1999 г. сентябрь — октябрь *т. 45, вып. 5 (275)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УКД 519.248.3

АЛГЕБРА В КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

В. А. Малышев

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Конструктивная математическая физика (КМФ) выделяется в математической физике не только требованием абсолютной строгости и рассмотрением систем с бесконечным числом частиц. Этим требованием удовлетворяет, например, и аксиоматическая квантовая теория поля. В последней, однако, часто неизвестно существуют ли нетривиальные примеры, удовлетворяющие рассматриваемому набору аксиом.

Основной техникой в КМФ всегда были анализ и вероятность, однако нельзя сказать, чтобы алгебраические методы не играли роли. Примером может быть алгебра (или комбинаторика) ультрафиолетовых перенормировок или переномировок, связанных с теорией рассеяния [53]. До последнего времени, однако, классические (старые и современные) алгебраические методы, как, например, группы Ли, были мало связаны с основными трудностями КМФ. Двойственность [25] была чуть ли не единственным исключением.

Данная статья представляет собой введение в три области, где алгебраические методы уже тесно переплетаются с анализом и вероятностью. Часть I представляет обзор строгих работ, связанных с суперсимметрией. Четко выделено несколько движущих идей и приведены основные результаты, в основном без доказательств.

Часть II представляет собой построение с полными доказательствами квантовых солитонов в модели Изинга. Для полноты мы даем как евклидову, так и гамильтонову конструкцию. Строгие идеи построения как в гамильтоновом, так и евклидовом варианте возникли впервые в работах Фрелиха. Кроме этого мы показываем красивую связь с двойственностью и используем эту связь для строгого доказательства существования одночастичного пространства в солитонном секторе, основываясь на результатах [23]. На уровне полюсов функций Грина анализ спектра солитонных и вакуумных секторов в множестве других моделей проводился в работах Фрелиха и Маркетти и мы отсылаем к ним читателя.

Часть III дает элементарное изложение основной конструкции бозонизации, т. е. изоморфизма фоковских бозонных и фермионных пространств в размерности 1. Сначала мы излагаем гамильтонов вариант, следуя лекциям Каца [61] с тем отличием, что мы даем непрерывную конструкцию, что соответствует переходу, например, к алгебре Вирасоро на прямой. Это напоминает переход к термодинамическому пределу в стандартной КМФ, где более естествен непрерывный спектр. Мы показываем фактически, что возможен непрерывный аналог книги Каца [61], ограничиваясь ее началом. Евклидову бозонизацию мы излагаем, следуя [38].

Мы не говорим здесь ничего о множестве несравненно более алгебраически богатых вещей, но которые в основном еще не обрели статуса КМФ. В их числе конформная теория поля, излагаемая в настоящее время на почти аксиоматическом уровне [43—50, 54—57, 63—66]. Несмотря на то что имеется формальная эквивалентность класса унитарных представлений киральных алгебр и конформной теории поля [54] и унитарные представления простейших бесконечномерных алгебр известны, аксиомы Остервальдера — Шредера не проверены даже для минимальных моделей. Конформная теория поля, кроме всего прочего, возникает как критический предел двумерных моделей статистической физики и как асимптотические состояния квантовых струн, которые не существуют пока как точный математический объект.

Опущена также статистика двумерных и трехмерных квантовых полей [39, 42, 45, 52, 56, 57, 58], вполне интегрируемые системы. Один из путей изучения последних лежит через бозонизацию (см. лекции Каца [61]).

Новые алгебраические идеи возникают в традиционной для КМФ теме — анализе ультрафиолетовых перенормировок в неабелевых моделях Янга — Миллса и др. [30—36, 59, 70—76], но эти идеи, наиболее сложные из всех, невозможно изложить кратко.

