МАТЕМАТИКА

УДК 519.217

В. А. Малышев, И. А. Игнатюк

ЛОКАЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПРОЦЕССЫ С НЕКОМПАКТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ЗНАЧЕНИЙ

За 50 лет существования кафедры развилось несколько важных направлений, к сожалению, разъединенных идейно и технически. В обзоре С. А. Молчанова кратко указаны возможные взаимосвязи между различными исследованиями, проводимыми сотрудниками кафедры и другими учеными из московской вероятностной школы, основанной А. Н. Колмогоровым.

Здесь эти взаимосвязи прослеживаются на конкретном примере и приводятся результаты, обобщающие ранние многочисленные работы из следующих областей:

1. Классическая теория цепей Маркова;
2. Теория устойчивости стохастических систем, использующая функции Ляпунова (подход, близкий к мартингальному) и различные метрики в пространствах распределений;
3. Кластерные разложения в статистической физике;
4. Теория массового обслуживания и систем связи.

В классической теории цепей Маркова [1] существуют различные методы доказательства эргодичности для счетных цепей Маркова $\mathscr{L}$ или, более общо, для цепей, у которых условные переходные распределения абсолютно непрерывны относительно некоторой меры.

Полностью исследованным классом таких цепей являются цепи с различными вариантами условия Деблина. Их характерным свойством является оценка сходимости $\|\mu_n-\mu\|\leqslant Ce^{-\alpha n}$ к предельному распределению μ, где константа C не зависит от начального распределения μ_0 (другим свойством является изолированность собственного значения единица в спектре переходного оператора). Большинство же интересных цепей не удовлетворяет этому условию. Наиболее эффективным средством исследования их эргодичности является метод функций Ляпунова (см., например, [2]). Применяются также другие методы, основанные на склейке [3, 4] и мажорировании [5, 6]. Кроме того, отметим исследования по большим системам в теории надежности, массового обслуживания и сетям связи [7, 8].

Далее, довольно часто рассматривались ситуации малого взаимодействия в системе из большого числа независимых компонент. Идея термодинамического предельного перехода, возникшая в статистической физике, состоит прежде всего в том, что параметр малости взаимодействия не зависит от объема системы и ее можно считать бесконечной. Отметим, что в [7] и [8] параметр малости зависит от объема системы.

Рассматриваемые ниже марковские процессы с локальным взаимодействием охватывают многие конкретные модели из теории систем связи [9].

Рассмотрим бесконечное множество $\{\mathscr{L}_x\}$ независимых элементов $\mathscr{L}$, занумерованных точками x решетки $\mathbf{Z}^\nu$. Марковские процессы, получающиеся из системы $\{\mathscr{L}_x\}$ «введением взаимодействия», отличаются взаимной сингулярностью условных переходных распределений, и обычные методы доказательства эргодичности здесь не применимы. Случай, когда $\mathscr{L}$ конечна, а взаимодействие мало, исследовался многими более или менее эквивалентными методами [10, 11, 12]. Результаты, полученные в [13], справедливы лишь тогда, когда цепи $\mathscr{L}$ удовлетворяют условию Деблина. Для других цепей примеры контроля малых возмущений пока довольно редки [9].

В п. 1 мы приводим простой метод доказательства экспоненциальной сходимости для случая типа Деблина, охватывающего тем не менее большинство известных ранее результатов. В п. 2 содержится основной результат для довольно общей ситуации, когда для каждой цепи $\mathscr{L}_x$ имеется «хорошая» функция Ляпунова.

1. Рассмотрим на решетке $\mathbf{Z}^\nu$ множество случайных полей $\xi = \{\xi(x),\ x\in\mathbf{Z}^\nu\}$, где $\xi(x)$ — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) и принимающие значения в $\mathbf{R}^k$.

Определим метрику $\mathscr{I}_1$ на множестве таких случайных полей:

$$\mathscr{I}_1(\xi, \eta) = \sup_{x\in \mathbf{Z}^\nu} \langle \|\xi(x) - \eta(x)\|\rangle, \quad \|\xi\| = \max_{i=1,\ldots,k} |\xi^i|.$$

На множестве mk-мерных функций распределения определим метрику I_1:

$$I_1(F_1, F_2) = \inf_{F\in\mathscr{F}(F_1, F_2)} \left\{ \int_{\mathbf{R}^{2mk}} \max_{j=1,\ldots,m} \|u_1^j - u_2^j\| F(du_1^1, \ldots, du_1^m, du_2^1, \ldots, du_2^m)\right\},$$

где $\mathscr{F}(F_1, F_2)$ — класс всех $2mk$-мерных функций распределения с фиксированными маргинальными распределениями (см. [14]).

Очевидно, что если F_1, F_2 — функции распределения векторов $\xi(x_1), \ldots, \xi(x_m)$ и $\eta(x_1), \ldots, \eta(x_m)$ соответственно, то $I_1(F_1, F_2) \leqslant m\mathscr{I}_1(\xi, \eta)$.

