\left\langle e^{-U_\Lambda}\right\rangle_{\bar{s}_\gamma}d\bar{s}_\gamma=\\ =\prod_{\Delta\in\eta_\Lambda\setminus\gamma}\left\langle e^{-U_\Delta}\right\rangle_{\bar{0}}\prod_{i=1}^{s}\int\frac{\partial}{\partial\bar{s}_{B_i}}\left\langle e^{-\sum\limits_{\Delta\in B_i}U_\Delta}\right\rangle_{\bar{s}_{B_i}}d\bar{s}_{B_i}, \tag{20}$$

где $B_1,\ \ldots,\ B_s\subset\eta_\Lambda$ — связные компоненты набора γ, $|B_i|\geqslant 2$ (в случае, когда у набора γ есть связная компонента, состоящая из одного куба Δ, $\frac{\partial}{\partial\bar{s}_\gamma}\left\langle e^{-U_\Delta}\right\rangle_{\bar{s}_\gamma}=0$).

Полагая теперь для $B\subset\eta$

$$k_B=\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial}{\partial\bar{s}_B}\left\langle\exp\Bigl\{-\sum_{\Delta\in B}U_\Delta\Bigr\}\right\rangle_{\bar{s}_B}d\bar{s}_B, & \text{если набор } B\subset\eta\\ & \nu\text{-связен и } |B|\geqslant 2,\\ \left\langle e^{-U_\Delta}\right\rangle_{\bar{0}}, & B=\{\Delta\},\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \tag{21}$$

мы получим из (18), (19) и (20) кластерное представление Z_Λ:

$$Z_\Lambda=\sum_{\{B_1,\ldots,B_s\}}k_{B_1}\ldots k_{B_s}\prod_{\Delta\in\eta_\Lambda\setminus(\cup B_i)}k_{\{\Delta\}}, \tag{22}$$

где сумма берется по всем $(\nu+1)$-допустимым неупорядоченным наборам $\{B_1,\ \ldots,\ B_s\}$ ν-связных подмножеств $B_i\subseteq\eta_\Lambda$. Перейдем теперь к выводу кластерной оценки.

Лемма 4. *При достаточно малых $\beta>0$ и надлежащем выборе $L=L(\beta)$ для любого $B\subset\eta$, $|B|\geqslant 2$,*

$$|k_B|<(x(\beta))^{|B|}, \tag{23}$$
$$|k_{\{\Delta\}}|>K>0, \tag{24}$$

где K — некоторая константа, а $x(\beta)\to 0$ при $\beta\to 0$.

Доказательство. Для любого непустого набора $\gamma \subset \eta$ обозначим $\widetilde{k}_\gamma = \prod_{\Delta \in \gamma} \widetilde{k}_\Delta$, $\widetilde{k}_\Delta = e^{-U_\Delta} - 1$. Переходя к обычному разложению экспоненты $e^{-\sum_{\Delta \in B} U_\Delta} = 1 + \sum_{\substack{\gamma \subseteq B,\\ \gamma \neq \varnothing}} \widetilde{k}_\gamma$, получим, что

$$k_B = \sum_{\substack{\gamma \subseteq B,\\ \gamma \neq \varnothing}} \int \frac{\partial}{\partial \bar{s}_B} \langle \widetilde{k}_\gamma \rangle_{\bar{s}_B} d\bar{s}_B. \tag{25}$$

Для любого набора $\varepsilon_B = \{\varepsilon_\Delta, \Delta \in \eta_\Lambda\}$, где ε_Δ достаточно малы при $\Delta \in B$ и $\varepsilon_\Delta = 0$ при $\Delta \in \eta_\Lambda \setminus B$, имеем

$$\langle \widetilde{k}_\gamma \rangle_{\bar{s}_B + \varepsilon_B} = \frac{\left\langle \widetilde{k}_\gamma \exp\left(-\sum_{\langle \Delta, \Delta' \rangle} a_{\Delta,\Delta'} \delta_{\Delta,\Delta'}\right)\right\rangle_{\bar{s}_B}}{\left\langle \exp\left(-\sum_{\langle \Delta, \Delta' \rangle} a_{\Delta,\Delta'} \delta_{\Delta,\Delta'}\right)\right\rangle_{\bar{s}_B}}, \tag{26}$$

где

$$a_{\Delta,\Delta'} = \sum_{t \in \Delta, t' \in \Delta'} a_{t,t'} \,|\, x(t)\, x(t') \,|,$$
$$\delta_{\Delta,\Delta'} = s_\Delta \varepsilon_{\Delta'} + s_{\Delta'} \varepsilon_\Delta + \varepsilon_\Delta \varepsilon_{\Delta'},$$

а сумма $\sum_{\langle \Delta, \Delta' \rangle}$ берется по всем неупорядоченным парам соседних кубов Δ, $\Delta' \in B$.

Воспользовавшись формулой (21.1.II), разложим среднее (26) в формальный степенной ряд по переменным $\delta_{\Delta,\Delta'}$:

$$\langle \widetilde{k}_\gamma \rangle_{\bar{s}_B + \varepsilon_B} = \langle \widetilde{k}_\gamma \rangle_{\bar{s}_B} + \\ + \sum \frac{1}{n!} \sum_\sigma \prod_{i=1}^{n} \delta_{\Delta_i, \Delta_i'} \left\langle k_\gamma, a_{\Delta_1, \Delta_1'}, a_{\Delta_2, \Delta_2'}, \ldots, a_{\Delta_n, \Delta_n'} \right\rangle_{\bar{s}_B}, \tag{27}$$

где сумма берется по всем упорядоченным наборам $\sigma = (\langle \Delta_1, \Delta_1' \rangle, \ldots, \langle \Delta_n, \Delta_n' \rangle)$ пар соседних кубов. Переписав этот ряд как степенной ряд по переменным ε_Δ и заметив, что производная $\frac{\partial}{\partial \bar{s}_B} \langle \widetilde{k}_\gamma \rangle_{\bar{s}_B}$ равна коэффициенту при мономе $\prod_{\Delta \in B} \varepsilon_\Delta$, получим, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}_B} \langle \widetilde{k}_\gamma \rangle_{\bar{s}_B} = \sum_n \sum_\sigma{}' C_{n,\sigma} \frac{1}{n!} \left\langle k_{\gamma'}, a_{\Delta_1, \Delta_1'}, \ldots, a_{\Delta_n, \Delta_n'} \right\rangle_{\bar{s}_B}, \tag{28}$$

где $|C_{n,\sigma}| \leqslant 1$, а $\sum_\sigma{}'$ берется по всем σ таким, что каждый куб $\Delta \in B$ входит по крайней мере в одну пару и не более чем в $(r+1)$ пар из набора σ (r — число кубов $\Delta' \in \eta$, соседних с данным кубом $\Delta \in \eta$).

Отсюда следует, что $2n \geqslant |B| \geqslant 2n/(r+1)$ и производная (28) допускает оценку

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{s}_B} \langle \widetilde{k}_\gamma \rangle_{\bar{s}_B} \right| \leqslant C_1^{|B|} \max_\sigma \left| \left\langle \widetilde{k}_\gamma, a_{\Delta_1, \Delta_1'}, \ldots, a_{\Delta_n, \Delta_n'} \right\rangle_{\bar{s}_B} \right| \leqslant \\ \leqslant C_2^{|B|} (L^\nu)^{|B|(r+1)} \max_{\hat{\sigma}} \left| \langle \widetilde{k}_\gamma, x(t_1)\, x(t_1'), \ldots, x(t_n) x(t_n') \rangle_{\bar{s}_B} \right|, \tag{29}$$

где $\max_{\hat{\sigma}}$ берется по всем наборам $\hat{\sigma} = ((t_1, t_1'), \ldots, (t_n, t_n'))$ пар точек таким, что $\Delta(t_i)$ и $\Delta(t_i')$ — соседние кубы и набор $\sigma = (\langle \Delta(t_1), \Delta(t_1') \rangle, \ldots, \langle \Delta(t_n), \Delta(t_n') \rangle)$ входит в сумму (28).

Для оценки семиинварианта мы разложим $\widetilde{k}_\gamma$ по полиномам Вика. Предварительно перейдем от гауссовой системы случайных величин $\{x(t), t \in \widetilde{\gamma}\}$ к системе $\{\hat{x}(t), t \in \widetilde{\gamma}'\}$ независимых гауссовых величин с нулевым средним и единичной дисперсией:

$$\hat{x}(t) = \sum_{t' \in \widetilde{\gamma}} C_{t,t'}\, x(t'), \tag{30}$$

где матрица $C_{\widetilde{\gamma}} = C = \{C_{t,t'}, t, t' \in \widetilde{\gamma}\}$ должна быть выбрана так, чтобы

$$C \mathscr{B} C^{\text{тр}} = E, \tag{31}$$

где $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{\widetilde{\gamma}} = \left\{ \langle x_t x_{t'} \rangle_{\bar{s}_B}, t, t' \in \widetilde{\gamma} \right\}$ — матрица ковариаций. Записав $\mathscr{B}^{-1}$, как и в (10),

$$\mathscr{B}^{-1} = A_0 + A_1 = A_0 (E + D), \quad A_0 = A_0^{\widetilde{\gamma}} \quad \text{и т. д.,} \tag{32}$$

положим

$$C_{\widetilde{\gamma}} = A_0^{1/2}(E+D)^{1/2}, \tag{33}$$

где $(E+D)^{1/2}$ определяется разложением в ряд по степеням $D = D^{\widetilde{\gamma}}$. Это разложение основано на оценке $\|D^{\widetilde{\gamma}}\| < \delta$ (см. (9)), которая вытекает из приведенной ниже леммы 5.

Воспользовавшись представлением $\mathscr{B} = (E+D)^{-1}A_0^{-1}$ и равенством

$$A_0^{-1}(E+D^{\text{тр}})^{1/2} = (E+D)^{1/2}A_0^{-1},$$

вытекающим из очевидного соотношения $A_0^{-1}D^{\text{тр}}A_0 = D$, получим, что C удовлетворяет (31).

Лемма 5. *Пусть для гауссова поля $\{x(t),\ t\in\Lambda\}$ в Λ обратная матрица ковариаций $\mathscr{B}_\Lambda^{-1} = A_\Lambda$ удовлетворяет условиям (3)—(6). Тогда для любого $\Lambda' \subset \Lambda$ обратная матрица ковариаций $A_{\Lambda'} = \mathscr{B}_{\Lambda'}^{-1}$ (где $\mathscr{B}_{\Lambda'}$ — сужение $\mathscr{B}_\Lambda$ на Λ') удовлетворяет условиям (4) и (6) с теми же константами δ и $\varkappa_2$ и условию (5) с константой $\varkappa_1' = \varkappa_1(1-\delta)$. При этом*

$$|\operatorname{Det} A_{\Lambda'}| \leqslant M^{|\Lambda'|}, \tag{34}$$

где M — константа, зависящая от $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и δ.

Кроме того, для нормы (8) матрицы $C_{\Lambda'}$, построенной по формулам (32), (33) из матрицы $\mathscr{B}_{\Lambda'}$, верна оценка

$$\|C_{\Lambda'}\| < K_1, \tag{35}$$

где K_1 зависит лишь от δ и $\varkappa_2$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно рассмотреть случай $\Lambda' = \Lambda \setminus \{t_0\}$. Прямые вычисления показывают, что для $A_{\Lambda'} = (a_{t,t'}^{\Lambda'},\ t,\ t' \in \Lambda')$

$$a_{t_1,t_2}^{\Lambda'} = a_{t_1t_2}^{\Lambda} - \frac{a_{t_1t_0}^{\Lambda}a_{t_2t_0}^{\Lambda}}{a_{t_0,t_0}^{\Lambda}}, \qquad t_1,\ t_2 \in \Lambda', \tag{36}$$

и, в частности,

$$a_{t,t}^{\Lambda'} = a_{t,t}^{\Lambda} - \left(a_{t,t_0}^{\Lambda}\right)^2 / a_{t_0,t_0}^{\Lambda}. \tag{37}$$

Обозначим для любого $t_1 \in \Lambda'$

$$a_1 = \sum_{\substack{t_2:t_2\in\Lambda',\\ t_2\neq t_1}} \left|a_{t_1,t_2}^{\Lambda'}\right|, \quad a_2 = \sum_{\substack{t_2:t_2\in\Lambda\\ t_2\neq t_1}} \left|a_{t_1t_2}^{\Lambda}\right|,$$

$$b = \left|a_{t_1,t_0}^{\Lambda}\right|, \quad d = a_{t_0,t_0}^{\Lambda}, \quad c = \sum_{t:t\in\Lambda'} \left|a_{t,t_0}\right|, \quad d' = a_{t_1t_1}^{\Lambda}.$$

Тогда из (36) и (37) $a_1 \leqslant a_2 - b + \frac{bc-b^2}{d} \leqslant \delta\left(d' - \frac{b^2}{d}\right) - (1-\delta)\frac{b^2}{d} \leqslant \delta a_{t_1t_1}^{\Lambda'}$, так как $a_2 < \delta d'$, $c < \delta d$. Таким образом, условие (4) для $A_{\Lambda'}$ выполнено.

Условие (6) вытекает из неравенства $a_{t,t}^{\Lambda'} \leqslant a_{t,t}^{\Lambda}$, $t \in \Lambda'$. Из этого неравенства, а также из оценки (12) следует, что $a_{tt}^{\Lambda'} \geqslant a_{tt}^{\{t\}} = b_{tt}^{-1} > \varkappa_1(1-\delta)$, т. е. условие (5).

Для доказательства (34) заметим, что

$$\operatorname{Det} A_{\Lambda'} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{|\Lambda'|}\left(\int_{R^{\Lambda'}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum a_{t,t'}^{\Lambda'}\,x(t)\,x(t')\right)\prod_{t\in\Lambda'} dx(t)\right)^{-2}. \tag{38}$$

Из условия (4) легко выводится, что

$$\frac{1}{2}\sum_{t,t'\in\Lambda'} a_{t,t'}x(t)\,x(t') \leqslant \leqslant \frac{1}{2}\sum_{t\in\Lambda'} a_{t,t}(1+\delta)\,x^2(t) < \frac{1}{2}\varkappa_2(1+\delta)\sum_{t\in\Lambda'} x^2(t)$$

и, таким образом,

$$\int_{R^{\Lambda'}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{t,t'\in\Lambda'} a_{t,t'}^{\Lambda}\,x(t)\,x(t')\right)dx(t) > (\text{const})^{|\Lambda'|}. \tag{39}$$

Из (38) и (39) вытекает (34). Далее, из (4) вытекает, что $\left\|(A_0^{\Lambda'})^{-1}A_1^{\Lambda'}\right\| = \|D^{\Lambda'}\| < \delta$ (см. (8')), и поэтому $\|C^{\Lambda'}\| \leqslant \varkappa_2^{1/2}(1+\delta)^{1/2}$, что и означает (35). Лемма доказана.

Из доказанной леммы и леммы 2 следует, что

$$\left|\langle \widehat{x}(t')\,x(t)\rangle_{\bar{s}_B}\right| \leqslant \sum_{\bar{t}\in\widetilde{\gamma}} \left|C_{t',\bar{t}}\right|\left|b_{\bar{t},t}\right| \leqslant$$

$$\leqslant K_1 e^{-m_0\rho(t,\widetilde{\gamma})}, \quad t' \in \widetilde{\gamma}, \quad t \in \Lambda, \tag{40}$$

и

$$\max_{\substack{t\in\widetilde{\gamma},\\ \bar{t}\in\Lambda}}\left\{\sum_{t'\in\Lambda}\left|\langle\widehat{x}(t)\,x(t')\rangle_{\bar{s}_B}\right|,\ \sum_{t'\in\widetilde{\gamma}}\left|\langle\widehat{x}(t')\,x(\bar{t})\rangle_{\bar{s}_B}\right|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|C^{\widetilde{\gamma}}\right\|\left\|\mathscr{B}_\Lambda(\bar{s}_B)\right\|=K_2. \qquad (41)$$

Разложим $\widetilde{k}_\gamma$ по нормированным полиномам Вика от переменных $\{\widehat{x}(t),\ t\in\widetilde{\gamma}\}$:

$$\widetilde{k}_\gamma=\sum_{\{n_t\}}\frac{b\{n_t\}}{\prod\limits_{t\in\widetilde{\gamma}}(n_t!)^{1/2}}:\prod_{t\in\widetilde{\gamma}}(\widehat{x}(t))^{n_t}:\ . \qquad (42)$$

Если записать $x(t_1)x(t_2)=:x(t_1)x(t_2):+\mathrm{const}$, то для любого $\widehat{\sigma}$

$$\langle\widetilde{k}_\gamma,\ x(t_1)\,x(t_1'),\ \ldots,\ x(t_n)\,x(t_n')\rangle_{\bar{s}_B}=$$

$$=\sum_{\{n_t\}}\frac{b\{n_t\}}{\prod\limits_{t\in\widetilde{\gamma}}(n_t!)^{1/2}}\Big\langle:\prod_{t\in\gamma}(\widehat{x}(t))^{n_t}:,\ :x(t_1)\,x(t_1'):,\ \ldots$$

$$\ldots,\ :x(t_n)\,x(t_n'):\Big\rangle_{\bar{s}_B}. \qquad (43)$$

Семиинвариант в (43) равен сумме $\sum\limits_G I(G)$ по всем связным диаграммам без петель (см. § 2.II). Каждая такая диаграмма разбивается на $N/2$ цепей, где $N=\sum\limits_{t\in\widetilde{\gamma}}n_t$ (N четно; в противном случае семиинвариант в (43) равен нулю). Любая цепь определяется последовательностью ребер

$$(t_0,t_{i_1}),\ (t_{i_1}',t_{i_2}),\ \ldots,\ (t_{i_q}',\bar{t}_0),$$

$$1\leqslant i_s\leqslant n,\quad i_s\neq i_{s'},\quad t_0,\ \bar{t}_0\in\widetilde{\gamma},$$

и номером одного из n_{t_0} и $n_{\bar{t}_0}$ отросков в вершинах $t_0\in\bar{\gamma}$ и $\bar{t}_0\in\widetilde{\gamma}$ соответственно $\left(n_{t_0}\neq 0 \text{ и } n_{\bar{t}_0}\neq 0\right)$. Каждой цепи h

сопоставим вклад

$$J(h)=$$

$$=\langle\widehat{x}(t_0)\,x(t_{i_1})\rangle_{\bar{s}_B}\langle x(t_{i_1}')\,x(t_{i_2})\rangle_{\bar{s}_B}\ldots\langle x(t_{i_q}')\,\widehat{x}(\bar{t}_0)\rangle_{\bar{s}_B}.$$

Тогда вклад $I(G)$ диаграммы G есть произведение вкладов всех ее цепей. Если ввести длину цепи h:

$$S(h)=\rho(\widetilde{\gamma},t_{i_1})+\rho(t_{i_1}',t_{i_2})+\ldots+\rho(t_{i_q}',\widetilde{\gamma}),$$

то из (40) и (7) вытекает, что

$$|J(h)|\leqslant C^q\exp\left(-\frac{m_0}{2}S(h)\right)|J(h)|^{1/2}, \qquad (44)$$

где C — константа.

Лемма 6. *При условии, что $|B|>2r|\gamma|$, где r — число кубов $\Delta'\in\eta$, соседних с данным кубом $\Delta\in\eta$, для любой диаграммы G*

$$\sum_h S(h)\geqslant\frac{1}{2r}|B|\cdot L. \qquad (45)$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое максимальное множество кубов $R=\{\bar{\Delta}_1,\ \ldots,\ \bar{\Delta}_m\}\subset B\setminus\gamma$ таких, что $\rho(\bar{\Delta}_i,\ \bar{\Delta}_j)\geqslant L$ и расстояние $\rho(\bar{\Delta}_i,\ \widetilde{\gamma})\geqslant L$. Очевидно, что число таких кубов $|R|\geqslant(|B|-r|\gamma|)\frac{1}{r}$. Всякая цепь, проходящая через k кубов из R, имеет длину, не меньшую kL, и, следовательно, $\sum\limits_h S(h)\geqslant|R|L$. Отсюда при $|B|>2r|\gamma|$ получаем оценку (45). Лемма доказана.

Вклад любой диаграммы при условии, что $|B|>2r|\gamma|$, не превосходит, как следует из (44) и (45),

$$\exp\left(-\frac{m_0}{2}\frac{1}{2r}|B|\cdot L\right)|I(G)|^{1/2}. \qquad (46)$$

Таким образом, семиинвариант в (43) не превосходит $\exp\{-\alpha|B|L\}\sum\limits_G|I(G)|^{1/2}$ $(\alpha>0)$ в случае $|B|>2r|\gamma|$ и $\sum\limits_G|I(G)|$ в случае $|B|\leqslant 2r|\gamma|$. Оценки для сумм $\sum|I(G)|^{1/2}$ и $\sum|I(G)|$ аналогичны оценкам (2.3.II): $\sum|I(G)|\leqslant\leqslant C^N\cdot 2^n\prod\limits_{t\in\widetilde{\gamma}}(n_t)!!$ и подобная же оценка для $\sum|I(G)|^{1/2}$.

Отсюда, из (46) и (29), заметив, что при $\sum n_t > n$ семиинвариант в (43) равен нулю и

$$\Bigg|\sum_{\{n_t\}:\ \sum\limits_{t\in\widetilde{\gamma}} n_t \leqslant n} b_{\{n_t\}} C^N\Bigg| \leqslant \Big(\sum_{\{n_t\}} |b_{\{n_t\}}|^2\Big)^{1/2} \widetilde{C}^{|B|} =$$

$$= \langle|\widetilde{k}_\gamma|^2\rangle^{1/2}_{\overline{s}_B} \widetilde{c}^{|B|},$$

находим, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial \widetilde{s}_B}\langle\widetilde{k}_\gamma\rangle_{\overline{s}_B}\right| =$$

$$= \begin{cases} (CL^\nu e^{-\alpha L})^{|B|}\langle|\widetilde{k}_\gamma|^2\rangle^{1/2}_{\overline{s}_B} & \text{при } |B| > 2r|\gamma|, \\ (CL^\nu)^{|B|}\langle|\widetilde{k}_\gamma|^2\rangle^{1/2}_{\overline{s}_B} & \text{при } |B| < 2r|\gamma|. \end{cases} \tag{47}$$

Лемма 7. *При надлежащем выборе $L = L(\beta) > d$ для любого непустого набора $\gamma \subseteq B$ верна оценка*

$$\langle|\widetilde{k}_\gamma|^2\rangle^{1/2}_{\overline{s}_B} \leqslant \widehat{\varkappa}(\beta)^{|\gamma|}, \tag{48}$$

где $\widehat{\varkappa}(\beta) \to 0$ при $\beta \to 0$.

Доказательство. Обозначим для каждого куба Δ множество

$$A_1^\Delta = \Big\{x^\Delta \in R^\Delta : \sum_{t\in\Delta}\Phi(x(t)) < L^\nu\beta^{-1/2}\Big\} \subset R^\Delta,$$

где $x^\Delta = \{x(t),\ t\in\Delta\}$. Тогда при условии, что $L^\nu\beta^{1/4} \leqslant 1$, для $x^\Delta \in A_1^\Delta$

$$|\widetilde{k}_\Delta(x^\Delta)| < C_1\beta^{1/4} \tag{49}$$

и для $x^\Delta \in R^\Delta \setminus A_1^\Delta = A_2^\Delta$

$$|\widetilde{k}_\Delta(x^\Delta)| \leqslant 1. \tag{50}$$

Отсюда

$$\left|\langle|\widetilde{k}_\gamma|^2\rangle_{\overline{s}_B}\right| \leqslant \sum_{\gamma'\subseteq\gamma} (C_1\beta^{1/4})^{2|\gamma'|}\mu^0_\Lambda(\overline{s}_B)\{x^\Delta \in A_2^\Delta,\ \Delta \in \gamma - \gamma'\}. \tag{51}$$

Далее очевидно, что

$$\mu^0_\Lambda(\overline{s}_B)\{x^\Delta \in A_2^\Delta,\ \Delta\in\gamma\setminus\gamma'\} \leqslant$$

$$\leqslant (L^\nu)^{|\gamma-\gamma'|}\max_{\tau=\{t_1,\ldots,t_r\}}\mu^0_\Lambda(\overline{s}_B)\{\Omega_\tau\}, \tag{52}$$

где максимум берется по всем наборам $\tau = \{t_1, \ldots, t_r\}$ точек, взятых по одной из каждого куба $\Delta \in \gamma\setminus\gamma'$, а Ω_τ — событие:

$$\Omega_\tau = \{\Phi(x(t_1)) > \beta^{-1/2}, \ldots, \Phi(x(t_r)) > \beta^{-1/2}\}.$$

Тогда

$$\mu^0_\Lambda(\overline{s}_B)\{\Omega_\tau\} =$$

$$= \frac{(\mathrm{Det}\,A_\tau)^{1/2}}{(2\pi)^{|\tau|/2}}\int_{\Omega_\tau}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{t,t'\in\tau}a^\tau_{tt'}x(t)\,x(t')\Big\}\prod_{t\in\tau}dx(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\mathrm{Det}\,A_\tau)^{1/2}}{(2\pi)^{|\tau|/2}}\Bigg(\int_{\Phi(x)>\beta^{-1/2}} e^{-\frac{1}{2}\varkappa_1(1-\delta)x^2}dx\Bigg) \leqslant \varepsilon(\beta)^{|\gamma\setminus\gamma'|}. \tag{53}$$

Здесь мы воспользовались неравенством (34) и оценкой

$$\frac{1}{2}\sum_{t,t'\in\tau}a^\tau_{t,t'}x(t)\,x(t') > \frac{1}{2}\sum_{t\in\tau}a^\tau_{t,t}(1-\delta)\,x^2(t) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\varkappa_1(1-\delta)^2\sum_{t\in\tau}x^2(t),$$

вытекающей из леммы 5. Здесь обозначено

$$\varepsilon(\beta) = \Big(\frac{M}{2\pi}\Big)^{1/2}\int_{\Phi(x)>\beta^{-1/2}} e^{-\frac{1}{2}\varkappa_1(1-\delta)^2x^2}dx, \tag{54}$$

где M определено в (34).

Далее, полагая $\widehat{\varkappa}(\beta) = (C_1^2\beta^{1/2} + L^\nu\varepsilon(\beta))^{1/2}$ и

$$L = L(\beta) = [\min\{\beta^{-1/4},\ \varepsilon^{-1/(2\nu)}(\beta),\ (\widehat{\varkappa}(\beta))^{-1/(4r)}\}]^{1/\nu},$$

получаем, что при достаточно малых β выполнены оценки $L > d$, $\widehat{\varkappa}(\beta) < 1$, а также оценка (48). Лемма 7 доказана.

Из леммы 7, разложения (25) и оценки (47) получаем оценку (23), где $\varkappa(\beta) = 2C\max\{\widehat{\varkappa}(\beta)^{1/(4r)},\ L^\nu e^{-\alpha L}\}$. Оценка (24) очевидна, поскольку $\langle e^{-U_\Delta}\rangle_{\overline{0}} \to 1$ при $\beta \to 0$. Лемма 4 доказана.

Из оценок (23) и (24) и леммы 3.4.II следует, что при достаточно малом β величины k_B, $k_{\{\Delta\}}$ удовлетворяют условиям (2.1.III), (3.1.III) и при этом выполняется условие кластерности (23.1.III).

Пусть F_A, $A \subseteq \Lambda$,— локальная ограниченная функция вида $F_A = \prod_{t\in A} f_t, f_t(x) = f_t(x(t))$, $t \in A$. Повторяя предыдущие рассуждения, мы получим для среднего $\langle F_A\rangle_\Lambda$ разложение вида (5.3.III):

$$\langle F_A\rangle_\Lambda = k_\varnothing(F_A)\cdot f^{(\Lambda)}_{\eta_A} + \sum_{\substack{R\subset\eta_\Lambda\\ R\neq\varnothing}} k_R(F_A)\, f^{(\Lambda)}_{R\cup\eta_A}, \tag{55}$$

где

$$k_\varnothing(F_A) = \left\langle F_A e^{-\sum\limits_{\Delta\in\eta_A} U_\Delta}\right\rangle_{\bar 0}\Big(\prod_{\Delta\in\eta_A} k_{\{\Delta\}}\Big)^{-1},$$

$$k_R(F_A) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \bar s_R}\left\langle F_A e^{-\sum\limits_{\Delta\in R\cup\eta_A} U_\Delta}\right\rangle_{\bar s_R} d\bar s_R\Big(\prod_{\Delta\in R\cup\eta_A} k_\Delta\Big)^{-1}.$$

Здесь $f^{(\Lambda)}_B, B \subseteq \eta_\Lambda$,— корреляционная функция, соответствующая кластерному представлению (22), $\eta_A \subseteq \eta_\Lambda$ — совокупность кубов, пересекающих A, а суммирование в (55) происходит по всем наборам кубов $R \subseteq \eta_\Lambda$, любая ν-связная компонента $\gamma \subseteq R$ которых пересекается с η_A и $|\gamma| \geqslant 2$. С помощью предыдущих построений легко получить для $k_R(F_A)$ оценку (6.3.III), где

$$r_B = \begin{cases} \left(\dfrac{\varkappa(\beta)}{K}\right)^{|B|} & \text{для связных } B\subset\eta, |B|\geqslant 2,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

а

$$m(F_A) = \prod_{t\in A}\sup|f_t|\cdot\prod_{\Delta\in\eta_A} l_\Delta,$$

$$l_\Delta = \max\left\{1, \langle|k_\Delta|^2\rangle^{1/2}_{\bar 0}(|\langle k_\Delta\rangle_{\bar 0}|)^{-1}\right\}.$$

Выбрав далее компактную функцию $h_A = \sum_{t\in A} x^2(t)$ для каждого конечного $A \subset Z^\nu$, мы с помощью предыдущих рассуждений получим, что для $\Lambda \supseteq A$

$$\langle h_A\rangle_\Lambda < C_A, \tag{56}$$

где C_A — константа, не зависящая от Λ. Таким образом, семейство мер $\{\mu_\Lambda\}$, где Λ — произвольное множество, целиком состоящее из кубов $\Delta \in \eta$, слабо локально ком-

пактно, и, таким образом, для него выполненное утверждение теоремы 3. В частности, существуют пределы

$$\lim_{\Lambda\nearrow Z}\mu_\Lambda = \mu \tag{57}$$

и

$$\lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu}\langle F_A\rangle_\Lambda = \langle F_A\rangle_\mu = \sum_{R\subset\eta} k_R(F_A)\, f_{R\cup\eta_A} + k_\varnothing(F_A)\, f_{\eta_A}, \tag{58}$$

когда Λ пробегает множества указанного выше вида.

Рассмотрим теперь общий случай, когда Λ уже не является объединением кубов $\Delta \in \eta$. Назовем граничным кубом всякий куб $\Delta \in \eta$ такой, что $\Delta \cap \Lambda \neq \varnothing$, $\Delta \cap (Z^\nu\backslash\Lambda) \neq \varnothing$. Куб $\Delta \subset \Lambda$, соседний с каким-нибудь граничным кубом, назовем приграничным, а остальные кубы — внутренними кубами для Λ. Занумеровав произвольным образом приграничные кубы $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$, присоединим к приграничному кубу Δ_1 все точки из Λ, лежащие в граничных кубах, соседних с Δ_1, полученное множество обозначим $\tilde\Delta_1$. К кубу Δ_2 присоединим все оставшиеся точки из Λ, лежащие в приграничных кубах, соседних с Δ_2; получим множество $\tilde\Delta_2$. Продолжая аналогично, получим приграничные множества $\tilde\Delta_1, \ldots, \tilde\Delta_p$. Вместе с внутренними кубами они задают разбиение $\tilde\eta_\Lambda$ множества Λ.

Повторяя теперь предыдущие рассуждения, мы получим кластерное представление Z_Λ (22) статистической суммы и кластерное разложение (55) средних $\langle F_A\rangle_\Lambda$ с величинами $k^{(\Lambda)}_B, B \subseteq \tilde\eta_\Lambda$, и $k^{(\Lambda)}_R(F_A)$, $R \subseteq \tilde\eta_\Lambda$, вообще говоря, зависящими от Λ. Однако для этих величин (равномерно по Λ) выполнены оценки, полученные выше, и, кроме того, $k^{(\Lambda)}_B$ и $k^{(\Lambda)}_R(F_A)$ зависят от Λ только для тех наборов B и R, которые содержат приграничные множества $\tilde\Delta_i$, $i = 1, \ldots, p$. Для любого $\Lambda \subset Z^\nu$ выполнена также оценка (56) и, следовательно, согласно замечанию 1.3.III пределы (57) и (58) существуют по любой последовательности $\Lambda \nearrow Z^\nu$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь следующее обобщение теоремы 3. Пусть $\Lambda \subset Z^\nu$ и $y = y^{\partial\Lambda} = \{y(t), t \in \partial_d\Lambda\}$ — граничная конфигурация, определенная на множестве $\partial_d\Lambda = \{t \in Z^\nu\backslash\Lambda, \rho(t, \Lambda) \leqslant d\}$, и $\mu^0_{\Lambda,y}$ — гауссова мера с матрицей обратной ковариации $A_\Lambda = (\mathscr{B}^{-1})_\Lambda$, такой же как и в теореме 3, и граничным условием y. Плотность этой меры $P_{\Lambda, y}(x)$ относительно лебеговой меры $(dx)^{|\Lambda|}$ в R^{Λ} равна

$$\frac{d\mu^0_{\Lambda,y}}{(dx)^{|\Lambda|}} = D^{-1}_{\Lambda,y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\{t,t'\}\subset\Lambda} a^{\Lambda}_{t,t'} x(t)\, x(t') - \sum_{\substack{t\in\Lambda\\ \bar{t}\in\partial_d\Lambda}} a^{\Lambda}_{t,\bar{t}}\, x(t)\, y(\bar{t})\right\} \tag{59}$$

($D_{\Lambda, y}$ — нормирующий множитель). При $y\equiv 0$ мера $\mu^0_{\Lambda,y} = \mu^0_{\Lambda}$.

Теорема 8. *Пусть* $\{\mu_{\Lambda,y}\}$ — *семейство гиббсовских перестроек мер* $\mu^0_{\Lambda,y}$ *с помощью взаимодействия* $U_\Lambda = \beta\sum_{t\in\Lambda}\Phi(x(t))$ *и граничная конфигурация* $y = y^{\partial\Lambda}$ *при любом* Λ *удовлетворяет условию*

$$\max_{t\in\partial_d\Lambda} |y(t)| \leqslant m(\beta) = \frac{1}{2C}\inf\{|x| : \Phi(x) > \beta^{-1/2}\}, \tag{60}$$

где $C = \|A^{-1}_{\Lambda}\|\,\|A_\Lambda\|$ *(норма определяется формулой* (8)). *Тогда при достаточно малом* $\beta > 0$ *семейство* $\{\mu_{\Lambda,y}\}$ *допускает кластерное разложение и, в частности, существует слабый локальный предел*

$$\lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu} \mu_{\Lambda,y} = \mu, \tag{61}$$

совпадающий с пределом (57).

Доказательство. Перейдем к новому гауссову полю

$$\hat{x}(t) = x(t) - m_t(y), \quad t\in\Lambda,$$

где

$$m_t(y) = \langle x(t)\rangle_{\mu^0_{\Lambda,y}} \equiv \langle x(t)\rangle_{\Lambda,y}. \tag{62}$$

Распределение для нового поля $\{\hat{x}(t),\ t\in\Lambda\}$ совпадает с распределением (59) при $y\equiv 0$, т. е. с мерой μ^0_Λ. При этом мера $\mu_{\Lambda,y}$ получается как гиббсовская перестройка μ^0_Λ с помощью взаимодействия

$$\hat{U}_\Lambda = \beta\sum_{t\in\Lambda}\Phi\left(\hat{x}(t) + m_t(y)\right). \tag{63}$$

Таким образом, в этом случае применимы все рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3. При этом величина $\varepsilon(\beta)$, определяемая формулой (54), заменится величиной

$$\hat{\varepsilon}(\beta) = \max_{t\in\Lambda} \int\limits_{\Phi(x+m_t(y))>\beta^{-1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\varkappa_1(1-\delta)^2 x^2\right\} dx.$$

Поскольку

$$m_t(y) = \sum_{\substack{t'\in\Lambda,\\ \bar{t}\in\partial_d\Lambda}} a^{(-1)}_{t,t'} a_{t',\bar{t}}\, y(\bar{t}), \tag{64}$$

из условия (60) находим, что $|m_t(y)| < Cm(\beta)$. И, таким образом, $\hat{\varepsilon}(\beta)\to 0$ при $\beta\to 0$ (а также $m(\beta)\to\infty$ при $\beta\to 0$).

Мы можем получить далее кластерное представление статистических сумм Z_Λ и кластерное разложение средних $\langle F_A\rangle_{\Lambda,y}$, причем величины $k_B = k^{\Lambda}_B(y)$ и $k_R(F_A) = k^{(\Lambda)}_R(F_A; y)$, входящие в это разложение и зависящие, вообще говоря, от Λ и y, равномерно по Λ и всем y, для которых выполнено условие (60), удовлетворяют оценкам, установленным в теореме 3. При этом также равномерно по Λ и y выполнена оценка (56). Кроме того, из (64) и (7) следует, что

$$|m_t(y)| < C_1\exp\{-m_0\rho(t,\partial\Lambda)\}, \quad C_1 = C_1(\beta).$$

Отсюда легко вывести, что для любого фиксированного $B\subset\eta$ и $R\subset\eta$ существуют пределы

$$\lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu} k^{(\Lambda)}_B(y) = k_B \quad\text{и}\quad \lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu} k^{(\Lambda)}_R(F_A; y) = k_R(F_A), \tag{65}$$

где k_B и $k_R(F_A)$ определены в предыдущей теореме. Таким образом, согласно замечанию 1.3.III существует слабый локальный предел (61), совпадающий в силу (65) и (58) с пределом (57). Теорема 8 доказана.

Рассмотрим теперь гауссову меру μ^0 на R^{Z^ν} со средним нуль и с матрицей ковариаций B, обратной к матрице A, удовлетворяющей условиям (3)—(6).

Теорема 9. *Рассмотрим гиббсовские перестройки* μ_Λ *меры* μ^0, *определяемые равенством*

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu^0} = Z^{-1}_\Lambda \exp\left\{-\beta\sum_{t\in\Lambda}\Phi(x(t))\right\}. \tag{66}$$

Тогда меры μ_Λ *допускают кластерное разложение и предельная мера*

$$\mu = \lim_{\Lambda \nearrow Z^\nu} \mu_\Lambda$$

совпадает с мерой (57).

Доказательство. В этом случае применимы все рассуждения, использованные в доказательствах теорем 3 и 8, дополненные следующей леммой. Обозначим $\overline{A}_\Lambda = (\mathscr{B}_\Lambda)^{-1} = \{\overline{a}^\Lambda_{t,t'}, t\, t' \in \Lambda\}$, где $\mathscr{B}_\Lambda$ — сужение матрицы ковариаций $\mathscr{B}$ на $\Lambda \subset Z^\nu$.

Лемма 10. *Матричные элементы* $\overline{a}^\Lambda_{t,t'}$ *матрицы* $\overline{A}_\Lambda$ *имеют вид*

$$\overline{a}^\Lambda_{t,t'} = a_{t,t'} + c^\Lambda_{t,t'}, \quad t, t' \in \Lambda,$$

где $a_{t,t'}$ — *матричные элементы* A, *а* $c^\Lambda_{t,t'}$ *таковы, что*

$$\begin{aligned} c^\Lambda_{t,t'} = 0, \quad &\text{если} \quad \max\{\rho(t, Z^\nu \setminus \Lambda), \rho(t', Z^\nu \setminus \Lambda)\} > d, \\ &|c^\Lambda_{t,t'}| < Ke^{-m_0\rho(t,t')}, \end{aligned} \tag{67}$$

где K *и* m_0 — *константы, не зависящие от* Λ.

Доказательство. Обозначим через $A_{i,i'}, B_{i,i'}$, $i, i' = 1, 2$, блоки матриц A и B, соответствующие разбиению $Z^\nu = \Lambda \cup (Z^\nu \setminus \Lambda)$, например, $A_{1,1} = \{a_{t,t'}, t, t' \in \Lambda\}$ и т. д. Из равенств $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = E_{11}$, $A_{21}B_{12} + A_{22}B_{21} = 0$ находим, что $\overline{A}_\Lambda = B_{11}^{-1} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$. Отсюда и следует утверждение леммы, причем

$$c^\Lambda_{t,t'} = -\sum_{t_1, t_2 \in Z^\nu \setminus \Lambda} a_{t,t'} a^{(-1)}_{t_1 t_2} a_{t_2 t'}, \tag{68}$$

и надо воспользоваться условием (3) и оценкой (7).

В следующей главе нам понадобится приводимое ниже обобщение теоремы 8. Пусть $\mu^0_{\Lambda,y}$ — гауссовская мера (59) с граничной конфигурацией y на $\partial_d\Lambda$ и $\mu_{\Lambda,y}$ — ее гиббсовская перестройка с помощью взаимодействия

$$U_{\Lambda,y} = \beta\Bigg(\sum_{t\in\Lambda}\Phi^{(1)}(x(t);\beta) + \sum_{\{t_1,t_2\}\subset\Lambda}\Phi^{(2)}_{t_1-t_2}(x(t_1),\ x(t_2);\beta) + \\ + \sum_{\substack{t\in\Lambda,\\ \bar t\in\partial_d\Lambda}}\Phi^{(2)}_{t-\bar t}\left(x(t), y(\bar t);\beta\right)\Bigg), \tag{69}$$

где $\Phi^{(1)}(\cdot;\beta)$, $\Phi^{(2)}_\tau(\cdot,\cdot;\beta)$, $\tau \in Z^\nu$, — семейства одноточечных и двуточечных потенциалов, зависящих от параметра β, $0 < \beta < \beta_0$, ограниченных снизу и принимающих, быть может, значение $+\infty$. При этом двухточечный потенциал предполагается финитным с радиусом взаимодействия d:

$$\Phi^{(2)}_\tau \equiv 0 \quad \text{при } |\tau| > d. \tag{70}$$

Предположим, для любого $C_1 > 0$ выполнено условие

$$\max\left\{\int\limits_{\Gamma_1(\beta)} e^{-C_1x^2}\,dx,\ \iint\limits_{\Gamma_2^\tau(\beta)} e^{-C_1(x^2+y^2)}\,dx\,dy\right\} \to 0 \tag{71}$$

при $\beta \to 0$, где

$$\Gamma_1(\beta) = \{x \in R^1 : \Phi^{(1)}(x;\beta) > \beta^{-1/2}\},$$

$$\Gamma_2^\tau(\beta) = \{(x_1, x_2) \in R^{(2)} : \Phi^{(2)}_\tau(x_1, x_2; \beta) > \beta^{-1/2}\}.$$

Обозначим также

$$m(\beta) = \frac{1}{2C}\min\left(\rho^{(1)}(0, \Gamma_1(\beta)),\ \rho^{(2)}(0, 0),\ \Gamma_2^\tau(\beta)\right),\ |\tau| < d), \tag{72}$$

где $\rho^{(i)}$ — обычная метрика в $R^{(i)}$, $i = 1, 2$, а константа C определена в теореме 8.

Теорема 11. *При условии, что* β *достаточно мало, потенциалы взаимодействия* $\Phi^{(1)}$ *и* $\Phi^{(2)}_\tau$ *удовлетворяют условию* (71), *а граничная конфигурация* y — *оценке*

$$\max_{t\in\partial_d(\Lambda)} |y(t)| \leqslant m(\beta), \tag{73}$$

меры $\mu_{\Lambda,y}$ *допускают кластерное разложение и, в частности, существует слабый локальный предел*

$$\mu = \lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu} \mu_{\Lambda,y},$$

один и тот же для всех конфигураций $y = y^{\partial\Lambda}$, *подчиненных условию* (73).

Доказательство аналогично предыдущим доказательствам.

Замечание. Справедлив также аналог теоремы 9 для случая взаимодействия (69), удовлетворяющего условиям (70) и (71).