ЧАСТЬ I
СУПЕРСИММЕТРИЯ

1. Суперсимметричные квантовые системы. Квантовая система в заданном состоянии определяется парой $(\mathcal{H}, H)$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, H — самосопряженный оператор (гамильтониан). В суперсимметричном случае требуется существование градуировки, т. е. унитарного самосопряженного оператора γ, и самосопряженного суперзаряда (генератора «группы суперсимметрии») Q таких, что

$$Q\gamma + \gamma Q = 0, \quad H = Q^2; \tag{1}$$

γ как унитарный самосопряженный оператор имеет собственные значения ± 1 и соответствующие инвариантные подпространства $\mathcal{H}_\pm$ дают разбиение $\mathcal{H}$ в прямую сумму

(2) $$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-.$$

Часто имеется несколько «суперзарядов» Q_i, $i = 1, \ldots, q$, таких, что

$$\gamma Q_i + Q_i\gamma = 0, \quad i = 1, \ldots, q,$$
$$Q_iQ_j + Q_jQ_i = 0, \quad i \neq j,$$
$$H = Q_i^2 \text{ для всех } i.$$

В частности, для суперзаряда Q

$$Q' = iQ\gamma$$

— также суперзаряд с $(Q')^2 = (iQ\gamma)(-i\gamma Q) = H$.

Любой линейный оператор B в $\mathcal{H}$ имеет (2×2)-матричное представление относительно разбиения (2) и может быть записан в виде суммы

$$B = B_e + B_0$$

четного B_e (т. е. с равными 0 внедиагональными элементами) и нечетного B_0 (с равными 0 диагональными элементами) операторов. Иначе говоря, если обозначить

(3) $$A^\gamma = \gamma A\gamma,$$

то

$$B_{e,o} = \pm B^\gamma_{e,o}, \quad B_{e,o} = \frac{1}{2}(B \pm B^\gamma).$$

В частности,

(4) $$\gamma = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_- \\ Q_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} Q_-Q_+ & 0 \\ 0 & Q_+Q_- \end{pmatrix},$$

где индекс у $Q_\pm$ соответствует области определения. Примеров таких систем много. Достаточно произвольно выбрать разбиение (2), замкнутый оператор Q_-: $\mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_+$ и положить $Q_+ = Q_-^*$.

О нарушении суперсимметрии говорят, когда из суперсимметричных гамильтонианов в конечном объеме Λ, т. е. $H_\Lambda = Q_\Lambda^2$, в термодинамическом пределе в некотором смысле $\lim H_\Lambda \neq (\lim Q_\Lambda)^2$. Это связано со спектром H_Λ. Если $E_\Lambda = (\inf \operatorname{spectr} H_\Lambda \neq 0$ для всех больших Λ, то, как обычно, можно ожидать, что $E \sim C|\Lambda|$, где $C > 0$, так как $\operatorname{spectr} H_\Lambda \geqslant 0$.

Переходя к ГНС-представлению относительно основного состояния мы теряем Q_Λ, так как Q_Λ живет в области $\approx \sqrt{|\Lambda|}$ спектра. С другой стороны, если $E_\Lambda \equiv 0$, то можно ожидать, что равенство $H = Q^2$ сохраняется в пределе.

Классическим примером суперсимметрии является гильбертово пространство $\mathcal{H}$ квадратично интегрируемых дифференциальных форм на компактном ориентируемом римановом многообразии R, $Q = d + \delta$, где d, δ — внешние производная и копроизводная. Тогда $H = Q^2$ — оператор Лапласа, $\gamma = (-1)^P$, где оператор P равен p на p-формах. Иначе говоря, $\mathcal{H}_\pm$ — пространства четных и нечетных форм соответственно.

В этом случае основной результат есть теорема Атьи — Зингера об индексе. Это наводит на мысль, что понятие индекса играет важную роль и в общем, в том числе и в бесконечномерном, случае. Мы увидим далее, как индекс связан со спектром и с нарушением суперсимметрии.