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) заданы также независимые одинаково распределенные случайные величины $\eta_t(x)$, $t\in \mathbf{Z}_+$, $x\in\mathbf{Z}^\nu$, со значениями в $\mathbf{R}^k$. Определим марковский процесс $\xi_t = \{\xi_t(x),\ x\in\mathbf{Z}^\nu\}$ следующим рекуррентным соотношением:

$$\xi_{t+1}(x) = f(\xi_t(x+e_1), \ldots, \xi_t(x+e_n), \eta_t(x+e_1), \ldots, \eta_t(x+e_n)) \qquad (1)$$

для всех $x\in\mathbf{Z}^\nu$ и $t\in\mathbf{Z}_+$, где множество $\{e_1, \ldots, e_n\}\subset\mathbf{Z}^\nu$ фиксировано.

Мы будем предполагать, что функция f удовлетворяет условиям:

1) $f: \mathbf{R}^{2nk}\to U$, $U\subseteq\mathbf{R}^k$;

2) для любых u_1, $u_2\in U^n$ выполнено неравенство

$$\langle \|f(u_1, \eta_0(e_1), \ldots, \eta_0(e_n)) - f(u_2, \eta_0(e_1), \ldots, \eta_0(e_n))\|\rangle \leqslant \lambda\rho(u_1, u_2),$$

$$\text{где } \rho(u_1, u_2) = \max_{i=1,\ldots,n} \|u_1^i - u_2^i\|, \quad u_j = (u_j^1, \ldots, u_j^n) \in U^n;$$

3) $\sup_{u\in U^n} \langle \|f(u, \eta_0(e_1), \ldots, \eta_0(e_n))\|\rangle < \infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1)—3) *и* $\lambda<1$. *Тогда при* $t\to\infty$ *в метрике* I_1 *имеет место экспоненциальная сходимость конечномерных распределений для* ξ_t *вида* $C\lambda^t$, *причем* $C=\mathrm{const}$ *не зависит от выбора* ξ_0.

Доказательство. Достаточно построить последовательность случайных полей $\xi_t' = \{\xi_t'(x),\ x\in\mathbf{Z}^\nu\}$, $t=1, 2, \ldots$, для которых совпадают конечномерные распределения у ξ_t и ξ'_{t+1} при любом $t\in\mathbf{Z}_+$ и имеет место неравенство

$$\mathcal{I}_1(\xi_{t+1}, \xi'_{t+1})\leqslant C\lambda^t \text{ для любого } t=1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Положим $\xi_1'=\xi_0$ и определим ξ_t' при $t>1$ рекуррентным соотношением

$$\xi'_{t+1}(x)=f(\xi'_t(x+e_1), \ldots, \xi'_t(x+e_n), \quad \eta_t(x+e_1), \ldots, \eta_t(x+e_n)).$$

Случайные величины $\eta_t(x)$, $x\in\mathbf{Z}^\nu$, $t\in\mathbf{Z}_+$, независимы и одинаково распределены, следовательно, конечномерные распределения у ξ_t и ξ'_{t+1} совпадают при любом $t\in\mathbf{Z}_+$. Далее из условия 2) имеем

$$\mathcal{I}_1(\xi_{t+1}, \xi'_{t+1})\leqslant \lambda\mathcal{I}_1(\xi_t, \xi'_t)\leqslant 2\lambda^{t-1}\sup_{u\in U^n}\langle\|f(u, \eta_0(e_1), \ldots, \eta_0(e_n))\|\rangle.$$

Положив $C=2\sup_{u=U^n}\langle\|f(u, \eta_0(e_1), \ldots, \eta_0(e_n))\|\rangle$, получим (2). Теорема доказана.

Замечание. Можно отказаться от условия 3), потребовав справедливости неравенства $\langle\|f(0, \ldots, 0, \eta_0(e_1), \ldots, \eta_0(e_n))\|\rangle<\infty$. Тогда если $\langle\|\xi_0(x)\|\rangle\leqslant C_0$, $x\in\mathbf{Z}^\nu$, то при $t\to\infty$ в метрике I_1 имеет место экспоненциальная сходимость конечномерных распределений для ξ_t вида $C\lambda^t$, где

$$C=\langle\|f(0, \ldots, 0, \eta_0(e_1), \ldots, \eta_0(e_n))\|\rangle+\lambda C_0.$$

2. Пусть задана неприводимая непериодическая счетная цепь Маркова $\mathcal{L}$ с множеством состояний U и переходными вероятностями $p(u, v)$, $u, v\in U$.

Определим марковский процесс $\xi_t=\{\xi_t(x), x\in\mathbf{Z}^\nu\}$, где случайные величины $\xi_t(x)$ принимают значения в U: пусть для любого $t\in\mathbf{Z}_+$ при заданном ξ_t случайные величины $\xi_{t+1}(x)$ условно независимы для различных $x\in\mathbf{Z}^\nu$ и для любых $x\in\mathbf{Z}^\nu$ и $u\in U$

$$P\{\xi_{t+1}(x)=u\,|\,\xi_t\}=p(\xi_t(x), u)+\delta c(u, \xi_t(x+e_0), \ldots, \xi_t(x+e_n)),$$

где множество $\{e_0=0, e_1, \ldots, e_n\}\subset\mathbf{Z}^\nu$ фиксировано.