ГЛАВА V

РАЗЛОЖЕНИЯ ВБЛИЗИ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ (НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ)

§ 1. Дискретный спин: счетное число основных состояний

Основные состояния. В предыдущей главе техника кластерных разложений применялась к гиббсовским случайным полям, полученным как возмущение либо независимого, либо гауссова свободного поля. В этой главе мы рассмотрим возмущение поля, принимающего постоянное значение, а именно возмущение так называемого основного состояния. Пусть, как всегда, T — счетное множество, S — пространство спинов и $U_\Lambda(\cdot/y^{\partial\Lambda})$, $\Lambda\subset T$, — взаимодействие, определяемое потенциалом $\{\Phi_A, A\subset T\}$ и фиксированной граничной конфигурацией $y^{\partial\Lambda}$ вне Λ (или «пустыми» граничными условиями). *Основным состоянием* в конечном множестве $\Lambda\subset T$ называется любая конфигурация $x^0=x^0(\Lambda, y^{\partial\Lambda})$, для которой взаимодействие $U_\Lambda(x^0/y^{\partial\Lambda})$ принимает наименьшее значение. *Основным состоянием во всем множестве* T называют конфигурацию $x^0\in S^T$ такую, что для любой другой конфигурации $\hat{x}\in S^T$, отличающейся от x^0 лишь значениями в конечном множестве точек $t\in T$, разность энергий

$$\Delta U=\lim_{\Lambda\nearrow T}\left(U_\Lambda(\hat{x})-U_\Lambda(x^0)\right)\geqslant 0 \tag{1}$$

(предел в (1) в случае, скажем, финитного потенциала $\{\Phi_A\}$ всегда существует). Существует более общее понятие основного состояния в T (см. [90]), но для наших целей достаточно приведенного определения.

Основное эвристическое правило в теории гиббсовских случайных полей состоит в том, что (при определенных дополнительных условиях) каждое основное состояние x^0 в T порождает при достаточно больших значениях параметра β семейство $\{\mu_\beta\}$ предельных гиббсовских распределений на S^T таких, что $\mu_\beta\to\delta_{x^0}$, $\beta\to\infty$, где δ_{x^0} — вероятностная мера в S^T, сосредоточенная на одной единственной конфигурации x^0.

Во всех приводимых в этой главе примерах это правило будет подтверждено и построенные нами предельные гиббсовские поля при больших β будут получены как возмущение того или иного основного состояния.

Рассмотрим Z-модель на решетке $T=Z^\nu$, т. е. систему с пространством спинов $S=Z$ (множество целых чисел) и считающей мерой λ_0 на Z. Пусть формальный гамильтониан имеет вид

$$U=\sum_{|t-t'|=1}\Phi(x_t-x_{t'}), \tag{2}$$

где $\Phi(n)\geqslant 0$ — неотрицательная функция, определенная на Z, имеющая единственный минимум в нуле, причем $\Phi(0)=0$ и такая, что сумма

$$F(\beta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\beta\Phi(n)}<\infty \tag{3}$$

конечна при всех $\beta>\beta_0$ и

$$F(\beta)\to 1 \quad\text{при}\quad \beta\to\infty. \tag{4}$$

Заметим, что любая конфигурация

$$x^m\equiv m,\quad m\in Z,$$

является основным состоянием для взаимодействия (2).

Рассмотрим для любого Λ и любого $m\in Z$ гиббсовскую перестройку

$$\frac{d\mu_{\Lambda,m}}{d\lambda_0^\Lambda}=Z_{\Lambda,m}^{-1}\exp\{-\beta U(x/m)\}, \tag{5}$$

соответствующую взаимодействию (2) с граничной конфигурацией $y^{\partial\Lambda}\equiv m$, а

$$Z_{\Lambda,m}=\sum_{x\in Z^\Lambda}\exp\{-\beta U_\Lambda(x/m)\}. \tag{6}$$

Как мы убедимся ниже, при достаточно больших $\beta>0$ и любых m и Λ выполнено условие устойчивости $Z_{\Lambda,m}<\infty$.

Теорема 1. *При всех достаточно больших $\beta>0$ и любом фиксированном $m\in Z$ система мер $\{\mu_{\Lambda,m}\}$ допускает кластерное разложение. Предельные меры $\mu_m=\lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu}\mu_{\Lambda,m}$ различны для различных m.*

Доказательство. Рассмотрим для простоты случай $\nu = 2$. Пусть сначала $m = 0$. Для каждой конфигурации поля $x = \{x(t),\ t \in \Lambda\}$ в Λ обозначим через $\widehat{x}$ конфигурацию па $\Lambda \cup \partial\Lambda$, совпадающую с x в Λ и равную $\widehat{x}(t) = 0$ в точках $t \in \partial\Lambda$. Совокупность ребер двойственной решетки $\widetilde{Z}^2$, разделяющих соседние точки $t,\ t' \in \Lambda \cup \cup\, \partial\Lambda$, в которых $\widehat{x}(t) \neq \widehat{x}(t')$, мы назовем *границей* $\gamma(x)$ конфигурации x, а ее связные компоненты $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ — *контурами* этой конфигурации (сравните аналогичные определения в § 0.I, а также в § 5.III).

Каждый контур Γ разделяет решетку Z^2 на конечное число 1-связных подмножеств $\theta_1, \ldots, \theta_p$; ровно одно из этих подмножеств $\theta^{\text{вн}}$ бесконечно и называется *внешностью* — $\operatorname{Ext}\Gamma$ — контура Γ, а остальные — *внутренними компонентами* этого контура. При этом их объединение называется *внутренностью* — $\operatorname{Int}\Gamma$ — контура Γ. Целочисленную функцию $n = \{n_t,\ t \in Z^\nu\}$, постоянную на каждой компоненте θ_i, $i = 1, \ldots, p$, контура Γ, равную нулю на внешней компоненте $\theta^{\text{вн}}$ и принимающую различные значения на двух граничных друг с другом компонентах θ_i и θ_j, назовем *разметкой* контура Γ. Пару $\{\Gamma, n\}$, где Γ — контур, а n — какая-нибудь из его разметок, назовем *размеченным* контуром. Очевидно, что каждой конфигурации $x \in S^\Lambda$ (при нулевых граничных условиях) соответствует набор $\alpha = (\{\Gamma_1, n_1\}, \ldots, \{\Gamma_s, n_s\})$ попарно непересекающихся размеченных контуров, где $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ образуют компоненты границы $\gamma(x)$, а разметки n_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, однозначно определяются из равенств

$$\widehat{x}(t) = \sum_{i=1}^{s} n_i(t), \quad t \in \Lambda \cup \partial\Lambda. \tag{7}$$

Обратно, всякому такому набору α соответствует некоторая конфигурация $x \in S^\Lambda$.

Для каждого размеченного контура (Γ, n) положим

$$W(\Gamma, n) = \sum_{\substack{t, t' \in \Lambda \cup \partial\Lambda \\ |t-t'|=1}} \Phi(n(t) - n(t')). \tag{8}$$

Здесь сумма берется фактически по всем парам соседних точек (t, t'), разделенных контуром Γ. Из (2) и (8) следует, что для каждой конфигурации x

$$U_{\Lambda,0}(x) = U_\Lambda\left(x/y^{\partial\Lambda} \equiv 0\right) = \sum_{(\Gamma, n) \in \alpha} W(\Gamma, n), \tag{9}$$

где $\alpha = (\{\Gamma_1, n_1\}, \ldots, \{\Gamma_s, n_s\})$ — набор размеченных контуров, соответствующий конфигурации $x \in S^\Lambda$. При этом

$$Z_{\Lambda,0} = \sum_{\alpha} \prod_{(\Gamma, n) \in \alpha} \exp\{-\beta W(\Gamma, n)\}, \tag{10}$$

а сумма берется по всем наборам попарно непересекающихся размеченных контуров в $\widetilde{\Lambda} \subset \widetilde{Z}^2$ ($\widetilde{\Lambda}$ — множество ребер двойственной решетки, разделяющих точки из $\Lambda \cup \partial\Lambda$). Положим теперь для любого контура Γ

$$k_\Gamma = \sum_{n} \exp\{-\beta W(\Gamma, n)\}, \tag{11}$$

где сумма берется по всем разметкам n контура Γ. Из (10) и (11) получаем кластерное представление статистической суммы

$$Z_{\Lambda,0} = \sum_{\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}} k_{\Gamma_1} \ldots k_{\Gamma_s}, \tag{12}$$

где сумма берется по всевозможным наборам попарно непересекающихся контуров $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ в $\widetilde{\Lambda}$. Из (11) получаем кластерную оценку

$$|k_\Gamma| \leqslant \prod_{\xi \in \Gamma} \sum_{n_\xi \neq 0} \exp\{-\beta\Phi(n_\xi)\} \leqslant (F(\beta) - 1)^{|\Gamma|} \tag{13}$$

(произведение берется по всем ребрам ξ из контура Γ).

Распределение вероятностей на множестве $\mathfrak{A}_\Lambda$ всех расположений контуров $\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ в $\widetilde{\Lambda}$:

$$P^{(\Lambda)}(\gamma) = Z_{\Lambda,0}^{-1} \prod_{\Gamma \in \gamma} k_\Gamma \tag{14}$$

назовем *ансамблем контуров* в $\widetilde{\Lambda}$ (сравните с определением ансамбля множеств в § 1.III).

Контур $\Gamma \in \gamma$ в наборе контуров $\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ называется *внешним*, если он не содержится внутри какого-нибудь другого контура $\Gamma_i \in \gamma$. Пусть $\gamma^{\text{ext}} = \{\Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_m}\} \subseteq \subseteq \gamma$ — набор всех внешних контуров конфигурации γ. Определим далее ансамбль внешних контуров в $\widetilde{\Lambda}$ как распределение вероятностей на совокупности наборов $\widetilde{\gamma} = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$, состоящих только из внешних контуров, причем

$$P_{\text{ext}}^{(\Lambda)}(\widetilde{\gamma}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\gamma : \gamma^{\text{ext}} = \widetilde{\gamma}} P^{(\Lambda)}(\gamma) = Z_{\Lambda,0}^{-1} \prod_{\Gamma_i \in \widetilde{\gamma}} Z^{\text{ext}}(\Gamma_i), \tag{15}$$

$$Z^{\text{ext}}(\Gamma)=k_\Gamma\sum_{\{\Gamma_1',\ldots,\Gamma_l'\}}\prod_{j=1}^{l}k_{\Gamma_j'},\qquad(16)$$

где сумма берется по всем конфигурациям контуров $\{\Gamma_1',\ldots,\Gamma_l'\}$ внутри контура Γ.

Верна теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 1.1.III (см. также [48], [49]).

Теорема 2. *Пусть β достаточно велико. Тогда*

а) существует распределение вероятностей P на совокупности $\mathfrak{A}$ всех конечных или счетных конфигураций контуров $\gamma=\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s,\ldots\}$ на бесконечной решетке Z^2 такое, что для любого конечного набора попарно непересекающихся контуров $\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s\}$ корреляционная функция

$$\rho(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s)=\lim_{\Lambda\nearrow Z^2}\rho^{(\Lambda)}(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s),\qquad(17)$$

где

$$\rho^{(\Lambda)}(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s)=\\=\Pr{}^{(\Lambda)}(\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s\}\subseteq\gamma)=\sum_{\gamma:\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s\}\subseteq\gamma}P^{(\Lambda)}(\gamma)\qquad(18)$$

— вероятность (вычисленная в ансамбле (14)) того, что набор $\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s\}$ содержится в какой-нибудь конфигурации $\gamma\in\mathfrak{A}_\Lambda$ и аналогично определяется $\rho(\Gamma_1,\ldots,\Gamma_s)$;

б) для почти всех конфигураций $\gamma\in\mathfrak{A}$ в предельном ансамбле каждый контур $\Gamma\in\gamma$ либо сам является внешним либо охватывается каким-либо внешним контуром $\widetilde{\Gamma}\in\gamma$. Таким образом, распределение P на $\mathfrak{A}$ порождает распределение вероятностей P_{ext} на совокупности $\mathfrak{A}^{\text{ext}}$ конфигураций внешних контуров на Z^2. При этом существуют пределы, аналогичные (17):

$$\rho_{\text{ext}}(\widetilde{\Gamma}_1,\ldots,\widetilde{\Gamma}_s)=\lim_{\Lambda\nearrow Z^2}\rho_{\text{ext}}^{(\Lambda)}(\widetilde{\Gamma}_1,\ldots,\widetilde{\Gamma}_s),\qquad(19)$$

где $\{\widetilde{\Gamma}_1,\ldots,\widetilde{\Gamma}_s\}$ — произвольный набор внешних (друг по отношению к другу) контуров, а

$$\rho_{\text{ext}}^{(\Lambda)}(\widetilde{\Gamma}_1,\ldots,\widetilde{\Gamma}_s)=\Pr{}_{\text{ext}}^{(\Lambda)}(\{\widetilde{\Gamma}_1,\ldots,\widetilde{\Gamma}_s\}\subseteq\widetilde{\gamma})=\\=\sum_{\widetilde{\gamma}\in\mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}:\{\widetilde{\Gamma}_1,\ldots,\widetilde{\Gamma}_s\}\subseteq\widetilde{\gamma}}P_{\text{ext}}^{(\Lambda)}(\widetilde{\gamma}).\qquad(20)$$

С тем чтобы завершить доказательство теоремы 1, заметим, что для локальной функции вида $F_A=\prod_{t\in A}f_t$, $A\subset Z^2$ (f_t — $\Sigma_{\{t\}}$-измеримая функция, $t\in A$), среднее $\langle F_A\rangle_{\Lambda,0}$ равно

$$\langle F_A\rangle_{\Lambda,0}=\\=\sum_{\{\widetilde{\Gamma}_1,\ldots,\widetilde{\Gamma}_s\}}\prod_{t\in A\setminus\bigcup\operatorname{Int}\widetilde{\Gamma}_i}f_t(0)\prod_{i=1}^{s}\left\langle\prod_{t\in A\cap\operatorname{Int}\widetilde{\Gamma}_i}f_t\right\rangle_{\operatorname{Int}\widetilde{\Gamma},0}\times\\\times\rho_{\text{ext}}^{(\Lambda)}(\widetilde{\Gamma}_1,\ldots,\widetilde{\Gamma}_s).\qquad(21)$$

Здесь сумма берется по всевозможным наборам внешних контуров $\{\widetilde{\Gamma}_1,\ldots,\widetilde{\Gamma}_s\}$, у каждого из которых внутренность $\operatorname{Int}\widetilde{\Gamma}_i$ пересекается с A, $\langle\cdot\rangle_{\operatorname{Int}\widetilde{\Gamma},0}$ — среднее по гиббсовскому распределению $\mu_{\operatorname{Int}\widetilde{\Gamma},0}$ в множестве $\operatorname{Int}\widetilde{\Gamma}\subset\subset Z^2$ с нулевой граничной конфигурацией.

Формула (21) представляет собой кластерное разложение для средних $\langle F_A\rangle_{\Lambda,0}$, и из нее, а также из теоремы 2 и оценки (13) следует существование предельной меры μ_0 при $m=0$. При этом, как следует из теоремы 2, для почти всех конфигураций $x\in\Omega=Z^\nu$ множество

$$\mathscr{L}_0=\{t:\ x(t)=0\}\qquad(22)$$

имеет ровно одну бесконечную 1-связную компоненту, а все 1-связные компоненты множеств

$$\mathscr{L}_m=\{t;\ x(t)=m\},\quad m\in Z,\quad m\neq0,\qquad(23)$$

конечны.

Легко видеть, что преобразование

$$G_m:\Omega\to\Omega,\quad x(t)\mapsto x(t)+m,\quad t\in Z^2,$$

переводит меру $\mu_{\Lambda,0}$ в меру $\mu_{\Lambda,m}$ и предельную меру μ_0 в меру μ_m, предельную для мер $\mu_{\Lambda,m}$. То обстоятельство, что $\mu_{m_1}\neq\mu_{m_1}$ при $m_1\neq m_2$, вытекает из замечаний (22) и (23). Теорема доказана.

§ 2. Непрерывный спин: единственное основное состояние

Рассмотрим случай, когда $S\subset R^1$ — конечный отрезок вещественной оси, симметричный относительно нуля, $d\lambda_0=|S|^{-1}dx$ — нормированная мера Лебега на S ($|S|$ — длина S). Пусть для любого конечного $\Lambda\subset Z^\nu$ и любой граничной конфигурации $y = y^{\partial\Lambda}$ на $\partial\Lambda$ взаимодействие $U_\Lambda(x/y)$ имеет вид

$$U_\Lambda(x/y) = \sum_{\substack{\{t_1,t_2\}\subset\Lambda,\\ |t_1-t_2|=1}} \Phi(x(t_1), x(t_2)) + \sum_{\substack{t\in\Lambda,\bar t\in\partial\Lambda,\\ |t-\bar t|=1}} \Phi(x(t), y(\bar t)), \quad (1)$$

где $\Phi(x_1, x_2)$, $x_i \in S$, $i=1, 2,$— гладкая симметричная функция, определенная на квадрате $S\times S$ и такая, что

1. $\Phi(0, 0) = 0$, $\Phi(x_1, x_2) > 0$ в остальных точках.
2. Φ представима в виде

$$\Phi(x_1, x_2) = \alpha\left(x_1^2 + 2vx_1x_2 + x_2^2\right) + \Phi'(x_1, x_2),$$
$$\alpha > 0, \quad |v| < 1, \quad (2)$$
$$|\Phi'(x_1, x_2)| < C(|x_1|^3 + |x_2|^3), \quad C > 0. \quad (3)$$

Легко видеть, что конфигурация $x\equiv 0$ является основным состоянием для взаимодействия (1), единственным в классе периодических основных состояний (т. е. таких конфигураций $x\in S^{Z^\nu}$, что $\tau_s x = x$ для сдвигов $s\in G$ из некоторой подгруппы $G\subset Z^\nu$ конечного ранга; здесь $(\tau_s x)(t) = x(t-s)$, $t, s\in Z^\nu$).

Рассмотрим для каждого конечного $\Lambda\subset Z^\nu$ и каждой граничной конфигурации $y = y^{\partial\Lambda}$ на $\partial\Lambda$ гиббсовскую перестройку $\mu_{\Lambda,y}$ меры $\mu^0 = \lambda_0^{Z^\nu}$ на пространстве S^{Z^ν}, равной произведению мер λ_0:

$$\frac{d\mu_{\Lambda,y}}{d\mu^0} = Z_{\Lambda,y}^{-1}\exp\{-\beta U_\Lambda(x/y)\}. \quad (4)$$

Теорема 1. *При достаточно больших $\beta > 0$ существует предельная мера μ на пространстве S^{Z^ν}:*

$$\mu = \lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu} \mu_{\Lambda,y} \quad (5)$$

(предел не зависит от выбора граничных конфигураций $y^{\partial\Lambda}$). Предельная мера μ, а также допредельные меры $\mu_{\Lambda,y}$ при условии, что граничные конфигурации y малы:

$$\max_{t\in\partial\Lambda}|y(t)| < \beta^{-1/2}\ln\beta, \quad (6)$$

допускают кластерное разложение.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда граничная конфигурация y удовлетворяет условию (6).

Сделаем замену переменных, т. е. перейдем к полю со значениями в $\widehat{S} = \beta^{1/2}S$:

$$\xi(t) = \beta^{1/2}x(t), \quad t\in\Lambda, \quad (7)$$

с граничной конфигурацией

$$\eta(t) = \beta^{1/2}y(t), \quad t\in\partial\Lambda, \quad (8)$$

удовлетворяющей условию

$$\max_{t\in\partial\Lambda}|\eta(t)| < \ln\beta. \quad (9)$$

Обозначим через $\widehat{\mu}_{\Lambda,\eta}$ меру на $\widehat{S}^\Lambda$, получающуюся из $\mu_{\Lambda,y}$ после замены (7), (8).

Рассмотрим гауссову меру $\widehat{\mu}^0$ на R^{Z^ν} со средним 0 и матрицей обратной ковариации $A = \{a_{t,t'}, t, t'\in Z^\nu\}$, где

$$a_{t,t'} = \begin{cases} 2\nu\alpha, & t = t',\\ 2v\alpha, & |t-t'| = 1,\\ 0, & |t-t'| > 1.\end{cases} \quad (10)$$

Пусть $\widehat{\mu}^0_{\Lambda,\eta}$ — условное распределение этого гауссова поля в Λ при заданной граничной конфигурации η на $\partial\Lambda$. Тогда

$$\frac{d\widehat{\mu}_{\Lambda,\eta}}{d\widehat{\mu}^0_{\Lambda,\eta}} = \widehat{Z}^{-1}_{\Lambda,\eta}\exp\{-\beta^{-1/2}\widehat{U}_\Lambda\}\prod_{t\in\Lambda}\chi_{\widehat{S}}(\xi(t)), \quad (11)$$

где

$$\widehat{U}_\Lambda = \sum_{\substack{t,t'\in\Lambda,\\ |t-t'|=1}} \widetilde{\Phi}(\xi(t), \xi(t'); \beta) + \sum_{\substack{t\in\Lambda,\\ \bar t\in\partial\Lambda,\\ |t-t'|=1,}} \Phi(\xi(t), \eta(t); \beta), \quad (12)$$

а

$$\widetilde{\Phi}(\xi_1, \xi_2; \beta) = \beta^{3/2}\Phi'\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{\beta}}, \frac{\xi_2}{\sqrt{\beta}}\right),$$

$$\chi_{\widehat{S}}(\xi) = \begin{cases}1, & \xi\in\widehat{S},\\ 0, & \xi\notin\widehat{S},\end{cases} \quad (13)$$

$$\widehat{Z}_{\Lambda,\eta} = \left\langle \exp\{-\beta^{-1/2}\widehat{U}_\Lambda\}\prod_{t\in\Lambda}\chi_{\widehat{S}}(\xi(t))\right\rangle_{\widehat{\mu}^0_{\Lambda,\eta}}. \quad (14)$$

Из (3) имеем

$$|\widetilde{\Phi}(\xi_1,\ \xi_2;\ \beta)| < C(|\xi_1|^3 + |\xi_2|^3). \tag{15}$$

Как видно из (11), мера $\widehat{\mu}_{\Lambda,\eta}$ является гиббсовской перестройкой меры $\widehat{\mu}^0_{\Lambda,\eta}$ с помощью взаимодействия, такого же как в теореме 11.8.IV, где малый параметр β следует положить равным $\beta^{-1/2}$, и

$$\Phi^{(1)}(\xi,\ \beta) = \begin{cases} 0, & \xi \in \widehat{S}, \\ \infty, & \xi \notin \widehat{S}, \end{cases}$$

а $\Phi^{(2)}(\cdot,\ \cdot;\ \beta)$ совпадает с $\widetilde{\Phi}(\cdot,\ \cdot;\ \beta)$.

Легко проверить, что при $\beta \to \infty$ выполняются условия (70.8.IV), (71.8.IV) и при достаточно больших β

$$\ln \beta < m(\beta^{-1/2}),$$

где m определяется по формуле (72.8.IV).

Таким образом, в силу теоремы 11.8.III, меры $\widehat{\mu}_{\Lambda,\eta}$ допускают кластерное разложение (построенное в § 8.III) и существует предел

$$\widehat{\mu} = \lim_{\Lambda \nearrow Z^\nu} \widehat{\mu}_{\Lambda,\eta},$$

не зависящий от граничной конфигурации η и также обладающий кластерным разложением. Очевидно, что и исходное семейство мер $\{\mu_{\Lambda,y}\}$, где y удовлетворяет условию (6), допускает кластерное разложение и у него существует предел (5).

Докажем теперь, что предел (5) существует для произвольных граничных условий $y^{\partial\Lambda}$. Тем самым будет доказана единственность гиббсовского распределения (см. следствие предложения 1.2.I).

Пусть $\Lambda \subset Z^\nu$ — куб, $\overline{\Lambda} = \Lambda \cup \partial\Lambda$ и для любой конфигурации $x \in S^\Lambda$ обозначим через $\overline{x} \in S^{\overline{\Lambda}}$ конфигурацию в $\overline{\Lambda}$, совпадающую с x в Λ и с $y^{\partial\Lambda}$ на $\partial\Lambda$. Для любой конфигурации $x \in S^\Lambda$ обозначим

$$D(x) = D = \{t \in \overline{\Lambda}\colon\ |\overline{x}(t)| > \beta^{-1/2} \ln \beta\} \subseteq \overline{\Lambda},$$

и пусть $D_1,\ \ldots,\ D_k$ — 1-связные компоненты D. Компоненту $D_i \subseteq D$ назовем *приграничной*, если она пересекается с $\partial\Lambda$; пусть $D^{\text{гр}}(x)$ — объединение всех приграничных компонент D.

Пусть $N = N(\Lambda)$ — длина стороны куба Λ. Обозначим через $K(\Lambda)$ куб, центр которого совпадает с центром Λ, а сторона равна $[N/2] + 1$. Пусть $\mathscr{E}_\Lambda \subset S^\Lambda$ — множество тех конфигураций $x \in S^\Lambda$, для которых $D^{\text{гр}}(x) \cap K(\Lambda) \neq \varnothing$.

Лемма 2. *Для любого куба Λ и любой граничной конфигурации $y = y^{\partial\Lambda}$*

$$\mu_{\Lambda,y}(\mathscr{E}_\Lambda) < Be^{-\widehat{c}N}, \tag{16}$$

где $B > 0$ и $\widehat{c} > 0$ — константы, не зависящие от Λ и $y^{\partial\Lambda}$.

Доказательство этой леммы мы приведем ниже, а сейчас, опираясь на нее, завершим доказательство теоремы.

Пусть F_A — локальная ограниченная функция и пусть куб Λ таков, что $A \subset K(\Lambda)$. Тогда

$$\langle F_A \rangle_{\mu_{\Lambda,y}} = \int_{\mathscr{E}_\Lambda} F_A d\mu_{\Lambda,y} + \int_{S^\Lambda \setminus \mathscr{E}_\Lambda} F_A d\mu_{\Lambda,y}. \tag{17}$$

Очевидно, что для любого $x \in S^\Lambda \setminus \mathscr{E}_\Lambda$ множество $\Lambda \setminus D^{\text{гр}}(x)$ содержит куб $K(\Lambda)$, и пусть $R(x)$ — 1-связная компонента $\Lambda \setminus D^{\text{гр}}(x)$, содержащая $K(\Lambda)$. Таким образом,

$$\int_{S^\Lambda \setminus \mathscr{E}_\Lambda} F_A d\mu_{\Lambda,y} = \mu(S^\Lambda \setminus \mathscr{E}_\Lambda) \sum_R \langle F_A/R(x) = R \rangle_{\mu_{\Lambda,y}} \mu_{\Lambda,y}(\{x\colon R(x) = R\}), \tag{18}$$

где суммирование проводится по всем 1-связным множествам $R \subset \overline{\Lambda}$, содержащим куб $K(\Lambda)$, а $\langle F_A | R(x) = R \rangle_{\mu_{\Lambda,y}}$ — условное среднее F_A при условии $R(x) = R$.

Так как $A \subset K(\Lambda)$, то в силу 1-марковского свойства распределения $\mu_{\Lambda,y}$ (см. § 2.I) получаем, что

$$\langle F_A/R(x) = R \rangle_{\mu_{\Lambda,y}} = \int \langle F_A \rangle_{\mu_{\widehat{R},\widehat{x}}} d\overline{\mu}_{\Lambda,y}(\widehat{x}/R(x) = R), \tag{19}$$

где $\widehat{R} = R \setminus (\partial_i R \cap \Lambda)$, $\widehat{x}$ — конфигурация на $\partial\widehat{R}$, совпадающая в точках $t \in \partial\widehat{R} \cap \partial\Lambda$ с граничной конфигурацией y, а в остальных точках $t \in \partial\widehat{R}$ принимающая произвольные значения, но такие, что

$$|\widehat{x}(t)| < \beta^{-1/2} \ln \beta, \quad t \in \partial\widehat{R} \cap \Lambda. \tag{20}$$

Через $\widehat{\mu}_{\Lambda, y}(\cdot/R(x)=R)$ обозначена мера в пространстве конфигураций $\widehat{x}$ на $\partial\widehat{R}$, порождаемая условным распределением $\mu_{\Lambda, y}(\cdot/R(x)=R)$ при условии, что $R(x)=R$. Интеграл в (19) берется по множеству всех конфигураций $\widehat{x}$ (с учетом условия (20)). Для больших Λ множество $\widehat{R}(x)$ для любой конфигурации $x\in S^{\Lambda}\setminus\mathscr{E}_{\Lambda}$ тоже велико и, таким образом, среднее $\langle F_A\rangle_{\mu_{\widehat{R},\widehat{x}}}$ в силу доказанного выше равномерно по всем $\widehat{x}$, удовлетворяющим условию (20), близко к предельному среднему $\langle F_A\rangle_{\mu}$. Отсюда, из (17)—(19) и леммы 2 следует сходимость

$$\langle F_A\rangle_{\mu_{\Lambda,y}}\to\langle F_A\rangle_{\mu},\quad \Lambda\nearrow Z^{\nu}.$$

Теорема доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть для простоты обозначений $S=[-1,\ 1]$. Пусть $x\in\mathscr{E}_{\Lambda}$ и $D_1\subseteq D^{\text{гр}}(x)$ — 1-связная приграничная компонента $D(x)$, пересекающая $K(\Lambda)$, и $\widehat{D}\subset D_1\cap(\Lambda\setminus K(\Lambda))$ — 1-связная компонента множества $D_1\cap(\Lambda\setminus K(\Lambda))$ такая, что

$$\widehat{D}\cap\partial K(\Lambda)=\varnothing\quad\text{и}\quad\widehat{D}\cap\partial\Lambda\neq\varnothing.$$

Заметим теперь, что для всех достаточно малых $\varepsilon>0$ выполнены неравенства

$$\Phi(x_1,\ \varepsilon x_2)\leqslant\Phi(x_1,\ x_2),\quad |x_1|<\varepsilon,\quad \varepsilon<|x_2|\leqslant 1,$$

$$\Phi(\varepsilon x,\ \varepsilon x_2)\leqslant\Phi(x_1,\ x_2)-\widetilde{C}\varepsilon^2,\quad \varepsilon<|x_1|<1,\quad \varepsilon<|x_2|<1, \tag{21}$$

где $\widetilde{C}>0$ — некоторая константа.

Положим, далее,

$$W=\max_{x,x'\subset[-1,1]}\Phi(x,\ x')/2\overline{\overline{c}}\varepsilon^2,$$

где $\overline{\overline{c}}<\widetilde{C}$; выберем число $0<\varkappa<1/(3v)$ так, чтобы $\varkappa N$ было целым числом.

Лемма 3. *Пусть N достаточно велико. Тогда для любой конфигурации $x\in\mathscr{E}_{\Lambda}$ существует 1-связное множество $B\subseteq\widehat{D}$ такое, что*

$$|B|\geqslant\varkappa N,\quad |\widehat{D}\cap(\partial B\cap\Lambda)|<|B|/|W|. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $\gamma=\{t_1,\ \ldots,\ t_n\}\subset\widehat{D}$ — 1-связная последовательность точек из $\widehat{D}$ такая, что

$t_1\in\partial\Lambda,\ \ldots,\ t_n\in\partial K$. Рассмотрим точку $\bar{t}\in\gamma$, отстоящую от $\partial\Lambda$ и от K на расстояние, большее $\frac{1}{4}N$, и пусть $T_m^{\bar{t}}$ есть куб $\{t\colon\ \rho(t,\ \bar{t})\leqslant m\}$, $m=1,\ 2,\ \ldots$ Обозначим через $B_m\subseteq T_m^{\bar{t}}\cap\widehat{D}$ связную компоненту множества $T_m^{\bar{t}}\cap\widehat{D}$, содержащую точку $\bar{t}$. Найдется такое m, $\varkappa N\leqslant m\leqslant\nu\varkappa N$, что

$$|\widehat{D}\cap(T_{m+1}\setminus T_m)|<(\varkappa N/W)^n, \tag{23}$$

где $n=[m/(\varkappa N)]$. Действительно при $m=\nu\varkappa N<N/3$ и достаточно больших N

$$|\widehat{D}\cap(T_{m+1}\setminus T_m)|<\{[2(m+1)]^{\nu}-(2m)^{\nu}\}<$$
$$<2\nu(2m+2)^{\nu-1}<2^{\nu}\nu(N/3+1)^{\nu-1}<(\varkappa N/W)^{\nu}$$

(фактически при любой фиксированной константе N).

Пусть $m_0\geqslant\varkappa N$ — наименьшее из чисел, для которых выполнено (23), и пусть $n_0=[m_0/(\varkappa N)]$. Покажем, что для B_{m_0} выполнены неравенства (22). Поскольку в B_{m_0} попадает по крайней мере m_0 точек из цепочки γ, $|B_{m_0}|\geqslant m_0\geqslant\varkappa N$. Второе неравенство (22) при $n_0=1$ непосредственно следует из (23) и первого неравенства (22). Пусть теперь $n_0\geqslant 2$ и $n_0\varkappa N\leqslant m_0\leqslant(n_0+1)\varkappa N$. Это означает, что для всех m, $\varkappa N\leqslant m<m_0$,

$$|\widehat{D}\cap(T_{m+1}\cap T_m)|\geqslant(\varkappa N/W)^n.$$

Отсюда

$$|B_{m_0}|=|\widehat{D}\cap T_{m_0}|>\sum_{m=\varkappa N}^{m_0-1}|\widehat{D}\cap(T_{m+1}\setminus T_m)|\geqslant$$
$$\geqslant(\varkappa N/W)^{n_0-1}\varkappa N=W(\varkappa N/W)^{n_0}.$$

Таким образом, из (23) вытекает (22). Лемма 3 доказана.

Фиксируем теперь для каждого $x\in\mathscr{E}_{\Lambda}$ какое-нибудь множество $B=B(x)$, указанное в предыдущей лемме. Обозначим через $V_B\subseteq\mathscr{E}_{\Lambda}$ множество тех конфигураций $x\in\mathscr{E}_{\Lambda}$, для которых $B(x)=B$, где $B\subset\Lambda$ — некоторое 1-связное множество, $|B|>\varkappa N$. Оценим вероятность $p(V_B)$. Для этого определим преобразование G_{ε}^{B}, $\varepsilon=\beta^{-1/2}\ln\beta$, в пространстве конфигураций

$$(G_{\varepsilon}^{B}x)(t)=\begin{cases}\varepsilon x(t), & t\in B,\\ x(t), & t\notin B.\end{cases}$$

Заметим, что для любого $x \in V_B$

$$-\left[U_\Lambda(x/y) - U_\Lambda\left(G_\varepsilon^B x/y\right)\right] =$$
$$= \sum_{t,t' \in B} [\Phi(\varepsilon x(t), \varepsilon x(t')) - \Phi(x(t), x(t'))] +$$
$$+ \sum_{t \in B, t' \in \partial B \cap \hat{D}} [\Phi(\varepsilon x(t); x(t')) - \Phi(x(t), x(t'))] +$$
$$+ \sum_{t \in B, t' \in \partial B, t' \overline{\in} \hat{D}} [\Phi(\varepsilon(x(t), x(t')) - \Phi(x(t), x(t'))] +$$

$+$ аналогичные выражения, содержащие разности

$$[\Phi(\varepsilon x(t), y(\bar{t})) - \Phi(x(t), y(\bar{t}))], \quad t \in B, \ \bar{t} \in \partial\Lambda. \qquad (24)$$

Первая сумма в силу (21) допускает оценку сверху $(-\tilde{C}\varepsilon^2 N_2(B))$, где $N_2(B)$ — число пар соседних точек в B. Вторая сумма в силу (22) не превосходит

$$2 \max |\Phi(x, x')| \frac{|B|}{W} < |B| \cdot c\varepsilon^2,$$

а третья сумма снова в силу (21) отрицательна (аналогичные оценки для последних слагаемых в (24)).

Так как для любого 1-связного множества B число $N_2(B) \geqslant |B| - 1$, из предыдущих оценок находим, что

$$-U_\Lambda(x) \leqslant -U_\Lambda\left(G_\varepsilon^B x\right) - \hat{c}\varepsilon^2 B,$$

где $\hat{c} > 0$ — некоторая положительная константа.

Отсюда

$$P(V_B) = Z_\Lambda^{-1} \int_{V_B} e^{-\beta U_\Lambda(x/y)} \prod_{t \in \Lambda} dx(t) <$$
$$< e^{-\beta \hat{c}\varepsilon^2 |B|} Z_\Lambda^{-1} \int e^{-\beta U_\Lambda\left(G_\varepsilon^B x/y\right)} \prod dx(t) < \varepsilon^{-|B|} e^{-\beta \hat{c}\varepsilon^2 |B|}.$$

Число 1-связных множеств $B \subset \Lambda$ мощности l не превосходит $N^\nu \tilde{c}^l$, где $\tilde{c}$ — абсолютная константа; тогда получаем, что

$$p(\mathscr{E}_\Lambda) < N^\nu \sum_{l > \varkappa N} \varepsilon^{-|l|} e^{-\hat{c}\varepsilon^2 \beta l} \tilde{c}^l.$$

Отсюда легко вытекает оценка (16).

§ 3. Непрерывный спин: два основных состояния

Пусть по-прежнему $S \subset R^1$ — отрезок, симметричный относительно нуля, $\mu_0 = \lambda_0^{Z^\nu}$, $\lambda_0 = \frac{dx}{|S|}$ и взаимодействие U_Λ для любого конечного $\Lambda \subset Z^\nu$ и граничной конфигура-

ции y имеет вид (1.2). Предположим здесь, что $\Phi(x_1, x_2)$ в (1.2) — симметричная четная функция, имеющая ровно два минимума в точках (x_0, x_0) и $(-x_0, -x_0)$, $x_0 > 0$. Пусть, кроме того, $\Phi(x_0, x_0) = 0$ и в некоторой малой окрестности $\hat{U}_\varepsilon^+ = U_\varepsilon^+ \times U_\varepsilon^+$ точки (x_0, x_0), где $U_\varepsilon^+ = \{x: |x - x_0| < \varepsilon\}$, $\Phi(x_1 x_2)$ может быть представлена в виде

$$\Phi(x_1, x_2) =$$
$$= \alpha((x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + 2v(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)) + \Phi'(x_1, x_2),$$
$$\alpha > 0, \quad |v| < 1, \qquad (1)$$
$$|\Phi'(x_2, x_2)| < C(|x_1 - x_0|^3 + |x_2 - x_0|^3), \quad c > 0.$$

Ввиду четности Φ аналогичное представление верно в окрестности $\hat{U}_\varepsilon^-$ точки $(-x_0, -x_0)$. Мы предположим, что $\hat{U}_\varepsilon^+ \cap \hat{U}_\varepsilon^- = \varnothing$ и вне этих окрестностей $\Phi(x_1, x_2) > \delta > 0$.

Легко видеть, что конфигурации $y^\pm \in S^{Z^\nu}$

$$y^+ \equiv x_0, \quad y^- \equiv -x_0$$

являются основными состояниями для взаимодействия U_Λ.

Для любого $\Lambda \subset Z^\nu$ обозначим $\mu_{\Lambda,\pm}$ — гиббсовские перестройки для граничных конфигураций $y^\pm$ соответственно

$$\frac{d\mu_{\Lambda,\pm}}{d\mu_0} = (Z_{\Lambda,\pm})^{-1} \exp\{-\beta U_\Lambda(x/y^\pm)\}. \qquad (2)$$

Заметим, что пространство S^Λ и мера μ_0 инвариантны относительно отображения $G: x^\Lambda \mapsto -x^\Lambda$; поэтому

$$Z_{\Lambda,+} = Z_{\Lambda,-}, \quad \mu_{\Lambda,+}(A) = \mu_{\Lambda,-}(GA), \quad U_\Lambda(x^\Lambda/y^+) = U_\Lambda(-x^\Lambda/y^-). \qquad (3)$$

Теорема 1. *При достаточно больших $\beta > 0$ статистические суммы $Z_{\Lambda,\pm}$ допускают кластерное представление, а меры $\mu_{\Lambda,\pm}$ и $\mu_\pm = \lim_{\Lambda \nearrow Z^\nu} \mu_{\Lambda,\pm}$ — кластерное разложение. При этом меры μ_+ и μ_- различны.*

Доказательство. В силу симметрии (3) достаточно изучить какую-нибудь из мер (2), скажем $\mu_{\Lambda,+}$.

Пусть $x \in S^\Lambda$ — конфигурация в Λ, а $\hat{x}$ — конфигурация в $\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \partial\Lambda$, равная x на Λ и y^+ на $\partial\Lambda$.

Положим $\varepsilon = C\beta^{-1/2} \ln \beta$, где $C > 0$ подбирается ниже, и точку $t \in \Lambda$ назовем *плюс-регулярной* точкой конфигурации x, если $|x(t)-x_0|<\varepsilon$ и $|\widehat{x}(t')-x_0|<\varepsilon$ для всех ближайших соседей $t'\in\overline{\Lambda}$ точка t. Аналогично определяется *минус-регулярная* точка. Остальные точки назовем *границей* конфигурации x и обозначим $\gamma(x)$, а 1-связные компоненты $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ этой границы назовем *контурами*.

Для каждого контура Γ обозначим через $\theta_1(\Gamma), \ldots, \theta_p(\Gamma)$ 1-связные компоненты множества $\Lambda\setminus\Gamma$. Очевидно, что на каждом из множеств $\partial\Gamma\cap\theta_j(\Gamma)$ все значения конфигурации x принадлежат либо окрестности U_ε^+ точки x_0, либо все принадлежат окрестности U_ε^- точки $-x_0$. В соответствии с этим припишем каждой компоненте $\theta_j(\Gamma)$ значения $\sigma_j=\pm 1$. Набор значений $\sigma(\Gamma)=\{\sigma_j, j=1, \ldots, p\}$ назовем *разметкой* контура Γ, а пару (Γ, σ) — *размеченным* контуром. Очевидно, что разметки $\sigma(\Gamma_1)$ и $\sigma(\Gamma_2)$ двух контуров $\Gamma_1, \Gamma_2\subset\gamma(x)$ согласованы в том смысле, что если $\Gamma_1\subset\theta_i(\Gamma_2)$ и $\Gamma_2\subset\theta_j(\Gamma_1)$, то

$$\sigma_j(\Gamma_1)=\sigma_i(\Gamma_2). \tag{4}$$

Таким образом, каждой конфигурации x соответствует некоторый набор $\{(\Gamma_1, \sigma_1), \ldots, (\Gamma_s, \sigma_s)\}$ размеченных контуров с согласованными разметками.

Пусть $D_1, \ldots, D_l$ — 1-связные компоненты дополнения к границе конфигурации x, т. е. компоненты $\Lambda\setminus\gamma(x)$.

Мы скажем, что компонента D граничит с контуром $\Gamma\subset\gamma(x)$, если $\partial D\cap\Gamma\neq\varnothing$. Положим $\sigma(D)=\sigma_j(\Gamma)$, если $D\subseteq\theta_j(\Gamma)$ и заметим, что все значения конфигурации x на D принадлежат либо U_ε^+, либо U_ε^- в зависимости от значения $\sigma(D)$.

Статистическую сумму $Z_{\Lambda,+}$ можно представить в виде

$$Z_{\Lambda,+}=\sum_{\{(\Gamma_i,\sigma_i)\}}\int\prod_i \exp\left\{-U_{\Gamma_i}\left(x^{\Gamma_i}/y^+\right)\prod Z_D(x^\gamma)\,d\mu_0(x^\gamma),\right. \tag{5}$$

где суммирование происходит по всем 1-допустимым наборам размеченных контуров (с согласованными разметками), а интегрирование — по множеству конфигураций x^γ на $\gamma=\cup\,\Gamma_i$, согласованных с заданной разметкой; статистическая сумма

$$Z_D(x^\gamma)=\int\limits_{S^D}\exp\{-\beta U_D(x^D/x^\gamma\cup y^+)\,d\mu_0(x^D), \tag{6}$$
$$S^D=\{x^D: x(t)\in U_\varepsilon^{\sigma(D)}, t\in D\}$$

зависит лишь от значений конфигурации x^γ на множестве $\partial D\subset\gamma$.