2. Квантовая механика. Дискретный спектр (см. [1]). Простейшим примером является модель Весса — Цумино с одним бозоном и одним фермионом (число степеней свободы $N = 1$). Здесь $\mathcal{H}_\pm = L_2(\mathbb{R}, dx)$, $\gamma = \sigma_3$,

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(p\sigma_1 + V'\sigma_2),$$

где матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

p — квантомеханический оператор импульса в $L_2(\mathbb{R})$, V' — оператор умножения на $\frac{dV}{dx}$, а V является многочленом и называется *суперпотенциалом*. Тогда

$$H = Q^2 = \frac{1}{2}(p + \sigma_3 V'' + (V')^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(p^2 + V'' + (V')^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(p^2 - V'' + (V')^2) \end{pmatrix}.$$

Выбор $V = \frac{1}{2}\mu x^2 + \frac{1}{3}\lambda x^3$ соответствует модели Весса — Цумино, а при $\lambda = 0$ получается супергармонический осциллятор. При $\mu = 1$

$$Q_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - ix): L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}),$$

Q имеет точно одну нулевую моду

$$\varphi_0 = \left(0, \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right).$$

Для всех $j = 1, 2, \ldots$ есть точно два собственных вектора

$$\varphi_j^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp i h_{j-1} \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}, h_j \pi^{-1/4} e^{-x^2/2})$$

с собственными значениями $\pm\sqrt{j/2}$, где h_j — j-й полином Эрмита, нормированный относительно $\pi^{-1/2} e^{-x^2}$.

3. Теория индекса (см. [2]). Для случая, когда Q_- фредгольмов, можно получить ряд общих результатов о наименьшем собственном значении H. Напомним, что оператор A: $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ($\mathcal{H}_i$ — сепарабельные комплексные гильбертовы пространства) называется *фредгольмовым*, если он плотно определен, замкнут, имеет замкнутую область значений и

$$\dim \operatorname{Ker} A < \infty, \ \dim \operatorname{Coker} A \equiv \dim \operatorname{Ker} A^* < \infty.$$

Индексом фредгольмова оператора называется число

$$i(A) = n_+ - n_- \equiv \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Ker} A^*.$$

Самосопряженные операторы Q на $\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ вида (4) называются *операторами Дирака*, если их резольвента $(Q - i)^{-1}$ компактна. Множество операторов Дирака обозначается $\mathrm{Dir}(\mathcal{H})$.

Теорема 1. *Если $Q \in \mathrm{Dir}(\mathcal{H})$, то Q_+ и Q_- фредгольмовы.*

Определим метрику на $\mathrm{Dir}(\mathcal{H})$:

$$d(Q, Q') = \| (Q + i)^{-1} - (Q' + i)^{-1} \|;$$

$\mathrm{Dir}(\mathcal{H})$ в этой топологии распадается на связные компоненты.

Теорема 2. *Индекс постоянен на каждой связной компоненте.*

Эти два утверждения показывают, что алгебраическое свойство Q дает очень сильные аналитические ограничения.

Напомним, что p-класс Шаттена I_p есть множество всех операторов с конечной нормой

$$\| T \|_p = (\operatorname{Tr}(T^* T)^{p/2})^{1/p}.$$

Теорема 3. *Если* $\exp(-H) \in I_p$ *для некоторого* $p < \infty$, *то для* $\beta \geq p$

$$i(Q_+) = \operatorname{Tr}(\gamma e^{-\beta H}) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{sTr} e^{-\beta H}. \tag{4'}$$

Доказательство. $\exp(-\beta H)$ тогда компактен, и его значения, значит, имеют конечную кратность. Собственное значение 0 вносит вклад $i(Q_+)$ в правую часть (4'). Для собственных значений $E > 0$ собственное подпространство $\mathcal{H}_E$ с проектором P_E разлагается в прямую сумму $\mathcal{H}_{E,+} \oplus \mathcal{H}_{E,-}$ с проекторами на эти компоненты

$$P_{E,\pm} = \frac{E^{1/2} \mp Q}{2E^{1/2}} P_E.$$

Но тогда из $\{\gamma, Q\} = 0$ следует $\gamma P_{E,+}\gamma = P_{E,-}$ и $\mathcal{H}_{E,+}$, $\mathcal{H}_{E,-}$ изоморфны, что дает для суперследа

$$\mathrm{Tr}\,(P_E\gamma \exp(-\beta H)P_E) = 0.$$

Пусть $\mathrm{Dir}_p(\mathcal{H})$ — подмножество $\mathrm{Dir}(\mathcal{H})$ операторов Q таких, что $e^{-Q} \in I_p$ с топологией, определенной метрикой

$$d_p(Q, Q') = \| e^{-Q^2} - e^{-(Q')^2} \|_p.$$

Теорема 4. ind *постоянен на каждой связной компоненте* Dir_p.