Мы будем считать, что для $\mathcal{L}$ существует функция Ляпунова $f: U\to\mathbf{R}_+$, такая, что:

а) ряд $\sum\limits_{u\in U}\exp\{-bf(u)\}$ сходится при любом $b>0$;

б) для любых $u, v\in U$ $p(u, v)\neq 0$ только в том случае, если $|f(u)-f(v)|\leqslant M$, где $M=\mathrm{const}>0$;

в) существует такая целочисленная, положительная функция $k=\{k(u), u\in U\}$, что $\sup\limits_{u\in U}k(u)<\infty$, и для любого $u\in U$, за исключением единственной точки $u_0\in U$, имеет место неравенство

$$\sum_{u\in U}p^{(k(u))}(u,v)f(v)\leqslant f(u)-\varepsilon, \text{ где } \varepsilon=\mathrm{const}>0; \qquad (3)$$

г) $f(u_0)=0$ и $f(u)\neq 0$ для любой другой точки $u\in U\setminus\{u_0\}$.

Замечание. Функцию f, удовлетворяющую всем вышеуказанным условиям, всегда можно построить, если существуют функция

$f_0: U \to \mathbf{R}_+$, для которой выполнены условия а) и б), и целочисленная положительная функция $k_0 = \{k_0(u),\ u \in U\}$, такая, что $\sup\limits_{u \in U} k_0(u) < \infty$, и если неравенство (3) выполнено для f_0 и k_0 с некоторой константой $\varepsilon_0 > 0$ при $u \in U \setminus A$, где $A \subset U$ — некоторое конечное множество.

Возмущение предполагаем малым в следующем смысле

$$\sup_{u \in U^n} |c(u_1, u_2, u)| \leqslant p(u_2, u_1), \quad |\delta| < \delta_0.$$

Теорема 2. *Пусть* $\xi_0(x) = u(x, 0) \in U$, $x \in \mathbf{Z}^\nu$, *и* $\sup\limits_{x \in \mathbf{Z}^\nu} f(u(x, 0)) \leqslant \leqslant C_0$. *Тогда при достаточно малом* δ_0 *конечномерные распределения* ξ_t *сходятся по вариации при* $t \to \infty$, *причем для любых* $u_1, \ldots, u_N \in U$ *и* $x_1, \ldots, x_N \in \mathbf{Z}^\nu$ *предел* $\lim\limits_{t \to \infty} P\{\xi_t(x_i) = u_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ *является аналитической функцией* δ *в области комплексной плоскости* $\{\delta \in \mathbf{C},\ |\delta| < \delta_0\}$.

Техника кластерных разложений позволяет получить явный ряд по константе взаимодействия δ для стационарных вероятностей. Доказательство сходимости этого ряда в круге $\{\delta \in \mathbf{C},\ |\delta| < \delta_0\}$ использует как метод функций Ляпунова [2], так и приемы кластерных разложений [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М., 1956.
2. Малышев В. А., Меньшиков М. В. Эргодичность, непрерывность, аналитичность счетных цепей Маркова//Тр. Моск. матем. о-ва. 1979. **39**. 1—49.
3. Liggett T. Interacting particle systems. N. Y., 1985.
4. Климов Г. П., Матвеев В. Ф. Каплинг неоднородных марковских полей//Докл. АН СССР. 1985. **284**, № 4. 791—793.
5. Калашников В. В. Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций. М., 1978.
6. Штойян Д. Качественные свойства и оценки стохастических моделей. М., 1979.
7. Фалин Г. И. Повторные вызовы в структурно-сложных системах//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. **6**. 55—62.
8. Соловьев А. Д., Брысина И. В. Асимптотический анализ сетей массового обслуживания при малой нагрузке//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. **3**. 40—47.
9. Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Условия существования и единственности случайного поля, описывающего состояние коммутационной сети//Пробл. передачи информации. 1983. **13**, вып. 4. 50—51.
10. Добрушин Р. Л. Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент//Пробл. передачи информации. 1971. **7**, вып. 2. 70—87.
11. Васерштейн Л. Н. Марковские процессы на счетном произведении пространств, описывающие большие системы автоматов//Пробл. передачи информации. 1969. **5**, вып. 3. 64—73.
12. Беляев Ю. К., Громак Ю. И., Малышев В. А. Об инвариантных случайных булевских полях//Матем. заметки. 1969. **6**, вып. 5. 555—566.
13. Басис В. Я. О стационарности и эргодичности многокомпонентных марковских процессов с локальным взаимодействием//Многокомпонентные случайные системы. М., 1978. 31—46.
14. Рачев С. Т. Задача Монжа—Канторовича о перемещении масс и ее применение в стохастике//Теор. вероятн. и ее применения. 1984. **29**, № 4. 625—653.
15. Малышев В. А., Минлос Р. А. Гиббсовские случайные поля. М., 1985.

Поступила в редакцию
02.06.86