Разбив взаимодействие U_D в (6) на квадратичную часть $U_D^{(\text{кв})}$ и новое взаимодействие U'_D, определяемое потенциалом Φ' в разложении (1), и сделав замену переменных $\xi(t)=(x(t)-x_0)\beta^{1/2}$, аналогичную замене (7.2) и (8.2), мы запишем интеграл (6) в виде

$$Z_D(\xi^{\partial D})=\beta^{-|D|/2}\left\langle\prod_{t\in D}\chi_\varepsilon(\xi(t))\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{-\beta U'_D\left(\frac{\xi^D}{\sqrt{\beta}}\Big|\frac{\xi^{\partial D}}{\sqrt{\beta}}\right)\right\}\right\rangle_{0,D,\xi^{\partial D}} Z_D^0(\xi^{\partial D}), \tag{7}$$

где $\langle\cdot\rangle_{0,D,\xi^{\partial D}}$ — среднее по условной гауссовской мере $\mu^0_{D,\xi^{\partial D}}$ в R^D с обратной матрицей ковариаций (10.2) и граничной конфигурацией $\xi^{\partial D}$; $Z_D^0(\xi^{\partial D})$ — нормирующий множитель этой гауссовой меры:

$$Z_D^0(\xi^{\partial D})=\int\limits_{R^D}\exp\{-U_D^{\text{кв}}(\xi^D/\xi^{\partial D})\}\,d\xi^D, \tag{7'}$$

где $U_D^{\text{кв}}$ — квадратичная часть взаимодействия U_D; χ_ε — характеристическая функция отрезка $[-\beta^{1/2}\varepsilon, \beta^{1/2}\varepsilon]$. При этом, в силу определения D

$$|\xi^{\partial D}(t)|<\varepsilon\beta^{1/2}, \quad t\in\partial D. \tag{7''}$$

Для среднего $\langle\cdot\rangle_{0,D,\xi^{\partial D}}$ в (7) мы выведем кластерное разложение, аналогичное разложению, полученному при доказательстве теоремы 3.8.IV (см. 22.8.IV).

Пусть $B_D=\{b_{t,t'}^D, t, t'\in D\}=A_D^{-1}$ — матрица ковариаций гауссова поля $\mu^0_{D,\xi^{\partial D}}$, причем, согласно (7.8.IV),

$$|b_{t,t'}^D|<Ce^{-m_0|t-t'|}, \quad t, t'\in D, \tag{8}$$

$C>0$, $m_0>0$ — константы. Выберем число $d>0$ так, что $Ce^{-m_0 d}<1/2$ и рассмотрим для каждой компоненты D ее внутреннюю d-приграничную полосу

$$\partial_i^d D=\{t\in D; \rho(t, Z^\nu\setminus D)\leqslant d\}.$$

Разобьем решетку Z^ν на кубы $\eta=\{\Delta\}$, как указано в

§ 8.IV, и представим взаимодействие в виде

$$U'_D = U'_{\partial_i^d D} + \sum_{\Delta,\Delta'} U'_{\Delta,\Delta'} + \sum_{\Delta} U'_{\Delta}, \tag{9}$$

где $U'_{\partial_i^d D}$ — взаимодействие конфигурации внутри d-приграничной полосы с самой собою и с конфигурацией, лежащей вне полосы, $U_{\Delta,\Delta'}$ —взаимодействие между конфигурациями в двух соседних кубах $\Delta, \Delta' \subset D \setminus \partial_i^d D$ и U_Δ взаимодействие внутри куба $\Delta \subset D \setminus \partial_i^d D$.

Далее, снова воспользовавшись формулой интерполяции (1.8.IV) и повторяя с некоторыми модификациями вывод формулы (22.8.IV), получим, что

$$Z_D(\xi^{\partial D}) = Z_D^0(\xi^{\partial D}) \sum \prod_i \bar{k}_{\widehat{B}_i}(\xi^{\partial D}) \prod_j k_{B_j}, \tag{10}$$

где суммирование происходит по наборам $\{B_1, \ldots, B_p\}$ связных множеств B_i, состоящих из внутренних кубов $\Delta \in \eta_{D \setminus \partial_i^d D}$ (т. е. таких, которые лежат вне приграничной полосы $\partial_i^d D$ и не граничат с кубами, пересекающими эту полосу; см. конец доказательства теоремы 3.8.IV) и по наборам $\{\widehat{B}_1, \ldots, \widehat{B}_s\}$ попарно непересекающихся множеств $\widehat{B}_j$ кубов таких, что:

(1) существует набор $\alpha = \{A_1, \ldots, A_l\}$ связных множеств кубов, каждое из которых содержит хотя бы один пограничный куб (т. е. куб, граничащий с кубом, пересекающим $\partial_i^d D$), и каждое $\widehat{B}_j$ является объединение некоторых из $A_i \in \alpha$;

(2) вместе с любым $A_i \in \alpha$ в $\widehat{B}_j$ входят все другие связные множества кубов $A_k \in \alpha$, примыкающие ко всякому контуру Г, к которому примыкает A_i;

(3) в $\widehat{B}_j$ нет меньшего подмножества кубов, обладающего свойствами (1) и (2).

Множества $\widehat{B}_j$ будем называть *приграничными*. Величины $\bar{k}_B$ определяются аналогично (21.8.IV); они не зависят от граничной конфигурации $\xi^{\partial D}$. Величины $\bar{k}_{\widehat{B}}(\xi^{\partial D})$ также вводятся аналогично (21.8.IV) с тем только дополнением, что к экспоненте $\exp\left\{-\beta\left(\sum_{\Delta,\Delta'} U'_{\Delta,\Delta} + \sum_{\Delta} U'_{\Delta}\right)\right\}$ добавляется множитель $\exp\{-\beta U'_{\text{гр}}(\widehat{B})\}$, где $U'_{\text{гр}}(\widehat{B})$ — часть взаимодействия $U'_{\partial_i^d D}$, связанная с теми контурами $\Gamma \subset \gamma$, с которыми граничит $\widehat{B}$.

Оценки для величин $\bar{k}_B$ получаются в точности те же, что были выведены в § 8.IV. При выводе оценок для $\bar{k}_{\widehat{B}}$ следует перейти к гауссову полю в $\widehat{B}$: $\hat{\xi}(t) = \xi(t) - \langle \xi(t) \rangle$ с нулевым средним. При этом в точках $t \in \widehat{B}$, отстоящих от границы ∂D на расстояние, большее d: $|\langle \xi(t) \rangle| < \varepsilon \beta^{1/2}/2$ (в силу (7) и выбора d) и таким образом, выполняется условие (71.8.IV) и оценка для $\bar{k}_{\widehat{B}}(\xi^{\partial D})$ оказывается по-прежнему такой же, как в § 8.IV. Итак, получаем, что

$$\prod_j Z_{D_j}\left(\xi^{\partial D_j}\right) = \prod Z^0_{D_j}\left(\xi^{\partial D_j}\right) \sum_{\substack{\{B_1,\ldots,B_s\} \\ \{\widehat{B}_1,\ldots,\widehat{B}_p\}}} \prod_i \bar{k}_{\widehat{B}_i} \prod_j \bar{k}_{B_j}. \tag{11}$$

Легко убедиться, что

$$Z_D^0(\xi^{\partial D}) = Z_D^0(0) \exp\left\{\sum_{t',t'' \in \partial D} C_{t,t'} \xi_t \xi_{t'}\right\}, \tag{12}$$

где матрица $\{C_{t,t'}\}$ имеет вид, аналогичный (68.8.IV), и $|C_{t,t'}| < Ke^{-m_0|t-t'|}$, K — константа.

Для получения кластерного представления $Z_D^0(0)$ мы используем снова лемму 1.8.IV и напишем

$$\ln Z_D^0(0) = \sum_{\Delta \subset D} \ln Z_\Delta^0(0) + \sum_{\widehat{\gamma}} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \bar{s}_{\widehat{\gamma}}} \ln Z^0_{\widehat{\gamma}, \bar{s}_{\widehat{\gamma}}}(0)\, d\bar{s}_{\widehat{\gamma}}, \tag{13}$$

где $\bar{s}_{\widehat{\gamma}}$ вводятся также, как в § 8.IV. Заметим, что сумма $\sum_{\widehat{\gamma}}$ берется только по связным наборам $\widehat{\gamma} \subset \eta_D$ кубов (так как для других (несвязных) наборов подынтегральный член равен нулю).

Подынтегральное выражение может быть разложено в сумму семиинвариантов относительно гауссовской меры $\mu_D^0(\bar{s}_{\widehat{\gamma}})$ (см. § 8.IV). Отсюда с помощью оценок § 8.IV получается представление для логарифма:

$$\ln Z_D^0(0) = CN(D) + \sum_{\widehat{\gamma}}^{\text{гр}} a(\widehat{\gamma}), \tag{14}$$

где $N(D)$ — число внутренних кубов в D, $\sum\limits_{\widehat{\gamma}}^{\text{гр}}$ берется по всем связным наборам кубов $\widehat{\gamma}$, содержащим приграничные кубы, и

$$C = \ln Z_\Delta^0(0) + \sum_{\widehat{\gamma}}^{(t)} \frac{1}{|\widehat{\gamma}|} \int \frac{\partial}{\partial \bar{s}_{\widehat{\gamma}}} \ln Z^0_{\widehat{\gamma}, \bar{s}_{\widehat{\gamma}}}(0) d\bar{s}_{\widehat{\gamma}}, \tag{15}$$

где сумма берется по всем связным наборам $\widehat{\gamma} \subset \eta$, содержащим (произвольную) заданную точку t; «невязка» $a(\widehat{\gamma})$ допускает очевидную оценку

$$|a(\widehat{\gamma})| \leqslant \left[B L^\nu e^{-\frac{1}{2} m_0 L} \right]^{|\widehat{\gamma}|}, \tag{16}$$

где L — сторона куба Δ, а B — абсолютная константа.

Выберем далее некоторую константу L' и назовем два контура Γ и Γ' соседними, если $\rho(\Gamma, \Gamma') < L'$. С помощью этого определения соседства определяется L'-связность множества контуров. Очевидно, что набор γ размеченных контуров любой конфигурации разбивается на L'-связные компоненты $g_1, \ldots, g_s$.

Подставляя (14) в (12) получаем, что

$$\prod_j Z^0_{D_j}(\xi^{\partial D}) = \widetilde{C}^{N(D)} \prod_{i} e^{V(\xi^{g_i})} \prod_{i,k} e^{V(\xi^{g_i}, \xi^{g_k})} \prod_{\{g\} \subseteq \{g_1, \ldots, g_s\}} e^{V(\{g\})}, \tag{17}$$

где произведение $\prod\limits_{\{g\}}$ берется по всевозможным конечным подмножествам $\{g\}$ набора компонент $\{g_1, \ldots, g_s\}$, причем $|\{g\}| > 2$.

Далее

$$V(\xi^g) = \sum_{t, t' \in \widetilde{g}} C_{t,t'} \xi_t \xi_{t'} + \sum_{\widehat{\gamma}}^{(g)} a(\widehat{\gamma}), \tag{18}$$

где сумма $\sum\limits_{\widehat{\gamma}}^{(g)}$ берется по всем наборам кубов $\widehat{\gamma}$, которые содержат кубы, граничащие лишь с контурами из g,

$$V(\xi^g, \xi^{g'}) = \sum_{t \in \widetilde{g}, t' \in \widetilde{g}'} C_{t,t'} \xi_t \xi_{t'} + \sum_{\widehat{\gamma}}^{(g, g')} a(\widehat{\gamma}), \tag{19}$$

где $\sum\limits_{\widehat{\gamma}}^{(g,g')}$ означает сумму по связным наборам $\widehat{\gamma}$, содержащим кубы, граничащие с контурами из g, так и кубы,

граничащие с контурами из g'. Наконец,

$$V(\{g\}) = \sum_{\widehat{\gamma}}^{\{g\}} a(\widehat{\gamma}), \tag{20}$$

где сумма берется по связным наборам $\widehat{\gamma}$, в которых для каждого g из совокупности $\{g\}$ имеется хотя бы один куб, граничащий с каким-нибудь контуром из g.

Введем величины

$$k(\xi^g, \xi^{g'}) = e^{V(\xi^g, \xi^{g'})} - 1, \quad k(\{g\}) = e^{V(\{g\})} - 1. \tag{21}$$

Для них, как нетрудно убедиться, выполнены следующие оценки:

$$\begin{aligned} |k(\xi^g, \xi^{g'})| &< k(\ln\beta)^2 (C\beta^\alpha)^{\sum\limits_{\Gamma \in g \cup g'} |\Gamma|} (\lambda')^{\rho(g, \widetilde{g}')}, \\ |k(\{g\})| &< k \cdot \overline{C}^{\sum\limits_{\Gamma \in \cup g} |\Gamma|} (\lambda')^{d\{g\}}, \end{aligned} \tag{22}$$

где константа $\alpha = \alpha(L') > 0$ может быть сделана достаточно малой за счет выбора L', а $\lambda' = BL^\nu e^{-\frac{m_0}{2} L}$ также мало при достаточно большом L; через $d_{\{g\}}$ обозначена длина минимального дерева, построенного на элементах набора $\{g\}$, а длина ребер измеряется расстоянием $\rho(\tilde{g}, \tilde{g}')$, $g, g' \in \{g\}$. При этом $\rho(\tilde{g}, \tilde{g}') \geqslant L'$. Далее, применяя обычное разложение экспоненты, получим, что

$$\prod_{i,k} e^{V(\xi^{g_i}, \xi^{g_k})} \prod_{(\{g\})} e^{V(\{g\})} =$$

$$= 1 + \sum_{\substack{\{g_1, g_1'\}, \ldots, \{g_s, g_s'\}, \\ \{g_1\}, \ldots, \{g_p\}}} \prod_{j=1}^{s} k\left(\xi^{g_j}, \xi^{g'_{j'}}\right) \prod_{m=1}^{p} k(\{g\}_m) =$$

$$= \sum_{\{\eta_1, \ldots, \eta_l\}} \overline{\varkappa}_{\eta_1} \ldots \overline{\varkappa}_{\eta_l},$$

где η_k — связный набор, состоящий из групп компонент $\eta_k = \left\{\{g\}_1, \ldots, \{g\}_{m'_k}\right\}$ контуров, а $\overline{\varkappa}_{\eta_k}$ — произведение соответствующих величин $k(\{g\})$ или $k\left(\xi^{g_i}, \xi^{g'_i}\right)$ (при этом некоторые величины $\overline{\varkappa}_\eta$ зависят от конфигурации ξ^γ).

Таким образом

$$\prod_j Z^0_{D_j}(\xi^{\partial D}) = \widetilde{C}^{N(D)}\left(\prod e^{V(\xi^g)}\right) \sum_{\{\eta_1, \ldots, \eta_l\}} \overline{\varkappa}_{\eta_1} \ldots \overline{\varkappa}_{\eta_l}. \tag{23}$$

Подставим теперь при заданной размеченной границе $\overline{\gamma} = \{(\Gamma_1, \sigma_1), \ldots, (\Gamma_s, \sigma_s)\}$ разложение (23) в (11) и фиксируем какое-нибудь слагаемое, полученное после раскрытия скобок в правой части (11). Это слагаемое помечено наборами $\{\eta_1, \ldots, \eta_l\}$, $\{\widehat{B}_1, \ldots, \widehat{B}_p\}$ и $\{B_1, \ldots, B_s\}$. Не меняя набора $\{B_1, \ldots, B_s\}$, объединим элементы наборов $\{\eta_1, \ldots, \eta_l\}$ и $\{\widehat{B}_1, \ldots, \widehat{B}_p\}$ в связные компоненты $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$, где каждое ζ_i вместе с любым связным набором $\eta = \{\{g\}_i\}$ содержит все те приграничные наборы кубов $\widehat{B}_i$, в которых встречается хотя бы один куб, граничащий с каким-нибудь из контуров в η.

После этого, усредняя в (5) по граничным конфигурациям x^γ, получим окончательное кластерное представление статистической суммы:

$$Z_{\Lambda,+} = \beta^{-\frac{|\Lambda|}{2}} \widetilde{C}^{|\Lambda|} \sum_{\substack{\{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}, \\ \{B_1, \ldots, B_n\}}} k_{\zeta_1} \cdot \ldots \cdot k_{\zeta_m} \cdot \overline{k}_{B_1} \cdot \ldots \cdot \overline{k}_{B_n}, \tag{24}$$

где множества $\widetilde{\zeta}_1, \ldots, \widetilde{\zeta}_m, \widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_n$ попарно не пересекаются и различные B_i не имеют соседних кубов и не имеют также кубов, соседних с теми, которые пересекаются с $\widetilde{\zeta}_j$.

Отметим, что это представление является более общим, чем то, что введено в замечании 1.1.III: взаимное допустимое удаление между кластерами зависит от их марки. Величины $\overline{k}_B$ в (24) были введены ранее, а k_ζ равны

$$k_\zeta = \int \prod_{\eta \in \zeta} \overline{\varkappa}_\eta \prod_g \exp\left\{-V(\xi^g) - \beta U_{\widetilde{g}}\left(\frac{\xi^g}{\sqrt{\beta}}\right)\right\} \times \\ \times \prod_{\widehat{B} \in \zeta} k_{\widehat{B}}(\xi^\gamma)\, d\lambda_0^{\gamma \cap \widetilde{\zeta}}\left(\xi^{\gamma \cap \widetilde{\zeta}}\right), \tag{25}$$

где интегрирование ведется по множеству тех конфигураций на $\gamma \cap \widetilde{\zeta}$, которые допустимы тем условием, что $\gamma \cap \widetilde{\zeta}$ — часть границы с заданной разметкой; произведение $\prod\limits_g$ берется по всем g, входящим в элементы наборов $\eta \in \zeta$.

Из (25) и предыдущих оценок получается оценка для k_ζ:

$$|k_\zeta| < (C_\beta)^{-|\gamma \cap \widetilde{\zeta}| h'} \lambda^{\sum_{\widehat{B} \in \zeta} |\widehat{B}|} \lambda'^{\sum_{\eta \in \zeta} d\eta}, \tag{26}$$

где $0 < h' < 1$, $\lambda > 0$, $\lambda' > 0$ — достаточно малы. Заметим, что при выводе (26) используется то обстоятельство, что матрица $\widehat{a}_{t_1 t_2} = a_{t_1 t_2} - C_{t_1 t_2}$ является положительно определенной и, следовательно, для любого g

$$\exp\left\{-\beta U_{\widetilde{g}}\left(\frac{\xi^g}{\sqrt{\beta}}\right) + \sum_{t, t' \in \widetilde{g}} C_{t,t'} \xi(t)\, \xi(t')\right\} \leqslant \\ \leqslant \exp\left\{-h \ln \beta \sum_{\Gamma \in g} |\Gamma|\right\} = \beta^{-h \sum_{\Gamma \in g} |\Gamma|},$$

где $h > 0$ — некоторая константа, зависящая от выбора константы C в определении ε, и ее можно сделать достаточно большой. Последовательно выбирая L, L' и β достаточно большими, мы можем добиться того, чтобы выполнялась кластерная оценка и условие кластерности.

В случае локальной функции F_A вида $F_A = \prod\limits_{t \in A} f_{(t)}$ мы можем получить кластерное разложение для среднего $\langle F_A \rangle$, повторяя предыдущие построения и соображения, приводящие к формуле (21.1).

Слабая локальная компактность семейства мер $\{\mu_{\Lambda,+}\}$ следует из того, что пространство S^{Z^ν} — компакт (см. [16]). Теорема доказана.

ГЛАВА VI

УБЫВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ

§ 1. Иерархия свойств убывания корреляций

Рассмотрим трансляционно-инвариантное случайное поле $\{x(t),\ t\in Z^\nu\}$ на решетке Z^ν со значениями в пространстве S, задаваемое распределением вероятностей μ в пространстве $\Omega = S^{Z^\nu}$. Трансляционная инвариантность поля означает, что

$$\mu(\tau_t A) = \mu(A)$$

для любого множества $A\in\mathfrak{B}(\Omega)$ и любого $t\in Z^\nu$. Здесь $(\tau_t x)(s) = x(s-t)$ сдвиг конфигурации $x\in S^{Z^\nu}$ на вектор $t\in Z^\nu$. Для любой ограниченной локальной функции F_A через $F_{A+t} = \tau_t^* F_A$ мы обозначаем сдвиг этой функции:

$$(\tau_t^* F_A)(x) = F_A(\tau_t^{-1} x).$$

Мы укажем здесь некоторые свойства убывания зависимости между значениями поля $\{x(t),\ t\in Z^\nu\}$ в точках, отстоящих далеко друг от друга, выраженные в терминах убывания семиинвариантов (или средних). Эти свойства перечислены в порядке их усиления.

Первые три свойства общеизвестны и приводятся здесь для полноты. Для гиббсовских полей более существенны последние четыре свойства убывания зависимости.

I. Эргодичность. Пусть для любых ограниченных локальных функций F_{A_1} и F_{A_2} выполнено

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{t\in\Lambda}\langle F_{A_1}F_{A_2+t}\rangle_\mu \to \langle F_{A_1}\rangle_\mu\langle F_{A_2}\rangle_\mu \tag{1}$$

при $\Lambda\nearrow Z^\nu$ и пробегающим расширяющуюся последовательность кубов. Свойство (1) называется свойством *эргодичности* поля $\{x(t),\ t\in Z^\nu\}$. Оно, в силу равенства $\langle F_{A+t}\rangle = \langle F_A\rangle$, может быть переписано в виде

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{t\in\Lambda}\langle F_{A_1},\ F_{A_2+t}\rangle_\mu \to 0,\quad \Lambda\nearrow Z^\nu. \tag{2}$$

Заметим, что (1) эквивалентно обычному определению

эргодичности: любое инвариантное относительно трансляций множество $G\in\mathfrak{B}(\Omega)$, $\tau_t G = G$ при всех $t\in Z^\nu$, имеет меру нуль или единицу. Доказательство этой эквивалентности можно найти, например, в [32].

II. Перемешивание. Говорят, что поле обладает свойством *перемешивания*, если для любых ограниченных локальных функций F_{A_1} и F_{A_2}

$$\langle F_{A_1}F_{A_2+t}\rangle_\mu \to \langle F_{A_1}\rangle_\mu\langle F_{A_2}\rangle_\mu,\quad |t|\to\infty. \tag{3}$$

Как и в предыдущем случае, соотношение (3) можно переписать в виде

$$\langle F_{A_1},\ F_{A_2+t}\rangle_\mu \to 0,\quad |t|\to\infty. \tag{4}$$

III. Кратное перемешивание. Пусть для любого n и любого набора локальных ограниченных функций $F_{A_1},\ldots,F_{A_n}$

$$\langle F_{A_1+t_1}F_{A_2+t_2}\ldots F_{A_n+t_n}\rangle_\mu \to \langle F_{A_1}\rangle_\mu\langle F_{A_2}\rangle_\mu\ldots\langle F_{A_n}\rangle_\mu \tag{5}$$

при условии, что $\min\limits_{1<i<j\leqslant n}|t_i - t_j|\to\infty$.

Используя свойства D) и E) семиинвариантов (см. § 1.II), легко показать, что (5) эквивалентно соотношению

$$\langle F_{A_1+t_1},\ F_{A_2+t_2},\ \ldots,\ F_{A_n+t_n}\rangle_\mu \to 0 \tag{6}$$

при $\min\limits_{i,j}|t_i - t_j|\to\infty$ для любого фиксированного набора функций $F_{A_1},\ldots,F_{A_n}$.

Следующие свойства связаны с более явными оценками убывания семиинвариантов и, вообще говоря, не предполагают трансляционной инвариантности поля $\{x(t),\ t\in Z^\nu\}$.

IV. Сильное убывание корреляций. Это означает, что для всякого $n\geqslant 2$, любых ограниченных функций $f_1,\ldots,f_n$, определенных на пространстве S, любых целых $k_1\geqslant 1,\ldots,k_n\geqslant 1$ и любого $t\in Z^\nu$

$$\sum_{(t_2,\ldots,t_n)}\left|\left\langle f_1^{k_1}(x(t_1)),\ \ldots,\ f_n^{k_n}(x(t_n))\right\rangle_\mu\right| < C \tag{7}$$

при $t_1 = t$. Здесь суммирование происходит по всем упорядоченным наборам $(t_2,\ldots,t_n)$ попарно различных точек $t_i \in Z^\nu$, а константа $C = C(k_1, \ldots, k_n, f_1, \ldots, f_n)$ не зависит от t.

V. Сильная кластерная оценка. Типичная оценка семиинвариантов $\left\langle f_1^{,k_1}, \ldots, f_n^{,k_n}\right\rangle_\mu$, из которой следует (7), имеет вид

$$\left|\left\langle f_1^{,k_1}(x(t_1)), \ldots, f^{,k_n}(x(t_n))\right\rangle_\mu\right| < C(f_1, \ldots, f_n; k_1, \ldots, k_n) \sum_{\mathcal{T}} \prod_{(i,j)\in\mathcal{T}} \varphi(t_i, t_j), \quad (8)$$

где сумма берется по всем деревьям $\mathcal{T}$ с множеством вершин $(1, \ldots, n)$, а произведение $\prod\limits_{(i,j)\in\mathcal{T}}$ по всем ребрам дерева $\mathcal{T}$, функция $\varphi(t_1, t_2) > 0$ симметрична и удовлетворяет условию

$$\sup_{t_1\in Z^\nu} \sum_{t_2\in Z^\nu\setminus\{t_1\}} \varphi(t_1, t_2) < \infty. \quad (9)$$

Оценки (7) и (8), а также следующая оценка (11) называется *наилучшими* (максимальными), если константы $C(f_1, \ldots, f_n; k_1, \ldots, k_n)$ в этих оценках имеют вид: в случае (7)

$$C(f_1, \ldots, f_n; k_1, \ldots, k_n) = (n-1)!\, C_0^{k_1+k_2+\ldots+k_n} \prod_{i=1}^n k_i! \prod_{i=1}^n \left(\sup_{x\in S} |f_i(x)|\right)^{k_i} \quad (10)$$

и

$$C(f_1, \ldots, f_n; k_1, \ldots, k_n) = C_0^{k_1+\ldots+k_n} \prod_{i=1}^n k_i! \prod_{i=1}^n \left(\sup_{x\in S} |f_i(x)|\right)^{k_i} \quad (10')$$

в случае (8) и (11), где $C_0 > 0$ некоторая константа.

VI. Сильная экспоненциальная оценка семиинвариантов. Пусть существует связное семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств Z^ν, удовлетворяющее условиям 1) и 2) § 4.II и для любого набора ограниченных функций $f_1, \ldots, f_n$ на S, любого набора $k_1 \geqslant 1, \ldots, k_n \geqslant 1$ и набора $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ попарно различных точек выполнена оценка

$$\left|\left\langle f_1^{,k_1}(x(t_1)), \ldots, f_n^{,k_n}(x(t_n))\right\rangle_\mu\right| < C(f_1, \ldots, f_n; k_1, \ldots, k_n)\, \lambda^{\hat{d}_T(\mathfrak{A})}, \quad (11)$$

где $0 < \lambda < 1$ и $C(f_1, \ldots, f_n; k_1, \ldots, k_n)$ — некоторая константа, не зависящая от T, а $\hat{d}_T(\mathfrak{A})$ — величина, определенная формулой (1.1.4.II). Заметим, что в случае, когда выполнены условия леммы 7.4.II, имеем

$$c\hat{d}_T \leqslant \hat{d}_T(\mathfrak{A}) \leqslant c'\hat{d}_T, \quad (12)$$

где $c \leqslant c'$ — константы, а $\hat{d}_T$ минимальная длина дерева $\mathcal{T}$, множество вершин которого есть T; длина ребер $\mathcal{T}$ измеряется в метрике (14'.4.II).

VII. Равномерно-сильная экспоненциальная оценка семиинвариантов. Пусть снова $\mathfrak{A}$ — связное семейство подмножеств Z^ν, такое как в предыдущем пункте, и пусть для некоторого семейства G ограниченных локальных функций F_A выполнена оценка

$$\left|\left\langle F_{A_1}^{,k_1}, \ldots; F_{A_n}^{,k_n}\right\rangle_\mu\right| < \prod_{i=1}^n k_i! \prod_{i=1}^n c_0^{k_i+\hat{d}_{A_i}(\mathfrak{A})}\, \lambda^{d(\mathfrak{A},\{A_1,\ldots,A_n\})} \prod_{i=1}^n \left(\sup|F_{A_i}|\right)^{k_i}. \quad (13)$$

Здесь $F_{A_1}, \ldots, F_{A_n}$ — произвольный набор попарно различных функций из G, $k_1 \geqslant 1, \ldots, k_n \geqslant 1$ — произвольная последовательность целых чисел, c_0 — константа, $0 < \lambda < 1$, а величина $d(\mathfrak{A}, \{A_1, \ldots, A_n\})$ определена формулой (12.4.II). В случае, когда выполнены условия леммы 7.4.II, имеем

$$c'\hat{d}_{\{A_1,\ldots,A_n\}} \leqslant d(\mathfrak{A}; \{A_1, \ldots, A_n\}) \leqslant c\hat{d}_{\{A_1,\ldots,A_n\}},$$

где $c' \leqslant c$ — константы, а $d_{\{A_1,\ldots,A_n\}}$ — минимальная длина дерева $\mathcal{T}$, построенного на множестве вершин $(1, \ldots, n)$, причем длина ребра (i, j) равна $\rho(A_i, A_j)$, где ρ — метрика (14'.4.II) на Z^ν.

Нетрудно показать, что каждое из перечисленных свойств влечет за собой все предыдущие свойства. При этом первое свойство (эргодичность) действительно слабее второго (перемешивание), второе слабее третьего (n-кратное перемешивание, $n > 2$) и третье слабее четвертого (сильное убывание корреляций). Относительно соотношений между остальными свойствами остается неизвестным, образуют ли они строго усиливающуюся последовательность; можно лишь предположить, что последнее свойство фактически сильнее всех остальных. Примером поля, для которого выполнена оценка (7), но не верна наилучшая оценка (10), является поле, задающее чистую фазу в ферромагнитной модели Изинга при $h=0$ и малых значениях температуры $T=\beta^{-1}$ (см. ниже, § 5).

Замечание 1. Во всех предыдущих формулировках мы предполагали для простоты, что функции F_A (или f_i) ограничены. Введенные нами оценки семиинвариантов сохраняют смысл и для неограниченных величин F_A (или f_i), обладающих достаточно большими моментами: $F_A\in L_p(\Omega,\mu)$ при некотором $p>1$. При этом множители $\prod_{i=1}^{n}(\sup|F_{A_i}|)^{k_i}$ или $\left(\prod_{i=1}^{n}(\sup|f_i|)^{k_i}\right)$ в правых частях (13) (или (10) и (10')) заменяются какими-нибудь величинами, зависящими от моментов функций F_{A_i} (или f_i), например, величиной

$$\max\prod_{i=1}^{s}\left\langle\left|F_{A_1}^{p_1^{(i)}}\right|^q\ldots\left|F_{A_n}^{p_n^{(i)}}\right|^q\right\rangle^{1/q},\tag{14}$$

где $q\geqslant 1$ и максимум берется по всем разбиениям набора целых чисел $(k_1,\ldots,k_n)$ в сумму наборов

$$(k_1,\ldots,k_n)=(p_1^{(1)},\ldots,p_n^{(1)})+\ldots+(p_1^{(s)},\ldots,p_n^{(s)}),$$

где $p_j^i\geqslant 0$ — целые числа и $s=1,2,\ldots$ (Аналогичная оценка и в случае (10) и (10').)

Замечание 2. Во всех определениях этого параграфа вместо решетки Z^ν можно мыслить произвольное счетное множество T с метрикой $\rho(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющей условию (14.4.II): все шары любого фиксированного радиуса имеют ограниченную мощность. При этом в случае определений I, II и III следует предположить, что на T транзитивно действует некоторая группа преобразований G, сохраняющая метрику и такая, что стационарная подгруппа любой точки $t\in T$ конечна, а мера μ — G-инвариантна.

§ 2. Аналитический метод оценки семиинвариантов ограниченных квазилокальных функционалов

Рассмотрим гиббсовское поле на Z^ν, построенное в § 1 или 2.IV, как предельная перестройка μ независимого поля с распределением μ_0 с помощью взаимодействия $U_\Lambda=\beta\sum\Phi_A$, где β — мало, а $\{\Phi_A\}$ — ограниченный снизу потенциал, удовлетворяющий условиям (2.1.IV) и (2'.1.IV), а также, быть может, условиям (1.2.IV) и (2.2.IV).

Пусть далее G — некоторое семейство ограниченных локальных функций F_A, удовлетворяющее условию

$$\sum_{\substack{F_A\in G:\,t\in A,\\ |A|=n}}\sup_x|F_A(x)|<B\lambda^n\tag{1}$$

для любого $t\in Z^\nu$ и $n\geqslant 1$. Здесь $B>0$ — константа, не зависящая от t и n, а параметр λ, $0<\lambda<1$, тот же самый, что и в оценке (2.1.IV) потенциала Φ_A (подчеркнем, что если семейство G содержит несколько (или даже бесконечно много) величин F_A, соответствующих одному и тому же $A\subset Z^\nu$, то все они входят в левую часть суммы (1)).

Лемма 1. *Пусть мера μ на $\Omega=S^{Z^\nu}$ определена в § 1.IV (или § 2.IV), с помощью взаимодействия $U_\Lambda=\beta\sum_{A\subseteq\Lambda}\Phi_A$, где β — достаточно мало, а семейство G локальных ограниченных величин удовлетворяет условию (1). Тогда для любого конечного набора $\{F_{A_i},i=1,\ldots,s\}\subseteq G$ попарно различных величин $F_{A_i}\in G$ и любой последовательности $k_1\geqslant 1,\ldots,k_s\geqslant 1$ целых чисел верна оценка*

$$\left|\left\langle F_{A_1}^{k_1},\ldots,F_{A_s}^{k_s}\right\rangle_\mu\right|<KC_0^{k_1+\ldots+k_s}k_1!\ldots k_s!,\tag{2}$$

где $K>0$ и $C_0>0$ — некоторые константы (не зависящие от набора $\{F_{A_i}\}$ и чисел $k_1,\ldots,k_s$).

Доказательство. Рассмотрим для любого конечного $\Lambda\subset Z^\nu$ характеристический функционал семейства $\{F_{A_i},i=1,\ldots,s\}$, вычисленный по мере μ_Λ,

$$\Psi_\Lambda(\{B_{A_i}\})=\left\langle\exp\left\{\sum_{i=1}^{s}\beta_{A_i}F_{A_i}\right\}\right\rangle_\Lambda=$$

$$=\frac{1}{Z_\Lambda}\left\langle\exp\left\{-\beta\sum_{A\subset\Lambda}\Phi_A+\sum_{i=1}^{s}\beta_{A_i}F_{A_i}\right\}\right\rangle_{\mu_0}=\frac{\tilde Z_\Lambda}{Z_\Lambda},\tag{3}$$

где

$$\tilde Z_\Lambda=\left\langle\exp\left\{-\beta\sum_{A\subset\Lambda}\Phi_A+\sum_{i=1}^{s}\beta_{A_i}F_{A_i}\right\}\right\rangle_{\mu_0}.$$

Введем новый потенциал

$$\widetilde{\Phi}_A = \Phi_A - \beta^{-1} \sum_{i:\,A_i=A} \beta_{A_i} F_{A_i}, \tag{4}$$

где сумма берется по тем i, для которых $A_i = A$. Тогда при условии, что

$$\max_i |\beta_{A_i}| < \delta, \tag{5}$$

где δ — фиксировано и мало, потенциал $\{\beta\widetilde{\Phi}_{A_i}\}$ при достаточно малом β удовлетворяет всем условиям (2.1.IV), (2'.1.IV) (или же (1.2.IV), (2'.2.IV)) и для статистических сумм $\widetilde{Z}_\Lambda$ и Z_Λ справедливо кластерное разложение с величинами k_B, удовлетворяющими условию кластерности. Отсюда с помощью теоремы 4.4.III получаем, что функция $\ln \Psi_\Lambda = \ln \widetilde{Z}_\Lambda - \ln Z_\Lambda$ является аналитической функцией комплексных параметров $\{\beta_{A_i}\}$, изменяющихся в области (5).

Кроме того, при любом A_i

$$\frac{\partial \ln \Psi_\Lambda}{\partial \beta_{A_i}} = \langle F_{A_i} \rangle_{\widetilde{\mu}_\Lambda}, \tag{6}$$

где $\widetilde{\mu}_\Lambda$ — гиббсовская перестройка меры μ_0 с помощью взаимодействия $\widetilde{U}_\Lambda = \beta \sum_{A \subseteq \Lambda} \widetilde{\Phi}_A$. Из кластерного разложения (6.1.IV) для средних $\langle F_{A_i} \rangle_{\widetilde{\mu}_\Lambda}$ и оценки (1) находим, что

$$\sup_{A_i,\ |\beta_{A_i}|<\delta} \left| \frac{\partial \ln \Psi_\Lambda}{\partial \beta_{A_i}} \right| < K, \tag{7}$$

где K — абсолютная константа, не зависящая от набора $\{F_{A_1}, \ldots, F_{A_s}\}$ и $\Lambda \subset Z^\nu$. Отсюда с помощью неравенства Коши (см. § 1.II.(H)) находим, что семиинвариант

$$\left\langle F_{A_1}^{,k_1}, \ldots, F_{A_s}^{,k_s} \right\rangle_{\mu_\Lambda} = \left. \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_s} \ln \Psi_\Lambda}{\partial^{k_1}\beta_{A_1} \ldots \partial^{k_s}\beta_{A_s}} \right|_{\beta_{A_1}=\ldots=\beta_{A_s}=0}$$

удовлетворяет оценке (2) при всех $\Lambda \subset Z^\nu$.

После перехода к пределу $\Lambda \nearrow Z^\nu$ получаем окончательное утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть потенциал $\{\Phi_A\}$, определяющий меру μ, ограничен (условие 2.1.IV), удовлетворяет условиям предыдущей леммы и β — достаточно мало. Пусть G — семейство ограниченных локальных величин такое же, как и в предыдущей лемме. Тогда выполнена оценка*

$$\left| \left\langle F_{A_1}^{,k_1}, \ldots, F_{A_s}^{,k_s} \right\rangle_\mu \right| < K (\overline{C}\beta)^{d(\mathfrak{A},\{A_1,\ldots,A_s\})} C_0^{k_1+\ldots+k_s} \prod_{i=1}^{s} k_i!, \tag{8}$$

где $k_1 \geqslant 1, \ldots, k_s \geqslant 1$, константы K и C_0 — те же, что и в оценке (2), $\overline{C}$ — абсолютная константа, $\mathfrak{A}$ — совокупность носителей потенциала $\{\Phi_A\}$, а величина $d(\mathfrak{A}; \{A_1, \ldots, A_s\})$ определена формулой (12.4.II).

Доказательство. Снова повторяя рассуждения предыдущего доказательства, мы получим, что при $|\beta| < \beta_0$ семиинвариант

$$\varphi(\beta) \equiv \left\langle F_{A_1}^{,k_1}, \ldots, F_{A_s}^{,k_s} \right\rangle_\mu$$

является аналитической функцией β и удовлетворяет оценке (2)

$$|\varphi(\beta)| < K C_0^{k_1+\ldots+k_s} \prod k_i!. \tag{9}$$

Тогда для коэффициентов степенного ряда $\varphi(\beta) = \sum_n b_n \beta^n$ получаем с помощью неравенств Коши оценку

$$|b_n| < \bar{c}^n K C_0^{k_1+\ldots+k_s} \prod k_i!, \tag{10}$$

где $\bar{c} = \beta_0^{-1}$. С другой стороны из формулы (21.1.II) (свойство К) находим, что

$$b_n = \frac{1}{n!} \left\langle F_{A_1}^{,k_1}, \ldots, F_{A_s}^{,k_s}, \left(\sum_{\widetilde{A} \subseteq \Lambda} \Phi_{\widetilde{A}} \right)^{,n} \right\rangle_{\mu_0} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_n): \\ \widetilde{A}_i \subseteq \Lambda,\, i=1,\ldots,n}} \left\langle F_{A_1}^{,k_1}, \ldots, F_{A_s}^{,k_s}, \Phi_{\widetilde{A}_1}, \ldots, \Phi_{\widetilde{A}_n} \right\rangle_{\mu_0}.$$

Поскольку при несвязном наборе $(A_1, \ldots, A_s, \widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_n)$ семиинвариант $\left\langle F_{A_1}^{,k_1}, \ldots, F_{A_s}^{,k_s}, \Phi_{\widetilde{A}_1}, \ldots, \Phi_{\widetilde{A}_n} \right\rangle_{\mu_0} = 0$ (свойство С, § 1.II), $b_n = 0$ при $n < d(\mathfrak{A}; \{A_1, \ldots, A_s\})$. Отсюда и из оценки (10) получаем окончательно, что при $|\beta| < \beta_0$

$$|\varphi(\beta)| < KC_0^{k_1+\ldots+k_s} \prod k_i! \sum_{n \geqslant d(\mathfrak{A};\{A_1,\ldots,A_s\})} (\bar{C}\beta)^n <$$

$$< \bar{K}C_0^{k_1+\ldots+k_s} \prod k_i! \, (\bar{C}\beta)^{d(\mathfrak{A},\{A_1,\ldots,A_s\})}.$$

Лемма доказана.

Предположим теперь, что потенциал $\{\Phi_A\}$ ограничен и финитен: $\Phi_A \equiv 0$ при $\operatorname{diam} A > d$, и совокупность $\mathfrak{A}$ его носителей удовлетворяет условию 2′) леммы 7.4.II (т. е. число $\hat{d}_{\{t_1,t_2\}}(\mathfrak{A})$ ограничено для всех пар соседних $t_1, t_2 \in Z^\nu$). Пусть, далее, задано семейство $G = \{F_A^{(t)}, t \in Z^\nu, |A| < \infty\}$ ограниченных попарно различных локальных величин ($F_A^{(t)}$ измерима относительно σ-алгебры Σ_A), удовлетворяющих условию

$$\sup_x |F_A^{(t)}(x)| < B\bar{\lambda}^{\hat{d}_{A\cup\{t\}}(\mathfrak{A})}, \tag{11}$$

где $B > 0$ — константа, $\bar{\lambda}$, $0 < \bar{\lambda} < \bar{\lambda}_0$,— достаточно мало, а $\hat{d}_D(\mathfrak{A})$, $D \subset Z^\nu$ определено формулой (11.4.II). Как вытекает из (11) и леммы 5.4.II, семейство G удовлетворяет условию (1) с $\lambda = C\bar{\lambda}$, $C = C(\mathfrak{A})$ — абсолютная константа.

Рассмотрим систему $\{W_t, t \in Z^\nu\}$ квазилокальных величин

$$W_t = \sum_{A \subset Z^\nu} F_A^{(t)}, \quad t \in Z^\nu. \tag{12}$$

Снова в силу оценки (11) и оценки леммы 5.4.II ряд (12) абсолютно сходится и при любом $t \in Z^\nu$

$$\sup_x |W_t(x)| < \bar{K},$$

где $\bar{K}$ — константа.

Теорема 3. *Пусть μ — мера, получаемая с помощью потенциала $\{\Phi_A\}$ при достаточно малом β, и система величин $\{W_t, t \in Z^\nu\}$ определена формулой (12). Тогда при любом наборе $(k_1 \geqslant 1, \ldots, k_s \geqslant 1)$ и любом $T = \{t_1, \ldots, t_s\}$ семиинвариант $\langle W_{t_1}^{,k_1}, \ldots, W_{t_s}^{,k_s} \rangle_\mu$ удовлетворяет оценке*

$$\left| \langle W_{t_1}^{,k_1}, \ldots, W_{t_s}^{,k_s} \rangle_\mu \right| < \hat{K}\tilde{\lambda}^{\hat{d}_T(\mathfrak{A})} C_0^{k_1+\ldots+k_s} \prod_{i=1}^{s} k_i!, \tag{13}$$

где $\hat{K} > 0$ и $C_0 > 0$ — константы, а $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\bar{\lambda}, \beta) < 1$.