Говорят, что в суперсимметричной квантовой конечночастичной модели *суперсимметрия не нарушена*, если H имеет ненулевой собственный вектор с собственным значением 0.

Возвращаясь к нашей модели с произвольным полиномом V, имеем утверждение:

Теорема 5. *Пусть* $E = \inf \mathrm{spectr}\, H$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $E = 0$, *т. е. суперсимметрия не нарушена*;
2) E *просто*;
3) $i(Q_+) = \pm 1$;
4) $\deg V = 0 \pmod 2$.

Доказательство получается из явного вычисления ядер $Q_\pm$, пользуясь тем, что $Q\Omega = 0$ для нулевого собственного вектора Ω. Тогда $\Omega = \exp(V\sigma_3)(a_+\Omega_+ + a_-\Omega_-) = e^V a_+\Omega_+ + e^{-V}a_-\Omega_-$ для некоторых констант $a_\pm$ и единичных векторов $\Omega_\pm \in \mathcal{H}_\pm$.

Заметим, что теория возмущений здесь может вводить в заблуждение. Например, если либо $n_+ = 0$ либо $n_- = 0$, для Q_0, то формальный ряд по ε для возмущения $\lambda(\varepsilon)$ нулевого собственного значения $\lambda(0)$ при возмущении $Q_0 + \varepsilon Q_1$ тождественно равен 0 (см. [1]). Однако вышеприведенный пример показывает, что $\lambda(\varepsilon)$ может быть отличным от нуля.

4. Квантовая механика Весса — Цумино с двумя бозонами ($N = 2$). Одномерный ее вариант определен в [1, 2].

Клиффордова алгебра $\mathbb{C}_4$ с генераторами

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_j \\ -i\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3,$$

естественно действует в

$$\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^4;$$

полагая

$$\gamma = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\gamma_0 - i\gamma_3), \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\gamma_1 - i\gamma_2)$$

и

$$\bar\partial_V = i\psi_2\bar\partial + i\psi_1\partial V,$$

где $\bar\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ — оператор Коши — Римана, ∂ — его сопряженный, V — полином по $z = x + iy$, мы определяем

$$Q = \bar\partial_V + \bar\partial_V^*.$$

В [1, 2] доказана теорема индекса: $i(Q_+) = \deg V - 1$.

5. Непрерывный спектр и теория рассеяния. Под *суперсимметричной теорией рассеяния* [3] в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ с градуировкой γ и парой суперзарядов Q, Q_0 относительно γ понимаются операторы Меллера для $H = Q^2$ и $H_0 = Q_0^2$

$$W^\pm (H, H_0) = \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-lim}}\, e^{itH} e^{-itH_0} P_{ac}(H_0),$$

относительно которых предполагается существование, полнота, а также

$$QW^\pm = W^\pm Q_0 \text{ на } D(Q_0) \cap P_{ac}(H_0)\mathscr{H}.$$

Имеются, конечно, достаточные условия полноты в духе теории Като — Розенблюма и теория фазовых сдвигов, см. [3]; там же имеется обширная библиография и применение теории к трем задачам:

1) формулы индекса для $\operatorname{Tr}(\gamma(e^{-tH} - e^{-tH_0}))$, $e^{-tH} - e^{-tH_0}$ ядерный (т. е. следового класса);

2) теория рассеяния для оператора Лапласа на дифференциальных формах на некомпактном римановом многообразии вне ограниченной области;

3) доказательство формулы Чжэня — Гаусса — Боннэ для асимптотически евклидовых многообразий.