Доказательство. Положим

$$\tilde{F}_A^{(t)} = (\bar{\lambda}^{-1/2})^{\hat{d}_{A\cup\{t\}}(\mathfrak{A})} F_A^{(t)}. \tag{14}$$

Снова в силу оценки (11) и оценки леммы 5.4.II система величин $\{\tilde{F}_A^{(t)}, t \in Z^\nu, A \subset Z^\nu\}$ удовлетворяет условию (1) с $\lambda = C\bar{\lambda}^{1/2}$. Далее, в силу финитности потенциала $\{\Phi_A\}$, при достаточно малом β выполнены условия (2.1.IV) и (2′.1.IV) с тем же λ. Таким образом, для любого набора различных точек $t_1, \ldots, t_s$, набора $p_1, \ldots, p_s$ и s наборов из попарно различных множеств $\{A_{1j}, j = 1, \ldots, p_1\}, \ldots, \{A_{s,j}, j = 1, \ldots, p\}$, а также наборов целых чисел $\{k_{ij}\}$ $j = 1, \ldots, p_i$, $i = 1, \ldots, s$, в силу леммы 2 получаем, что

$$\left| \left\langle \tilde{F}_{A_{11}}^{(t_1),k_{11}}, \ldots, \tilde{F}_{A_{1p_1}}^{(t_1),k_{1p_1}}, \tilde{F}_{A_{21}}^{(t_2),k_{21}}, \ldots, \tilde{F}_{A_{2p_2}}^{(t_2),k_{2p_2}}, \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots, F_{A_{sp_s}}^{(t_s),k_{sp_s}} \right\rangle \right| \leqslant K \prod_{ij} k_{ij}! \, C_0^{\sum_{ij} k_{ij}} (\bar{C}\beta)^{d(\mathfrak{A};\{A_{ij}\})}. \tag{15}$$

Далее, подставив в семиинвариант $\langle W_{t_1}^{,k_1}, \ldots, W_{t_s}^{,k_s} \rangle$ разложение (12) и представление (14) и воспользовавшись свойством полилинейности (B, § 1.II) и оценкой (15), получаем, что

$$\langle W_{t_1}^{,k_1}, \ldots, W_{t_s}^{,k_s} \rangle <$$

$$< \bar{K} \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_s): \\ 1 \leqslant p_i \leqslant k_i}} \sum_{\substack{\{A_{ij}\}: \\ i=1,\ldots,s, \\ j=1,\ldots,p_i}} \sum_{\{k_{ij}\}}{}' \prod_{ij} k_{ij}! C_0^{\sum_{ij} m_{ij}} \times$$

$$\times (\bar{C}_\beta)^{d(\mathfrak{A};\{A_{ij}\})} \prod_{ij} \bar{\lambda}^{\frac{k_{ij}}{2}\hat{d}_{A_{ij}\cup\{t_i\}}\{\mathfrak{A}\}}, \tag{16}$$

где суммирование $\sum\limits_{\{k_{ij}\}}{}'$ означает суммирование по наборам $\{k_{ij}\}$ таким, что $\sum\limits_j k_{ij} = k_i$, $i = 1, \ldots, s$.

Далее,

$$(\bar{C}\beta)^{d(\mathfrak{A};\{A_{ij}\})} \prod_{ij} \bar{\lambda}^{\frac{k_{ij}}{2}\hat{d}_{A_{ij}\cup\{t_i\}}} < \tilde{\lambda}^{\hat{d}_T(\mathfrak{A})} \prod_{ij} \bar{\lambda}^{\frac{k_{ij}}{4}\hat{d}_{A_{ij}\cup\{t_i\}}}, \tag{17}$$

где $\tilde{\lambda} = \max\{\bar{C}\beta, \bar{\lambda}^{1/4}\} < 1$. Кроме того,

$$\prod_j k_{ij}! \leqslant k_i!, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Подставляя эти неравенства в (16) и суммируя по $\{k_{ij}\}$ при фиксированных наборах $\{p_1, \ldots, p_s\}$ и $\{A_{ij}\}$, затем по наборам множеств $\{A_{ij}\}$ (с использованием оценок из § 4.II и при условии, что $\tilde{\lambda}$ достаточно мало) и, наконец, по набору чисел $(p_1, \ldots, p_s)$, мы получим окончательно оценку (13). Теорема доказана.

§ 3. Комбинаторный метод оценки семиинвариантов в случае экспоненциально-регулярного кластерного разложения

Пусть T — счетное множество, μ — мера на S^T и для некоторого класса G локальных функций $F_{\bar{A}}$, вообще говоря, неограниченных, но суммируемых по мере μ, их средние $\langle F_A\rangle_\mu$ допускают экспоненциально-регулярное кластерное разложение (см. § 3.III):

$$\langle F_A\rangle_\mu = \sum_{R\subset T} b_R(F_A), \tag{1}$$

$$|b_R(F_A)| \leqslant C(F_A)\,\lambda^{\hat{d}_R\{\mathfrak{A}\}}. \tag{1'}$$

Теорема 1. *Пусть класс G таков, что произведение $F_1\cdot F_2 \in G$, если F_1 и $F_2 \in G$, и параметр λ в оценке (1′) для величин $b_R(F_A)$, достаточно мал. Тогда для любого набора $\mathcal{F} = \{F_{A_1}, \ldots, F_{A_N}\}$ функций из G (в котором могут быть и совпадающие функции) верна следующая оценка семиинварианта $\langle F_{A_1}, \ldots, F_{A_N}\rangle_\mu$:*

$$|\langle F_{A_1}, \ldots, F_{A_n}\rangle_\mu| < \hat{C}_{\mathcal{F}} C_1^{\sum_{i=1}^N \hat{d}_{A_i}(\mathfrak{A})} (\bar{C}\lambda)^{d(\mathfrak{A};\{A_1,\ldots,A_N\})} \prod_{i=1}^N n_i, \tag{2}$$

где $\mathfrak{A}$ — класс множеств, фигурирующий в определении экспоненциально-регулярного кластерного разложения (§ 3.III), $\hat{d}_A(\mathfrak{A})$ и $d(\mathfrak{A}; \{A_1, \ldots, A_N\})$ — величины, определенные формулами (11.4.II) и (12.4.II) соответственно, C_1 и $\bar{C}$ — абсолютные константы, параметр λ определен в (1′), $n_i = n_i(A_1, \ldots, A_N)$, $i = 1, \ldots, N$, — число множеств A_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, таких, что $A_i = A_j$, а

$$\hat{C}_{\mathcal{F}} = \max_\delta \prod_{D\in\delta} C\Big(\prod_{i\in D} F_{A_i}\Big), \tag{3}$$

где максимум берется по всем разбиениям $\delta = \{D_1, \ldots, D_k\}$ множества $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$, а $C(F_A)$, $F_A \in G$, — константа в (1′).

Замечание. В случае, когда величины F_{A_i}, $i = 1, \ldots, N$, ограничены и оценка (1′) имеет вид

$$|b_R(F_A)| < \sup|F_A|\lambda^{\hat{d}_R(\mathfrak{A})}, \tag{3'}$$

из (2) вытекает равномерно сильная экспоненциальная оценка (1.13) для семиинварианта $\langle F_{A_1}, \ldots, F_{A_N}\rangle$. В случае же, когда некоторые F_{A_i} неограничены и в оценке (3′) множитель $\sup|F_{A_i}|$ заменен величиной $\langle |F_{A_i}|^q\rangle_\mu^{1/q}$, $q \geqslant 1$, из (2) следует измененная оценка (1.13) с множителем вида (1.14).

Доказательство теоремы. Пусть $D \subseteq \mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ — некоторое подмножество индексов $\{1, \ldots, N\}$; введем обозначения:

$$b_R(D) \equiv b_R\Big(\prod_{i\in D} F_{A_i}\Big), \tag{4}$$

$$f(D) \equiv \Big\langle \prod_{i\in D} F_{A_i} \Big\rangle_\mu = \sum_R b_R(D). \tag{5}$$

В силу условия 1) в определении экспоненциально-регулярного разложения $b_R(D) \neq 0$ лишь тогда, когда R является $\mathfrak{A}$-составным множеством (см. § 4.II) и набор $\{R_1, \ldots, R_p', A(D)\}$ связен. Здесь обозначено $A(D) = \bigcup_{i\in D} A_i$, а $R_1', \ldots, R_p'$ — компоненты $\mathfrak{A}$-связности множества R. Связные компоненты $\Gamma_\alpha = \{\{R_i', i \in K_\alpha\}, \{A_j, j \in D_\alpha\}\}$, $K_\alpha \subseteq [1, \ldots, p]$, $\alpha = 1, \ldots, m$, набора $\Gamma = \{\{R_i', i = 1, \ldots, p\}, \{A_j, j \in D\}\}$ задают разбиения $\{D_\alpha, \alpha = 1, \ldots, m\}$ и $\{R_\alpha, \alpha = 1, \ldots, m\}$ множеств D и R соответственно; здесь

$$R_\alpha = \bigcup_{i\in K_\alpha} R_i', \quad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Эти разбиения будем называть каноническими разбиениями пары множеств (D, R), $D \subseteq \mathcal{N}$, $R \subset T$, для которых

$b_R(D)\neq 0$. При этом $A(D_\alpha)\neq\varnothing$, $\alpha=1,\ldots,m$, и в силу условия 2) в определении экспоненциально регулярного разложения

$$b_R(D)=\prod_{\alpha=1}^{m} b_{R_\alpha}(D_\alpha). \tag{7}$$

Назовем сечением над множеством $D\subseteq\mathcal{N}$ отображение $\xi=\xi^D$: $i\mapsto\xi(i)=R_i(\xi)$, $i\in D$, множества D в совокупность $\mathfrak{A}$-составных подмножеств T такое, что для всех $i\in D$ множество $R_i(\xi)$ является $\mathfrak{A}$-связным относительно A_i. Положим для любого $D'\subseteq D$

$$\xi^D(D')=\bigcup_{i\in D'}\xi^D(i).$$

Для каждого сечения ξ над множеством $D\subseteq\mathcal{N}$ определим граф $G_\xi=G_\xi(D)$, множество вершин которого есть D, а ребрами служат те пары $(i,j)\subseteq D$, $(i\neq j)$, для которых множество $R_i(\xi)\cup R_j(\xi)$ $\mathfrak{A}$-связно относительно $\{A_i, A_j\}$. Пусть G_ξ^α, $\alpha=1,\ldots,m$, — связные компоненты графа G_ξ и $D_\alpha=D_\alpha(\xi)\subseteq D$ — множество вершин G_ξ^α, $R_\alpha=R_\alpha(\xi)=\xi(D_\alpha)$ и $R(\xi)=\xi(D)$. Легко видеть, что разбиения $\{D_1,\ldots,D_m\}$ и $\{R_1,\ldots,R_m\}$ являются каноническими разбиениями пары множеств $\{D, R(\xi)\}$.

Пусть теперь $\xi=\xi^N$ — сечение над $\mathcal{N}$. Определим виртуальное поле $\{f_\xi(D),\ D\subseteq\mathcal{N}\}$ (см. § 1.II), на подмножествах $\mathcal{N}$ по следующему правилу: если подграф G_ξ^D графа $G_\xi^{\mathcal{N}}$, построенный на множестве вершин D, несвязен, то положим

$$f_\xi(D)=\prod_{\alpha=1}^{m} f_\xi(D_\alpha), \tag{8}$$

где $D_\alpha\subset D$ — множества вершин связных компонент графа G_ξ^D. В случае же, когда G_ξ^D — связный граф, положим

$$f_\xi(D)=\frac{1}{m_\xi(D)}\,b_{\xi(D)}(D), \tag{9}$$

где $m_\xi(D)$ — число различных сечений $\tilde\xi=\tilde\xi^D$ над множеством D, таких, что граф $G_{\tilde\xi}(D)$ связен и $\tilde\xi(D)=\xi(D)$. Легко видеть, что для всех сечений ξ над $\mathcal{N}$ виртуальное поле $\{f_\xi(D),\ D\subseteq\mathcal{N}\}$ независимо относительно графа $G_\xi^{\mathcal{N}}$ (см. § 1.II, I). Определим для виртуального поля $\{f_\xi(D),$ $D\subseteq\mathcal{N}\}$ его семиинварианты $\{g_\xi(D),\ D\subseteq\mathcal{N}\}$ по формуле (16.1.II).

Лемма 2. *Верно равенство*

$$\langle F_{A_1},\ldots,F_{A_N}\rangle_\mu=\sum_\xi g_\xi(\mathcal{N}), \tag{10}$$

где суммирование $\sum_\xi$ *происходит по всем сечениям над множеством* $\mathcal{N}$.

Доказательство. По формуле (9.1.II)

$$\langle F_{A_1},\ldots,F_{A_N}\rangle_\mu=\sum_{\delta=\{D_1,\ldots,D_k\}} f(D_1)\ldots f(D_k)(-1)^{k-1}(k-1)!, \tag{11}$$

где сумма берется по всем разбиениям $\delta=\{D_1,\ldots,D_k\}$ множества $\mathcal{N}$. С другой стороны

$$g_\xi(\mathcal{N})=\sum_{\delta=\{D_1,\ldots,D_k\}} f_\xi(D_1)\ldots f_\xi(D_k)(-1)^{k-1}(k-1)!. \tag{12}$$

Таким образом, (10) вытекает из равенства

$$f(D_1)\ldots f(D_k)=\sum_\xi f_\xi(D_1)\ldots f_\xi(D_k) \tag{13}$$

для любого разбиения δ множества $\mathcal{N}$.

Для доказательства (13) заметим, что при заданном разбиении $\delta=\{D_1,\ldots,D_k\}$ множества $\mathcal{N}$ каждое сечение ξ над $\mathcal{N}$ однозначно определяется последовательностью $\left(\xi^{D_1},\ldots,\xi^{D_k}\right)$ сечений над множествами D_i так, что

$$\xi|_{D_i}=\xi^{D_i},\quad i=1,\ldots,k,$$

где $\xi|_{D_i}$ — сужение сечения ξ над $\mathcal{N}$ на множество $D_i\subseteq\mathcal{N}$, причем последовательность $\left\{\xi^{D_1},\ldots,\xi^{D_k}\right\}$ может быть произвольной. Поскольку при этом

$$f_\xi(D_i)=f_{\xi^{D_i}}(D_i),\quad i=1,\ldots,k,$$

правая часть равенства (13) равна

$$\prod_{i=1}^{k}\sum_{\xi^{D_i}} f_{\xi^{D_i}}(D_i),$$

где сумма $\sum_{\xi}^{D_i}$ берется по всем сечениям над множеством D_i, $i=1, \ldots, k$. Таким образом, равенство (13) вытекает из равенства: для любого $D \subseteq \mathcal{N}$

$$f(D) = \sum_{\xi} f_{\xi}(D), \tag{14}$$

где сумма берется по всем сечениям над множеством D. Далее из (8) и (9) мы получаем, что

$$\sum_{\xi} f_{\xi}(D) = \sum_{\xi} \frac{1}{\prod m_{\xi}|_{D_\alpha}(D_\alpha)} \prod_{\alpha=1}^{m} b_{R_\alpha}(D_\alpha), \tag{15}$$

где $D_\alpha = D_\alpha(\xi) \subseteq D$, $\alpha = 1, \ldots, m$, — множества вершин графов G_{ξ}^{α}-связных компонент графа G_ξ, $R_\alpha = R_\alpha(\xi) = \xi(D_\alpha)$, а $\xi|_{D_\alpha}$ — сужение сечения ξ на множество $D_\alpha \subseteq D$.

Как уже говорилось, наборы

$$\{D_1(\xi), \ldots, D_m(\xi)\}, \ \{R_1(\xi), \ldots, R_m(\xi)\} \tag{16}$$

образуют канонические разбиения пары множеств (D, R), $R = R(\xi)$, а число различных сечений $\tilde{\xi}$, для которых наборы $\{D_\alpha(\tilde{\xi})\}$ и $\{R_\alpha(\tilde{\xi})\}$ совпадают с наборами (16), равно $\prod_{\alpha} m_{\xi}|_{D_\alpha}(D_\alpha)$. Отсюда, из (15) и из (7) получаем, что $\sum_{\xi} f_{\xi}(D) = \sum_{R} b_R(D) = f(D)$. Лемма доказана.

Так как при любом сечении ξ над $\mathcal{N}$ виртуальное поле $\{f_\xi(D),\ D \subseteq \mathcal{N}\}$ независимо относительно графа G_ξ, имеем

$$g_\xi(D) = 0, \tag{17}$$

если подграф $G_{\xi}^{D} \subseteq G_\xi$, натянутый на вершины $D \subseteq \mathcal{N}$, несвязен (см. лемму 2.1.II). Отсюда используя формулу обращения Мёбиуса, как и в § 7.II, мы можем написать

$$g_\xi(\mathcal{N}) = \sum_{\delta} \mu_\xi(\delta, \mathbb{1}) f_\xi(D_1) \ldots f_\xi(D_k), \tag{18}$$

где суммирование происходит по всем разбиениям $\delta = \{D_1, \ldots, D_k\} \in \mathfrak{A}_{G_\xi}$ множества $\mathcal{N}$ таким, что все подграфы $G_{\xi}^{D_i}$ графа G_ξ связны; структура таких разбиений обозначается через $\mathfrak{A}_{G_\xi}$, а ее функция Мёбиуса через μ_ξ.

Воспользовавшись далее (17) при $D = \mathcal{N}$, леммой 2, леммой 2.7.II и формулой (14.7.II), получим, что

$$|\langle F_{A_1}, \ldots, F_{A_N}\rangle_\mu| \leqslant \sum_{\xi}{}' \sum_{\delta=\{D_1,\ldots,D_k\}\in\mathfrak{A}_{G_\xi}} \prod_{i=1}^{k} v_i(\xi, \delta)\, |f_\xi(D_i)|, \tag{19}$$

где суммирование ведется по всем сечениям $\xi = \xi^{\mathcal{N}}$ над $\mathcal{N}$, для которых граф G_ξ связен; $v_i(\xi, \delta)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, равно числу ребер (i, j), проходящих через вершину i в связном графе $G^\delta = G_\xi^\delta$ с множеством вершин $(1, \ldots, k)$ и ребрами (i, j), для которых множество $\xi(D_i) \cup \xi(D_j)$ $\mathfrak{A}$-связно относительно $\{A(D_i), A(D_j)\}$. Если мы фиксируем разбиение δ и множества $R_i = \xi(D_i)$, $i = 1, \ldots, k$, и просуммируем в (19) по всем сечениям $\tilde{\xi}$, для которых $G_{\tilde{\xi}}$ — связный граф, $\delta \in \mathfrak{A}_{G_{\tilde{\xi}}}$, $\tilde{\xi}(D_i) = R_i$, то получим, применяя (9), что правая часть (19) не превосходит следующей суммы:

$$\sum_{\{(R_1,D_1),\ldots,(R_k,D_k)\}} \prod |b_{R_i}(D_i)|\, v_i(G^\delta(R_1, \ldots, R_n)), \tag{20}$$

где $\delta = \{D_1, \ldots, D_k\}$ — разбиение множества $\mathcal{N}$, $\{R_1, \ldots, R_k\}$ — набор $\mathfrak{A}$-составных подмножеств, а $G^\delta(R_1, \ldots, R_k)$ — граф с вершинами $(1, \ldots, k)$ и ребрами (i, j), для которых множество $R_i \cup R_j$ $\mathfrak{A}$-связно относительно $\{A(D_i), A(D_j)\}$. Суммирование в (20) ведется по всем наборам пар $\{(R_1, D_1), \ldots, (R_k, D_k)\}$, для которых:

1) граф $G^\delta(R_1, \ldots, R_k)$ связен;

2) при всех $i = 1, \ldots, k$ множество R_i $\mathfrak{A}$-связно относительно набора $\{A_j,\ j \in D_i\}$.

В силу оценки (1′) и последнего условия

$$\prod_{i=1}^{k} b_{R_i}(D_i) \leqslant \hat{C}_F \prod_{i=1}^{k} \lambda^{d_{R_i}(\mathfrak{A}; \{A_j, j\in D_i\})}. \tag{21}$$

Из условий 1) и 2) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{k} d_{R_i}(\mathfrak{A}; \{A_j, j \in D_i\}) \leqslant d(\mathfrak{A}; \{A_1, \ldots, A_N\}). \tag{21'}$$

Рассмотрим какое-нибудь упорядочение в множестве T и для каждого подмножества $D \subseteq \mathcal{N}$ обозначим через $t(D) \in A(D)$ точку из $A(D)$, наименьшую относительно введенного порядка в T. Для каждого разбиения $\delta = \{D_1, \ldots, D_k\}$ обозначим через $S(\delta)$ множество всех точек, совпадающих с точками $t(D_i)$ для блоков D_i разбиения δ, и пусть $u_t^\delta = u_t$ — число тех блоков, для которых $t = t(D_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Обозначим через

$$E(\delta) = \prod_{t \in S(\delta)} u_t^{u_t}. \tag{22}$$

Заметим, что $\mathfrak{A}$-связность множества $R_i \cup R_j$ относительно $\{A(D_i), A(D_j)\}$ означает, что

$$Q_i \cap Q_j \neq \varnothing, \tag{23}$$

где $Q = A(D_i) \cup \widetilde{R}_i$, а $\widetilde{R}_i = \bigcup_{B \in \mathfrak{A}, B \cap R_i \neq \varnothing} B$ есть объединение всех множеств из $\mathfrak{A}$, пересекающих R_i. Из (23) и оценки (14.5.II) вытекает, что

$$\prod_{i=1}^{k} v_i\left(G^\delta(R_1, \ldots, R_k)\right) \leqslant E(\delta)\, C^{\sum_{i=1}^{k} \widehat{d}_{Q_i}(\mathfrak{A})}, \tag{24}$$

где C — абсолютная константа, а величина $\widehat{d}_Q(\mathfrak{A})$ определена в (11.4.II). Далее,

$$\widehat{d}_{Q_i}(\mathfrak{A}) \leqslant \widehat{d}_{A(D_i)}(\mathfrak{A}) + \widehat{d}_{\widetilde{R}_i}(\mathfrak{A}) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j \in D_i} \widehat{d}_{A_j}(\mathfrak{A}) + d(\mathfrak{A}, \{A_j, j \in D_i\}) + \overline{K} d_{R_i}(\mathfrak{A}, \{A_j, j \in D_i\}), \tag{25}$$

$\overline{K} = \overline{K}(\mathfrak{A})$ — константа.

Здесь при оценке $\widehat{d}_{\widetilde{R}_i}(\mathfrak{A})$ мы воспользовались условием 2) из § 3.III, равенством (10.4.II), а также условиями 1) и 2) из § 4.II, из которых следует, что для каждого $\mathfrak{A}$-составного множества R

$$\widehat{d}_{\widetilde{R}}(\mathfrak{A}) \leqslant K|R| \leqslant KM \sum_m d_{R'_m}(\mathfrak{A}), \tag{26}$$

где $\{R'_m, m = 1, \ldots, p\}$ — компоненты $\mathfrak{A}$-связности R, K — максимальное число множеств $B \in \mathfrak{A}$, содержащих фиксированную точку $t \in T$, а M — максимальная мощность множества $B \in \mathfrak{A}$.

Таким образом, из (25), (24), (22), (21), (21′), (20) и (19) получаем, что

$$|\langle F_{A_1}, \ldots, F_{A_N}\rangle_\mu| \leqslant$$
$$\leqslant \widehat{C}_{\mathscr{F}} \prod_{j=1}^{N} C^{\widehat{d}_{A_j}(\mathfrak{A})} (C_1\lambda)^{d(\mathfrak{A}; \{A_1, \ldots, A_N\})} \sum_{\{(R_1, D_1), \ldots, (R_k, D_k)\}} E(\delta) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{k} (C_1)^{-\frac{1}{2} d_{R_i}(\mathfrak{A}; \{A_j, j \in D_i\})} C^{d(\mathfrak{A}; \{A_j, j \in D_i\})}, \tag{27}$$

где $C_1 > 1$ — достаточно большая константа, а суммирование происходит по наборам пар $\{(R_1, D_1), \ldots, (R_k, D_k)\}$, удовлетворяющим условиям 1) и 2), $\delta = \{D_1, \ldots, D_k\}$. Фиксируем разбиение δ и просуммируем в правой части (27) по всем упорядоченным наборам множеств $(R_1, \ldots$ $\ldots, R_k)$, удовлетворяющим лишь условию 2). При этом

$$\sum_{(R_1, \ldots, R_k)} \prod_{i=1}^{k} (C_1\lambda)^{d_{R_i}(\mathfrak{A}; \{A_j, j \in D_i\})} \leqslant \prod_{i=1}^{k} \sum_{R_i} (C_1\lambda)^{d_{R_i}(\mathfrak{A}, \{A_j, j \in D_i\})}. \tag{28}$$

Воспользовавшись леммой 6.4.II и оценкой

$$|A| < M\widehat{d}_A(\mathfrak{A}), \tag{29}$$

аналогичной оценке (26), получим при $C_1 \gg C$, что правая часть (27) не превосходит

$$\widehat{C}_{\mathscr{F}} \prod_{j=1}^{N} C_0^{\widehat{d}_{A_j}(\mathfrak{A})} (C_1\lambda)^{d(\mathfrak{A}; \{A_1, \ldots, A_N\})} \sum_\delta E(\delta), \tag{30}$$

где C_0 и C_1 — константы.

Перейдем к оценке суммы $\sum_\delta E(\delta)$. Пусть $S_0 = \{t_1, \ldots, t_l\} = S(\delta = \underline{0})$ — множество точек, соответствующее разбиению $\underline{0}$ множества $\mathscr{N}$ на одноточечные подмножества, причем точки t_i занумерованы в соответствии с порядком в T. Заметим, что каждая точка $t_i \in S_0$ является наименьшей точкой для некоторой совокупности подмножеств A_j, $j \in \mathscr{N}$, и соответствующее множество индексов j мы обозначим через D_i^0, а через $\delta_0 = \{D_1^0, \ldots, D_l^0\}$ обозначим порождаемое этими множествами разбиение $\mathscr{N}$. Каждое разбиение $\delta = \{D_1, \ldots, D_k\}$ порождает разбиения δ_i блоков $D_i^0: \delta_i = \{D_{i1}^0, \ldots, D_{is_i}^0\}$, где

$$D_{ij}^0 = D_i^0 \cap D_j, \quad i = 1, \ldots, l, \quad j = 1, \ldots, k,$$

при условии, что $D_{ij}^0 \neq \varnothing$. При этом множество $S(\delta) \subseteq S_0$ и точка $t \in S(\delta)$ совпадает с точкой $t_i \in S_0$ при условии, что в разбиении δ_i имеются хотя бы один блок вида $D_{ij}^0 = D_i^0 \cap D_j$ такой, что $t = t(D_j)$, и блок D_j не пересекается ни с одним из блоков D_m^0 при $m < i$. Обозначим для каждого $i = 1, \ldots, l$ через $\delta_i' \subseteq \delta_i$ совокупность всех таких блоков $D_{ij}^0 \in \delta_i$ (при $i = 1$, $\delta_1 = \delta_1'$). Очевидно, что $u_t^\delta = |\delta_i'|$, где $|\delta_i'|$ — мощность множества δ_i', а $t = t_i \in S_0$. Отсюда вытекает следующая оценка:

$$\sum_\delta E(\delta) = \sum_\delta \prod_{t \in S(\delta)} u_t^{u_t} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\{\delta_1, (\delta_2, \delta_2'), \ldots, (\delta_l, \delta_l')\}} \prod_{i=1}^l |\delta_i'|^{|\delta_i'|} = \sum_{\delta_1} |\delta_1|^{|\delta_1|} \prod_{i=2}^l \sum_{(\delta_i, \delta_i')} |\delta_i'|^{|\delta_i'|}, \tag{31}$$

где сумма $\sum\limits_{\delta'}$ берется по всем разбиениям множества D_1^0, а сумма $\sum\limits_{(\delta_i, \delta_i')}$ при $i \geqslant 2$ — по всем парам $\{\delta_i, \delta_i'\}$, где δ_i — произвольное разбиение множества D_i^0 и $\delta_i' \subseteq \delta_i$ — произвольное подмножество блоков разбиения δ_i.

Лемма 3. *Для любого множества $D \subseteq \mathcal{N}$ сумма*

$$\sum_{(\delta, \delta')} |\delta'|^{|\delta'|} \leqslant c^{|D|} |D|^{|D|}, \tag{32}$$

где c — абсолютная константа, $|D|$ — мощность множества D, а суммирование $\sum\limits_{(\delta, \delta')}$ определено выше.

Доказательство этой леммы приводится ниже. Из оценки (32) вытекает, что

$$\sum_\delta E(\delta) < C^N \prod_{i=1}^l |D_i^0|^{|D_i^0|}.$$

Далее

$$\prod_{i=1}^l |D_i^0|^{|D_i^0|} \leqslant \prod_{j=1}^N v_j,$$

где v_j — число множеств A_m в наборе $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}$, пересекающихся с множеством $A_j \in \mathscr{A}$ (см. § 5.II). Отсюда, из теоремы 2.5.II и неравенства (15.4.II) следует, что

$$\sum_\delta E(\delta) \leqslant \left(\prod_{i=1}^N n_i\right) \widetilde{C}^{\sum\limits_{i=1}^N \widehat{d}_{A_i}(\mathfrak{A})}, \tag{33}$$

где $\widetilde{C}$ — абсолютная константа. Из (30) и (33) вытекает (2). Теорема доказана.

Доказательство леммы 3. Обозначим через $S_{m,k}$ число разбиений δ множества из m элементов, имеющих ровно k блоков. Обозначив $|D| = j$, легко находим, что

$$\sum_{(\delta, \delta')} |\delta'|^{|\delta'|} = \sum_{\substack{m_1, m_2: \\ m_1 + m_2 = j}} \frac{j!}{m_1!\, m_2!} \sum_{k_1 \leqslant m_1} S_{m_1 k_1} \sum_{k_2 \leqslant m_2} S_{m_2 k_2} \cdot k_2^{k_2}. \tag{34}$$

Для каждого разбиения δ множества мощности m определим числа $\{p(n), n = 1, 2, \ldots\}$, равные количеству блоков разбиения δ, имеющих мощность n. При этом

$$\sum_n np(a) = m, \quad \sum_n p(n) = k = |\delta|.$$

Легко подсчитать, что число разбиений δ с фиксированным набором $\{p(n), n = 1, 2, \ldots\}$ равно $\dfrac{m!}{\prod\limits_n p(n)!\, (n!)^{p(n)}}$ и, таким образом,

$$S_{m,k} = \sum_{\substack{\{p(n)\}: \\ \sum np(n) = m, \\ \sum p(n) = k}} \frac{m!}{\prod\limits_n p(n)!\, (n!)^{p(n)}}. \tag{35}$$

Заметим, что как следует из (35), производящая функция имеет вид

$$\sum_{m,k} \frac{S_{m,k}}{m!} z^m w^k = e^{we^z}.$$

Отсюда легко находим, что $S_{m,k} \leqslant m! e^k / k!$. Подставляя полученную оценку в (34), приходим к (32). Лемма 3 доказана.

§ 4. Медленное (степенное) убывание корреляций

Пусть $\{\mu_\Lambda, \Lambda\subset Z^\nu\}$ — гиббсовские перестройки

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu_0} = Z_\Lambda^{-1}\exp\left\{-\beta\sum_{A\subseteq\Lambda}\Phi_A\right\}, \tag{1}$$

где μ_0 — распределение вероятностей в S^{Z^ν} для значений независимого поля $\{x(t),\ t\in Z^\nu\}$, а $\{\Phi_A,\ A=\{t,\ t'\},\ t\neq t'\}$ — двухточечный потенциал: $\Phi_A\equiv 0$ при $|A|\neq 2$. Пусть для любого $A=\{t,\ t'\}$

$$\sup_x|\Phi_A(x),\ \ | = J_A\equiv J(t,\ t') < \infty. \tag{2}$$

Мы рассмотрим здесь два случая: для любого $t\in Z^\nu$

A) $$\sum_{A:t\in A} J_A = D_1 < \infty, \tag{3}$$

B) $$\sum_{A:t\in A} J_A^{1/2} = D_2 < \infty. \tag{4}$$

Очевидно, что условие B) влечет за собой условие A).

Как следует из теоремы I.I.IV, при достаточно малых β в обоих случаях A) и B) существует предельная гиббсовская перестройка μ в пространстве S^{Z^ν}.

Пусть $f=\{f_1,\ \ldots,\ f_n\}$ — некоторый набор вещественных ограниченных функций, определенных на пространстве S, $\varkappa=(k_1\geqslant 1,\ \ldots,\ k_n\geqslant 1)$ — набор целых чисел, $(t_1,\ \ldots,\ t_n)$ — упорядоченный набор попарно различных точек решетки Z^ν. Рассмотрим семиинвариант

$$\left\langle f_1^{,k_1}(x(t_1)),\ \ldots,\ f_n^{,k_n}(x(t_n))\right\rangle_\mu. \tag{5}$$

В обоих случаях (3) и (4) будет установлено сильное убывание корреляций, т. е. оценка вида (1.7) для семиинвариантов (5) с наилучшей константой, имеющей вид (1.10). В случае (4) мы получим еще при этом более сильную кластерную оценку, близкую к кластерной оценке (1.8) (с наилучшей константой (1.10′)).

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (4) *и* β — *достаточно мало. Тогда верна оценка*:

$$\left\langle f_1^{,k_1}(x(t_1)),\ \ldots,\ f_n^{,k_n}(x(t_n))\right\rangle_\mu \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{i=1}^n C_0^{k_i}k_i!\,(\sup|f_i|)^{k_i}\sum_{\mathcal{T}}\prod_{(t,t')\in\mathcal{T}}(C\beta J^{1/2}(t,\ t')), \tag{6}$$

где $C_0>0$, $C>0$ — *абсолютные константы, а суммирование происходит по всем деревьям* $\mathcal{T}$, *построенным на точках из* Z^ν *так, что множество их вершин содержит точки* $t_1,\ \ldots,\ t_n$.

Следствие. *Из оценки* (6) *вытекает свойство сильного убывания корреляций* (1.7) *с максимальной константой вида* (1.10).

Действительно, фиксируем дерево $\mathcal{T}$ и просуммируем (6) по всем упорядоченным наборам $(t_2,\ \ldots,\ t_n)$, $t_i\in Z^\nu$, $i=2,\ \ldots,\ n$, точек из множества $A(\mathcal{T})$ вершин дерева $\mathcal{T}$. При этом правая часть в (6) умножается на $(n-1)!\,C^{n-1}_{A(\mathcal{T})|-1}\leqslant(n-1)!\,2^{|A(\mathcal{T})|-1}$. Просуммировав затем по всем деревьям $\mathcal{T}$ таким, что $t\in\mathcal{A}(\mathcal{T})$, с помощью следствия 1) из леммы 10.4.II получим (1.7) и (1.10), причем в правой части (1.10) появится малый множитель $(\overline{C}\beta)^{n-1}$.

Замечание. В случае, когда $J(t,\ t')$ допускает оценку

$$J(t,\ t') < c/|t-t'|^\varkappa,$$

где $\varkappa>4\nu$, c — константа, из (6) можно вывести сильную кластерную оценку (1.8) с функцией

$$\varphi(t,\ t') = \bar c/|t-t'|^{\varkappa/4}\qquad(\bar c \text{ — константа})$$

и наилучшей константой (1.10) (см. [93]).

Доказательство теоремы 1. Введем семейство функций

$$\tilde f_i = \frac{f_i}{\sup\limits_{x\in S}|f_i(x)|},\quad |\tilde f(x)|\leqslant 1. \tag{6′}$$

Как следует из доказательства леммы 1.2, семиинвариант $I=\left\langle\prod_{i=1}^n\tilde f_{t_i}^{,k_i}(x(t_i))\right\rangle_\mu$ является аналитической функцией параметра β в круге $|\beta|<\beta_0$, где $\beta_0>0$ не зависит от точек $t_1,\ \ldots,\ t_n$ и чисел $k_1,\ \ldots,\ k_n$. Из формулы (21.1.II) § 1.II получаем, что

$$I = \sum_{\{(A_1,r_1),\ldots,(A_p,r_p)\}}\prod_{j=1}^p\frac{\beta^{r_j}}{r_j!}\left\langle\prod_{i=1}^n\tilde f_i^{,k_i},\ \Phi_{A_1}^{,r_1},\ \ldots,\ \Phi_{A_p}^{,r_p}\right\rangle_{\mu_0}, \tag{7}$$

где сумма берется по всем неупорядоченным наборам пар $\{(A_1, r_1), \ldots, (A_p, r_p)\}$, $A_j = (t_j, t_j')$ — двухточечное множество, $r_j \geqslant 1$ — целое число, $j = 1, \ldots, p$, таким, что множества A_j попарно различны, а набор $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_p\}$ связен, $t_i \in \bigcup_j A_j$, $i = 1, \ldots, n$ (в противном случае семиинвариант $\left\langle \prod_{i=1}^n \tilde{f}_i^{k_i}, \prod_{j=1}^p \Phi_{A_j}^{r_j} \right\rangle_{\mu_0} = 0$; см. свойство C, § 1.II).

Для оценки семиинвариантов $\left\langle \prod_{i=1}^n{}' \tilde{f}_i^{k_i}, \prod_{j=1}^p \Phi_{A_j}^{r_j} \right\rangle_{\mu_0}$ рассмотрим для любого конечного $\Lambda \subset Z^\nu$ функцию от комплексных переменных

$\lambda = \{\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, и $\mu = \{\mu_A,\ A = \{t, t'\} \subset \Lambda,\ t \neq t'\}$,

$$F_\Lambda(\lambda, \mu) = \ln\left(\left\langle \exp\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{f}_i(x(t_i)) + \sum_{A \subset \Lambda} \mu_A \tilde{\Phi}_A\right\}\right\rangle_{\mu_0}\right),$$

где обозначено

$$\tilde{\Phi}_A = \Phi_A J_A^{-1/2}, \quad A = \{t, t'\} \subset Z^\nu.$$

Из теоремы 1.1.IV и леммы 2.4.III следует, что $F_\Lambda(\lambda, \mu)$ аналитична в области

$$\max_{i, A}\{|\lambda_i|, |\mu_A|\} < \lambda_0,$$

где $\lambda_0 > 0$ не зависит от Λ и множества $\{t_1, \ldots, t_n\}$. Кроме того, в этой области

$$\max_{i, A}\left\{\left|\frac{\partial F_\Lambda}{\partial \lambda_i}\right|, \left|\frac{\partial F_\Lambda}{\partial \mu_A}\right|\right\} < M,$$

где константа M не зависит от Λ и $\{t_1, \ldots, t_n\}$ (см. опять § 4.III).

Отсюда и из неравенств Коши следует, что

$$\left|\left\langle \prod_{i=1}^n{}' \tilde{f}_i^{k_i}, \prod_{j=1}^p{}' \Phi_{A_j}^{r_j} \right\rangle_{\mu_0}\right| = \left|\frac{\partial^{|\varkappa| + |\rho|}}{\partial^\varkappa \lambda\, \partial^\rho \mu} F_\Lambda(\lambda, \mu)\Big|_{\substack{\lambda=0\\ \mu=0}}\right| \leqslant M(\lambda_0^{-1})^{|\varkappa| + |\rho|} \varkappa! \rho!,$$

где $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$, $\rho = (r_1, \ldots, r_n)$, $|\varkappa| = k_1 + \ldots + k_n$,

$\varkappa! = \prod k_i!$ (и аналогичный смысл у $|\rho|$ и $\rho!$), а

$$\frac{\partial^{|\varkappa| + |\rho|}}{\partial^\varkappa \lambda\, \partial^\rho \mu} = \frac{\partial^{|\varkappa| + |\rho|}}{\prod_{i=1}^n \partial^{k_i} \lambda_i \prod_{j=1}^p \partial^{r_j} \mu_{A_j}}.$$

Из этой оценки и из (7) получаем, заменив функции $\tilde{f}_i$ на f_i, что

$$\left|\left\langle \prod_{i=1}^n{}' f_i^{k_i}(x(t_i)) \right\rangle_\mu\right| \leqslant$$
$$\leqslant M \prod_{i=1}^n k_i! (\lambda_0^{-1})^{|\varkappa|} \prod_{i=1}^n (\sup|f_i|)^{k_i} \sum_{\substack{\Gamma = \{A_1, \ldots, A_p\}\\ t_i \in \Gamma,\, i = 1, \ldots, n}} \prod_{j=1}^p \left(C\beta J_{A_j}^{1/2}\right),$$

где сумма берется по наборам $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_p\}$, описанным выше. Сопоставляя каждому такому набору связный граф с множеством вершин $\tilde{\Gamma}$ и ребрами $\{t_j, t_j'\} = A_j$ и переходя от суммирования по связным графам к суммированию по деревьям (лемма 8.4.II), мы получим (6). Теорема доказана.

Теорема 2. *В случае, когда выполнено условие* (3) *и* β *достаточно мало, верна оценка: для любого* $t = t_1 \in Z^\nu$ *и любого* n

$$\sum_{(t_2, \ldots, t_n)} \left|\left\langle \prod_{i=1}^n{}' f_i^{k_i}(x(t_i)) \right\rangle_\mu\right| <$$
$$< M(n-1)! \prod_{i=1}^n k_i! (\sup|f_i|)^{k_i} C^{k_1 + \ldots + k_n}, \tag{8}$$

где M *и* C *— константы.*

Доказательство. Снова перейдем к функциям (6′) и рассмотрим логарифм их характеристической функции относительно распределения μ_Λ, где $\Lambda \subset Z^\nu$ — конечное множество и $t_i \in \Lambda$, $i = 1, \ldots, n$

$$F_\Lambda(\lambda) = \ln\left\langle \exp\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{f}_i(x(t_i))\right\}\right\rangle_\Lambda, \tag{9}$$

где, как и выше, обозначено $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Очевидно, что

$$F_\Lambda(\lambda) = \ln Z_\Lambda(\lambda) - \ln Z_\Lambda, \tag{10}$$

где Z_Λ — статистическая сумма распределения μ_Λ, а

$$Z_\Lambda(\lambda) = \left\langle \exp\left\{\sum \lambda_i \tilde{f}_i(x(t_i)) - \beta \sum_{A\subset\Lambda} \Phi_A\right\}\right\rangle_{\mu_0}. \quad (11)$$

Повторяя рассуждения из § 1.IV, мы при достаточно малом β и

$$|\lambda_i| < \lambda_0, \quad (12)$$

где λ_0 — некоторая константа, получим кластерное представление (1.1.III) статистической суммы $Z_\Lambda(\lambda)$ с величинами $k_B(\lambda)$ вида (13):

$$k_B(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } B=\{t\},\ t\neq t_i \text{ ни при каком } i=1,\ldots,n, \\ \left\langle e^{\lambda_i \tilde{f}_i(x(t_i))}\right\rangle_{\mu_0}, & \text{если } B=\{t_i\}, \\ \sum\limits_{\tilde{\Gamma}=B} k_\Gamma(\lambda), & |B|\geqslant 2, \end{cases} \quad (13)$$

где сумма берется по всем связным наборам $\Gamma=\{A_1, \ldots, A_p\}$ двухточечных множеств $A_j=\{t_j, t_j'\}$, а

$$k_\Gamma(\lambda) = \left\langle \prod_{j=1}^{p}\left(e^{-\beta\Phi_{A_j}}-1\right) \prod_{i:t_i\in\tilde{\Gamma}} e^{\lambda_i \tilde{f}(x(t_i))}\right\rangle_{\mu_0}. \quad (14)$$

В области (12) для величин $k_B(\lambda)$ выполняются оценки (1.2.III) и условие кластерности (23.1.III). Таким образом, $\ln Z_\Lambda(\lambda)$ допускает разложение (см. (9.4.III) и (7.4.III))

$$\ln Z_\Lambda(\lambda) = \sum_\eta{}^{(\Lambda)} d_\eta g_\eta(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \ln \left\langle e^{\lambda_i \tilde{f}_i}\right\rangle_{\mu_0}, \quad (15)$$

где $\eta=\{B_1, \ldots, B_s\}$ — связные наборы множеств, $B_i\subseteq\Lambda$, $|B_i|\geqslant 2$,

$$g_\eta^{(\lambda)} = \prod_{B_i\in\eta} g_{B_i}(\lambda), \quad g_B(\lambda) = \frac{k_B(\lambda)}{\prod\limits_{t\in B} k_{\{t\}}(\lambda)},$$

а d_η — коэффициенты.

Из (15) и (10) следует, что при $n\geqslant 2$

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n}{}' \tilde{f}_i^{\,k_i}\right\rangle_\Lambda = \left.\frac{\partial^{|\varkappa|} F_\Lambda(\lambda)}{\partial^\varkappa \lambda}\right|_{\lambda=0} = \sum_\eta{}^{(\Lambda)} d_\eta \left.\frac{\partial^{|\varkappa|} g_\eta(\lambda)}{\partial^\varkappa\lambda}\right|_{\lambda=0}, \quad (16)$$

а суммирование в (16) происходит по наборам $\eta=\{B_1, \ldots, B_s\}$ таким, что $t_i\in\bigcup\limits_{j=1}^{s} B_j$, $i=1, \ldots, n$.

Тогда

$$\frac{\partial^{|\varkappa|} g_\eta(\lambda)}{\partial^\varkappa\lambda} = \sum_{(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_s)} \frac{\varkappa!}{\varkappa_1!\ldots\varkappa_s!} \prod_{j=1}^{s} \frac{\partial^{|\varkappa_j|} g_{B_j}(\lambda)}{\partial^{\varkappa_j}\lambda}, \quad (17)$$

где $\varkappa_j=\left(k_1^{(j)}, \ldots, k_\eta^{(j)}\right)$, $j=1, \ldots, s$, $k_i^{(j)}\geqslant 0$, $\varkappa! = \prod\limits_{i=1}^{n} k_i!$, $|\varkappa| = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$, а суммирование в (17) происходит по всем упорядоченным наборам $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s)$ таким, что $\varkappa=\varkappa_1+\ldots+\varkappa_s$. При этом

$$k_i^{(j)}\neq 0 \quad (18)$$

лишь в том случае, когда $t_i\in B_j$.

Далее величина $g_B(\lambda)$ в области (12) является аналитической функцией $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и, как следует из (13) и (14), удовлетворяет оценке

$$|g_B(\lambda)| \leqslant \sum_{\substack{\Gamma=\{A_1,\ldots,A_p\},\\ \tilde{\Gamma}=B}} \prod_{l=1}^{p}\left(C\beta J_{A_l}\right), \quad (19)$$

где суммирование происходит по всем связным наборам $\Gamma=\{A_1, \ldots, A_p\}$ двухточечных множеств, $\tilde{\Gamma}=B$. Поскольку $|\Gamma|\geqslant|B|/2$, оценку (19) можно заменить оценкой

$|g_B(\lambda)| < \beta^{|B|/4}\tilde{g}_B$, где обозначено $\tilde{g}_B = \sum\limits_{\{A_1,\ldots,A_p\}} \prod\limits_{l=1}^{p}\left(C\beta^{1/2} J_{A_l}\right)$.

Отсюда

$$\left|\left.\frac{\partial^{|\varkappa_j|} g_{B_j}(\lambda)}{\partial^{\varkappa_j}\lambda}\right|_{\lambda=0}\right| < C_0^{|\varkappa_j|}\varkappa_j!\,\beta^{|B_j|/4}\tilde{g}_{B_j}.$$

Подставляя последнюю оценку в (17) получим, что

$$\left|\left.\frac{\partial^{|\varkappa|} g_\eta(\lambda)}{\partial^\varkappa\lambda}\right|_{\lambda=0}\right| < C_0^{|\varkappa|}\tilde{g}_\eta\cdot\varkappa!\,\beta^{\sum_{B\in\eta}|B|/4} N_{\eta,\varkappa}, \quad (20)$$

где через $N_{\eta,\varkappa}$ обозначено число упорядоченных наборов $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s)$, для которых выполнено условие (18) и

$\varkappa_1+\ldots+\varkappa_s=\varkappa$. Пусть далее в наборе η имеется s_1 множеств B, содержащих точку t_1, s_2 множеств, содержащих точку t_2, и т. д. Легко подсчитать, что

$$N_{\eta,\varkappa}\leqslant 2^{|\varkappa|}2^{s_1+\ldots+s_n}. \tag{21}$$

Пусть далее n_j — есть число точек из набора $\{t_1, \ldots, t_n\}$, попавших в $B_j\in\eta$. Тогда

$$s_1+\ldots+s_n=\sum_{j=1}^{s} n_j\leqslant\sum_j |B_j|. \tag{22}$$

Из (22), (21) и (20) и (16) получаем при достаточно малых β оценку

$$\left|\left\langle \prod_{i=1}^{n}{}' \tilde f_i^{,k_i}\right\rangle_\mu\right| \leqslant (2C_0)^{k_1+\ldots+k_n}\prod k_i!\sum_\eta^{(\Lambda)} d_\eta \tilde g_\eta \beta^{\sum\limits_{B\in\eta}|B|/8} \tag{23}$$

(суммирование здесь такое же как и в (16)). Поскольку для каждого фиксированного η существует не более, чем $(n-1)!\,2^{\sum_{B\in\eta}|B|}$ упорядоченных наборов $(t_1, \ldots, t_n)$ таких, что $t_1=t$ и $t_i\subset\bigcup_{B\in\eta}B$, $i=1, \ldots, n$, находим из (23), что

$$\sum_{(t_2,\ldots,t_n)}\left|\left\langle\prod_{i=1}^n{}'\tilde f_i^{,k_i}\right\rangle_\mu\right|\leqslant$$

$$\leqslant \tilde C_0^{k_1+\ldots+k_n}(n-1)!\prod k_i!\sum_{\eta,\,t\in\tilde\eta}^{(\Lambda)} d_\eta\tilde g_\eta, \tag{24}$$

где сумма берется по всем наборам η таким, что $t\in\tilde\eta$. Поскольку величины $\{\tilde g_B\}$ при достаточно малом β удовлетворяют условию кластерности,

$$\left|\sum_{\eta,\,t\in\tilde\eta}^{(\Lambda)} d_\eta\tilde g_\eta\right|<M$$

равномерно по Λ и t (см. § 4.III). Отсюда, переходя в (24) к пределу $\Lambda\nearrow Z^\nu$ и заменяя функции $\tilde f_i$ на f_i, получаем (8). Теорема доказана.

Замечание. Можно привести другое доказательство теоремы 2, пригодное уже для неограниченных функций f_i на S с конечными моментами:

$$\langle|f_i(x(t))|^p\rangle_{\mu_0}<\infty,\quad p\geqslant1.$$

Представим семиинвариант $\left\langle f_1^{,k_1}, \ldots, f_n^{,k_n}\right\rangle_\mu$ в виде

$\langle\bar f_1(x(\bar t_1)), \ldots, \bar f_N(x(\bar t_N))\rangle_\mu$, где $N=k_1+\ldots+k_n$, а среди набора точек $\{\bar t_1, \ldots, \bar t_N\}$ k_1 раз встречается точка t_1, k_2 раза точка t_2 и т. д., а $\bar f_j=f_i$, если $\bar t_j=t_i$. Разложим этот семиинвариант по моментам

$$\left\langle\prod_{j=1}^N{}'\bar f_j\right\rangle=\sum_{\{T_1,\ldots,T_k\}}\langle\bar f_{T_l}\rangle(-1)^{k-1}(k-1)!, \tag{25}$$

где $\{T_1, \ldots, T_k\}$ — произвольное разбиение множества $\mathcal N=\{1, \ldots, N\}$, а $\bar f_T=\prod_{j\in T}f_j$, $T\subseteq\mathcal N$. Каждый из моментов $\langle\bar f_T\rangle$ можно с помощью кластерных разложений § 1.IV и § 3.III представить в виде

$$\langle\bar f_T\rangle_\mu=\sum_\gamma b_\gamma(\bar f_T),\quad T\subseteq\mathcal N, \tag{26}$$

где сумма берется по совокупности $\gamma=(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s)$ связных наборов $\Gamma_i=\{A_1^{(i)}, \ldots, A_p^{(i)}\}$ двухточечных множеств $A_l^{(i)}$ (быть может, повторяющихся), причем набор множеств $\{\hat T, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ связен. Здесь $\hat T\subseteq\{t_1, \ldots, t_n\}$ — совокупность тех точек t_i, которые совпадают с какой-нибудь из точек $\bar t_j$, $j\in T$. При этом величины $b_\gamma(\bar f_T)$ допускают оценку

$$|b_\gamma(\bar f_T)|<\langle|\bar f_T|^2\rangle_0^{1/2}\prod_{A\in\bigcup\limits_{\Gamma\in\gamma}\Gamma}(C\beta J_A) \tag{27}$$

(C — абсолютная константа).

Подставляя разложения (26) для каждого момента $\langle\bar f_T\rangle_\mu$ в правую часть формулы (25), с помощью рассуждений из предыдущего параграфа, использующих формальные семиинварианты, получим, что слагаемые вида

$$b_{\gamma_1}(\bar f_{T_1})\cdot\ldots\cdot b_{\gamma_k}(\bar f_{T_k}),$$

для которых набор

$$\Gamma=\bigcup_{\Gamma'\in\cup\gamma_i}\Gamma', \tag{28}$$

получающийся объединением всех наборов Γ' из $\bigcup\gamma_i$, несвязен, сокращаются.

Далее с помощью комбинаторной оценки числа последовательностей $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ таких, для которых набор Γ (28) фиксирован, суммированием по всем Γ, получаем, используя оценку (27), окончательный результат (8). При этом множитель $\prod_{i=1}^{n}\left(\sup|f_i(x)|\right)^{k_i}$ заменяется множителем (сравните с (14.1)) $\sup\limits_{\{t_1,\ldots,t_k\}}\max\prod_{j=1}^{s}\left\langle\prod_{i=1}^{n}|f_i|^{2k_i^{(j)}}\right\rangle^{1/2}$, где $(k_1^{(j)},\ldots,k_n^{(j)})=\varkappa_j$ — набор целых чисел; максимум берется по всем наборам $(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_s)$, $s=1,2,\ldots$, таким, что $\varkappa_1+\ldots+\varkappa_s=\varkappa=(k_1,\ldots,k_n)$, а верхняя грань — по всем наборам точек $t_1,\ldots,t_n\in Z^\nu$.

§ 5. Низкотемпературная область

Рассмотрим предельное гиббсовское поле $\{\sigma_t,\ t\in Z^\nu\}$, $\sigma_t=\pm1$ для ферромагнитной модели Изинга на двумерной решетке Z^2 при $h=0$ и больших значениях $\beta>0$ в $(+)$-чистой фазе. Распределение вероятностей $\mu^{(+)}$ на пространстве $\{-1,1\}^{Z^\nu}$ значений этого поля получается как предел при $\Lambda\nearrow Z^2$ гиббсовских мер μ_Λ^+ с $(+)$-граничными конфигурациями (см. § 0.I и § 5.III). Напомним, что в § 0.1 мы определили контур как связную замкнутую ломаную, составленную из ребер двойственной решетки $\tilde{Z}^2$. Каждый такой контур Γ разбивает решетку на 1-связные компоненты — одну внешнюю компоненту и одну или несколько внутренних. Мы скажем, что контур Γ охватывает точку $t\in Z^2$, если она принадлежит какой-нибудь его внутренней компоненте.

Теорема 1. *При достаточно большом $\beta>0$ для любого n, любого набора попарно-различных точек $\{t_1,\ldots,t_n\}$ и целых $k_1\geqslant1,\ldots,k_n\geqslant1$ верна оценка*

$$\left|\left\langle\sigma_{t_1}^{,k_1},\ldots,\sigma_{t_n}^{,k_n}\right\rangle_{\mu+}\right|<C(n,k_1,\ldots,k_n)\left(C_0e^{-\beta}\right)^{r(t_1,\ldots,t_n)},\tag{1}$$

где

$$C(n,k_1,\ldots,k_n)=n^{k_1+\ldots+k_n}\prod k_i!\,(C_1)^{2^{k_1+\ldots+k_n}},\tag{1'}$$

C_0, C_1 — абсолютные константы, а

$$r(t_1,\ldots,t_n)=\min\{\hat{d}_{\{t_1,\ldots,t_n\}},\ \min|\Gamma|\}.$$

Здесь $\hat{d}_{\{t_1,\ldots,t_n\}}$ — минимальная длина дерева, построенного на множестве точек $\{t_1,\ldots,t_n\}$ (см. § 4.II), *а $\min|\Gamma|$ — минимальная длина контура Γ, охватывающего все точки $t_1,\ldots,t_n$.*

Из оценки (1) получаем два следствия.

Следствие 1. *При фиксированном наборе $k_1,\ldots,k_n$ и фиксированной точке $t=t_1$*

$$\sum_{(t_2,\ldots,t_n)}\left|\left\langle\sigma_{t_1}^{,k_1},\ldots,\sigma_{t_n}^{,k_n}\right\rangle_{\mu+}\right|<\tilde{C}=\tilde{C}(n,k_1,\ldots,k_n).\tag{2}$$

Следствие 2. *Верна оценка*

$$\left|\left\langle\sigma_{t_1}^{,k_1},\ldots,\sigma_{t_n}^{,k_n}\right\rangle_{\mu+}\right|<\tilde{C}_1\left(\tilde{C}_2e^{-2\beta/n}\right)^{\hat{d}\{t_1,\ldots,t_n\}},\tag{3}$$

где $\tilde{C}_2$ — абсолютная константа, $\tilde{C}_1=\tilde{C}_1(n,k_1,\ldots,k_n)$.

Прежде, чем доказывать теорему 1 и оба ее следствия, заметим, что нельзя получить оценки (1) и (2) с наилучшей константой вида (1.10) или (1.10′). Точнее, верно следующее утверждение

Теорема 2. *Не существует такой константы $\varkappa>0$, при которой ряд*

$$\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{(n-1)!}\sum_{(t_2,\ldots,t_n)}\sum_{(k_1,\ldots,k_n)}\left|\left\langle\sigma_{t_1}^{,k_1},\ldots,\sigma_{t_n}^{,k_n}\right\rangle_{\mu+}\right|\prod_{i=1}^{n}\frac{\varkappa^{k_i}}{k_i!}\tag{4}$$

сходится для какой-нибудь (а следовательно, и для любой) точки $t_1\in Z^\nu$.

Доказательство. Допустим противное: ряд (4) сходится при некотором $\varkappa>0$.

Пусть $\mu_{\beta,h}$, $h\neq0$,— предельная мера для модели Изинга. В силу единственности такой меры при $h\neq0$ (см. § 0.1), $\mu_{\beta,h}=\tilde{\mu}_h=\lim\limits_{\Lambda\nearrow Z^\nu}\tilde{\mu}_{\Lambda,h}$, где $\tilde{\mu}_{\Lambda,h}$ — гиббсовские перестройки меры μ_Λ^+:

$$\frac{d\tilde{\mu}_{\Lambda,h}}{d\mu_\Lambda^+}=\tilde{Z}_\Lambda^{-1}\exp\left\{h\sum_{t\in\Lambda}\sigma_t\right\}.\tag{5}$$

Разложим среднее $\langle\sigma_t\rangle_{\tilde{\mu}_{\Lambda,h}}$ по семиинвариантам меры μ_Λ^+:

$$\langle\sigma_t\rangle_{\tilde{\mu}_{\Lambda,h}}=\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{(n-1)!}\sum_{(t_2,\ldots,t_n)}\sum_{(k_1,\ldots,k_n)}\prod_{i=1}^{n}\frac{h^{k_i}}{k_i!}\times$$
$$\times\left\langle\sigma_{t_1}^{,k_1+1},\sigma_{t_2}^{,k_2},\ldots,\sigma_{t_n}^{,k_n}\right\rangle_{\mu_\Lambda^+},\quad t_1=t.\tag{6}$$

Из предположения о том, что ряд (4) сходится, с помощью предельного перехода $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^2$ легко выводится, что среднее $\langle \sigma_t \rangle_{\widetilde{\mu}_h} = \langle \sigma_t \rangle_{\beta, h}$ раскладывается в ряд по h, $|h| < \varkappa$, аналогичный ряду (6) (только содержащий семиинварианты меры μ^+) и, следовательно, является аналитической функцией h при $|h| < \varkappa$. С другой стороны, из доказательства существования двух предельных мер μ^+ и μ^- при $h = 0$ (см. конец § 0.I) следует, что среднее

$$m(h) = \langle \sigma_t \rangle_{\beta, h}$$

является разрывной функцией h при $h = 0$. Это противоречие и доказывает теорему 2.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим ансамбль контуров на двойственной решетке $\widetilde{\mathbb{Z}}_2$, т. е. распределение вероятностей на множестве конечных или счетных конфигураций $\alpha = \{\Gamma_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ контуров на $\mathbb{Z}^2$, о котором упоминалось в § 0.I (см. также § 5.III и 1.V). Определим случайное поле $\{\chi_{\bar{t}}\}$ на ребрах $\bar{t}$ решетки $\mathbb{Z}^2$ со значениями в множестве $\{0, 1\}$, положив

$$\chi_{\bar{t}}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если в } \alpha \text{ имеется контур } \Gamma, \text{ проходящий} \\ & \text{через ребро } \bar{t}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Воспользовавшись кластерным представлением статистической суммы Z_Λ для ансамбля контуров (см. § 5.III), с помощью методов главы III можно показать, что при достаточно большом значении β кластерное разложение корреляционной функции f_A и средних $\langle F_A \rangle$ для любой локальной ограниченной функции от поля $\{\chi_t\}$ удовлетворяет условиям леммы 4.3.III и, таким образом, эти средние допускают экспоненциально-регулярное кластерное разложение (см. § 3.III, определение 1) с параметром $\lambda = Ce^{-\beta}$, где C — абсолютная константа, а семейство $\mathfrak{A}$, фигурирующее в определении экспоненциально-регулярного разложения, состоит из всех ребер решетки $\mathbb{Z}^2$.

Введем теперь функции χ_Γ, определенные на конфигурациях контуров α:

$$\chi_\Gamma(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Gamma \in \alpha, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и для любого конечного набора $\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ контуров

(которые могут, вообще говоря, повторяться в наборе γ несколько раз) положим

$$\chi_\gamma(\alpha) = \prod_{\Gamma \in \gamma} \chi_\Gamma(\alpha).$$

Легко видеть, что χ_Γ, а также χ_γ являются локальными функциями от поля $\{\chi_{\bar{t}}\}$. Снова применяя рассуждения, аналогичные рассуждениям из гл. III (см. также [49]), легко показать, что для любого набора контуров $\gamma = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ верна оценка

$$|\langle \chi_\gamma \rangle| \leqslant \prod_{\Gamma \in \hat{\gamma}} (Ce^{-\beta})^{|\Gamma|}, \tag{7}$$

где C — абсолютная константа, а произведение $\prod_{\Gamma \in \hat{\gamma}}$ берется по совокупности $\hat{\gamma} \subseteq \gamma$ всех попарно различных контуров из γ. Таким образом, применяя к совокупности функций $G = \{\chi_\gamma\}$ теорему 1.3, с помощью неравенства (7) получим следующую оценку семиинвариантов $\langle \chi_{\gamma_1}, \ldots, \chi_{\gamma_N} \rangle$, где $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ — произвольная последовательность наборов контуров: $\gamma_i = \left\{\Gamma_1^{(i)}, \ldots, \Gamma_{s_i}^{(i)}\right\}$.

Теорема 3. *Верна оценка*

$$\langle \chi_{\gamma_1}, \ldots, \gamma_{\gamma_N} \rangle < \prod_{\Gamma}{}' (Ce^{-\beta})^{\Gamma} \prod_{i=1}^{N} \hat{C}^{\hat{d}_{\tilde{\gamma}_i}} (Ce^{-\beta})^{d(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)} \prod_{i=1}^{N} n_i, \tag{8}$$

где $C > 1$ и $\hat{C} > 1$ — константы, а произведение $\prod_{\Gamma}'$ берется по совокупности $\hat{\gamma}$ всех различных контуров Γ из набора $\gamma = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_N$, $\tilde{\gamma}_i = \cup \tilde{\Gamma}_j$ — множество вершин контуров, входящих в γ_i, $\hat{d}_{\tilde{\gamma}_i} = d_{\tilde{\gamma}_i}(\mathfrak{A})$ и $d(\gamma_1, \ldots, \gamma_N) = d(\mathfrak{A}, \gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ величины, определенные в § 4.II, а $\mathfrak{A}$ — совокупность ребер решетки $\mathbb{Z}^2$, n_i, $i = 1, \ldots, N$, кратность набора γ_i в последовательности $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\}$.

В частном случае, который нам ниже понадобится, когда все наборы γ_i в $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\}$ состоят из попарно-различных контуров, последовательно охватывающих друг друга, величина $\hat{d}_{\tilde{\gamma}} \leqslant \sum_{\Gamma \in \gamma} |\Gamma|$ и в оценке (8) можно отбросить множитель $\prod_i \hat{C}^{\hat{d}_{\tilde{\gamma}_i}}$ (заменив константу C на $C\hat{C}$).

Перейдем к выводу оценок (1) и (1′). Для каждой точки $t \in Z^2$ выделим в конфигурации контуров α те из них, которые охватывают точку t. Очевидно, что эти контуры последовательно охватывают друг друга и для почти всех α число их конечно. Кроме того, для почти всех (относительно меры μ^+) конфигураций спинов $\{\sigma_t,\ t \in Z^2\}$

$$\sigma_t = \prod_\Gamma (-1)^{\chi_\Gamma} = \prod_\Gamma (1 - 2\chi_\Gamma), \tag{9}$$

где произведение берется по всем контурам Γ на Z^2, охватывающим точку t. Переписав (9) в виде

$$\sigma_t = 1 - 2\sum_\Gamma \chi_\Gamma +$$
$$+4 \sum_{\{\Gamma_1, \Gamma_2\}, \Gamma_1 \neq \Gamma_2} \chi_{\Gamma_1}\chi_{\Gamma_2} + \ldots + (-2)^n \sum_{\substack{\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\},\\ \Gamma_i \neq \Gamma_j, i \neq j}} \chi_{\Gamma_1} \ldots \chi_{\Gamma_n} + \ldots \tag{10}$$

и подставив (10) в (1), получим, что семиинвариант $\left\langle \sigma_{t_1}^{,k_1}, \ldots, \sigma_{t_n}^{,k_n} \right\rangle$ равен

$$\sum_{\substack{\{\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_{k_1}^{(1)}\},\\ \cdots\cdots\\ \{\gamma_1^{(n)}, \ldots, \gamma_{k_n}^{(n)}\},}} \prod_{i,j} (-2)^{\left|\gamma_j^{(i)}\right|} \left\langle \prod_{i,j}{}' \chi_{\gamma_j^{(i)}} \right\rangle, \tag{11}$$

где суммирование происходит по последовательностям $\{\gamma_j^{(i)}\}$, $i = 1, \ldots, n$, наборов контуров, каждый из которых состоит из попарно-различных контуров и все контуры из наборов $\{\gamma_j^{(i)}\}$, $j = 1, \ldots, k_i$ охватывают точку t_i.

Легко проверить, что для любого слагаемого в (11)

$$r(t_1, \ldots, t_n) \leqslant \sum_{\Gamma \in \hat{\gamma}} |\Gamma| + d\left\{\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_{k_1}^{(1)}, \ldots, \gamma_{k_n}^{(n)}\right\},$$

где $\hat{\gamma} \subseteq \gamma$ — множество различных контуров Γ в наборе $\gamma = \bigcup_{i,j} \gamma_j^{(i)}$. Для фиксированного набора $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$ различных контуров, каждый из которых охватывает какую-нибудь из точек $t_1, \ldots, t_n$, число $N_{\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}}(k_1, \ldots, k_n)$ последовательностей $\{\gamma_j^{(i)}, (i, j)\}$, по которым берется сумма (11) и для которых $\hat{\gamma} = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$, не превосходит $2^{(k_1 + \ldots + k_n)m}$. Действительно, это вытекает из

представления:

$$N_{\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}}(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{n_1 \geqslant 1, \ldots, n_m \geqslant 1} B_{n_1, \ldots, n_m}^{k_1, \ldots, k_n}, \tag{12}$$

где числа $B_{n_1, \ldots, n_m}^{k_1, \ldots, k_n}$ определяются из разложения:

$$\prod_{q=1}^m \prod_i{}' \left(1 + \lambda_{\Gamma_q}\right)^{k_i} = \sum_{n_1 \geqslant 0, \ldots, n_m \geqslant 0} B_{n_1, \ldots, n_m}^{k_1, \ldots, k_n} \lambda_{\Gamma_1}^{n_1} \ldots \lambda_{\Gamma_m}^{n_m}; \tag{13}$$

здесь произведение $\prod_i{}'$ берется по тем i, для которых точка t_i охватывается контуром Γ_q. Выберем далее в наборе $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ те контуры, которые охватывают точку t_1; пусть их число s_1, среди оставшихся отберем контуры, охватывающие t_2, число их обозначим s_2, и т. д. Таким образом, с помощью оценки (8), получим, что

$$\left|\left\langle \sigma_{t_1}^{,k_1}, \ldots, \sigma_{t_n}^{,k_n} \right\rangle\right| < (C\varkappa^{-1}\beta)^{r(t_1, \ldots, t_n)} (k_1 + \ldots + k_n)^{k_1 + \ldots + k_n} \times$$
$$\times \sum_{(s_1, \ldots, s_n)} \prod_{i=1}^n 2^{(k_1 + \ldots + k_n)s_i} \sum_{\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{s_i}\}} \prod_{j=1}^{s_i} \varkappa^{(\Gamma_j)}, \tag{14}$$

где сумма $\sum_{\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{s_i}\}}$ берется по неупорядоченным наборам $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{s_i}\}$ попарно различных контуров Γ_j, охватывающих точку t_i, $\varkappa$ — некоторая достаточно малая константа. Далее

$$\sum_{\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{s_i}\}} \prod \varkappa^{|\Gamma_j|} \leqslant \frac{1}{s_i!} \left(\sum_\Gamma{}^{(t)} \varkappa^{|\Gamma|}\right)^{s_i} = \frac{C^{s_i}}{s_i!}, \tag{15}$$

где сумма $\sum_\Gamma^{(t)} \varkappa^{|\Gamma|}$ берется по всем контурам Γ, охватывающим заданную точку t (при подходящем выборе $\varkappa$ этот ряд сходится). Из (15), (14) и неравенства

$$(k_1 + \ldots + k_n)^{k_1 + \ldots + k_n} < n^{k_1 + \ldots + k_n} \prod_{i=1}^n k_i!$$

вытекает (1) и (1′). Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Поскольку

$$(Ce^{-\beta})^{r(t_1, \ldots, t_n)} \leqslant (Ce^{-\beta})^{\hat{d}\{t_1, \ldots, t_n\}} + (Ce^{-\beta})^{\min|\Gamma|}$$

и сумма $\sum_{\{t_2,\ldots,t_n\}} (Ce^{-\beta})^{\widehat{d}\,\{t_1,\ldots,t_n\}} < \infty$, как следует из леммы 10.4.II, достаточно доказать, что

$$\sum_{\{t_2,\ldots,t_n\}} (Ce^{-\beta})^{\min|\Gamma|} < \infty. \qquad (16)$$

Так как фиксированный контур может охватывать не более чем $|\theta(\Gamma)|^{n-1}$ наборов $\{t_2, \ldots, t_n\}$, где $\theta(\Gamma)$ — внутренность контура Γ, и $|\theta(\Gamma)| < |\Gamma|^2$, получаем, что сумма (16) оценивается величиной

$$\sum_{\Gamma:\,0(\Gamma)\geqslant n} |\Gamma|^{2(n-1)} (Ce^{-\beta})^{|\Gamma|} < \infty,$$

где сумма берется по контурам Γ, охватывающим точку t.

Доказательство следствия 2. Оценка (3) вытекает из того, что

$$\widehat{d}_{\{t_1,\ldots,t_n\}} \leqslant \frac{n \min|\Gamma|}{2}.$$

§ 6. Автомодельный предел случайного поля

В этом параграфе мы продемонстрируем одно простое применение оценок убывания семиинвариантов, связанное с предельной теоремой для так называемой ренормализационной группы.

Пусть $x = \{x(t),\ t \in Z^\nu\}$ — трансляционно инвариантное случайное поле с вещественными значениями, нулевым средним: $\langle x(t)\rangle = 0$, $t \in Z^\nu$, у которого все моменты конечны

$$\langle |x(t)|^k\rangle < \infty, \quad t \in Z^\nu, \quad k > 0, \qquad (1)$$

(и, следовательно, конечны и смешанные моменты $\left\langle (x(t_1))^{k_1} \ldots (x(t_n))^{k_n} \right\rangle$ для любых $t_1, \ldots, t_n$ и $k_1 \geqslant 0, \ldots, k_n \geqslant 0$.

Пусть $\Lambda_0 = \Lambda_0^N = \{0 \leqslant t^{(i)} < N\}$ — куб в Z^ν (N — целое число) и $\Lambda_t = \Lambda_t^{(N)} = \Lambda_0 + Nt$ его сдвиг на вектор Nt, где $t \in Z^\nu$. Очевидно, что $\bigcup_{t \in Z^\nu} \Lambda_t = Z^\nu$ и $\Lambda_t \cap \Lambda_{t'} = \varnothing$ при $t \neq t'$. Определим новое случайное поле $\widehat{x} = \widehat{x}^{(N)} = \{\widehat{x}(t),\ t \in \widehat{Z}^\nu\}$, положив

$$\widehat{x}(t) = \widehat{x}^N(t) = s_t^{(N)}/N^{\nu/2}, \quad s_t^{(N)} = \sum_{t' \in \Lambda_t} x(t'). \qquad (2)$$

Очевидно, что новое случайное поле трансляционно-инвариантно, обладает всеми моментами и $\langle \widehat{x}(t)\rangle = 0$. Преобразование (2): $x \mapsto \widehat{x}^{(N)}$ в пространстве случайных полей называется *ренормализационным* преобразованием, которое мы обозначим через G_N. Легко проверить, что $G_{N_1}G_{N_2} = G_{N_1N_2}$, т. е. ренормализационные преобразования образуют полугруппу.

Пусть существует предел

$$\widehat{x} = \lim_{N\to\infty} G_N x \qquad (3)$$

(а, следовательно, и предел $\lim_{l\to\infty} \left(G_{N_0}^l\right) x = \widehat{x}$ при любом фиксированном N_0), который называется *автомодельным пределом* поля исходного поля x. Сходимость в (3) понимается как слабая локальная сходимость (сходимость конечномерных распределений, см. § 1.I) распределений вероятностей μ_N в R^{Z^ν} для значений поля $\widehat{x}^{(N)}$ к распределению μ поля $\widehat{x}$.

Теорема 1. *Пусть трансляционно-инвариантное поле $x = \{x(t),\ t \in Z^\nu\}$ с нулевым средним $\langle x(t)\rangle = 0$ удовлетворяет условию (1) и условию сильного убывания корреляций: для всех n и $k_1, \ldots, k_n$*

$$\sum_{(t_2,\ldots,t_n)} \left| \left\langle x(t_1)^{,k_1}, \ldots, x(t_n)^{,k_n} \right\rangle \right| < \infty. \qquad (4)$$

Тогда существует автомодельный предел (3) поля x и предельное поле $\widehat{x} = \{\widehat{x}(t),\ t \in Z^\nu\}$ является независимым трансляционно-инвариантным гауссовским полем с нулевым средним $\langle \widehat{x}(t)\rangle = 0$ и дисперсией

$$D = D(\widehat{x}(t)) = \lim_{N\to\infty} \frac{Ds_t^{(N)}}{N^\nu} = \sum_{t' \in Z^\nu} \langle x(t), x(t')\rangle. \qquad (5)$$

Доказательство. Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть последовательность вероятностных распределений μ_N в пространстве R^n с конечными моментами и нулевыми средними $\langle x_i\rangle_{\mu_N} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ такова, что семиинварианты*

$$\left\langle x_{i_1}^{,k_1}, \ldots, x_{i_s}^{,k_s} \right\rangle_{\mu_N} \to 0, \quad N \to \infty \qquad (6)$$

для любых наборов индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$

и чисел $k_1 \geqslant 1, \ldots, k_s \geqslant 1$ *таких, что* $k_1 + \ldots + k_s > 2$, *а также*

$$\langle x_i, x_j \rangle_{\mu_N} \to b_{ij} \text{ при } N \to \infty. \tag{7}$$

(Здесь $(x_1, \ldots, x_n)$ *— координаты в* R^n*).*

Тогда μ_N *слабо сходятся к гауссовскому распределению в* R^ν *с нулевым средним и матрицей ковариаций* $\{b_{ij}, i, j = 1, \ldots, n\}$.

Доказательство основано на аналогичном утверждении о сходимости мер при сходимости моментов (см., например, [58]) и замечании о том, что лишь у гауссовой меры все высшие семиинварианты равны нулю (см. § 1.II).

Условие (6) для полей $\widehat{x}^{(N)}$ вида (2) легко вытекает из (4): следует представить семиинвариант $\left\langle \widehat{x}^N(t_1)^{,k_1}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \widehat{x}^N(t_n)^{,k_n} \right\rangle$ в виде суммы семиинвариантов исходного поля x с множителем $\left(N^{\nu/2(k_1+\ldots+k_n)}\right)^{-1}$, и заметить, что вся сумма имеет порядок $\sim N^\nu$.

Далее при $t \neq t'$

$$\langle \widehat{x}^{(N)}(t), \widehat{x}^{(N)}(t') \rangle = \frac{1}{N^\nu} \sum_{\substack{t_1 \in \Lambda_t^N, \\ t_1' \in \Lambda_{t'}^N}} \langle x(t_1), x(t_1') \rangle. \tag{8}$$

Выделим в каждом кубе Λ_t^N узкий слой $\partial_{\sqrt{N}} \Lambda_t^N$ ширины $N^{1/2}$ около границы $\partial \Lambda_t^N$ и обозначим через $\overline{\Lambda}_t^N = \Lambda_t^N \setminus \partial_{\sqrt{N}} \Lambda_t^N$. Тогда при $t_1 \in \Lambda_t^N$ в силу (4)

$$\sum_{t_1' \in \overline{\Lambda}_{t'}^N} \langle x(t_1), x(t_1') \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty \tag{9}$$

равномерно по t_1, а

$$\sum_{\substack{t_1 \in \Lambda_t^N, \\ t_1' \in \partial_{\sqrt{N}} \Lambda_{t'}^N}} \langle x(t_1), x(t_1') \rangle \sim N^{\nu - 1/2}. \tag{10}$$

Из (8), (9) и (10) получаем, что $\langle \widehat{x}^{(N)}(t), \widehat{x}^{(N)}(t') \rangle \to 0$ при $N \to \infty$. Равенство (5) выводится аналогично. Теорема доказана.

Следствие 1. *В случае, когда дисперсия* $D > 0$ *(т. е.* $Ds_t^{(N)} = O(N^\nu)$*), поле*

$$\widetilde{x}^{(N)}(t) = \frac{s_t^{(N)}}{\left(Ds_t^{(N)}\right)^{1/2}} = \widehat{x}^N(t) \left(\frac{\left(Ds_t^N\right)}{N^\nu} \right)^{-1/2}$$

сходится к гауссовскому независимому полю с единичной дисперсией.

Следствие 2. *Пусть поле на решетке имеет вид* $\{f(x(t)), t \in Z^\nu\}$, *где* $\{x(t), t \in Z^\nu\}$ *гиббсовское трансляционно-инвариантное поле, изучавшееся в теореме 2.4, а* f *— вещественная ограниченная функция на пространстве* S, *причем* $\langle f(x(t)) \rangle_\mu = 0$, *где* μ *— распределение для поля* $\{x(t), t \in Z^\nu\}$. *Тогда автомодельный предел поля* $\{f(x(t)), t \in Z^\nu\}$ *является гауссовским независимым полем с положительной дисперсией.*

Это следует из результатов § 4, а также из разложения

$$\sum_{t'} \langle f(x(t)), f(x(t')) \rangle = \langle f^2(x(t)) \rangle_{\mu_0} + O(\beta),$$

которое также легко выводится из рассмотрений § 4 ($\langle\ \rangle_{\mu_0}$ — среднее по распределению μ_0 исходного независимого поля). В силу замечания в конце § 4, этот результат верен и для неограниченной функции f, для которой конечны все моменты: $\langle |f(x(t))|^k \rangle_{\mu_0} < \infty$.

ГЛАВА VII

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Гиббсовские квазисостояния

Развитая в предыдущих главах теория кластерных разложений для классических систем может быть во многом перенесена и на случай квантовых систем. Здесь мы только вкратце остановимся на этом.

Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная алгебра с единицей $\mathbb{1}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Линейный функционал $\langle\cdot\rangle$ на $\mathfrak{A}$, такой, что $\langle\mathbb{1}\rangle = 1$, называется *квазисостоянием*. В случае, когда в алгебре $\mathfrak{A}$ определена инволюция $*$: $x\mapsto x^*$, $x\in\mathfrak{A}$, квазисостояние, неотрицательное на положительных элементах (т. е. на элементах вида xx^*, $x\in\mathfrak{A}$), называется *состоянием*. Напомним, что алгебра $\mathfrak{A}$ называется *супералгеброй*, если она представлена в виде прямой суммы $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0\oplus\mathfrak{A}_1$, где $\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{A}$ подалгебра $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}$ подпространство $\mathfrak{A}$ такое, что $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{A}_1$, а $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{A}_0$. Элементы из $\mathfrak{A}_0$ называются *четными*, а элементы из $\mathfrak{A}_1$ — *нечетными*. Четные и нечетные элементы называются *однородными*. Заметим, что всякую алгебру $\mathfrak{A}$ можно считать тривиальной супералгеброй, если положить $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}=\{0\}$. Таким образом, все приводимые ниже построения для супералгебр автоматически применимы и к любой алгебре.

Квазисостояние $\langle\cdot\rangle$ на супералгебре $\mathfrak{A}$ называется *четным*, если $\langle x\rangle=0$ для любого нечетного $x\in\mathfrak{A}_1$.

Локальная алгебра на счетном множестве T. Пусть каждому конечному подмножеству $\Lambda\subset T$ сопоставлена (супер) алгебра $\mathfrak{A}_\Lambda$ с единицей $\mathbb{1}_\Lambda$, причем для любой пары множеств $\Lambda'\subset\Lambda$ определено гомоморфное вложение $\varphi_{\Lambda',\Lambda}:\mathfrak{A}_{\Lambda'}\to\mathfrak{A}_\Lambda$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}^0=\bigcup_{\Lambda\subset T}\mathfrak{A}_\Lambda$ (точнее, индуктивный предел алгебр $\mathfrak{A}_\Lambda$, см. [10]) называется *локальной* (супер) алгеброй на T. В случае, когда $\mathfrak{A}_\Lambda$ — нормированные алгебры и вложения $\varphi_{\Lambda,\Lambda'}$ — изометричны, в алгебре $\mathfrak{A}^0$ естественно вводится норма и замыкание $\mathfrak{A}^0$

алгебры $\mathfrak{A}^0$ по этой норме называется *квазилокальной* алгеброй (супералгеброй).

Обычно супералгебры $\mathfrak{A}_\Lambda$ и их вложения $\varphi_{\Lambda',\Lambda}$ задаются следующим образом. Пусть $\{\mathfrak{A}_t,\ t\in T\}$ семейство супералгебр, сопоставленных каждой точке $t\in T$, и

$$\mathfrak{A}_\Lambda=\bigotimes_{t\in\Lambda}\mathfrak{A}_t, \tag{1}$$

где $\bigotimes_{t\in\Lambda}$ тензорное произведение супералгебр $\mathfrak{A}_t$ (см. [33]), а вложения имеют вид

$$\varphi_{\Lambda',\Lambda}(x_{\Lambda'})=x_{\Lambda'}\otimes\mathbb{1}_{\Lambda\setminus\Lambda'},\quad x_{\Lambda'}\in\mathfrak{A}_{\Lambda'}. \tag{2}$$

Мы не приводим здесь определения тензорного произведения $A_1\otimes A_2$ супералгебр, но отметим только, что образ $\hat{x}=x\otimes\mathbb{1}_{A_2}\in A_1\otimes A_2$ нечетного элемента $x\in A_1$ коммутирует с образом $\hat{y}=\mathbb{1}_{A_1}\otimes y$ четного элемента $y\in A_2$ и антикоммутирует $(\widehat{xy})=-(\widehat{yx})$ с образом нечетного $y\in A_2$. Образы четных элементов коммутируют.

Примеры. 1. Пусть $\mathfrak{A}_t=A^n$ — C^*-алгебра комплексных матриц порядка n с нормой, порождаемой обычным скалярным произведением в C^n (см. [17]). Тогда C^*-алгебра $\bar{\mathfrak{A}}^0$ называется *спиновой* алгеброй на T.

2. Пусть $\mathfrak{A}_t$ — грассманова супералгебра (см. [5]) с конечным числом образующих (в физических применениях это число выбирается четным). Тогда $\mathfrak{A}^0$ — также грассманова алгебра.

3. Пусть $\mathfrak{A}_t$ — клиффордова супералгебра с единицей $\mathbb{1}_t$ и образующими a_t, a_t^*:

$$a_t^2=(a_t^*)^2=0,\quad a_ta_t^*+a_t^*a_t=\mathbb{1}_t.$$

Из этих соотношений вытекает, что в $\mathfrak{A}_t$ можно выбрать базис $(\mathbb{1}, a_t, a_t^*, a_ta_t^*)$ и, тем самым, $\mathfrak{A}_t$ изоморфна подалгебре $M\subset A^2$ алгебры матриц 2-го порядка с образующими $\mathbb{1}, e_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. Таким образом, в алгебрах $\mathfrak{A}_t$ и в $\mathfrak{A}_\Lambda$ можно ввести норму (сохраняющуюся при вложениях $\varphi_{\Lambda'\Lambda}$) так, что все они будут C^*-алгебрами. Квазилокальная клиффордова супералгебра $\bar{\mathfrak{A}}_0$ называется *алгеброй канонических антикоммутационных соотношений* (или, сокращенно, КАС-алгеброй).

4. Случай классических систем охватывается этой схемой, если выбрать в качестве $\mathfrak{A}_t=\mathfrak{A}$ коммутативную

C^*-алгебру непрерывных ограниченных функций на метрическом пространстве S. Тогда алгебра $\overline{\mathfrak{A}}^0$ совпадает с алгеброй всех ограниченных функций на S^T, непрерывных относительно тихоновской топологии в S^T.

Независимые квазисостояния на $\mathfrak{A}^0$. Пусть локальная супералгебра $\mathfrak{A}^0$ на T получена из семейства супералгебр $\{\mathfrak{A}_t,\ t\in T\}$ с помощью конструкции (1), (2) и $\langle\cdot\rangle_t$ — четные квазисостояния на супералгебрах $\mathfrak{A}_t$. Определим квазисостояние $\langle\rangle$ на $\mathfrak{A}^0$, полагая

$$\Big\langle \bigotimes_{t\in\Lambda} x_t \Big\rangle = \prod_{t\in\Lambda} \langle x_t\rangle_t, \quad x_t\in\mathfrak{A}_t, \tag{3}$$

и затем продолжая его по линейности на всю алгебру $\mathfrak{A}^0$ (и, если это можно, на алгебру $\overline{\mathfrak{A}}^0$ по непрерывности).

Полученное четное квазисостояние на $\mathfrak{A}^0$ называется *независимым*. (Заметим, что для состояний $\langle\cdot\rangle_t$ на $\mathfrak{A}_t$, не являющихся четными, определение (3) некорректно).

Семиинварианты. Пусть задана супералгебра $\mathfrak{A}$, $\langle\ \rangle$ — четное квазисостояние на $\mathfrak{A}$, и последовательность однородных элементов $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$, $\xi_i\in\mathfrak{A}$ (возможно, повторяющихся).

Для каждого подмножества $T\subseteq\mathcal{N}$ запишем его элементы в порядке возрастания $T=(i_1, \ldots, i_p)$, $i_1<i_2<\ldots<i_p$, и в дальнейшем будем отождествлять T с последовательностью $(i_1, \ldots, i_p)$. Положим

$$\xi_T=\xi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_p}.$$

Определим теперь *семиинварианты* $\langle\xi_T'\rangle\equiv\langle\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_p}\rangle$ для всех $T\subseteq\mathcal{N}$ следующим образом. Обозначим через $\hat{T}\subseteq T$ подмножество тех $i\in T$, для которых элемент ξ_i — нечетен. Положим

$$\langle\xi_T'\rangle=0, \quad \text{если } |\hat{T}| \text{ — нечетно.}$$

В случае, если число $|\hat{T}|$ четно, семиинвариант $\langle\xi_T'\rangle$ определим индуктивной формулой, подобной определению (6.1.II):

$$\langle\xi_T\rangle=\sum_{\delta=\{T_1,\ldots,T_k\}}\langle\xi_{T_1}'\rangle\ldots\langle\xi_{T_k}'\rangle(-1)^{\pi}, \tag{4}$$

где сумма берется по всем разбиениям $\delta=\{T_1, \ldots, T_k\}$ множества $\mathcal{N}$, таким, что все $|\hat{T}_i|$ — четны, а $\pi=\pi(\delta)$ — число инверсий порядка в последовательности $(\hat{T}_1, \ldots, \hat{T}_k)$

индексов нечетных элементов, выписанных в том же порядке, в каком они расположены последовательно в блоках T_1, T_2 и т. д., разбиения δ (в силу четности $|\hat{T}_i|$, $(-1)^{\pi}$ не зависит от нумерации этих блоков).

Семиинвариант $\langle\xi_{\mathcal{N}}'\rangle=\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle$ для последовательностей произвольных (неоднородных) элементов $\xi_i\in\mathfrak{A}$ определяется как полилинейная (несимметричная) функция от элементов ξ_i, $i=1, \ldots, N$.

Приведем ряд свойств семиинвариантов.

I. Пусть состояние $\langle\cdot\rangle$ на локальной супералгебре $\mathfrak{A}^0$ независимо (и, следовательно, четно), $\xi_1\in\mathfrak{A}_{\Lambda_1}, \ldots, \xi_N\in\mathfrak{A}_{\Lambda_N}$, а множества $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N\subset T$ попарно не пересекаются. Тогда

$$\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle=0. \tag{5}$$

Доказательство повторяет доказательство аналогичного свойства для семиинвариантов виртуального поля (см. § 1.II).