6. Квантовые алгебры. Можно определить *супервариант C^*-динамических систем.* В [4, 5] он называется *квантовой алгеброй.* Это есть четверка $(\mathfrak{A}, \gamma, \alpha_t, d)$ со следующими свойствами:

1) $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^+ \oplus \mathfrak{A}^- \equiv \mathfrak{A}^0 \oplus \mathfrak{A}^1$ есть $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра, т. е. $\mathfrak{A}^i\mathfrak{A}^j \subset \mathfrak{A}^{i+j(\mathrm{mod}\,2)}$, если $a = a^+ + a^-$ —разложение на однородные компоненты, то γ есть $*$-автоморфизм $\mathfrak{A}$

$$a^\gamma = a_+ - a_-;$$

2) α_t — непрерывная однопараметрическая группа $*$-автоморфизмов $\mathfrak{A}$, четная относительно γ, т. е. $\alpha_t(a^\gamma) = \alpha_t(a)^\gamma$; тогда существует [6, раздел 8.12], плотная по норме $*$-подалгебра $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathfrak{A}$ такая, что для всех $a \in \mathfrak{A}_\alpha$ $\alpha_t(a)$ есть $\mathfrak{A}$-значная целая функция t;

3) генератор $D = -i\frac{d}{dt}\alpha_t|_{t=0}$ группы α_t определен по крайней мере на $\mathfrak{A}_\alpha$. Предполагается, что дифференцирование D есть квадрат (нечетного) супердифференцирования

$$d\colon \mathfrak{A}_\alpha \to \mathfrak{A}_\alpha,$$
$$(da)^\gamma = -da^\gamma,\quad d(ab) = (da)b + a^\gamma db,$$
$$D = d^2.$$

Для $d^+a = (da^*)^{*\gamma}$ мы имеем также $D = (d^+)^2$ и d, d^+ обе перестановочны с α_t.

Любой квантовой системе в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ (см. выше), соответствует квантовая алгебра, где $\mathfrak{A}$ — C^*-алгебра операторов в $\mathscr{H}$ с градуировкой, порожденной (2) и с γ, определенной в (3). Супердифференцирование определяется с помощью суперзаряда

$$da = Qa - a^\gamma Q \equiv [Q, a_+] + \{Q, a_-\} \equiv \gamma[\gamma Q, a].$$

Заметим, что тогда

$$d^2a = [H, a] = \gamma[\gamma Q, \gamma[\gamma Q, a]].$$

При этом если

$$\operatorname{Tr} e^{-\beta H} < \infty \text{ для всех } \beta > 0,$$

то такая алгебра называется θ-*суммируемой* и при этом

$$\alpha_t = \exp\{itAd(H)\}.$$

На таких алгебрах можно изучать основные и КМШ-состояния, которые связаны т. о. с суперсимметрией. На квантовых алгебрах можно определить также супер КМШ-функционалы.

7. Супер КМШ-функционалы, которые не являются ни нормированными ни положительными.

Непрерывный линейный функционал ω на квантовой алгебре $\mathfrak{A}$ называется s-KMS-*функционалом*, если для всех a, $b \in \mathfrak{A}_\alpha$ и всех $t \in \mathbb{R}$

$$\omega(\alpha_t(a) b) = \omega(b^\gamma \alpha_{t+i}(a))$$

и

$$\omega \circ d = 0 \text{ на } D(d) \supset \mathfrak{A}_\alpha.$$

Примером является

$$\omega(\cdot) = \mathrm{sTr}(\cdot e^{-H}) = \mathrm{Tr}(\gamma \cdot e^{-Q^2})$$

на θ-суммируемой алгебре. Для него

$$\omega(1) = \mathrm{ind}(Q_+). \tag{5}$$

Этот пример показывает, что обобщением понятия индекса в термодинамическом пределе может служить значение в 1 предельно супер КМШ-функционала.