II. *Формула обращения* (для случая однородных элементов ξ_i):

$$\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle = \sum_{\delta=\{T_1,\ldots,T_k\}}\langle\xi_{T_1}\rangle\ldots\langle\xi_{T_k}\rangle(-1)^{\pi(\delta)}(-1)^{k-1}(k-1)!, \tag{6}$$

где суммирование такое же как и в (4).

Доказательство сводится к формуле обращения Мёбиуса. Для любого разбиения $\delta=\{T_1, \ldots, T_k\}$ множества $\mathcal{N}$ положим

$$f(\delta)=(-1)^{\pi(\delta)}\langle\xi_{T_1}'\rangle\ldots\langle\xi_{T_k}'\rangle,$$
$$g(\delta)=(-1)^{\pi(\delta)}\langle\xi_{T_1}\rangle\ldots\langle\xi_{T_k}\rangle.$$

Из (4) вытекает, что

$$g(\delta)=\sum_{\beta\leqslant\delta}f(\beta).$$

Отсюда по формуле обращения Мёбиуса (см. § 5.II) получаем (6).

III. *Обобщенное разложение по связным группам.* Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ — последовательность однородных элементов и $\delta_0=\{T_1, \ldots, T_k\}$ разбиение: $T_1=(1, \ldots, l_1)$,

$$T_2=(l_1+1, \ldots, l_2), \ldots, T_k=(l_{k-1}+1, \ldots, N).$$

Тогда

$$\langle \xi_{T_1}, \ldots, \xi_{T_k} \rangle = \sum_{\delta' : \delta' \vee \delta_0 = \underline{1}} \left\langle \xi'_{T'_1} \right\rangle \ldots \left\langle \xi'_{T'_q} \right\rangle (-1)^{\pi(\delta')}, \tag{7}$$

где суммирование берется по всем разбиениям δ', связным относительно разбиения δ_0 (см. § 1.II).

Доказательство (7) аналогично доказательству подобной формулы (10.1.II) для обычных семиинвариантов.

IV. *Гауссовы квазисостояния.* Пусть $\mathfrak{G} = \{\eta_\alpha,\ \eta_\alpha \in \mathfrak{A}\}$ совокупность образующих супералгебры $\mathfrak{A}$ и все η_α (кроме $\mathbb{1}$) — нечетны. Четное квазисостояние $\langle\cdot\rangle$ на супералгебре $\mathfrak{A}$ называется *гауссовским* или *обобщенно-свободным* (относительно выделенной системы $\mathfrak{G}$), если все семиинварианты

$$\langle \eta_{\alpha_1}, \ldots, \eta_{\alpha_n} \rangle = 0 \text{ при } n > 2.$$

Иными словами, отличны от нуля только парные (двухчастичные) семиинварианты и любой момент $\langle \eta_1 \ldots \eta_N \rangle$, $\eta_i = \eta_{\alpha_i}$, выражается через них по формуле (6)

$$\langle \eta_1 \cdot \ldots \cdot \eta_N \rangle = \sum \langle \eta_{i_1}, \eta_{j_1} \rangle \ldots \langle \eta_{i_k}, \eta_{j_k} \rangle (-1)^\pi, \tag{8}$$

где сумма берется по всем разбиениям множества $(1, \ldots, N)$ на k пар $(N = 2k) : (i_l, j_l)$, $i_l < j_l$, $l = 1, \ldots, k$, а π — четность перестановки $(i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_k, j_k)$.

V. *Формальные ряды.* а) Рассмотрим сначала случай, когда все $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — четные элементы $\mathfrak{A}$. Тогда семиинвариант $\langle \xi_1, \ldots, \xi_N \rangle$ является коэффициентом при произведении $\lambda_1 \ldots \lambda_N$ в разложении в формальный степенной ряд по $\{\lambda_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ величины

$$\ln \langle e^{\lambda_1 \xi_1} \ldots e^{\lambda_N \xi_N} \rangle \tag{9}$$

($e^{\lambda\xi}$ определяется также с помощью формального разложения в ряд). Это утверждение очевидно.

Далее $\ln \langle e^\xi \rangle$, где $\xi = \lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_N\xi_N$, служит производящей функцией для симметризованных семиинвариантов:

$$\ln \langle e^\xi \rangle = \sum_{\{m_1, \ldots, m_N\}} \frac{\lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_N^{m_N}}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_N!} \langle \xi_1^{,m_1}, \ldots, \xi_N^{,m_N} \rangle^{\mathrm{sym}}, \tag{10}$$

где

$$\langle \xi_1, \ldots, \xi_M \rangle^{\mathrm{sym}} = \frac{1}{M!} \sum_\sigma \langle \xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(M)} \rangle, \tag{11}$$

а суммирование происходит по всем перестановкам σ множества $(1, \ldots, M)$.

в) Пусть теперь элементы $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ нечетны. Тогда можно получить формулы, аналогичные формулам (9) и (10), с помощью формальных рядов по «грассмановым переменным». Введем для этого грассманову алгебру $\mathfrak{G}$ с единицей $\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}$ и образующими $\eta_1, \ldots, \eta_N$, и пусть $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{G}$ тензорное произведение супералгебр (в котором η_i коммутирует с четными и антикоммутируют с нечетными элементами алгебры $\mathfrak{A}$). Любой элемент $A \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{G}$ может быть записан в виде

$$A = \sum_{(i_1, \ldots, i_k)} a_{i_1, \ldots, i_k} \eta_{i_1} \ldots \eta_{i_k}, \quad a_{i_1, \ldots, i_k} \in \mathfrak{A}.$$

Определим с помощью квазисостояния $\langle\cdot\rangle$ на $\mathfrak{A}$ линейное отображение $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ по формуле

$$A \mapsto \langle A \rangle_{\mathfrak{A}} = \sum_{(i_1, \ldots, i_k)} \langle a_{i_1, \ldots, i_k} \rangle \eta_{i_1} \ldots \eta_{i_k}.$$

Рассмотрим многочлен от $\eta_1, \ldots, \eta_N$

$$\ln \langle e^{\eta_1 \xi_1} \ldots e^{\eta_N \xi_N} \rangle_{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{G}. \tag{12}$$

Поскольку $\eta_i\xi_i$ — четные элементы супералгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{G}$, рассуждая как и при выводе (9), получим, что слагаемое, содержащее произведение $\eta_1 \ldots \eta_N$ в (12), которое мы обозначим через $\langle \eta_1\xi_1, \ldots, \eta_N\xi_N \rangle_{\mathfrak{A}}$, имеет вид

$$\langle \eta_1\xi_1, \ldots, \eta_N\xi_N \rangle_{\mathfrak{A}} = \sum_{\delta = \{T_1, \ldots, T_k\}} (-1)^{k-1} (k-1)! \langle (\eta\xi)_{T_1} \rangle_{\mathfrak{A}} \ldots \langle (\eta\xi)_{T_k} \rangle_{\mathfrak{A}}, \tag{13}$$

где сумма берется по всем разбиениям $\delta = \{T_1, \ldots, T_k\}$ множества $\mathcal{N}$ на блоки с четной мощностью $|T_i|$, а для $T = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, обозначено

$$(\eta\xi)_T = \eta_{i_1}\xi_{i_1} \ldots \eta_{i_p}\xi_{i_p} = (-1)^p \xi_T \eta_{\overline{T}},$$

где $\overline{T}$ обозначает последовательность T с обращенным порядком: $\eta_{\bar T} = \eta_{i_p} \dots \eta_{i_1}$. Отсюда

$$\langle(\eta\xi)_{T_1}\rangle_{\mathfrak{A}} \dots \langle(\eta\xi)_{T_k}\rangle_{\mathfrak{A}} = \langle\xi_{T_1}\rangle \dots \langle\xi_{T_k}\rangle \eta_1 \dots \eta_N (-1)^{\pi(\delta)} \tag{14}$$

и с помощью (4) и (13) находим, что

$$\langle\eta_1\xi_1, \dots, \eta_N\xi_N\rangle_{\mathfrak{A}} = \langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle \eta_1 \dots \eta_N,$$

т. е. семиинвариант $\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$ является коэффициентом при $\eta_1 \dots \eta_N$ в полиноме (12). Если ввести квазисостояние ω_0 на алгебре $\mathfrak{G}$ по формулам

$$\omega_0(\eta_N) = 1, \quad \omega_0(\eta_T) = 0, \quad \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}, \quad T \subset \mathcal{N},$$

(так называемый интеграл Березина см. [4]), то из (14) следует, что

$$\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle = \omega_0(\ln\langle e^{\eta_1\xi_1} \dots e^{\eta_N\xi_N}\rangle). \tag{15}$$

Эта формула может быть использована при оценке семиинвариантов.

Гиббсовские перестройки квазисостояния. Пусть $\langle\ \rangle_0$ квазисостояние, определенное на локальной алгебре $\mathfrak{A}^0$ на T и $\{U_\Lambda, \Lambda \subset T\}$ — семейство «взаимодействий»: $U_\Lambda \in \mathfrak{A}_\Lambda$. Определим квазисостояние $\langle\cdot\rangle_\Lambda$ на $\mathfrak{A}^0$ по формуле

$$\langle F\rangle_\Lambda = Z_\Lambda^{-1} \langle F \exp\{-U_\Lambda\}\rangle_0, \quad F \in \mathfrak{A}^0 \tag{16}$$

в предположении, что выполнено условие устойчивости

$$Z_\Lambda = \langle\exp\{-U_\Lambda\}\rangle_0 \neq 0, \infty,$$

а также экспонента $\exp\{-U_\Lambda\}$ определена в алгебре $\mathfrak{A}_\Lambda$ (это условие выполнено, например, для банаховых алгебр $\mathfrak{A}_\Lambda$). Квазисостояние $\langle\cdot\rangle_\Lambda$ называется конечной *гиббсовской перестройкой* квазисостояния $\langle\cdot\rangle_0$. В случае, когда существует *термодинамический предел*

$$\lim_{\Lambda \nearrow T} \langle F\rangle_\Lambda = \langle F\rangle$$

для всех $F \in \mathfrak{A}^0$, он определяет квазисостояние $\langle\cdot\rangle$ на $\mathfrak{A}^0$, называемое *предельной* гиббсовской перестройкой квазисостояния $\langle\cdot\rangle_0$. Чаще всего взаимодействия U_Λ задаются, как и в классическом случае, с помощью потенциала $\{\Phi_A, A \subset T\}$, $\Phi_A \in \mathfrak{A}_A$:

$$U_\Lambda = \sum_{A \subseteq \Lambda} \Phi_A. \tag{17}$$

Многие понятия и приемы из предыдущих глав переносятся на случай гиббсовских перестроек квазисостояний (кластерное представление статистических сумм, кластерное разложение средних $\langle F_A\rangle$, и т. д.).

Теорема 1. *Пусть все (супер)алгебры $\{\mathfrak{A}_t, t \in T\}$, определяющие локальную алгебру $\mathfrak{A}^0$ совпадают: $\mathfrak{A}_t = \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — банахова (супер)алгебра и независимое квазисостояние $\langle\cdot\rangle_0$ на $\mathfrak{A}^0$ является произведением одного и того же четного квазисостояния $\langle\cdot\rangle$ на $\mathfrak{A}$. Пусть далее взаимодействие U_Λ имеет вид (17), причем для любой точки $t \in T$ и любого $n \geqslant 2$ выполнено условие ($\|\cdot\|$ норма в $\mathfrak{A}^0$)*

$$\sum_{A:\, t \in A, |A| = n} \|\Phi_A\| < c\lambda^n \quad \text{и} \quad \Phi_{\{t\}} = 0, \ t \in T, \tag{18}$$

где $0 < \lambda < 1$, а c — достаточно мало: $c < c_0(\lambda)$. Тогда существует предельная гиббсовская перестройка $\langle\ \rangle$ на $\mathfrak{A}^0$ и для любого элемента $F = F_B \in \mathfrak{A}_B$, $B \subset T$ его среднее $\langle F_B\rangle$ допускает кластерное разложение

$$\langle F_B\rangle = \sum_{R \subset T} b_R(F_B), \tag{19}$$

аналогичное разложению (8.3.III) *или* (11.3.III).

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы I.I.IV; следует воспользоваться разложением:

$$\exp\{-U_\Lambda\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-U_\Lambda)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{(A_1, \dots, A_n)} \Phi_{A_1} \dots \Phi_{A_n} \tag{20}$$

и затем сгруппировать все члены с одним и тем же (неупорядоченным) набором носителей $\{A_1, \dots, A_n\}$.

Возмущение взаимодействия и ряды по средним и семиинвариантам. Пусть $\langle\cdot\rangle_0$ — квазисостояние на алгебре $\mathfrak{A}^0$ и $\langle\ \rangle_1$ и $\langle\ \rangle_2$ — его гиббсовские перестройки (16) с помощью взаимодействий U_1 и $U_2 = U_1 + V$ соответственно.

Заметим, что в общем случае (в отличие от классического) не выполняется свойство транзитивности гиббсовских перестроек, т. е., вообще говоря,

$$\langle F\rangle_2 \neq \frac{\langle Fe^{-V}\rangle_1}{\langle e^{-V}\rangle_1}, \quad F \in \mathfrak{A}^0.$$

Тем не менее, можно представить $\langle F\rangle_2$ в виде рядов, в которые входят средние (или семиинварианты) от возмущения V. Введем обозначение

$$\Gamma(s) = e^{-s(U_1+V)}e^{sU_1}. \tag{21}$$

Тогда

$$\langle F\rangle_2 = \frac{\langle Fe^{-(U_1+V)}e^{U_1}e^{-U_1}\rangle_0}{\langle e^{-(U_1+V)}e^{U_1}e^{-U_1}\rangle_0} = \frac{\langle F\Gamma(1)\rangle_1}{\langle\Gamma(1)\rangle_1}. \tag{22}$$

Легко проверить, что

$$\frac{d\Gamma}{ds} = -\Gamma(s)V(s), \quad V(s) = e^{-sU_1}Ve^{sU_1}.$$

Отсюда

$$\Gamma(1) = \mathbb{1} - \int_0^1 \Gamma(s)V(s)\,ds =$$

$$= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int\limits_{0\leqslant s_1\leqslant\ldots\leqslant s_n\leqslant 1}\int V(s_1)\ldots V(s_n)\,ds_1\ldots ds_n \tag{23}$$

(интеграл в (23) понимается в смысле Бохнера; см. [28]).

Определим для любого конечного множества $x = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset [0, 1]$ отрезка $[0, 1]$, где $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$, элемент

$$V(x) = V(s_1)V(s_2)\ldots V(s_n).$$

Тогда формула (23) может быть переписана в виде

$$\Gamma(1) = \int\limits_{\Omega_{\text{фин}}} (-1)^{|x|}V(x)\,d\nu(x), \tag{24}$$

где ν — мера на пространстве $\Omega_{\text{фин}}$ конечных подмножеств отрезка $[0, 1]$, определенная в § 1.

С помощью представления (22) и (23), (24) можно в ряде случаев получить кластерные представления для среднего $\langle F\rangle_2$. Кроме того, справедливо непосредственное разложение для среднего $\langle F\rangle_2$, аналогичное разложению по семиинвариантам в классическом случае (см. § 1.II).

Лемма 2. *Пусть U_1 и V — четные элементы супералгебры $\mathfrak{A}$ и $\langle\cdot\rangle_0$ — четное квазисостояние. Тогда справедливо равенство*

$$\langle F\rangle_2 = \langle F\rangle_1 + \sum(-1)^n \int\limits_{s_1<\ldots<s_n}\int \langle F, V(s_1), \ldots, V(s_n)\rangle_1 \times$$
$$\times ds_1, \ldots, ds_n. \tag{25}$$

Доказательство. Если ввести функцию $\Phi_F(x)$, определенную на подмножествах $x = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $0 \leqslant s_1 < \ldots < s_n \leqslant 1$ по формуле

$$\Phi_F(x) = \langle F, V(s_1), \ldots, V(s_n)\rangle_1,$$

то (25) перепишется в виде

$$\langle F\rangle_2 = \int\limits_{\Omega_{\text{фин}}} (-1)^{|x|}\Phi_F(x)\,d\nu(x). \tag{26}$$

С другой стороны, как следует из (24)

$$\langle F\Gamma(1)\rangle_1 = \int\limits_{\Omega_{\text{фин}}} (-1)^{|x|}G_F(x)\,d\nu(x),$$
$$\langle\Gamma(1)\rangle_1 = \int(-1)^{|x|}g(x)\,d\nu(x), \tag{27}$$

где

$$C_F(x) = \langle FV(x)\rangle_1, \quad g(x) = \langle V(x)\rangle_1, \quad x \in \Omega_{\text{фин}}.$$

Далее из определения (4) семиинвариантов (в случае четных элементов) следует, что

$$G_F(x) = \langle FV(s_1)\ldots V(s_n)\rangle_1 =$$
$$= \sum_{\{i_1<\ldots<i_k\}} \langle F, V(s_{i_1}), \ldots, V(s_{i_k})\rangle_1 \langle V(s_{j_1})\ldots V(s_{j_{n-k}})\rangle_1 =$$
$$= \sum_{y\subseteq x}\Phi_F(y)\,g(x\setminus y).$$

Воспользовавшись теперь леммой 1.6.III, получим, что

$$\int(-1)^{|x|}G_F(x)\,d\nu(x) =$$
$$= \int\limits_{\Omega_{\text{фин}}}(-1)^{|y|}\Phi_F(y)\,d\nu(y)\int\limits_{\Omega_{\text{фин}}}(-1)^{|z|}g(z)\,d\nu(z).$$

Отсюда, из (22) и (27) получаем (26). Лемма доказана.

§ 2. Единственность гиббсовского поля

В § 8.IV было установлено существование и кластерное разложение предельных гиббсовских полей с вещественными значениями, полученных малым возмущением гауссовского поля в конечных множествах $\Lambda \subset Z^\nu$ при произвольных равномерно ограниченных граничных конфигурациях $y^{\partial\Lambda}$. Возникает вопрос — верно ли, что и любые (уже неограниченные) граничные конфигурации $y^{\partial\Lambda}$

приводят к той же предельной мере, т. е. гиббсовское распределение в Z^ν (в смысле ДЛР, см. § 2.I) единственно. Аналогичный вопрос возникает и в связи с доказанной в § 2.V теоремой об единственности гиббсовского поля для случая ограниченного спина: обобщается ли эта теорема на случай, когда спин неограничен. Трудность здесь состоит в том, что при граничных конфигурациях $y^{\partial\Lambda}$, принимающих достаточно большие значения, у меры $\mu_{\Lambda, y^{\partial\Lambda}}$ может уже не существовать кластерного разложения. Эта трудность преодолевается аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 1.2.V, где мы перешли от произвольной граничной конфигурации $y^{\partial\Lambda}$ на границе большого куба Λ к достаточно малой граничной конфигурации на границе некоторого случайного (но достаточно большого) объема $\Lambda' \subseteq \Lambda$. При этом, все-таки, нужна некоторая априорная оценка вероятностей больших значений граничных конфигураций (растущих с возрастанием Λ). Иными словами, мы докажем единственность гиббсовского поля в определенном классе случайных полей на Z^ν, а именно, таких полей $\{x(t),\ t \in Z^\nu\}$, для которых

$$\Pr(|x(t)| > M) = o[(\ln\ln M)^{\nu-1}]^{-1}, \quad M \to \infty, \quad \nu > 1, \tag{1}$$

при любых $t \in Z^\nu$, причем оценка $o(\ )$ равномерна относительно всех $t \in Z^\nu$.

Пусть взаимодействие $U_\Lambda(x/y)$ имеет вид

$$U_\Lambda(x/y) = l_0\Bigg[\sum_{t,t'\in\Lambda,|t-t'|=1}(x(t)-x(t'))^2 + \\ + \sum_{\substack{t\in\Lambda,t'\in\partial\Lambda\\|t-t'|=1}}(x(t)-y(t'))^2 + m\sum_{t\in\Lambda}x^2(t) + \lambda\sum_{t\in\Lambda}P(x(t)), \tag{2}$$

где $\Lambda = \Lambda_N$ куб со стороной N, $x \in R^\Lambda$, $y = y^{\partial\Lambda}$ — граничная конфигурация, $l_0 > 0$, $m > 0$, $\lambda > 0$, P — ограниченный снизу полином степени $\geqslant 4$.

Обозначим через $\mu_{\Lambda, y^{\partial\Lambda}}$ гиббсовскую перестройку лебеговой меры $\mu^0_\Lambda = (dx)^\Lambda$ в R^Λ с помощью взаимодействия (2) при граничной конфигурации $y^{\partial\Lambda}$:

$$\frac{d\mu_{\Lambda,y^{\partial\Lambda}}}{d\mu^0_\Lambda} = Z^{-1}_{\Lambda,y^{\partial\Lambda}} e^{-U_\Lambda(x/y^{\partial\Lambda})}, \tag{3}$$

где

$$Z_{\Lambda,y^{\partial\Lambda}} = \int_{R^\Lambda} e^{-U_\Lambda(x/y^{\partial\Lambda})}(dx)^\Lambda. \tag{3'}$$

Теорема 1. *Пусть взаимодействие имеет вид* (2) *и*

а) *либо* $\lambda > 0$ — *достаточно мало*: $0 < \lambda < \lambda_0(l_0, \nu, m, P)$,

б) *либо* l_0 — *достаточно велико*: $l_0 > \bar l_0(\lambda, \nu, m, P)$ *и многочлен* P *содержит лишь степени* x^k *с* $k \geqslant 3$. *Тогда существует единственное предельное гиббсовское поле на решетке* Z^ν, *порождаемое условными распределениями* (3) (*в смысле определения ДЛР*; *см.* § 2.1) *и принадлежащее классу случайных полей* (1). *Распределение* μ *этого поля допускает кластерное разложение.*

Замечание. Случай а) является обобщением результатов § 8.IV, а случай б) обобщением теоремы 1.2.V.

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму, имеющую самостоятельное значение. Рассмотрим взаимодействие более общего вида, чем (2), а именно

$$\overline{U}_\Lambda(x/y) = l_0\Bigg[\sum_{\substack{t,t'\in\Lambda,\\|t-t'|=1}}|x(t)-x(t')|^\alpha + \\ + \sum_{\substack{t\in\Lambda,t'\in\partial\Lambda,\\|t-t'|=1}}|x(t)-y(t')|^\alpha\Bigg] + \sum_{t\in\Lambda}\overline{P}(x(t)), \tag{4}$$

где

$$\overline{P}(x) = \sum_{j=1}^k l_j|x|^{\gamma_j}$$

(или аналогичная сумма, в которой некоторые $|x|^{\gamma_j}$, $j<k$, могут быть заменены на $|x|^{\gamma_j}\operatorname{sign} x$),

$$l_0 > 0, \quad l_k > 0,$$
$$\gamma_k \geqslant \alpha > 1, \quad \gamma_k > \gamma_{k-1} > \ldots > \gamma_1 > 0.$$

Обозначим через $\overline{\Lambda} = \Lambda \cup \partial\Lambda$ и через $\bar x$ — конфигурацию на $\overline{\Lambda}$, совпадающую с x на Λ и с $y^{\partial\Lambda}$ на $\partial\Lambda$. Для любого положительного числа B и конфигурации $\bar x$ обозначим через $D_B(\bar x) = D(\bar x)$ множество «B-точек» этой конфигурации:

$$D_B(\bar x) = \{t \in \overline{\Lambda} : |\bar x(t)| > B\}$$

и пусть $D_1(\bar x), \ldots, D_k(\bar x)$ — 1-связные компоненты $D_B(\bar x)$.

Компоненту $D_i(\bar{x})$ назовем приграничной, если она пересекается с $\partial\Lambda$ и пусть $D^{\text{гр}}(\bar{x})$ — объединение всех приграничных компонент. Обозначим через $\mathscr{E}_\Lambda^B \subset R^{\bar{\Lambda}}$ множество конфигураций $x \subset R^\Lambda$, для которых

$$D^{\text{гр}}(\bar{x}) \cap \Lambda_{N/4} \neq \varnothing,$$

где $\Lambda_{N/4}$ куб со стороной $[N/4]+1$, концентрический с кубом Λ_N.

Лемма 2. *Пусть $\Lambda = \Lambda_N$ — куб со стороной N и $\mu_{\Lambda,\, y^{\partial\Lambda}}$ — гиббсовская перестройка меры μ_Λ^0 с помощью взаимодействия* (4).

1) *Пусть $\gamma_k > \alpha$. Тогда существуют такие числа $B > 0$ и $\bar{\delta} > 1$ что, если*

$$\max_{t \in \partial\Lambda} |y_t| < B^{\bar{\delta}N}, \tag{5}$$

то

$$P(\mathscr{E}_\Lambda^B) < C_1 \exp\{-C_2 N\}, \tag{6}$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ константы, зависящие от B, $\bar{\delta}$, $\bar{P}$, l_0, ν.

2) *При $\gamma_k = \alpha$ верна оценка* (6) *при условии, что*

$$\max |y_t| < BA^N, \tag{6'}$$

где $A > 1$ некоторая константа (а C_1 и C_2 в (6) *зависят от A).*

Доказательство теоремы 1. В случае а) сходимость $\mu_{\Lambda, y^{\partial\Lambda}}$ к предельной мере μ, а также ее кластерное разложение доказано при условии, что граничные конфигурации $y^{\partial\Lambda}$ равномерно ограничены при всех Λ. Этот же факт мы сможем установить и для случая б), повторив с некоторыми изменениями доказательство теоремы 1.2.V. Далее, опираясь на оценку (6) с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые приведены в доказательстве теоремы 1.2.V, мы получим, что для любой локальной функции F_A

$$\langle F_A \rangle_{\mu_{\Lambda, y^{\partial\Lambda}}} \to \langle F_A \rangle_\mu, \quad \Lambda \nearrow Z^\nu \tag{7}$$

при произвольном выборе граничных конфигураций $y^{\partial\Lambda}$, удовлетворяющих условию (5) (или (6′)). Мера μ принадлежит классу (1), как это легко следует из оценки

$$\Pr(x(t) > M) < Ce^{-\bar{C}M^n}, \tag{7'}$$

где C, $\bar{C} > 0$ — константы, а n — степень многочлена $P(x)$

(оценка (7′) получается с помощью кластерного разложения). Далее для любой гиббсовской меры $\bar{\mu}$ (из класса (1)) верно равенство

$$\langle F_A \rangle_{\bar{\mu}} = \int' \langle F_A \rangle_{\mu_{\Lambda, y^{\partial\Lambda}}} d\bar{\mu}(y^{\partial\Lambda}) + \int'' \langle F_A \rangle_{\mu_{\Lambda, y^{\partial\Lambda}}} d\bar{\mu}(y^{\partial\Lambda}), \tag{8}$$

где Λ — куб, содержащий A, интегрирование $\int'$ ведется по множеству конфигураций $y^{\partial\Lambda}$, удовлетворяющих условию (5), а интеграл $\int''$ берется по дополнительному множеству конфигураций $y^{\partial\Lambda}$, для которых условие (5) нарушено. В силу (1) интеграл $\int''$ стремится к нулю при $\Lambda \nearrow Z^\nu$, а интеграл $\int' \to \langle F \rangle_\mu$ в силу (7) и (1). Теорема доказана.

Доказательство леммы 2. Представим взаимодействие (4) в виде

$$U_\Lambda(x/y) = \sum_{\substack{t, t' \in \bar{\Lambda}, \\ |t-t'|=1}} \Phi_{t,t'}^{(\Lambda)}(\bar{x}(t), \bar{x}(t')) + H_\Lambda(y), \tag{9}$$

где конфигурация $\bar{x}$ определена выше, а

$$\Phi_{t,t'}^{(\Lambda)}(x_1, x_2) = l_0 |x_1 - x_2|^\alpha + \frac{1}{\nu_t^\Lambda} \bar{P}(x_1) + \frac{1}{\nu_{t'}^\Lambda} \bar{P}(x_2),$$

ν_t^Λ — число точек из $\bar{\Lambda}$, соседних с t, $H_\Lambda(y)$ зависит только от y.

Выберем $B > 0$ так, что при $|x| > B/2$

$$\bar{P}(x) > \frac{l_k}{2} |x|^{\gamma_k} \quad \text{и} \quad \bar{P}'(x) > \gamma_k \frac{l_k}{2} |x|^{\gamma_k - 1} \tag{10}$$

и определим отображение $g^B: R \to R$

$$g^B(x) \equiv g(x) = \begin{cases} x - B/2, & x > B, \\ x, & |x| < B, \\ x + B/2, & x < -B. \end{cases}$$

Лемма 3. А) *Пусть $|x_1|$, $|x_2| \geqslant B$. Тогда при любых t, $t' \in \bar{\Lambda}$*

$$\Phi_{t,t'}^{(\Lambda)}(x_1, x_2) > \Phi_{t,t'}^{(\Lambda)}(g(x_1), g(x_2)) + C_0 B^{\gamma_k},$$

где $C_0 > 0$ — некоторая константа.

Б) *Пусть* $|x_2| \geqslant B$, *а*

$$|x_1| < |x_2| + C_1|x_2|^{\delta}, \quad \delta = \frac{\gamma_k - 1}{\alpha - 1} \geqslant 1, \tag{11}$$

C_1 — *некоторая достаточно малая константа.*

Тогда при всех $t, t' \in \bar{\Lambda}$

$$\Phi^{(\Lambda)}_{t,t'}(x_1, x_2) > \Phi^{(\Lambda)}_{t,t'}(x_1, g(x_2)). \tag{12}$$

Доказательство. А) Из (10) получаем, что при $|x_1|, |x_2| \geqslant B$

$$\begin{aligned}\Phi^{(\Lambda)}_{t,t'}(x_1, x_2) &\geqslant \Phi^{(\Lambda)}_{t,t'}(g(x_1), g(x_2)) + \\ &+ \frac{1}{\nu^{\Lambda}_{t}}[\bar{P}(x_1) - \bar{P}(g(x_1))] + \frac{1}{\nu^{\Lambda}_{t'}}[\bar{P}(x_2) - \bar{P}(g(x_2))] > \\ &> \Phi^{(\Lambda)}_{t,t'}(g(x_1), g(x_2)) + \frac{l_k\gamma_k B}{4\nu}\left\{\left|x_1 \pm \frac{B}{2}\right|^{\gamma_k-1} + \right. \\ &\left. + \left|x_2 \pm \frac{B}{2}\right|^{\gamma_k-1}\right\} > \Phi^{(\Lambda)}_{t,t'}(g(x_1), g(x_2)) + C_0 B^{\gamma_k}.\end{aligned}$$

Здесь знак $\pm$ определяется знаками x_2 и x_1, а $C_0 = \frac{l_k\gamma_k}{4\nu}\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_k-1}$.

Б) Рассмотрим два случая

1) $\gamma_k > \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned}\Phi^{(\Lambda)}_{t,t'}(x_1, x_2) &= \Phi^{(\Lambda)}_{t,t'}(x_1, g(x_2)) + l_0|x_1 - x_2|^{\alpha} - \\ &- l_0\left|x_1 - x_2 \pm \frac{B}{2}\right|^{\alpha} + \frac{1}{\nu_{t'}}[P(x_2) - P(g(x_2))].\end{aligned}$$

Из (11) находим, что $|x_1 - x_2| < \bar{C}_1|x_2|^{\delta}$, $\bar{C}_1 = C_1 - \frac{2}{B^{\delta-1}}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}|x_1 - x_2|^{\alpha} - \left|x_1 - x_2 \pm \frac{B}{2}\right|^{\alpha} &> \\ > -\alpha\left|\bar{C}_1|x_2|^{\delta} + \frac{B}{2}\right|^{\alpha-1}\frac{B}{2} &> -|x_2|^{\gamma_k-1}\frac{B}{2}\tilde{C}, \\ \tilde{C} = \alpha\left(\bar{C}_1 + \frac{1}{2B^{\delta-1}}\right)^{\alpha-1}&.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\nu_{t'}}[P(x_2) - P(g(x_2))] > C_0|x_2|^{\gamma_k-1}\frac{B}{2}.$$

Отсюда следует (12) при достаточно малом C_1 и большом B.

2) $\gamma_k = \alpha$. Пусть $x_2 > B$ и $x_1 < 0$. Тогда $|x_2 - x_1|^{\alpha} > |x_2 - x_1 - B/2|^{\alpha}$ и (12) очевидно. При $x_2 > B$, $x_1 > 0$, $|x_1 - x_2| < C_1|x_2|$ и применимы предыдущие рассуждения. Лемма доказана.

Пусть теперь $x \in \mathscr{E}^{B}_{\Lambda}$ и $D^{B}_{1}(x) \subset D^{B}(x)$ — приграничная компонента множества $D^{B}(x)$, достигающая куба $\Lambda_{N/4}$. Рассмотрим последовательность чисел

$$B_0 = B, \quad B_1 = B_0 + C_1 B_0^{\delta}, \quad B_2 = B_1 + C_1 B_1^{\delta}, \ldots$$

При $\delta > 1$ выберем B таким, что $C_1 B(\delta - 1)/2 > 1$ и пусть $\tilde{\delta} = 1 + (\delta - 1)/2$. Тогда легко видеть, что

$$B_n > B^{\tilde{\delta}^n}. \tag{13}$$

В случае же $\delta = 1$

$$B_n = B(1 + C_1)^n. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь последовательность слоев

$$S_k = \Lambda_{N/2+k} \setminus \Lambda_{N/2+k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и пусть

$$T_k(x) = \{t \in S_k \cap D^{B}_{1}(x);\ |x(t)| < B_k\}.$$

Обозначим через

$$R(x) = D^{B}_{1}(x) \cap \left\{\Lambda_N \setminus \bigcup_{k=1}^{[N/2]+1} T_k(x)\right\}$$

и пусть $\tilde{R}(x)$ — какая-нибудь 1-связная компонента множества $R(x)$, содержащая множество $D_1 \cap (\Lambda_{N/2} \setminus \Lambda_{N/4})$.

Очевидно, что

$$|\tilde{R}(x)| > N/4. \tag{15}$$

Далее, как следует из (5) и (6') при $\bar{\delta} = \tilde{\delta}^{1/2}$ в случае $\gamma_k > \alpha$ или при $A = (1 + C_1)^{1/2}$ в случае $\gamma_k = \alpha$

$$|y(t)| < B_{N/2}.$$

Таким образом, если $|x(t)| > B_m$, $t \in \tilde{R}(x)$, то во всех точках $t' \in \bar{\Lambda}$, соседних с t и не принадлежащих $\tilde{R}(x)$,

$|\bar{x}(t)|>B_{m+1}$. Рассмотрим преобразование $G_{\widetilde{R}}: R^\Lambda\to R^\Lambda$

$$(G_{\widetilde{R}}x)(t)=\begin{cases} x(t), & t\overline{\in}\widetilde{R}(x),\\ g(x(t)), & t\in \widetilde{R}(x).\end{cases}$$

Из леммы 3 следует, что

$$U_\Lambda(x/y) > U(G_{\widetilde{R}}x/y)+\frac{C_0B^{\gamma_k}}{2}|\widetilde{R}(x)|. \tag{16}$$

Для любого 1-связного множества R, пересекающего $\partial\Lambda_{N/4}$, обозначим через $\mathfrak{X}(R)\subseteq \mathscr{E}^B_\Lambda$ совокупность конфигураций $x\in\mathscr{E}^B_\Lambda$, для которых какое-нибудь из множеств $\widetilde{R}(x)=R$. Оценим вероятность $p_R=\Pr(x\in\mathfrak{X}(R))$. Из (16) находим, что

$$p_R=\frac{\int\limits_{\mathfrak{X}(R)}\exp\{-U(x/y^{\partial\Lambda})\}\,d\mu^0_\Lambda}{Z_{\Lambda,y^{\partial\Lambda}}} <$$

$$< \frac{\int\limits_{\mathfrak{X}(R)}\exp\{-U(G_R x/y^{\partial\Lambda})\}\,d\mu}{Z_{\Lambda,y^{\partial\Lambda}}}\, e^{-\frac{C_0B^{\gamma_k}}{2}|R|}. \tag{17}$$

Далее отображение $G_R: x\mapsto G_R x$, $x\in\mathfrak{X}(R)$ не изменяет меру μ^0_Λ и, таким образом, замена переменных $\bar{x} = G_R x$; $x\in\mathfrak{X}(R)$ в интеграле (17) приводит к оценке

$$p_R<e^{-\frac{C_0B^{\gamma_k}}{2}|R|}. \tag{18}$$

Число множеств R мощности M не превосходит $\mathrm{const}\cdot|\partial\Lambda_{N/4}|\cdot C^M$, $C>0$ абсолютная константа (см. лемму 4.4.II). Таким образом, из (18) и (15) при достаточно большом B следует оценка (6). Лемма 2 доказана.

§ 3. Компактность гиббсовских перестроек

В этом параграфе идея выделения «кластеров» применяется к доказательству слабой локальной компактности семейства гиббсовских перестроек μ_Λ (см. § 1.1). При этом рассматривается взаимодействие общего вида, в котором не содержится ни «малых» ни «больших» параметров.

Пусть $\{x(t),\ t\in Z^1\}$ — вещественное поле на одномерной решетке Z^1 с финитным (парным) взаимодействием ближайших соседей:

$$U_\Lambda(x)=\sum_{t\in\Lambda} f(x(t))+\sum_{\substack{t,t'\in\Lambda\\ |t-t'|=1}}\Phi(x(t),x(t')), \tag{1}$$

где $\Lambda\subset Z^1$, f и Φ — ограниченные снизу функции, причем Φ локально ограниченная симметричная функция, а f удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(x)}dx<\infty. \tag{2}$$

Обозначим через μ_Λ — гиббсовскую перестройку меры $\mu^0_\Lambda=(dx)^\Lambda$ в пространстве R^Λ, задаваемую взаимодействием (1)

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu^0_\Lambda}=Z^{-1}_\Lambda\exp\{-U_\Lambda(x)\}. \tag{3}$$

Теорема 1. *При указанных выше условиях семейство гиббсовских перестроек $\{\mu_\Lambda\}$ слабо локально компактно.*

Замечание 1. Эта теорема и ее доказательство непосредственно обобщаются на случай любого финитного ограниченного снизу парного потенциала $\{\Phi_{t,t'},\ |t-t'|<d\}$.

Доказательство. Как следует из леммы 3.1.I, достаточно доказать, что для любого конечного множества $A_0\subset Z^1$ и любого $\varepsilon>0$ найдется такое N, что для всех $\Lambda\supset A_0$

$$p^N\equiv\Pr\{x\in R^\Lambda: |x(t)|>N,\ \ t\in A_0\}<\varepsilon, \tag{4}$$

где вероятность $\Pr$ вычисляется с помощью распределения μ_Λ. Далее, достаточно установить (4) для случая любого одноточечного множества $A_0=\{t_0\}$. Пусть для определенности $t_0=0$ и $\Lambda=[L_1, L_2]$, $L_1<0<L_2$.

Выберем далее некоторое число $B<N$ и для каждой конфигурации $x\in R^\Lambda$ обозначим через $D^B(x)$ множество точек Λ:

$$D^B(x)=\{t\in\Lambda,\ |x|>B\}$$

и пусть $\Gamma^B(x)\subset D^B(x)$ — «B-кластер»: 1-связная компонента $D^B(x)$, содержащая точку $0\in Z^1$ (при условии, что такая компонента существует).

Для каждого $\Gamma=[r_1,\ r_2]\subset\Lambda,\ r_1<r_2$, обозначим через $p_\Gamma^{B,N}$ вероятность

$$p_\Gamma^{B,N}=\Pr\{x:\ |x(0)|>N,\ \Gamma^B(x)=\mathbf{F}\}. \tag{5}$$

Эта вероятность равна: в случае $L_1+1\leqslant r_1,\ r_2\leqslant L_2-1$

$$p_\Gamma^{B,N}=Z_\Lambda^{-1}\iint\limits_{|y_1|<B,|y_2|<B}\exp[-f(y_1)-f(y_2)]\,Z_{\Delta_1}(\varnothing,\ y_1)\times$$

$$\times Z_\Gamma^{B,N}(y_1,\ y_2)\,Z_{\Delta_2}(y_2,\ \varnothing)dy_1dy_2, \tag{6}$$

в случае $L_1=r_1,\ r_2<L_2-1$

$$P_\Gamma^{B,N}=Z_\Lambda^{-1}\int\limits_{|y|<B}Z_\Gamma^{B,N}(\varnothing,\ y)\,Z_\Delta(y,\ \varnothing)\,e^{-f(y)}dy \tag{6'}$$

и аналогично в случаях $L_1+1\leqslant r_1,\ r_2=L_2$ и $L_1=r_1$ и $L_2=r_2$. Здесь обозначено $\Delta_1=[L_1,\ r_1-2]$ при $r_1-2\geqslant L_1$ и $\Delta_1=\varnothing$ при $r_1=L_1+1$, аналогично $\Delta_2=[r_2+2,\ L_2]$, $r_2+2\leqslant L_2$, $\Delta_2=\varnothing$ при $r_1=L_2-1$, $Z_{\Delta_1}(\varnothing,\ y)$ — статистическая сумма на отрезке $\Delta_1\neq\varnothing$ при пустом граничном условии слева и граничном условии y справа и $Z_\varnothing=1$; аналогично определяется $Z_{\Delta_2}(y,\ \varnothing)$. Наконец,

$$Z_\Gamma^{B,N}(y,\ y_2)=\int\limits_{S_\Gamma^{B,N}}\exp[-U_\Gamma(x/y_1,\ y_2)]\,d\mu_\Gamma^0, \tag{7}$$

где $U_\Gamma(x/y_1,\ \ y_2)=U_\Gamma(x)+\Phi(y_1,\ \ x(r_1))+\Phi(x(r_2),\ \ y_2)$, а $S_\Gamma^{B,N}\subset R^\Gamma$ — множество конфигураций в Γ

$$S_\Gamma^{B,N}=\{x:\ |x(t)|>B,\quad t\in\Gamma,\ |x(0)|>N\}.$$

Аналогичный смысл имеют статистические суммы

$$Z_\Gamma^{B,N}(\varnothing,\ y),\quad Z_\Gamma^{B,N}(y,\ \varnothing),\quad Z_\Gamma^{B,N}(\varnothing,\ \varnothing).$$

Заметим теперь, что

$$Z_\Gamma^{B,N}(y_1,\ y_2)<V\cdot\delta^{|\Gamma|-1}\delta_1, \tag{8}$$

где

$$V=\max_{x_1,x_2}e^{-\Phi(x_1,x_2)},$$

$$\delta=\delta(B)=V\int\limits_{|y|>B}e^{-f(y)}dy,\quad \delta_1=\delta_1(N)=V\int\limits_{|y|>N}e^{-f(y)}dy.$$

Далее верна оценка $Z_\Gamma^{B,N}(\varnothing,\ y)<\delta^{|\Gamma|-1}\delta_1$ и аналогичные оценки для $Z_\Gamma^{B,N}(y,\ \varnothing)$ и $Z_\Gamma^{B,N}(\varnothing,\ \varnothing)$.

Для каждого $\Gamma=[r_1,\ r_2],\ r_1\geqslant L_1+1,\ r_2\leqslant L_2-1$

$$Z_\Lambda\geqslant\iint Z_\Delta(\varnothing,\ y_1)\,\overline{Z}_\Gamma^1(y_1,\ y_2)\,Z_\Delta(y_2,\ \varnothing)\exp[-f(y_1)-$$

$$-f(y_2)]\,dy_1dy_2 \tag{9}$$

и выполнены аналогичные оценки в случаях, когда $r_1=L_1$ или $r_2=L_2$.

Здесь через $\overline{Z}_\Gamma^1(y_1,\ y_2)$ обозначена статистическая сумма, аналогичная (7) и вычисленная по множеству конфигураций $\{x\in R^\Gamma:|x(t)|\leqslant 1,\ t\in\Gamma\}$.

Легко видеть, что при $|y_1|<B,\ |y_2|<B$

$$\overline{Z}_\Gamma^1(y_1,\ y_2)>C^{-1}\alpha^{|\Gamma|}K^2, \tag{10}$$

где

$$C=\min_{|x_1|\leqslant1,|x_2|\leqslant1}e^{-\Phi(x_1,x_2)},$$

$$\alpha=C\int\limits_{|x|<1}e^{-f(x)}dx,\quad K=K(B)=\min_{\substack{|x_1|\leqslant1,\\|x_2|\leqslant B}}e^{-\Phi(x_1,x_2)}.$$

Из (6) (или (6′)), и оценок (8) и (10) получаем, что

$$P_\Gamma^{B,N}<M(\delta/\alpha)^{|\Gamma|-1}K^{-2}\delta_1,$$

где $M=VC^{-1}\alpha$. Мы предположим теперь, что B выбрано достаточно большим, так, что $\delta/\alpha<1/2$. Тогда

$$P^N=\sum_\Gamma P_\Gamma^{B,N}<\overline{M}K^{-2}\delta_1.$$

Поскольку K зависит только от B, а $\delta_1\to0$ при $N\to\infty$, мы можем выбрать N столь большим, что $MK^{-2}\delta_1<\varepsilon$. Теорема доказана.

Укажем следующее простое обобщение нашего метода на случай полей на многомерной решетке Z^ν.

Теорема 2. *Пусть взаимодействие имеет вид* (1) *и выполнены все прежние предположения относительно потенциалов f и Φ и, кроме того, условие*

$$\int\limits_{|x|>B}e^{-f(x)}dx=o\left(\min_{\substack{|x_1|\leqslant1,\\|x_2|\leqslant B}}e^{-\Phi(x_1,x_2)}\right),\quad B\to\infty. \tag{11}$$

Тогда семейство гиббсовских перестроек $\{\mu_\Lambda,\ \Lambda\subset Z^\nu\}$ слабо локально компактно.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Однако, установленный в ней результат верен, по-видимому, и в более общем случае.

§ 4. Калибровочное поле с группой калибровки Z_2

Напомним (см. § 0.I), что решетчатой калибровочной Z_2-моделью называется гиббсовское поле $\{\sigma(t),\ t\in\tilde{Z}^\nu\}$, определенное на множестве $\tilde{Z}^\nu$ ребер ν-мерной решетки Z^ν, со значениями в группе Z_2 и взаимодействием вида

$$U_\Lambda=\beta\sum_{p:\partial p\subset\Lambda}\sigma_p, \tag{1}$$

где $\Lambda\subset\tilde{Z}^\nu$ — конечное множество ребер, а сумма берется по всем двумерным граням решетки Z^ν (плиткам), граница которых $\partial p\subset\Lambda$, а $\sigma_p=\prod_{\tau\in\partial p}\sigma_\tau$. В качестве свободной меры μ_0 в пространстве $\Omega=(Z_2)^{\tilde{Z}^\nu}$ выбирается бесконечное произведение нормированных мер Хаара $\nu_0(1)=\nu_0(-1)=1/2$ на Z_2. Гиббсовская перестройка μ_Λ определяется как всегда формулой

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\mu_0}=Z_\Lambda^{-1}\exp\{U_\Lambda\}.$$

В случае $\beta>0$ взаимодействие (1) является ферромагнитным (см. § 0.I) и с помощью неравенства Гриффитса можно доказать, что существует термодинамический предел $\lim\limits_{\Lambda\nearrow\tilde{Z}^\nu}\langle\sigma_T\rangle_\Lambda$, $T\subset\tilde{Z}^\nu$, корреляционных функций, а тем самым и предел

$$\lim_{\Lambda\nearrow\tilde{Z}^\nu}\mu_\Lambda=\mu \tag{2}$$

подобно тому, как это делалось в § 0.I для случая модели Изинга. Здесь обозначено для любого конечного множества ребер T

$$\sigma_T=\prod_{\tau\in T}\sigma_\tau. \tag{3}$$

Кроме того, существование предела (2) для всех достаточно малых β, $|\beta|<\beta_0(\nu)$, вытекает из результатов § 1.IV. При этом предельная мера μ обладает свойством экспоненциального убывания корреляций (см. § 2.VI).

Пусть $C\subset\tilde{Z}^\nu$ замкнутый контур (т. е. связное множество ребер, такое, что каждая точка $t\in Z^\nu$ принадлежит четному числу ребер из C).

Функционалом Вильсона для контура C называется число

$$W(C)=\langle\sigma_C\rangle_\mu. \tag{4}$$

Для простоты мы будем рассматривать лишь самонепересекающиеся плоские контуры C (т. е. целиком расположенные в какой-нибудь из координатных плоскостей). Через $S(C)$ обозначим множество плиток на этой плоскости, охватываемых контуром C.

Теорема 1. 1. *Для всех достаточно малых* β, $|\beta|<\bar{\beta}_0$ *существуют константы* $C_1=C_1(\beta,\ \nu)$ *и* $b_1=b_1(\nu)$, *такие, что для любого плоского самонепересекающегося контура* C

$$|W(C)|<b_1e^{-C_1|S(C)|}. \tag{5}$$

2. *При* $\nu=3$ *и всех достаточно больших положительных* β, $\beta>\beta_1>0$ *существуют константы* $C_2=C_2(\beta_1)$ *и* b_2 *такие, что*

$$|W(C)|>b_2e^{-C_2|C|} \tag{6}$$

для любого плоского самонепересекающегося контура C.

Замечание 1. Из сформулированной теоремы видно, что среднее вида (4) при больших и малых β имеет различное асимптотическое поведение при увеличении контура C. По-видимому, существует некоторое критическое значение $\beta_{кр}$, в котором асимптотический режим (5) сменяется режимом (6) (или, быть может, каким-нибудь еще промежуточным режимом). Возникающий таким образом фазовый переход в точке $\beta_{кр}$ имеет совершенно другой характер, чем фазовый переход 1-го рода в модели Изинга, описанный нами в § 0.I. В последнем случае в критическом значении $h=0$ скачком изменяется среднее значение спина в каждой точке решетки Z^ν, т. е. локальный функционал от поля, а в предполагаемом нами фазовом переходе в калибровочной модели изменяется асимптотика $W(C)$, что является уже нелокальной характеристикой поля.

Замечание 2. Теорема 1, а также ее доказательство, приводимое ниже, легко обобщается на случай калибровочного поля с любой конечной абелевой группой

G и взаимодействием вида

$$U_\Lambda = \beta \sum_{p:\partial p \subset \Lambda} \operatorname{Re} \chi(g_p),$$

где χ — какой-нибудь характер группы G, такой, что $\chi(g) \neq 1$ при $g \neq e$ ($e \in G$ — единица G).

Доказательство теоремы 1.

1. Очевидно, что

$$\sigma_C = \prod_{p \in S(C)} \sigma_p \equiv \sigma_{S(C)}$$

и, таким образом, при малых β верно разложение (см. § 1.II и § 2.VI)

$$W(C) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} \sum_{(p_1, \ldots, p_n)} \langle \sigma_{S(C)}, \sigma_{p_1}, \ldots, \sigma_{p_n} \rangle_0, \quad (7)$$

где суммирование происходит по упорядоченным наборам плиток $(p_1, \ldots, p_n)$ и ряд сходится при $|\beta| < \beta_0$. Используя формулу (9.1.II), выражающую семиинварианты через моменты, и замечая, что $\left\langle \prod_{p \in Q} \sigma_p \right\rangle = 0$ для любого множества Q плиток с непустой границей ∂Q (∂Q — множество ребер $\tau \in \bigcup_{p \in Q} \partial p$, принадлежащих границе нечетного числа плиток из Q), легко показать, что

$$\langle \sigma_{S(C)}, \sigma_{p_1}, \ldots, \sigma_{p_n} \rangle_0 = 0$$

при $n < S(C)$. Отсюда и из (7) получаем оценку

$$|W(C)| < M(C\beta)^{|S(C)|},$$

которая и означает (5).

2. Для каждой конфигурации $\{\sigma_\tau, \tau \in Z^\nu\}$ калибровочного поля набор значений $\{\sigma_p\}$, $\sigma_p = \prod_{\tau \in \partial p} \sigma_\tau$, определяет конфигурацию случайного поля на плитках p со значениями в Z_2. Очевидно, что для любого единичного куба q с вершинами в точках решетки Z^3 выполнено условие

$$\prod_{p \in \partial q} \sigma_p = 1, \quad (8)$$

где произведение берется по всем граням куба q. Легко показать, что и обратно, для любого $\Lambda \subset Z^3$ и для всякой функции (конфигурации) $\hat{S} = \{S_p\}$, определенной на множестве $\Lambda^{(2)}$ плиток p таких, что $\partial p \subset \Lambda$, со значениями в Z_2 и удовлетворяющей условию (8), найдется такая конфигурация $\{\sigma_t, \tau \in \Lambda\}$ калибровочного поля, что для всех $p \in \Lambda^{(2)}$, $\sigma_p = S_p$.

Отсюда следует, что

$$Z_\Lambda = \sum_{S=\{S_p\}}' e^{\beta \Sigma S_p} N_\Lambda(S) \quad (9)$$

и

$$W(C) = \frac{1}{Z_\Lambda} \sum_{S=\{S_p\}}' \left(\prod_{p \in S(C)} S_p \right) e^{\beta \Sigma S_p} N_\Lambda(S), \quad (10)$$

где $\sum\limits_{S=\{S_p\}}'$ означает сумму по всем конфигурациям $S = (S_p)$, определенным на множестве $\Lambda^{(2)}$ плиток p, $\partial p \subset \Lambda$, таким, что выполнено условие (8) для всех кубов q, граница которых $\partial q \subset \Lambda^{(2)}$ (множество этих кубов обозначим через $\Lambda^{(3)}$). Будем называть такие конфигурации допустимыми. Через $N_\Lambda(S)$, S — допустимая конфигурация, определенная на плитках $p \in \Lambda^{(2)}$, обозначено число конфигураций $\{\sigma_\tau, \tau \in \Lambda\}$ исходного поля, для которых значения функционалов σ_p фиксированы и равны

$$\sigma_p = S_p, \quad p \in \Lambda^{(2)}.$$

Лемма 2. *Число $N_\Lambda(S)$ постоянно для всех допустимых конфигураций $S = \{S_p, p \in \Lambda^{(2)}\}$.*

Доказательство. Число $N_\Lambda(S)$ есть число решений системы уравнений

$$\prod_{\tau \in \partial p} \sigma_\tau = S_p, \quad p \in \Lambda^{(2)}. \quad (11)$$

Всякое решение $\sigma = \{\sigma_\tau, \tau \in \Lambda\}$ этой системы имеет вид

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau^0 \hat{\sigma}_\tau,$$

где $\sigma^0 = \{\sigma_\tau^0, \tau \in \Lambda\}$ — какое-нибудь фиксированное решение, а $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_t, t \in \Lambda\}$ — произвольное решение системы (11) при $S_p \equiv 1$. Отсюда $N_\Lambda(S) = N_\Lambda$ ($S \equiv 1$). Лемма доказана.

Таким образом, из (9) и (10) следует, что

$$W(C) = \tilde{Z}_\Lambda^{-1} \sum_S' \left(\prod_p S_p \right) \exp\left\{ \beta \sum_p S_p \right\} \quad (12)$$

и

$$\widetilde{Z}_\Lambda = \sum_S{}' \exp\left\{\beta \sum_p S_p\right\}. \qquad (13)$$

Обозначим для каждой допустимой конфигурации $S = \{S_p, P \in \Lambda^{(2)}\}$ через $Q = Q(S)$ — совокупность плиток, для которых $S_p = -1$. Пусть $\widehat{Q}(S) \subset \widehat{\Lambda}^{(2)}$ — множество ребер двойственной решетки $\widehat{Z}^{(3)}$ (сдвинутой относительно Z^3 на вектор (1/2, 1/2, 1/2)), пересекающих плитки из $Q(S)$. Через $\widehat{\Lambda}^{(2)}$ обозначена совокупность всех ребер $\widehat{Z}^3$, пересекающих плитки из множества $\Lambda^{(2)}$, а через $\widehat{\Lambda}^{(3)}$ обозначим совокупность центров кубов $q \in \Lambda^{(3)}$. В силу условия (8) каждая вершина $t \in \widehat{\Lambda}^{(3)}$ принадлежит четному числу ребер из $\widehat{Q}(S)$. Таким образом, связные компоненты $\widehat{Q}(S)$ — $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ являются контурами на двойственной решетке $\widehat{Z}^3$.

Очевидно, что соответствие $S \mapsto \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$ между допустимыми конфигурациями S на $\Lambda^{(2)}$ и наборами $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$ попарно непересекающихся контуров $\Gamma_i \subset \widehat{\Lambda}^{(2)}$ взаимно однозначно. При этом

$$\sum_{p \subset \Lambda^{(2)}} S_p = |\Lambda^{(2)}| - 2\sum_{i=1}^m |\Gamma_i|, \qquad (14)$$

а

$$\prod_{p \in S(C)} S_p = \prod_{i=1}^m (-1)^{g_C(\Gamma_i)}, \qquad (15)$$

где $g_C(\Gamma)$ — число пересечений контура $\Gamma \subset \widehat{\Lambda}^{(2)}$ с множеством $S(C)$.

Мы скажем, что контур Γ зацеплен с контуром C, если $g_C(\Gamma)$ нечетно. Таким образом из (12), (13), (14) и (15) получаем, что

$$W(C) = Z_2/Z_1, \qquad (16)$$

где

$$Z_i = \sum_{\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}} k_i(\Gamma_1) \cdot \ldots \cdot k_i(\Gamma_m), \quad i = 1, 2. \qquad (17)$$

Сумма в обоих случаях берется по всем наборам $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}$ попарно непересекающихся контуров

$\Gamma_i \subset \widehat{\Lambda}^{(2)}$, а

$$k_1(\Gamma) = e^{-2\beta|\Gamma|},$$

$$k_2(k) = \begin{cases} -k_1(\Gamma), & \text{если контур } \Gamma \text{ зацеплен с } C, \\ k_1(\Gamma) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство величин

$$k_\theta(\Gamma) = \begin{cases} e^{i\theta} k_1(\Gamma) & \text{для } \Gamma, \text{ зацепляющих } C, \\ k_1(\Gamma) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Очевидно, что $k_1(\Gamma) = k_{\theta=0}(\Gamma)$, $k_2(\Gamma) = k_{\theta=\pi}(\Gamma)$.

Таким образом,

$$\ln W(C) = \ln Z_2 - \ln Z_1 = \int_0^\pi \left(\frac{d}{d\theta} \ln Z_\theta\right) d\theta, \qquad (18)$$

где

$$Z_\theta = \sum_{\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m\}} k_\theta(\Gamma) \ldots k_\theta(\Gamma_m). \qquad (19)$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{d\theta} \ln Z_\theta = i \sum_\Gamma \rho_\theta(\Gamma),$$

где $\sum_\Gamma$ берется по всем контурам $\Gamma \subset \widehat{\Lambda}^{(2)}$, зацепляющим C, а

$$\rho_\theta(\Gamma) = \sum_{\{\Gamma_i\}} \Pi k_\theta(\Gamma_i)/Z_\theta,$$

где суммирование в числителе происходит по всем наборам $\{\Gamma_i\}$, содержащим контур Γ (т. е. $\rho_\theta(\Gamma)$ есть «вероятность» появления контура Γ в ансамбле контуров в $\widehat{\Lambda}^{(2)}$).

С помощью приемов из гл. III, легко получить, что при больших $\beta > 0$

$$|\rho_\theta(\Gamma)| < (be^{-2\beta})^{|\Gamma|}, \qquad (20)$$

где b — абсолютная константа.

Далее, поскольку каждый контур Γ, зацепляющий C, пересекается как с внутренней частью контура C, так и с его внешней частью (на плоскости, на которой лежит C), из (18), (19) и (20) получаем, что

$$|\ln|W|| < \sum_{\Gamma} (be^{-2\beta})^{|\Gamma|}, \tag{21}$$

где сумма берется по контурам, пересекающим плоскость контура C как внутри, так и вне C.

Обозначим для каждого такого контура Γ через $p(\Gamma)$ какую-нибудь из плиток $p \in S(C)$, которую он пересекает и заметим, что длина $|\Gamma| > d(p(\Gamma), C)$, где $d(p, C)$ — расстояние от центра p до контура C. Отсюда правая часть (21) не превосходит:

$$\sum_{p\in S(C)} \sum_{\Gamma: p(\Gamma)=p} (be^{-2\beta})^{|\Gamma|} \leqslant \sum_{p} \sum_{n>d(p,c)} B^n (be^{-2\beta})^n <$$
$$< K \sum_{p\in S(C)} (Bbe^{-2\beta})^{d(p,c)} < K \sum_{\tau\in C} \sum_{p} (Bbe^{-2\beta})^{d(\tau,p)} < M|C|, \tag{22}$$

B, K и M — константы. Здесь B^n дает оценку числа контуров длины n, проходящих через заданную плитку p (см. лемму 1.4.II). Из (22) и следует (6). Теорема доказана.

§ 5. Марковские процессы с локальным взаимодействием

Здесь рассматривается некоторый специальный класс марковских процессов (цепей) с бесконечным пространством состояний — т. н. процессы с *локальным взаимодействием*, для которых кластерные разложения получаются очень просто. Мы отдельно рассмотрим два случая — случай дискретного и случай непрерывного времени.

1. Дискретное время. Пусть $T = Z^\nu \times Z_+$ и $\Omega = S^T$, где S — некоторое конечное множество. Для точки $(t, \tau) \in T$, $t \in Z^\nu$, $\tau \in Z_+$ координату t будем называть пространственной, а τ — временной координатой. Совокупность точек $Y_\tau = Z^\nu \times \{\tau\} \subset T$ будем называть слоем в момент $\tau \in Z_+$ и каждую конфигурацию $x = \{x(t, \tau), (t, \tau) \in T\}$ рассматривать как последовательность конфигураций $\{x_0, x_1, \ldots, x_\tau, \ldots\}$ на слоях Y_τ, $\tau = 0, 1, \ldots$ При этом часто слой Y_τ мы будем отождествлять с Z^ν, а конфигурации x_τ на Y_τ рассматривать как конфигурации на Z^ν.

Пусть выделено некоторое конечное множество $A_0 \subset$ $\subset Z^\nu$ и задано семейство $\{p(s/x^{A_0}), s \in S, x^{A_0} \in S^{A_0}\}$

распределений вероятностей на множестве S, зависящих от конфигурации $x^{A_0} \in S^{A_0}$ на множестве A_0. Пусть, далее, P_0 — некоторое распределение вероятностей на $S^{Z^\nu} = Y_0$. Определим однородную марковскую цепь (т. е. меру μ на пространстве $\Omega = S^T$; используемые здесь понятия из теории марковских цепей см. в [51] или [58]), начальным распределением которой служит P_0, а переходная функция $P(\cdot/\bar{x})$, $\bar{x} \in S^{Z^\nu}$, равна бесконечному произведению мер на S

$$P(\cdot/\bar{x}) = \prod_{t\in Z^\nu} p(\cdot/\bar{x}|_{A_t}), \tag{1}$$

где $A_t = A_0 + t \subset Z^\nu$ — сдвиг множества A_0 на вектор $t \in Z^\nu$, а $\bar{x}|_{A_t}$ — сужение конфигурации $\bar{x}$ на множество A_t (конфигурация $\bar{x}|_{A_t}$ на A_t естественно отождествляется с конфигурацией $\hat{x}^{A_0}$ на множестве A_0:

$$\hat{x}^{A_0}(t') = \bar{x}(t' + t), \quad t' \in A_0$$

и в (1) $p(\cdot/\bar{x}|_{A_t})$ следует понимать как $p(\cdot/\hat{x}^{A_0})$).

Определение (1) означает, что относительно порожденного мерой μ условного распределения в пространстве S^{Y_τ} конфигураций x_τ на слое Y_τ, $\tau > 0$, при условии, что фиксирована конфигурация $x_{\tau-1} = \bar{x}$ на предыдущем слое $Y_{\tau-1}$, значения $x_\tau(t)$, $t \in Y_\tau$ конфигурации x_τ в разных точках t независимы и распределены с вероятностями $p(x_\tau(t)/\bar{x}|_{A_{t,\tau-1}})$, где $A_{t,\tau-1}$ — множество, получающееся из A_0 сдвигом на вектор $(t, \tau - 1) \in Z^\nu \times Z_+$. Через $P_\tau = \mu|_{Y_\tau}$ обозначим распределение вероятностей для конфигурации x_τ на слое Y_τ, порождаемое распределением μ (распределение P_τ, как условлено выше, будем иногда считать заданным на пространстве S^{Z^ν}).

Мы предположим, что $p(s/x^{A_0}) \neq 0$ ни при каких $s \in S$ и $x^{A_0} \in S^{A_0}$ и обозначим

$$\max_{\substack{s\in S, x_1^{A_0}, \\ x_2^{A_0} \in S}} \left| \frac{p(s/x_1^{A_0})}{p(s/x_2^{A_0})} - 1 \right| = \lambda. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть λ достаточно мало: $\lambda < \lambda_0$, где λ_0 зависит от ν, $|s|$, $|A_0|$. Тогда марковская цепь μ эргодична: при любом начальном распределении P_0 распределение P_τ слабо сходится при $\tau \to \infty$ к некоторому распределению π на S^{Z^ν} (не зависящему от P_0).*

При этом для любой локальной функции F_B скорость сходимости ее среднего $\langle F_B\rangle_{P_\tau}$ к $\langle F_B\rangle_\pi$ экспоненциальна:

$$\left|\langle F_B\rangle_{P_\tau} - \langle F_B\rangle_\pi\right| < K(F_B)(C\lambda)^\tau, \tag{3}$$

где C — абсолютная константа, а $K(F_B)$ — константа, зависящая от функции F_B. Мера π на S^{Z^ν} обладает свойством максимального сильного экспоненциального убывания корреляций (см. § 1.VI).

Доказательство. Для каждой точки (t, τ), $\tau > 0$ обозначим через $D_{t,\tau} \subset T$ множество $\{(t, \tau)\} \cup A_{t,\tau-1}$, а точку (t, τ) будем называть его вершиной. Совокупность всех множеств $D_{t,\tau}$, $(t, \tau) \in T$, $\tau > 0$ обозначим через $\mathfrak{A}$. Пусть $\Gamma = \{D_{t_1,\tau_1}, \ldots, D_{t_n,\tau_n}\}$ конечный набор попарно различных множеств из $\mathfrak{A}$; вершину (t_i, τ_i) множества $D_{t_i,\tau_i} \in \Gamma$ назовем *свободной*, если она не содержится ни в каком из множеств D_{t_j,τ_j}, $j \neq i$. Пусть $B \subset T$ — конечное множество. Набор $\Gamma = \{D_{t_i,\tau_i},\ i = 1, \ldots, n\}$ назовем *хронологически-связным* относительно B, если все его свободные вершины содержатся в B. Через Γ_B обозначим максимальный набор множеств $D_{t,\tau} \in \mathfrak{A}$, хронологически-связный относительно B. Пусть $F = F_B$ — локальная ограниченная функция, определенная на Ω, измеримая относительно σ-алгебры Σ_B, где $B \subset Y_{\tau_0}$ конечное множество, лежащее на слое Y_{τ_0}. Среднее

$$\langle F_B\rangle_\mu = \langle F_B\rangle_{P_{\tau_0}}, \tag{4}$$

как легко следует из (1), представляется в виде:
$\langle F_B\rangle_{P_{\tau_0}} =$

$$= \sum_{(x_0,\ldots,x_{\tau_0})} P_0^{L_0}(x_0) \prod_{\tau=1}^{\tau_0} \prod_{t\in L_\tau} p\left(x_\tau(t)/x_{\tau-1}|_{A_{t,\tau-1}}\right) F_B(x_{\tau_0}), \tag{5}$$

где обозначено $L_\tau = \widetilde{\Gamma}_B \cap Y_\tau$, $\tau = 0, \ldots, \tau_0$, $P_0^{L_0}$ — сужение начального распределения P_0 на множество S^{L_0}, а суммирование происходит по наборам конфигураций

$(x_0, \ldots, x_{\tau_0})$, где $x_\tau \in S^{L_\tau}$ — конфигурация на множестве L_τ.

Далее фиксируем какую-нибудь конфигурацию $\bar{x}^{A_0} \in S^{A_0}$ и обозначим через q распределение вероятностей на S:

$$q(s) = p\left(s/\bar{x}^{A_0}\right),$$

а через $\lambda\left(s/x^{A_0}\right)$ величину

$$\lambda\left(s/x^{A_0}\right) = \frac{p\left(s/x^{A_0}\right)}{q(s)} - 1.$$

Введем распределение вероятностей на Ω

$$\mu_0 = P_0 \times q^{T\setminus Y_0},$$

равное произведению меры P_0 на S^{Y_0} на бесконечное произведение мер q на S по всем точкам (t, τ), $\tau > 0$.

Далее для любого множества $D_{t,\tau} \in \mathfrak{A}$ обозначим

$$\lambda(D_{t,\tau}) = \lambda\left(x_\tau(t)/x_{\tau-1}|_{A_{t,\tau-1}}\right), \quad \tau > 0$$

и представим

$$p\left(x_\tau(t)/x_{\tau-1}|_{A_{t,\tau-1}}\right) = q(x_\tau(t))\,[1 + \lambda(D_{t,\tau})]. \tag{6}$$

Просуммируем в (5) сначала по конфигурациям $x_{\tau_0} \in S^B$; подставив (6) в (5) и раскрыв скобки, получим, что

$$\langle F_B\rangle_{P_{\tau_0}} = \sum_{B_1\subset B} \sum_{(x_0,\ldots,x_{\tau_0-1})} \prod_{\tau=1}^{\tau_0-1} \prod_{t\in L_\tau(B_1)} p(x_\tau(t)/x|_{A_{t,\tau-1}}) \times \\ \times \left\langle F(B) \prod_{t\in B_1} \lambda(D_{t,\tau_0}) \right\rangle_{\mu_0^{\tau_0}},$$

где $\mu_0^\tau = q^{Y_\tau}$ мера на S_τ^Y, а $L_\tau(B_1) = \widetilde{\Gamma}_{B_1} \cap Y_\tau$. Продолжая таким образом дальше, мы получим окончательно, что

$$\langle F_B\rangle_{P_{\tau_0}} = \sum_{\Gamma=\{D_{t_1,\tau_1},\ldots,D_{t_s,\tau_s}\}} \langle F_B \Pi\lambda(D_{t_i,\tau_i})\rangle = \\ = \sum_{R\subseteq\Gamma_B} b_R^{\tau_0}(F_B), \tag{7}$$

где сумма $\sum_\Gamma$ берется по всем неупорядоченным наборам $\Gamma = \{D_{t_1,\tau_1}, \ldots, D_{t_s,\tau_s}\}$ попарно различных множеств из

$\mathfrak{A}$, хронологически-связным относительно B, а сумма $\sum\limits_R$ — по всем $\mathfrak{A}$-составным множествам R, таким, что $R=\widetilde{\Gamma}$ хотя бы при одном Γ, входящем в сумму $\sum\limits_\Gamma$. При этом

$$b_R^{\tau_0}(F_B)=\sum_{\Gamma:\widetilde{\Gamma}=R}\langle F_B\prod_{D_{t,\tau}\in\Gamma}\lambda(D_{t,\tau})\rangle_{\mu_0}. \qquad (8)$$

Поскольку каждый набор Γ однозначно определяется множеством вершин $(t_i,\ \tau_i)$ входящих в него множеств D_{t_i,τ_i}, то число наборов Γ, таких, что $\widetilde{\Gamma}=R$ не превосходит $2^{|R|}$. Отсюда и из (8) получаем, что

$$\left|b_R^{\tau_0}(F_B)\right|<\sup|F_B|\cdot(C\lambda)^{d_R(\mathfrak{A})}, \qquad (9)$$

где величина $d_R(\mathfrak{A})$ равна минимальной мощности набора Γ, такого, что $\widetilde{\Gamma}=R$, а $C=2^{|A_0|+1}$.

Заметим, что для всех R, не пересекающихся с нулевым слоем Y_0, величины $b_R^{\tau}(F_B)$ не зависят ни от начального распределения P_0, ни от τ_0 (при этом F_B рассматривается как некоторая фиксированная функция на пространстве S^{Z^ν}). Таким образом, существуют пределы

$$\lim_{\tau_0\to\infty}b_R^{\tau_0}(F_B)=b_R(F_B)$$

и

$$\lim_{\tau_0\to\infty}\langle F_B\rangle_{P_{\tau_0}}=\sum_R b_R(F_B)\equiv\langle F_B\rangle_\cdot.$$

Отсюда вытекает, что существует слабый предел $\lim\limits_{\tau\to\infty}P_\tau=\pi$ мер P_τ и

$$\langle F_B\rangle=\langle F_B\rangle_\pi$$

(см. § 1.I).

Легко видеть, что π является стационарным распределением для марковской цепи, т. е. при начальном распределении $P_0=\pi$, распределение $P_\tau=\pi$ при любом $\tau>0$. Далее из представления (7) и оценки (9) видно, что для любых двух начальных распределений P_0' и P_0''

$$|\langle F_B\rangle_{P_\tau'}-\langle F_B\rangle_{P_\tau''}|<(\overline{C}\lambda)^\tau\sup|F_B|,$$

где P_τ' и P_τ'' распределения на S^{Y_τ}, получаемые при начальных распределениях P_0' и P_0'' соответственно. Полагая теперь $P_0'=\pi=P_\tau'$ и $P_0''=P_0$, получаем (3). Далее из определения $b_R(F_B)$ и оценки (9) легко видеть, что кластерное представление (7) средних $\langle F_B\rangle_\pi$ является экспоненциально регулярным (см. § 3.III) относительно семейства и множеств $\mathfrak{A}$ и, тем самым, в силу теоремы 1.3.VI мера π обладает максимальным сильным убыванием корреляций. Теорема 1 доказана.

2. Непрерывное время. Пусть $T=Z^\nu\times R_+$ и $\Omega=S^T$ — пространство кусочно-постоянных функций $\{x_\tau(t),\ t\in Z^\nu,\ \tau\in R_+\}$ на T со значениями в S. Мы определим марковский процесс со значениями в S^{Z^ν}, переходная функция $P_\tau(\cdot/x_0)$ которого при малых τ имеет вид (1) (с точностью до $o(\tau)$). Пусть $A_0\subset Z^\nu$ — конечное множество, $0\in A_0$ и $h(s,x^{A_0})$ функция, определенная на множестве $S\times S^{A_0}$ и такая, что

$$h(s,x^{A_0})\geqslant 0,\text{ если } x^{A_0}(0)\neq s, \qquad (10)$$
$$h(s,x^{A_0})=-\sum_{s'\in S:s'\neq s}h(s',x^{A_0})\text{ при } s=x^{A_0}(0).$$

Для каждой точки $t\in Z^\nu$ определим бесконечную матрицу $H_t=\{H_t(x,\ x')\}$, матричные элементы $H_t(x,\ x')$ которой «занумерованы» конфигурациями $x,x'\in S^{Z^\nu}$ и равны

$$H_t(x,x')=\begin{cases}0, & \text{если } x(\bar t)\neq x'(\bar t)\text{ хотя бы в одной}\\ & \text{точке } \bar t\neq t,\\ h(x(t),\ x'|_{A_t}) & \text{— в остальных случаях,}\end{cases} \qquad (11)$$

где A_t — сдвиг A_0 на вектор t, а $x'|_{A_t}$ — сужение x' на множество A_t.

Для каждого конечного подмножества $\Lambda\subset Z^\nu$ определим матрицу $H_\Lambda=\sum\limits_{t\in\Lambda}H_t$. Мы построим сейчас однопараметрическую (слабо-непрерывную) полугруппу преобразований $\{G_\tau^\Lambda;\tau>0\}$, действующих в пространстве вероятностных мер, определенных на $(S^{Z^\nu},\ \mathfrak{B}_0)$ ($\mathfrak{B}_0$ — борелевская σ-алгебра в пространстве S^{Z^ν}, снабженном, как обычно, топологией тихоновского произведения), так, что

$$G_\tau^\Lambda = e^{\tau H_\Lambda} \qquad (11')$$

(смысл этого равенства будет указан ниже).

Пусть H_Λ^* — оператор, действующий в пространстве $C(S^{Z^\nu})$ непрерывных функций на S^{Z^ν} по формуле

$$H_\Lambda^* F = \sum_{t\in\Lambda} H_t^* F,$$

где

$$\left(H_t^* F\right)(x) = \sum_{y\in S^{Z^\nu}}{}' H_t(y, x) F(y) = \sum_{s\in S} h(s, x|_{A_t}) F(x^s), \qquad (12)$$

где $\sum\limits_y{}'$ означает суммирование по конфигурациям y, совпадающим вне точки $t\in Z^\nu$ с конфигурацией x, а x^s — одна из таких конфигураций, принимающая значение $x^s(t) = s$.

Из (11) следует, что

$$\| H_\Lambda^* \| \leqslant \sum_{t\in\Lambda} \| H_t^* \| \leqslant |\Lambda|\cdot|S|\cdot \max_{(s, x^{A_0})} \left| h(s, x^{A_0})\right|$$

и, таким образом, определена ограниченная полугруппа

$$\widetilde{G}_\tau^\Lambda = e^{\tau H_\Lambda^*}, \qquad (13)$$

действующая в пространстве $C(S^{Z^\nu})$.

При этом, как следует из (10), $\widetilde{G}_\tau^\Lambda \mathbb{1} = \mathbb{1}$ и $\widetilde{G}_\tau^\Lambda\cdot F \geqslant 0$, если $F\geqslant 0$. Таким образом, сопряженная полугруппа $(\widetilde{G}_\tau^\Lambda)^*$, действующая в пространстве $C^*(S^{Z^\nu})$ всех ограниченных счетно-аддитивных функций множества $\{\nu(A), A\in\mathfrak{B}_0\}$ (см., например, [16]), оставляет инвариантным совокупность вероятностных мер на $\mathfrak{B}_0$. Сужение полугруппы $(\widetilde{G}_\tau^\Lambda)^*$ на эту совокупность мы и обозначим через G_τ^Λ. Равенство (11′) формально получается из (13) переходом к сопряженным операторам.

Пусть P_0 — некоторое начальное распределение вероятностей на S^{Z^ν}. Тогда значение распределения $P_\tau^\Lambda = G_\tau^\Lambda P_0$ на любом цилиндрическом множестве $\mathscr{K} = \mathscr{K}_A \in \Sigma_A$,

где $A\subset Z^\nu$ — конечное множество, равно

$$P_\tau^\Lambda(\mathscr{K}) = \int_{S^{Z^\nu}} \left(e^{\tau H_\Lambda^*}\chi_{\mathscr{K}}\right)(x)\, dP_0(x), \qquad (14)$$

где $\chi_{\mathscr{K}}$ — характеристическая функция цилиндрического множества $\mathscr{K}$ (очевидно, что $\chi_{\mathscr{K}}\in C(S^{Z^\nu})$).

Теорема 2. *Существует такое $\tau_0 = \tau_0(h, S)$, что для всякой вероятностной меры P_0 на S^{Z^ν} и любого $\tau\leqslant\tau_0$ существует предел (в смысле слабой сходимости)*

$$\lim_{\Lambda\nearrow Z} G_\tau^\Lambda P_0 = P_\tau,$$

где P_τ вероятностная мера на σ-алгебре $\mathfrak{B}_0$.

Отображение $G_\tau: P_0 \mapsto P_\tau$ слабо-непрерывно и семейство $\{G_\tau,\ 0\leqslant\tau\leqslant\tau_0\}$ этих отображений мультипликативно:

$$G_{\tau_1}\cdot G_{\tau_2} = G_{\tau_1+\tau_2}, \quad \tau_1, \tau_2, \tau_1+\tau_2\leqslant\tau_0. \qquad (14')$$

Доказательство. Покажем, что для достаточно малых $\tau > 0$ и любой локальной функции $F_B\in C(S^{Z^\nu})$ существует предел $\lim\limits_{\Lambda\nearrow Z^\nu} e^{\tau H_\Lambda^*} F_B$. Напишем

$$e^{\tau H_\Lambda^*} F_B = \left(E + \tau H_\Lambda^* + \ldots + \frac{\tau^n}{n!}\left(H_\Lambda^*\right)^n + \ldots\right) F_B. \quad (15)$$

Заметим, что $H_t^* F_B = 0$ при $t\,\overline{\in}\, B$. Таким образом,

$$\frac{\tau^n}{n!}\left(H_\Lambda^*\right)^n F_B = \frac{\tau^n}{n!}\sum_{(t_1,\ldots,t_n)} H_{t_n}^*\ldots H_{t_1}^* F_B,$$

где сумма берется по всем последовательностям $(t_1,\ldots,t_n)$, $t_i\in\Lambda$, таким, что

$$t_1\in B\cap\Lambda,\ t_2\in(B\cup A_{t_1})\cap\Lambda,\ \ldots$$

$$\ldots,\ t_n\in(B\cup A_{t_1}\cup\ldots\cup A_{t_{n-1}})\cap\Lambda.$$

Легко видеть, что число таких слагаемых при всех Λ не превосходит

$$|B|\cdot(|B|+|A_0|)(|B|+2|A_0|)\ldots(|B|+(n-1)|A_0|)\leqslant$$

$$\leqslant |A_0|^n \varkappa(\varkappa+1)\ldots(\varkappa+n-1) < |A_0|^n\frac{(\varkappa+n-1)!}{(\varkappa-1)!},$$

где $\varkappa = \left[\frac{|B|}{|A_0|}\right] + 1$. Таким образом

$$\left\|\frac{\tau^n}{n!}(H^*_\Lambda)^n F_B\right\| < 2^{\varkappa-1}(C\tau)^n \|F_B\|, \qquad (16)$$

где $C = 2|A_0|\cdot|S|\max\left|h\left(S, x^{A_0}\right)\right|$. Из оценки (16) и разложения (15) следует, что при $\tau < C^{-1}$ существует предел

$$\lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu} e^{\tau H^*_\Lambda} F_B = F_B^\tau \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde G_\tau F_B$$

для любой локальной функции F_B. При этом на любом подпространстве $C_B = C\left(S^{Z^\nu}, \Sigma_B\right)$ непрерывных функций F_B, измеримых относительно σ-алгебры $\Sigma_B \subset \mathfrak{B}_0$, оператор $\tilde G_\tau$ ограничен:

$$\|\tilde G_\tau|_{C_B}\| < \infty. \qquad (17)$$

С помощью формулы (14) получаем, что существует предел

$$\lim_{\Lambda\nearrow Z^\nu} P_\tau^\Lambda(\mathscr{K}_B) = \int \left(\tilde G_\tau \bar\chi_{\mathscr K_B}\right)(x)\,dP_0 = P_\tau(\mathscr K_B)$$

для любого цилиндрического множества $\mathscr K_B$, причем, как следует из (17), значения $\{P_\tau(\mathscr K_B),\ \mathscr K_B \in \mathfrak A\}$ образуют вероятностную предмеру на алгебре цилиндрических множеств $\mathfrak A = \bigcup\limits_B \Sigma_B$ (см. § 1.I). Эта предмера продолжается до вероятностной меры P_τ на σ-алгебре $\mathfrak B_0$ (теорема Колмогорова). Остальные утверждения теоремы получаются просто.

Для любого $\tau > 0$ определим отображение G_τ в пространстве мер по формуле $G_\tau = G^k_{\tau_0} G_{\tau^*}$, где $k = [\tau/\tau_0]$, $\tau^* = \tau - k\tau_0$. Из (14′) легко выводится, что семейство отображений $\{G_\tau,\ \tau > 0\}$ образует полугруппу.

Заметим, что в случае, когда множество $A_0 = \{0\}$ и функция $h\left(s, x^{A_0}\right) \equiv h(s, s') \neq 0$, $s' = x^{A_0}(0)$, построенный нами марковский процесс $x_\tau = \{x_\tau(t),\ t \in Z^\nu\}$, $\tau \geqslant 0$ на T представляется в виде набора $x_\tau^+ = \{x_\tau(t),\ \tau > 0\}$ условно независимых (при фиксированных начальных точках $x_0(t)$, $t \in Z^\nu$) эргодических марковских процессов со значениями в S. У этого процесса существует стацио-

нарное распределение $\pi_0 = q^{S^{Z^\nu}}$ (q — стационарное распределение каждой компоненты); обозначим μ_0 соответствующее распределение всего процесса, определенное начальным распределением $P_0 = \pi_0$.

Предположим теперь, что

$$h\left(s, x^{A_0}\right) = h_0(s, s') + \lambda\left(s, x^{A_0}\right), \quad s' = x^{A_0}(0), \qquad (18)$$

где $h_0(s, s') \neq 0$, удовлетворяет условиям (10) и порождает, таким образом, условно независимую эргодическую марковскую цепь. Верна теорема, аналогичная теореме 1:

Теорема 3. *Пусть в разложении* (18) $\max\limits_{s,x^{A_0}}\left|\lambda\left(s, x^{A_0}\right)\right| < \lambda_0$, *где* $\lambda_0 = \lambda_0(h_0)$ *достаточно малое число. Тогда построенный выше марковский процесс эргодичен, его распределение* μ *в пространстве* Ω *(при любом начальном распределении* P_0*) допускает кластерное разложение, а стационарное распределение* π *обладает свойством максимального сильного убывания корреляций.*

§ 6. Ансамбль внешних контуров

В § 1.V упоминалось об ансамбле внешних контуров, порожденном ансамблем всех контуров. Здесь мы рассмотрим ансамбль внешних контуров общего вида и покажем, что при некоторых условиях он порождается ансамблем всех контуров.

Пусть $\tilde Z^2$ — совокупность ребер решетки Z^2 и $\Lambda \subset \tilde Z^2$ — некоторое конечное подмножество ребер. Обозначим через $\mathfrak A_\Lambda$ совокупность наборов (конфигураций) $\alpha = \{\Gamma_i\}_{i=1}^s$ попарно непересекающихся контуров $\Gamma_i \subset \tilde Z^2$ таких, что $\Gamma_i \cup \operatorname{Int}\Gamma_i \subset \Lambda$, $i = 1, \ldots, s$, где $\operatorname{Int}\Gamma \subset \tilde Z^2$ — совокупность ребер, охватываемых контуром Γ.

В каждой конфигурации $\alpha \in \mathfrak A_\Lambda$ выделим совокупность $\alpha^{\mathrm{ext}} \subseteq \alpha$ внешних контуров $\Gamma \in \alpha$, т. е. таких контуров, которые не охватываются никаким другим контуром $\Gamma' \in \alpha$. Конфигурацию $\alpha \in \mathfrak A_\Lambda$ назовем конфигурацией внешних контуров, если $\alpha^{\mathrm{ext}} = \alpha$, а совокупность таких конфигураций обозначим через $\mathfrak A_\Lambda^{\mathrm{ext}} \subset \mathfrak A_\Lambda$.

Пусть теперь $\{\Psi(\Gamma)\}$ — вещественная функция, определенная на всех контурах $\Gamma \subset \tilde Z^2$ и такая, что

а) $\sup\left(|\Psi(\Gamma)|/|\Gamma|\right) < \infty$, б) $\Psi(\Gamma) > \tau_0|\Gamma|$ для любого Γ, где $\tau_0 > 0$ некоторая абсолютная константа.

в) $\Psi(\Gamma + t) = \Psi(\Gamma)$, где $t \in Z^2$, а $\Gamma + t$ — сдвиг контура Γ на вектор t.

Зададим распределение вероятностей на множестве $\mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}$ по формуле

$$P_\Lambda^{\text{ext}}(\alpha) = \frac{1}{Z_\Lambda^{\text{ext}}} \prod_{\Gamma \in \alpha} \exp(-\Psi(\Gamma) + hV(\Gamma)), \quad \alpha \in \mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}, \tag{1}$$

где

$$Z_\Lambda^{\text{ext}} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}} \prod_{\Gamma \in \alpha} \exp(-\Psi(\Gamma) + hV(\Gamma)), \tag{1'}$$

а $V(\Gamma) = |\operatorname{Int}\Gamma|$ и h — вещественный параметр. Распределение (1) называется *ансамблем внешних контуров в* Λ.

Заметим, что при $h \leqslant 0$ и достаточно большом $\tau_0 \gg 1$ выражение (1′) для статистической суммы Z_Λ^{ext} является кластерным представлением (в смысле определений § 1.III) с величинами

$$k_\Gamma = k_\Gamma(\Psi, h) = \exp(-\Psi(\Gamma) + hV(\Gamma)), \tag{2}$$

удовлетворяющими условию кластерности (2.1.III). Отсюда, в частности, стандартным способом (см. гл. III) выводится существование *предельного ансамбля внешних контуров в* $\tilde{Z}^2$ (т. е. распределения вероятностей на множестве конечных или счетных конфигураций внешних контуров в $\tilde{Z}^{(2)}$) такого, что корреляционные функции конечных ансамблей (1) сходятся при $\Lambda \nearrow \tilde{Z}^{(2)}$ к корреляционной функции этого предельного ансамбля (см. § 1.V).