Если задан s-KMS-функционал ω, то можно построить новые функционалы с помощью «ограниченных возмущений» (см. [18]). Пусть $q \in D(d) \cap \mathfrak{A}_-$. Введем новое супердифференцирование

$$d_q = d + \delta_q, \quad \delta_q(a) = qa - a^\gamma q.$$

Мы получим новую квантовую алгеру $(\mathfrak{A}, \gamma, \alpha_t^q, d_q)$ с

$$D_q = d_q^2 = d^2 + Ad(\Omega), \qquad \Omega = dq + q^2,$$
$$\alpha_t^q = \exp\{itD_q\} = \exp\{it(D + Ad(\Omega))\}$$

и s-KMS-функционал на ней

$$\omega^q(a) = \omega(aW_i^q(1)),$$

где W_t^q удовлетворяет уравнению

$$-i\frac{d}{dt} W_t^q(a) = (D + \Omega) W_t^2(a)$$

и соответствует формально

$$W_t^q(a) = e^{it(H+\Omega)} a e^{-itH}.$$

Доказательства проводятся с помощью стандартных рядов теории возмущений для α_t^q и W_t^q.

Частный случай этой конструкции есть «проектирование» (см. [7]). Пусть $e^2 = e = e^* = e^\gamma \in D(d) \subset \mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{A}^e = e\mathfrak{A}e$ — C^*-алгебра с единицей и $(\mathfrak{A}^e, \gamma, \alpha_t^e, d^e)$ — квантовая алгебра с

$$d^e a = e(da)e \equiv d + \delta_e,$$

α_t^e определено выше, с s-KMS-функционалом $\omega^e(\cdot)$.

8. Бесконечномерные квантовые алгебры. Довольно широкий класс квантовых «квазилокальных» алгебр дает следующая конструкция (на примере решетки $\mathbb{Z}^\nu$). Пусть каждой точке $x \in \mathbb{Z}^\nu$ сопоставлена КАС-алгебра $\mathfrak{A}_x$ и любая другая алгебра $\mathfrak{B}_x$. Рассмотрим квазилокальную C^*-алгебру

$$\mathfrak{C} = \lim_\Lambda \mathrm{ind}\, \mathfrak{C}_\Lambda, \quad \mathfrak{C}_\Lambda = \bigotimes_{x \in \Lambda} (\mathfrak{A}_x \otimes \mathfrak{B}_x),$$

где тензорное произведение КАС-алгебр берется в суперсмысле, а остальные — в обычном смысле.

γ действует тождественно на $\mathfrak{B}_x$ и по формуле (3) на $\mathfrak{A}_x$, если $\mathfrak{A}_x$ действует в фермионном фоковском пространстве $\mathcal{F}_{\text{as}}(\mathcal{H}_1)$ с $\gamma = (-1)^{N_f}$, где N_f — оператор числа фермионов. Очевидно, что γ продолжается на всю $\mathfrak{C}$. Если h_i — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_1$ и $a_x(h_i)$ — операторы умножения в $\mathcal{F}_{\text{as}}(\mathcal{H}_1)$, то получим

$$Q_\Lambda = \sum_{x,\, i} (a_x(h_i)\, B_{A+x,\, i} + a_x^*(h_i)\, B^*_{A+x,\, i}),$$

где $B_{A+x,\, i} \in \mathfrak{B}_{A+x} = \bigotimes_{y \in A+x} \mathfrak{B}_y$. Тогда $\mathfrak{C}_\Lambda$ становится квантовой алгеброй с супердифференцированием d_Λ и группой автоморфизмов $\alpha_t^{(\Lambda)}$, строящейся по $H_\Lambda = Q_\Lambda^2$. Аналог теоремы Робинсона показывает, что существуют пределы d и α_t, удовлетворяющие аксиомам квантовой алгебры.

Если вместо $\mathbb{Z}^\nu$ взять $\mathbb{R}^\nu$, то построение гладких (нелокальных) объектов проводится вполне аналогично. Обычное в квантовой теории поля требование локальности приводит к проблеме ультрафиолетовых перенормировок.