Рассмотрим теперь случай $h > 0$. В этом случае величины (2) уже не удовлетворяют условию кластерности и непосредственное применение кластерной техники к ансамблю (1) невозможно. Однако мы покажем, что при достаточно малых h ансамбль (1) может быть сведен к ансамблю всех контуров в Λ, допускающему кластерное разложение.

Пусть $\{\Phi(\Gamma)\}$ некоторая функция, определенная на контурах $\Gamma \subset \mathfrak{G}^{(2)}$ и удовлетворяющая условиям а), б), в); $\varkappa > 0$ произвольный параметр. Зададим распределение вероятностей на множестве $\mathfrak{A}_\Lambda$ конфигураций всех

контуров в Λ по формуле

$$P_\Lambda(\alpha) = \frac{1}{Z_\Lambda} \prod \exp(-\Phi(\Gamma) - \varkappa V(\Gamma)) = \frac{1}{Z_\Lambda} \prod k_\Gamma(\Phi, -\varkappa), \tag{3}$$

где k_Γ определены формулой (2), а

$$Z_\Lambda = \sum_\alpha \prod_{\Gamma \in \alpha} k_\Gamma. \tag{3'}$$

Распределение (3) называется ансамблем контуров в Λ. Распределение (3) индуцирует распределение вероятностей на множестве $\mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}$:

$$P_{\Lambda,\text{ind}}^{\text{ext}}(\alpha) = \Pr\{\beta \in \mathfrak{A}_\Lambda : \beta^{\text{ext}} = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}.$$

С помощью (3) легко подсчитать, что это распределение имеет вид

$$P_{\Lambda,\text{ind}}^{\text{ext}}(\alpha) = \frac{1}{Z_\Lambda} \prod_{\Gamma \in \alpha} Z_\Gamma k_\Gamma(\Phi, -\varkappa) = Z_\Lambda^{-1} \prod_{\Gamma \in \alpha} \tilde{k}_\Gamma(\Phi, -\varkappa), \tag{4}$$

где $Z_\Gamma = Z_{\widetilde{\operatorname{int}\Gamma}}$ статистическая сумма ансамбля контуров в $\widetilde{\operatorname{Int}}\,\Gamma \subset \tilde{Z}^2$ — множестве ребер, лежащих внутри Γ и не пересекающих Γ, а

$$\tilde{k}_\Gamma(\Phi, -\varkappa) = Z_\Gamma k_\Gamma(\Phi, -\varkappa). \tag{4'}$$

Теорема 1. *Для каждой функции* $\{\Psi(\Gamma)\}$, *удовлетворяющей условиям* а), б), в), *можно указать такое значение* $h_0(\Psi) > 0$, *что для любого* $h \leqslant h_0(\Psi)$ *существуют функция* $\{\Phi(\Gamma)\}$, $\Phi(\Gamma) = \Phi(\Gamma;\ \Psi,\ h)$, *удовлетворяющая условиям* а), б), в) (*условие* б) *выполняется с константой* $\tau_0' = \tau_0 - c_0 e^{-\tau_0}$, *где* c_0 — *абсолютная константа*) *и параметр* $\varkappa = \varkappa(\Psi, h)$, *такие, что для любого* $\Lambda \subset \tilde{Z}^2$ *распределение* $P_{\Lambda,\text{ind}}^{\text{ext}}$ на $\mathfrak{A}_\Lambda^{\text{ext}}$ (4), *индуцированное ансамблем контуров* (3) *в* Λ, *совпадает с ансамблем* P_Λ^{ext} (1) *внешних контуров в* Λ.

Следствие. *При всех* $h \leqslant h_0(\Psi)$ *существует ансамбль внешних контуров в* $\tilde{Z}^2$, *являющийся предельным для ансамблей внешних контуров* (1) *при* $\Lambda \nearrow \tilde{Z}^2$.

Действительно, при достаточно большом τ_0' и $\varkappa \geqslant 0$ ансамбль контуров (3) в Λ допускает кластерное разложение. Отсюда снова выводим, что существует предельный ансамбль контуров в $\mathbb{Z}^2$, который и индуцирует предельный ансамбль внешних контуров в $\mathbb{Z}^2$ (подробнее см. в [49]).

Доказательство теоремы. С помощью приемов, развитых в гл. III, получим, что для любого $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ статистическая сумма Z_Γ в (4) имеет вид

$$Z_\Gamma = \exp\left(SV(\Gamma) + \Delta(\Gamma)\right). \tag{5}$$

Здесь $S = S(\Phi, \varkappa) = 0$ — параметр, являющийся аналитическим функционалом относительно переменных $\{k_\Gamma(\Phi, -\varkappa)\}$:

$$S(\Phi, \varkappa) = \sum_\gamma M_\gamma \prod_{\Gamma \in \gamma} k_{\Gamma},\tag{6}$$

где суммирование происходит по связным наборам контуров $\gamma = \{\Gamma_i\}$ (возможно и повторяющихся); подробнее смотри в § 4.III. Граничный член $\Delta(\Gamma) = \Delta(\Gamma;\ \Phi,\ \varkappa)$, $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$, удовлетворяет оценке

$$|\Delta(\Gamma)| < C_0 e^{-4\pi}|\Gamma| \tag{7}$$

и допускает разложение, аналогичное разложению (6)

$$\Delta(\Gamma; \Phi, \varkappa) = \sum \overline{M}_\gamma^{\,\prime}(\Gamma) \prod_{\Gamma' \in \gamma} k_{\Gamma'}.$$

Таким образом, величины $\tilde{k}_\Gamma(\Phi, -\varkappa)$ равны

$$\tilde{k}_\Gamma(\Phi, -\varkappa) = k_\Gamma(\Psi, h),$$

где

$$\Psi(\Gamma) = \Phi(\Gamma) + \Delta(\Gamma;\ \Phi,\ \varkappa), \tag{8}$$

а

$$h = S(\Phi, \varkappa) - \varkappa. \tag{8$'$}$$

При фиксированных Ψ и h эти соотношения можно рассматривать как уравнения относительно Φ и $\varkappa$. Эти уравнения называются *уравнениями Пирогова — Синая* (см. [64]).

При любом фиксированном $\varkappa \geqslant 0$ (и достаточно большом τ_0) уравнение (8) однозначно разрешимо относительно функции $\Phi = \{\Phi(\Gamma)\}$ и решение $\Phi = \Phi(\varkappa, \Psi)$ непрерывно зависит от $\varkappa$. Это можно доказать, опираясь на разложение (7), с помощью известной бесконечномерной версии теоремы о неявной функции, принадлежащей

Л. В. Канторовичу (подробнее, см. [49] или [64]). Подставляя найденное решение $\Phi(\varkappa, \Psi)$ в уравнение (8$'$), получим уравнение

$$h = S(\Phi(\varkappa, \Psi), \varkappa) - \varkappa \equiv v_\Psi(\varkappa). \tag{9}$$

Функция $v_\Psi(\varkappa)$ непрерывна и при изменении $\varkappa$ от 0 до ∞ меняется (причем, как легко показать, монотонно) в пределах от $v_\Psi(0) = S(\Phi(0, \Psi), 0) \equiv h_0(\Psi) > 0$ до $-\infty$. Таким образом, при $h \leqslant h_0(\Psi)$ уравнение (9) однозначно разрешимо относительно $\varkappa \geqslant 0$. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В заключение мы кратко, почти намеком, скажем о некоторых не вошедших в книгу темах, задачах и примерах из теории кластерных разложений, а также о перспективах ее развития.

1. Решетчатые системы с неограниченным бесконечно-протяженным потенциалом. Примером может быть задача получения кластерного разложения для следующего гиббсовского поля на решетке Z^ν с вещественными значениями $x = \{x_t,\ t \in Z^\nu\}$. В конечном множестве $\Lambda \subset Z^\nu$ распределение μ_Λ этого поля задается формулой

$$d\mu(x) = Z^{-1} \exp\left\{-\lambda U(x) - \sum_{t\in\Lambda} |x_t|^m\right\} dx, \tag{1}$$

где

$$U(x) = \sum_{t,t'\in\Lambda} x_t^{2k} x_{t'}^{2k} \frac{1}{|t-t'|^{-(\nu+\varepsilon)}}, \tag{2}$$

$\lambda > 0$, $m > 0$, $\varepsilon > 0$, k — целое число.

В работе [86]

$$m > 4k, \quad \varepsilon > 4\nu \tag{3}$$

и параметр λ достаточно мал.

В [86] в действительности был рассмотрен более общий класс взаимодействий.

В [2*] была предложена совершенно другая идея получения кластерного разложения для взаимодействия (1). При этом были усилены результаты статьи [86].

2. Гиббсовские перестройки (обобщенных) гауссовых полей в R^ν. Эти перестройки изучались в связи с проблемой построения евклидовых квантовых полей в R^ν (см. [15]). Здесь получено много результатов и развита мощная техника кластерных разложений. В нашей книге изложен решетчатый аналог этой техники (см. гл. IV и V), в идейном отношении не отличающийся от случая непрерывных полей.

3. Преобразования двойственности. Идея перехода к так называемой двойственной системе оказывается часто плодотворной. Она позволяет сводить низкотемпературные разложения к высокотемпературным, переходить от дальнодействующих взаимодействий к близкодействующим, а изучение спиновых систем заменять изучением непрерывных газов и наоборот. Замечательный пример применения двойственности — в сочетании с кластерными разложениями — это доказательство так называемого экранирования, т. е. явления быстрого убывания корреляций в нейтральных си-

стемах заряженных частиц с медленно убывающим (кулоновским) взаимодействием [81].

О двойственности и экранировании см. обзор [142], где имеется обширная библиография.

4. Квантовые равновесные ансамбли. При изучении гиббсовских состояний для квантовых газов или квантовых спиновых систем их чаще всего сводят — с помощью формул Фейнмана — Каца — к классическому ансамблю марковских траекторий (пример такого ансамбля изучен нами в § 4.V). Далее этот ансамбль исследуется с помощью стандартной кластерной техники, описанной в нашей книге (о квантовых газах см., например, книгу [6*], о сведении квантовых систем к ансамблям случайных траекторий см. в давнем обзоре [7*]).

5. Динамика квантовых систем в равновесных состояниях. Динамике бесконечночастичных систем в состояниях, близких к равновесному (как основному, так и температурному), будет посвящена отдельная книга авторов. Важнейшим применением кластерных разложений в этой области является исследование низколежащих ветвей спектра гамильтонианов решетчатых моделей квантовой теории поля (в основном состоянии). Математически это сводится к изучению спектральных свойств у так называемых кластерных операторов (введенного недавно важного класса линейных операторов, действующих в фоковском пространстве). Кроме того, методы кластерных разложений начинают применяться и при исследовании динамики в гиббсовском (температурном) состоянии, а также в задачах о движении одной частицы в случайном силовом поле.

6. Динамика открытых систем. Кластерные разложения для квантовых открытых систем с бесконечным числом частиц фактически не исследовались. В частности, это относится к общим марковским процессам с локальным взаимодействием и некомпактным пространством спинов, а также к их непрерывным аналогам — стохастическим уравнениям в частных производных. Результаты § 5.VII могут быть обобщены и на ряд подобных систем.

7. Сети связи и массового обслуживания. Здесь применение кластерных разложений только начинается (см. [6*]).

8. Комбинаторика. О кластерных разложениях в задаче о перечислении графов см. [73].

9. Другие вероятностные применения. Применения кластерных разложений в классической теории вероятностей связаны с умением получать асимптотические разложения логарифма среднего или условного среднего вида $\left\langle \prod_{i=1}^{N} \exp \lambda_i \xi_i \right\rangle$, $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ — случайный вектор. Среди этих применений — центральные предельные теоремы, предельные теоремы о больших уклонениях, эргодические свойства случайных процессов, статистика случайных процессов, изучение локальных свойств броуновских траекторий и свойств случайных блужданий без самопересечений [3*], теория просачивания для случайных полей, ε-энтропия случайных полей.

10. Аналитическое продолжение кластерных разложений. Некоторые кластерные разложения иногда могут быть продолжены в более обширную область параметров чем та, что предписывается стандартной схемой (см. гл. III). Это связано с кругом идей и приемов, берущих свое начало от известной теоремы Ли и Янга о нулях статической суммы (введение в эту тематику см. в [40]). В недавней работе [4*] развивается новая техника, позволяющая устанавливать истинную границу области аналитичности.

11. Вполне интегрируемые системы. Один из методов точного решения двумерной модели Изинга состоит в кластерном разложении логарифма статистической суммы, которое удается явно просуммировать [5*].

12. Многомасштабные кластерные разложения. Этот новый метод является существенным развитием описанных в книге приемов. Он приспособлен для исследования так называемых ультрафиолетовых (поведение поля в малых масштабах) и инфракрасных (большие масштабы) проблем квантовой теории поля и статистической физики. Он также позволяет исследовать критические явления и фазовые переходы в системах с непрерывной группой симметрии. Метод находится сейчас в стадии развития и еще рано судить о его пределах. С этим методом и последними его достижениями можно познакомиться по сборнику [1*].

ПРИМЕЧАНИЯ

Эти библиографические примечания не претендуют на исчерпывающую полноту. Здесь в основном указаны работы, которые мы использовали при написании книги.

Глава I

§ 0. Изложение заимствовано из лекций В. А. Малышева [40].

§ 1. Термодинамический предельный переход и предельные гиббсовские перестройки изучались в работах Н. Н. Боголюбова, Б. И. Хацета [9] (см. также работу Н. Н. Боголюбова, Д. Я. Петрины и Б. И. Хацета [8]), Д. Рюэля [139], Р. А. Минлоса [43], [44]. См. об этом также в книгах Д. Рюэля [60] и К. Престона [57]. О точечных полях см. книгу М. Керстена, К. Маттеса и Й. Мекке [30].

§ 2. Общее определение гиббсовского поля введено в работах Р. Л. Добрушина [18], [19], [20] и О. Лэнфорда и Д. Рюэля [128] (см. также работу Р. Л. Добрушина [21]). Основные понятия теории марковских полей изложены в книге Ю. А. Розанова [59].

Глава II

§ 1. В отечественной литературе смешанные семиинварианты случайных процессов изучались в работе В. П. Леонова и А. Н. Ширяева [35]; см. также книгу В. П. Леонова [34]. Формальные семиинварианты были введены в работе В. А. Малышева [38].

§ 2. Общая конструкция полиномов Ито — Вика от гауссовской случайной функции содержится в обзоре Р. Л. Добрушина и Р. А. Минлоса [23] (см. также книги Б. Саймона [61] и Дж. Глимма и А. Джаффе [15]). О диаграммной технике см. в книге К. Хеппа [65] и в упомянутой книге Дж. Глимма и А. Джаффе [15]. В этой же книге можно найти формулы интегрирования по частям.

§ 3. Изложение следует работе В. А. Малышева [38].

§ 4. Оценка числа связных наборов множеств (лемма 1) известна давно. Оценки суммы по деревьям содержатся в работах многих авторов; см., например, работы М. Дюно, Д. Ягольницера, Б. Суйяра [92], М. Дюно, Б. Суйяра [93], В. А. Малышева [36], Ф. Г. Абдулла-Заде, Р. А. Минлоса, С. К. Погосяна [1], Г. Бэттла и П. Г. Федербуша [69], [71].

§ 5. Содержание этого параграфа взято из работы В. А. Малышева [38].

§ 6. Основные понятия теории структур см. в книге Г. Биркгофа [7].
Теорема 6 принадлежит Г. Рота [138].
§ 7. Изложение следует работе В. А. Малышева [38].
§ 8. Приведенный здесь формализм изложен в книге Д. Рюэля [60].

Глава III

§ 1. На физическом уровне строгости многие идеи кластерных разложений применялись в физической литературе давно. Математическое оформление этих идей содержится в большом ряде работ, см., например, Н. Н. Боголюбов, Б. И. Хацет [9], Д. Рюэль [60], Г. А. Минлос и Я. Г. Синай [48], [49], Дж. Глимм, А. Джаффе, Г. Спенсер [14], [109] (см. книгу Дж. Глимма и А. Джаффе [15]). Ансамбль подмножеств и кластерная оценка введены в работе Г. Грубера и Х. Кунца [115].
§ 2. Уравнение Кирквуда — Зальцбурга для ансамбля подмножеств изучалось в работах Г. Грубера и Х. Кунца [115] и Дж. Глимма и А. Джаффе, Т. Спенсера [14].
§ 3. Явное разложение корреляционной функции в ряды по величинам k_Γ содержится в работе В. А. Малышева [38]. Там же введено понятие экспоненциально-регулярного кластерного разложения.
§ 4. Разложения логарифма статистической суммы, близкие к построенному нами разложению, использовались во многих работах (А. Минлос, Я. Г. Синай [48], [49], Р. Л. Добрушин [22], Дж. Галлавотти и А. Мартин-Лёф [103], Р. А. Минлос, С. К. Погосян [46] и др.).
§ 5. Материал этого параграфа известен давно. Изложение следует лекциям В. А. Малышева [40].
§ 6. Результаты этого параграфа являются небольшим обобщением общеизвестных фактов. Используемый здесь метод приводится впервые.

Глава IV

§ 1—2. Результаты этого параграфа являются уточнением результатов Й. Парка [137] и В. А. Малышева [39].
§ 4. Здесь дается модифицированное изложение известных результатов; см. Д. Рюэль [60].
§ 5. Результаты этого параграфа излагаются впервые.
§ 6. Теорема 1 имеется в работе М. Дюпо, Д. Ягольницера, Б. Суйяра [92]. Кластерное представление (6в) применялось впервые Г. Сильвестром [142] для случая гиббсовской перестройки независимого поля. Теорема 2 доказана в работе В. А. Малышева [38].
* 7. Изложение следует статье Р. Р. Ахмитзянова, В. А. Малышева, Е. Н. Петровой [2]. Близкие результаты получены в работе Г. Бэтла и П. Г. Фебербуша [69], [71]. Примененный здесь метод интерполяции принадлежит Дж. Глимму, А. Джаффе и Т. Спенсеру [108].
§ 8. Результаты этого параграфа являются новыми. Основной смысл использованного здесь приема: он позволяет рассмотреть и негладкие возмущения. Примененный в этом параграфе метод интерполяции является видоизменением метода, также принадлежащего Дж. Глимму, А. Джаффе, Т. Спенсеру [14].

Глава V

§ 1. Первые низкотемпературные разложения (в ансамбле контуров) были получены в работах Р. А. Минлоса, Я. Г. Синая [47], [48], [49] для случая модели Изинга. Изложенный здесь результат принадлежит Е. Н. Петровой [54], см. также статью В. А. Малышева и Е. Н. Петровой [42]. Похожая модель была разобрана в работе Ф. Ф. Галеба [11].
§ 2. Приведенный здесь результат является частным случаем результата Г. Желондека [25]. Примененный нами метод использовался в ряде прежних работ; см. работу Наср Али [50], а также обзор В. А. Малышева, Р. А. Минлоса, Е. Н. Петровой и Ю. А. Терлецкого [41].
§ 3. Изложенный в этом параграфе результат является частным случаем результатов из работ Дж. Глимма, А. Джаффе, Т. Спенсера [109] (модель $P(\varphi)_2$), Д. Бриджеса [81] и Имбри [119], [120], [122] (непрерывное поле со счетным числом состояний). Наши построения существенно основаны на результатах § 8.IV. Этот же случай разобран в работе Р. Л. Добрушина и М. Заградника [91]. В работе В. А. Малышева, Р. А. Минлоса, Е. Н. Петровой и Ю. А. Терлецкого [41] рассмотрен аналогичный случай, в котором возмущение имеет «острый» минимум.

Глава VI

§ 1. Понятие сильного убывания корреляций введено в работах М. Дюпо, Б. Суйяра [93] и М. Дюпо, Б. Суйяра, Д. Ягольницера [92], [94], [95]. Им же принадлежат и многие результаты об оценках семиинвариантов для точечных полей. О связи между разными введенными здесь понятиями убывания корреляций см. статью Славны [141].
§ 2. Мы следуем здесь работе В. А. Малышева [39]. Некоторые близкие к нашим приемы можно найти в работе М. Дюпо, Б. Суйяра, Д. Ягольницера [95]. Р. Л. Добрушин предложил метод доказательства аналитичности статистической суммы, не использующий кластерных разложений (не опубликовано).
§ 3. Здесь мы следуем работе В. А. Малышева [38].
§ 4. Изложенные здесь результаты принадлежат В. А. Малышеву, Е. Н. Петровой и Л. А. Умирбековой (не опубликовано). См. также работу М. Дюпо, Б. Суйяра и Д. Ягольницера [95].
§ 5. См. статью В. А. Малышева [38].
§ 6. См. работу В. А. Малышева и Б. Тироцци [134].

Глава VII

§ 1. Семиинварианты для алгебры введены в книге У. Браттели и Д. Робинсона [10]. Для общих супер922алгебр эти понятия вводятся впервые. Применение этих конструкций можно найти в работе И. А. Кашапова [29] и в [132].

§ 2. Результат этого параграфа принадлежит В. А. Малышеву и И. Николаеву [133].

§ 3. Результат публикуется впервые.

§ 4. О решетчатых калибровочных полях и оценках для функционала Вильсона можно прочесть в обзорах К. Остервальдера и Е. Зайлера [136], Ч. Борга, Е. Зайлера [74], Е. Зайлера [140].

§ 5. О марковских процессах с локальным взаимодействием см. в обзоре Р. Дюрретта [96] (см. также Д. Гриффитс [113]). Результаты этого параграфа получены С. А. Пироговым (не опубликовано).

§ 6. Результат этого параграфа является новым. Использованный здесь прием принадлежит С. А. Пирогову и Я. Г. Синаю [55], [56] (см. также книгу Я. Г. Синая [64]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдулла-Заде Ф. Г., Минлос Р. А., Погосян С. К. Кластерные оценки для гиббсовских случайных полей и некоторые их применения.— В сб. Многокомпонентные случайные системы.— М.: Наука, 1978, с. 5—30.
2. Ахмитзянов Р. Р., Малышев В. А., Петрова Е. Н. Кластерное разложение гиббсовского возмущения безмассового гауссовского поля.— Теорет. и мат. физика, 1984, № 2, с. 292—298.
3. Басуев А. Г. Представление для функций Урселла и кластерные оценки.— Теорет. и мат. физика, 1979, т. 39, № 1, с. 94—106.
4. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.— М.: Наука: 1965.
5. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными.— М.: Изд-во МГУ, 1983.
6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.— М.: Наука, 1977.
7. Биркгоф Г. Теория структур.— М.: ИЛ, 1952.
8. Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет Б. И. Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля.— Теорет. и матем. физика, 1969, т. 1, № 2, с. 251—274.
9. Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И. О некоторых математических вопросах статистического равновесия.— ДАН, 1949, т. 66, № 3, с. 321—324.
10. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.— М.: Мир, 1982.
11. Галеб Ф. Ф. Существование бесконечного числа фаз в некоторых моделях статистической физики.— Труды Моск. мат. о-ва, 1982, т. 44, с. 109—123.
12. Герцик В. М. Аналитичность корреляционных функций для решетчатых систем с нефинитным потенциалом в многофазном случае.— В сб. Многокомпонентные случайные системы.— М.: Наука, 1978, с. 112—132.
13. Гиббсовские состояния в статистической физике.— Сб. переводов.— М.: Мир, 1978.
14. Глимм Дж., Джаффе А., Спенсер Т. Корпускулярная структура $P(\varphi)_2$ модели со слабым взаимодействием и другие применения высокотемпературных разложений. I, II.— В сб. Конструктивная теория поля.— М.: Мир, 1977.
15. Глимм Дж., Джаффе А. Квантовая физика — подход с точки зрения континуальных интегралов.— М.: Мир, 1984.

16. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Часть I (общая теория).— М.: ИЛ, 1962.
17. Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления.— М.: Наука, 1974.
18. Добрушин Р. Л. Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности.— Теор. вер. и ее примен., 1968, т. 13, № 2, с. 201—229.
19. Добрушин Р. Л. 1) Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием.— Функц. анализ и его прилож., 1968, т. 2, № 4, с. 31—43.
2) Задача единственных гиббсовского случайного поля и проблема фазовых переходов.— Функц. анализ и его прилож., 1968, т. 2, № 4, с. 44—57.
20. Добрушин Р. Л. Гиббсовские поля. Общий случай.— Функц. анализ и его прилож., 1969, т. 3, № 1, с. 27—35.
21. Добрушин Р. Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений.— Теор. вер. и ее примен., 1970, № 3, с. 469—497.
22. Добрушин Р. Л. Асимптотическое поведение гиббсовских распределений для решетчатых систем в зависимости от формы сосуда.— Теор. и мат. физика, 1972, т. 12, № 1, с. 115—134.
23. Добрушин Р. Л., Минлос Р. А. Полиномы от линейных случайных функций.— УМН, 1977, т. XXXII, с. 67—122.
24. Евклидова квантовая теория поля (марковский подход).— Сб. переводов.— М.: Мир, 1978.
25. Жолондек Х. Гиббсовские поля в невырожденном случае и спектр их стохастических операторов. Канд. дис. МГУ. Мех.-мат. ф-т.— М., 1983.
26. Журбенко И. Г. О сильных оценках смешанных семиинвариантов случайных процессов.— Сиб. мат. ж., 1972, т. 13, № 2, с. 293—308.
27. Загребнов В. А. Теорема Боголюбова — Рюэля: новое доказательство и обобщения.— Теорет. и мат. физика, 1982, т. 51, № 3, с. 389—402.
28. Иосида К. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1967.
29. Кашапов И. А. Спектр трансфер-матрицы фермионных полей.— УМН, 1982. 37, № 2, с. 197—198.
30. Керстан М., Маттес К., Мекке Й. Безгранично-делимые точечные процессы.— М.: Наука, 1982.
31. Конструктивная теория поля.— Сб. переводов.— М.: Мир, 1977.
32. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.
33. Лейтес Д. А. Введение в теорию супермногообразий.— УМН, 1982, № 1, с. 3—58.
34. Леонов В. П. Некоторые применения старших семиинвариантов в теории стационарных случайных процессов.— М.: Наука, 1964.
35. Леонов В. П., Ширяев А. Н. К технике вычисления семиинвариантов.— Теор. вер. и ее примен., 1959, т. 4, с. 342—355.
36. Малышев В. А. Возмущения гиббсовских случайных полей.— В сб. Многокомпонентные случайные системы.— М.: Наука, 1978, с. 258—276.

37. Малышев В. А. Оценки коэффициентов разложений Майера на границе инфракрасной области.— Теорет. и мат. физика, 1980, т. 45, № 2, с. 235—243.
38. Малышев В. А. Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля.— УМН, 1980, т. 35, № 2, с. 3—53.
39. Малышев В. А. Семиинварианты нелокальных функционалов гиббсовских случайных полей.— Мат. заметки, 1983, т. 34, № 3, с. 443—452.
40. Малышев В. А. Элементарное введение в математическую физику бесконечночастичных систем.— Дубна, 1983.
41. Малышев В. А., Минлос Р. А., Петрова Е. Н., Терлецкий Ю. А. Обобщенные контурные модели.— В сб. Итоги науки и техники, том 19.— М.: ВИНИТИ, 1982, с. 3—54.
42. Малышев В. А., Петрова Е. Н. Преобразования двойственности гиббсовских случайных полей.— В сб. Итоги науки и техники, том 18.— М.: ВИНИТИ, 1981, с. 3—51.
43. Минлос Р. А. Предельное распределение Гиббса.— Функц. анализ и его прилож., 1967, т. 1, № 2, с. 60—73.
44. Минлос Р. А. Регулярность предельного распределения Гиббса.— Функц. анализ и его прилож., т. 1, № 3, с. 40—53.
45. Минлос Р. А. Лекции по статистической физике.— УМН, 1968, № 1, с. 133—190.
46. Минлос Р. А., Погосян С. К. Оценки функций Урселла, групповых функций и их производных.— Теорет. и мат. физика, 1977, т. 31, № 2, с. 199—213.
47. Минлос Р. А., Синай Я. Г. Явление разделения фаз в некоторых решетчатых моделях. I.— Мат. сборник, 1967, т. 73, № 3, с. 375—448.
48. Минлос Р. А., Синай Я. Г. Новые результаты о фазовых переходах рода в решетчатых системах.— Труды Моск. мат. об-ва, 1967, т. 17, с. 213—242.
49. Минлос Р. А., Синай Я. Г. Явление разделения фаз в некоторых решетчатых моделях. II.— Труды Моск. мат. о-ва, 1968, т. 19, с. 113—178.
50. Наср Али. Гиббсовские случайные поля для модели Изинга.— Труды Моск. мат. о-ва, 1975, т. 32, с. 187—209.
51. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей.— М.: Мир, 1969.
52. Оре О. Теория графов.— М.: Наука, 1980.
53. Пастур Л. А. Спектральная теория уравнений Кирквуда — Зальцбурга в конечном объеме.— Теорет. и мат. физика, 1974, т. 18, № 2, с. 233—242.
54. Петрова Е. Н. Низкотемпературное разложение в Z^1-модели. Сб. Математические модели статистической физики.— Тюмень: изд. Тюменского ун-та, 1982, с. 79—85.
55. Пирогов С. А., Синай Я. Г. Фазовые диаграммы классических решетчатых систем.— Теорет. и мат. физика, 1975, т. 25, с. 358—369.
56. Пирогов С. А., Синай Я. Г. Фазовые диаграммы классических решетчатых систем (продолжение).— Теорет и мат. физика, 1976, т. 26, с. 61—76.
57. Престон К. Гиббсовские состояния на счетных множествах.— М.: Мир, 1972.

58. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. 2-е изд.— М.: Наука, 1973.
59. Розанов Ю. А. Марковские случайные поля.— М.: Наука, 1981.
60. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты.— М.: Мир, 1971.
61. Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля.— М.: Мир, 1976.
62. Сеге Г. Ортогональные многочлены.— М.: Физматгиз, 1962.
63. Серр Ж. П. Алгебры Ли и группы Ли.— М.: Мир, 1969.
64. Синай Я. Г. Теория фазовых переходов.— М.: Наука, 1980.
65. Хепп К. Теория перенормировок.— М.: Наука, 1974.
66. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Часть II.— М.: Наука, 1976.
67. Balaban T. $(\mathrm{Higgs})_{2,3}$ Quantum Fields in a Finite Volume I. A Lower Bound.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 85, № 4, p. 603—626.
68. Balaban T. $(\mathrm{Higgs})_{2,3}$ Quantum fields in a finite Volume III. Renormalization.— Comm. Math. Phys., 1983, v. 88, № 3, p. 411—445.
69. Battle G. A., Federbush P. G. A phase cell cluster expansion for Euclidean field theories.— Annals of Phys., 1982, v. 142, p. 95—139.
70. Battle G. A., Federbush P. A phase cell cluster expansion for a hierarchical φ_3^4 model.— Comm. Math. Phys., 1983, v. 88, № 2, p. 263—293.
71. Battle G. A., Federbush P. A note on cluster expansions, tree graph identities, extra 1/N! factors.— Lett. Math. Phys., 1984, v. 8, № 1, p. 55—57.
72. Bellissard J., Høegh-Krohn R. Compactness and the maximal Gibbs state for random Gibbs fields on a lattice.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 84, № 3, p. 297—327.
73. Biggs N. On cluster expansion in graph theory and physics.— Quart. J. Math., 1978, v. 29, № 114, p. 159—173.
74. Borgs Ch., Seiler E. Lattice Yang-Mills theory at nonzero temperature and the confinement problem.— Comm. Math. Phys., 1983, v. 91, p. 329—380.
75. Bricmont J., Fontaine J.-R., Lebowitz J. L., Spencer T. Lattice systems with a continuous symmetry. I. Perturbation theory for unbounded spins.— Comm. Math. Phys., 1980, v. 78, № 2, p. 281—302.
76. Bricmont J., Fontainie J.-R., Lebowitz J. L., Spencer T. Lattice systems with a continuous symmetry. II. Decay of correlations.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 78, № 3, p. 363—371.
77. Bricmont J., Fontaine J.-R., Lebowitz J. L., Lieb E. H., Spencer T. Lattice systems with a continuous symmetry. III. Low temperature asymptotic expansion for the plane rotator model.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 78, № 4, p. 545—566.
78. Bricmont J., Fontaine J.-R. Perturbation about the mean field critical point.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 86, № 3, p. 337—362.

79. Bricmont J., Lebowitz J. L., Pfister Ch. E. Low temperature expansion for continuous-spin Ising models.— Comm. Math. Phys, 1980, v. 78, № 1, p. 117—135.
80. Bricmont J., Lebowitz J. L., Pfister Ch. E. Non-translation invariant Gibbs states with coexisting phases III: analyticity properties.— Preprint, Rutgers Univ, 1982.
81. Brydges D. C. A rigorous approach to Debye screening in dilute classical Coulomb system.— Comm. Math. Phys., 1978, v. 58, № 3, p. 313—350.
82. Brydges D., Federbush P. A new form of the Mayer expansion in classical statistical mechanics.— J. Math. Phys., 1978, v. 19, p. 2064—2067.
83. Brydges D., Frölich J., Spencer T. The Random Walk Representation of Classical Spin Systems and Correlation Inequalities.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 83, № 1, p. 123—150.
84. Caginalp G. Thermodynamic properties of the φ^4 lattice field theory near the Ising limit.— Ann. Phys., 1980, v. 126, p. 500—511.
85. Caginalp G. The φ^4 lattice field theory as an asymptotic expansion about the Ising limit.— Ann. Phys., 1980, v. 124, p. 189—207.
86. Cammarota C. Decay of Coorelations for Infinite Range Interactions in Unbounded Spin Systems.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 85, p. 517—528.
87. Cassandro M., Olivieri E. Renormalization group and analyticity in one dimension: a proof of Dobrushin's theorem.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 80, № 2, p. 255—269.
88. Constantinescu F. Strong-coupling expansion of the continuousspin Ising model.— Phys. Rev; Lett., 1979, v. 43, № 22, p. 1632—1635.
89. Constantinescu F., Ströter B. The Ising limit of the doublewell model.— J. Math. Phys., 1980, v. 21, p. 881—890.
90. Dobrushin P. L., Schlosman S. B. The problem of transition-invariance of low-temperature Gibbs fields.— Sov. Math. Rev., Ser. C. 1984, v. 5.
91. Dobrushin R. L., Zahradnik M. Pirogov — Sinai method for the continuous spin models — (препринт).
92. Duneau M., Jagolnitzer D., Souillard B. Decrease properties of truncated correlation functions and analyticity properties for classical lattice and continuous systems.— Comm. Math. Phys., 1973, v. 31, p. 191—208.
93. Duneau M., Souillard B. Cluster Properties of Lattice and continuous systems.— Comm. Math. Phys., 1976, v. 47, p. 155—166 (рус. пер. в сб.: Гиббсовские состояния в статистической физике.— М.: Мир, 1978).
94. Duneau M., Souillard B., Jagolnitzer D. Analyticity and strong cluster properties for classical cases with finite rang interaction.— Comm. Math. Phys., 1974, v. 35, p. 307—320.
95. Duneau M., Souillard B., Jagolnitzer D. Decay correlations for infinite-rang interactions.— Journ. of Math. Phys., 1975, v. 16, p. 1662—1666 (рус. пер. в сб.: Гиббсовские состояния в статистической физике.— М.: Мир, 1978).
96. Durrett R. An introduction to infinite particle systems.— Stochastics process and their applications, 1981, v. 11, p. 109—150.

97. Federbush P. G. A mass zero cluster expansion. Part I. The expansion.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 81, № 3, p. 327—340.
98. Federbush P. G. A mass zero cluster expansion. Part II.— Convergence.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 81, № 3, p. 341—360.
99. Fontaine J.-R. Bounds on the decay of correlations for $\lambda(\nabla\varphi)^4$ models.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 87, № 3, p. 385—394.
100. Fröhlich J., Pfister C. On the absence of spontaneous symmetry breaking and of crystalline ordering in two-dimensional systems.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 81, № 2, p. 277—298.
101. Fröhlich J., Spencer T. The Kosterlitz-Thouless transition in two-dimensional Abelian spin systems and the Coulomb gas.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 81, № 4, p. 527—602.
102. Fröhlich J., Spencer T. Massless Phases and Symmetry Restoration in Abelian Gauge Theories and Spin Systems.— Comm. Math., 1982, v. 83, № 3, p. 411—454.
103. Gallavotti G., Martin-Löf A. Surface tension in the Ising model.— Comm. Math. Phys., 1972, v. 25, p. 87—126.
104. Gawedzki K., Kapiainen A. A regorous block spin approach to massless lattice theories.— Comm. Math. Phys., 1980, v. 77, № 1, p. 31—64.
105. Gawedzki K., Kupiainen A. Renormalization group study of a critical lattice model. I. Convergence to the line of fixed points.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 82, № 3, p. 407—433.
106. Gawedzki K., Kupiainen A. Renormalization group study of a critical lattice model.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 83, № 4, p. 469—492.
107. Gawedzki K., Kupiainen A. Renormalization group for a critical lattice model. Effective interactions beyond the perturbation expansion or bounded spins approximation.— Comm. Math. Phys., 1983, v. 88, № 1, p. 77—94.
108. Glimm J., Jaffe A., Spencer Th. The Wightman axioms and particle structure in $P(\varphi)_2$ quantum field model.— Ann. Math., 1974, v. 100, p. 585—632.
109. Glimm J., Jaffe A., Spencer T. A convergent expansion about mean field theory I. The expansion.— Ann. of Phys., 1976, v. 101, p. 610—630; II. Convergence of the expansion, Ann. of Phys., 1976, v. 101, p. 631—669 (рус. пер. в сб.: Евклидова квантовая теория поля (марковский подход).— М.: Мир, 1978).
110. Georgii H. O. Percolation for low energy clusters and discrete symmetry breaking in classical spin systems.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 81, № 4, p. 455—473.
111. Göpfert M., Mack G. Iterated Mayer expansion for classical gases at low temperatures.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 81, № 1, p. 97—126.
112. Göpfert M., Mack G. Proof of Confinement of Static Quarks in 3-Dimensional U (l) Lattice Gauge Theory for all Values of the Coupling Constants.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 82, № 4, p. 545—606.
113. Griffeath D. Additive and concellative interacting particle systems. Lecture Notes, Math., № 724.— New York: Springer, 1979.
114. Gross L. Decay of correlations in classical lattice models at high temperature.— Commun. Math. Phys., 1979, v. 68, p. 9—27.

115. Gruber C., Kunz H. General properties of polymer systems.— Comm. Math. Phys., 1971, v. 22, p. 133—161.
116. Gruber C., Hintermann A. Merlini D. Group Analysis of classical Lattice systems. Lecture Notes in Physics.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1977.
117. Holley R. A., Stroock D. W. Applications of the stochastic Ising model to the Gibbs states.— Comm. Math. Phys., 1976, v. 48, p. 249—265.
118. Imbrie J. Z. Mass spectrum of the two dimensional $\lambda\varphi^4 - \frac{1}{4}\varphi^2 - \mu\varphi$ quantum field model.— Comm. Math. Phys., 1980, v. 78, № 2, p. 169—200.
119. Imbrie J. Z. Phase diagrams and cluster expansions for low temperature $P(\varphi)_2$ models. I. The phase diagram. Comm. Math. Phys., 1981, v. 82, № 2, p. 261—304.
120. Imbrie J. Z. Phase diagrams and cluster expansions for low temperature $P(\varphi)_2$ models. II. The Schwinger functions.— Commun. Math. Phys., 1981, v. 82, № 3, p. 305—343.
121. Imbrie J. Z. Decay of correlations in the One Dimensional Ising Model with $J_{ij} = |i-j|^{-2}$.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 85, № 4, p. 491—516.
122. Imbrie J. Z. Debye screening for Jellium and other Coulomb systems.— Comm. Math. Phys., 1983, v. 87, № 4, p. 515—565.
123. Ito K. R. Construction of Euclidean $(QED)_2$ via lattice gauge theory.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 83, № 4, p. 537—561.
124. Jagolnitzer D., Souillard B. On the analyticity in the potential in classical statistical mechanics.— Comm. Math. Phys., 1978, v. 60, p. 131—152.
125. Kirkwood J. R., Thomas Lawrence E. Expansions and phase transitions for the ground state of quantum Ising lattice systems.— Comm. Math. Phys., 1983, v. 88, № 4, p. 569—580.
126. Klein D. Dobrushin uniqueness techniques and the decay of correlations in continuum statistical mechanics.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 86, № 2, p. 227—246.
127. Klöckner K., Ströter B. Analyticity properties of the weakly coupled double-well model.— Comm. Math. Phys., 1982, v. 86, p. 495—508.
128. Lanford O., Ruelle D. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics.— Comm. Math. Phys., 1969, v. 13, p. 174—215.
129. Lebowitz J. L., Presutti E. Statistical mechanics of systems of unbounded spins.— Comm. Math. Phys., 1980, v. 78, № 1, p. 151.
130. Malyshev V. A. Uniform cluster estimates for lattice models.— Comm. Math. Phys., 1979, v. 64, p. 131—157.
131. Malyshev V. A. Complete cluster expansion for weakly coupled Gibbs random fields.— In: "Many component systems".— Springer, 1979.
132. Malyshev V. A., Kashapov I. A. Complete cluster expansion and the spectrum for fermion lattice models.— Selecta Mathematica Sovietica, 1984, v. 3, № 2, p. 151—181.
133. Malyshev V. A., Nickolaev I. Uniqueness of Gibbs fields via cluster expansions.— J. Statist. Phys., 1984, v. 35, № 3, p. 375—379.

134. Malyshev V. A., Tirozzi B. Renormalization group convergence for small perturbations of Gaussian random fields with slowly decaying correlations.— J. Math. Phys., 1981, v. 22, № 9, p. 2020—2025.
135. Maren Tizian R. Probability distribution of random paths in the Ising model at low temperature.— Comm. Math. Phys., 1983, v. 88, № 1, p. 105—112.
136. Osterwalder K., Seiler E. Gauge field theories on the lattice.— Ann. Phys., 1978, v. 110, p. 440—471.
137. Park Y. M. The cluster expansion for classical and quantum lattice systems.— J. Stat. Phys., 1982, v. 27, № 3, p. 553—576.
138. Rota G. C. On the foundations of the combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions.— Zeitsch. Wahrscheinlichkeitstheorie, 1964, Bd. 2, S. 340—368.
139. Ruelle D. Correlation functions of classical gases.— Ann. Phys. 1963, v. 25, № 1, p. 109—120.
140. Seiler E. Gauge theories as a problem of constructive quantum field theory and statistical mechanics.— In: Lecture Notes in Physics, vol. 159.— Berlin, Heidelberg. New York: Springer, 1982.
141. Slawny J. Ergodic properties of equilibrium states.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 80, № 4, p. 477—483.
142. Sylvester G. S. Weakly coupled Gibbs measures.— Z. Wahrscheinlichkeistheorie verw. Geb., 1979, Bd. 50, S. 97—118.
143. Wagner W. Analyticity and Borel-summability of the perturbation expansion for correlation functions of continuous spin-systems. Helvetica Physica Acta, 1981, v. 54, p. 341—363.
144. Wagner W. Borel-summability of the high temperature expansion for classical continuous systems.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 82, № 2, p. 183—189.
145. Zagrebnov V. A. Spectral properties of Kirkwood-Salsburg and Kirkwood-Ruelle operator.— J. Stat. Phys., 1982, v. 27, № 3, p. 577—591.

1*. Scaling and Self-Similarity in Physics.— Renormalization in Statistical Mechanics and Dynamics/Ed. J. Frölich.— Birkhäuser, 1983.
2*. Akhmitzyanov R. R., Malyshev V. A., Petrova E. N. Cluster expansion for unbounded nonfinite potential.— In: Workshop in Random Fields.— Köseg, Hungary: Birkhäuser, 1984.
3*. Westwater J. On Edward's model for Polymer Chains. I.— Comm. Math. Phys., 1980, v. 72, p. 131—174.
4*. Isakov S. N. Nonanalytic Features of the First Order Phase Transition in the Ising Model.— Comm. Math. Phys., 1984, v. 95, p. 427—443.
5*. Sherman S. S. Combinatorial aspects of the Ising model for ferromagnetism. I. A Conjecture of Feynman on Paths and Graphs.— J. Math. Phys., 1960, v. 1, p. 202—217.
6*. Кельберг М. Я., Сухов Ю. М. Свойства слабой зависимости полного случайного поля, описывающего состояние коммутационной сети.— Проблемы передачи информации, 1985, № 3.
7*. Genibre J. Some applications of functional integration in statistical mechanics.— In: Statistical Mechanics and Quantum Field Theory/Eds. C. DeWitt, R. Stora.— N. Y.: Gordon and Breach, 1971.