9. Квантовая теория поля. В серии работ [8—13] рассматриваются две модели Весса — Цумино с $N = 1$ и $N = 2$ одномерных квантовых полей в конечном объеме — на окружности $T = R/l\mathbb{Z}$ длины l. Рассмотрим фоковское пространство

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}_{\text{sym}}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{F}_{\text{as}}(\mathcal{H}_1)$$

с $\mathcal{H}_1 = L_2(T) \oplus L_2(T) = l_2(\hat{T}) \oplus l_2(\hat{T})$ при $N = 2$, где $\hat{T} = \frac{2\pi}{l}\mathbb{Z}$ — двойственная решетка. Соответственно имеется два набора $a_\pm(p)$, $a_\pm^*(p)$ бозонных и два набора фермионных $b_\pm(p)$, $b_\pm^*(p)$ операторов рождения — уничтожения, занумерованные $p \in \hat{T}$, со стандартными соотношениями, и «комплексные» поля

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= (2e)^{-1/2} \sum_{p \in \hat{T}} \mu(p)^{-1/2} (a_+^*(p) + a_-(-p))\, e^{-ipx},\\
\pi(x) &= i\, (2e)^{-1/2} \sum \mu(p)^{-1/2} (a_-^*(p) - a_+(-p)) e^{-ipx},\\
\psi_1(x) &= (2e)^{-1/2} \sum \mu(p)^{-1/2} (\nu(-p)\, b_-^*(p) + \nu(p)\, b_+(-p))\, e^{-ipx},\\
\psi_2(x) &= (2e)^{-1/2} \sum \mu(p)^{-1/2} (\nu(p)\, b_-^*(p) - \nu(-p)\, b_+(-p))\, e^{-ipx},\\
\mu(p) &= (p^2 + m^2)^{1/2},\ \nu(p) = (\mu(p) + p)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Для полинома

$$V = \frac{1}{2} m\varphi^2 + P(\varphi)$$

можно ввести Q как билинейную форму на $\mathcal{H}$:

$$\gamma = (-1)^{N_f},$$

$$\begin{aligned}
Q = Q_0 + Q_P &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_T [\psi_1(\pi - \partial_x\varphi^* - im\varphi) + \psi_2(\pi^* - \partial_x\varphi - im\varphi^*)]\, dx +\\
&+ \text{h. c.} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_T [\psi_1(-iP'(\varphi) + \psi_2(-iP'(\varphi^*)) + \text{h. c.}]\, dx.
\end{aligned}$$

При $P \equiv 0$ $\quad Q \equiv Q_0$ определен как самосопряженный оператор и

$$\begin{aligned}
Q_0^2 = H_0 = N_{1,\, b} \otimes 1_f + 1_b \otimes N_{1,\, f} &= \int_T H_0(x)\, dx =\\
&= \int_T [|\pi(x)|^2 + |\partial_1\varphi(x)|^2 + m^2 |\varphi(x)|^2 + \overline{\psi}(x)(i\gamma_1\partial_1 - m)\psi(x)]\, dx,
\end{aligned}$$

$$\gamma_1 = -i\sigma_2, \quad \overline{\psi} = \psi^*\sigma_1, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1},$$

где при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$

$$N_\tau = N_{\tau,b} + N_{\tau,f} = \sum_{j=\pm} \sum_{p \in \hat{T}} \mu^\tau(p) \, (a_j^*(p)\, a_j(p) + b_j^*(p)\, b_j(p)).$$

Формально

$$H = H_0 + H_P \equiv H_0 + \int_T dx \, [-(\bar{\psi}_1 \psi_1)\, P''(\varphi) + \text{h. c.}] + $$
$$+ \int_T dx \, [m\varphi^* P(\varphi) + \text{h. c.} + |P'(\varphi)|^2].$$

Специальным образом вводятся урезанные поля $\varphi_k = \chi_k * \varphi$ для $k > 0$ с

$$\chi_k(x) = k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(k(x - nl)),$$

где χ — четная положительная положительно определенная нормированная функция на $\mathbb{R}$, $\hat{\chi}(p) \in C_0^\infty(R)$. При $k = 0$ полагаем $\hat{\chi}_0(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{p0}$.

Нетрудно доказывается, что урезанные операторы

$$H_k = H_0 + H_{P,k} \text{ и } Q_k = Q_0 + Q_{P,k}$$

существенно самосопряжены на области D_0 гладких конечночастичных векторов.

О с н о в н ы е р е з у л ь т а т ы [9—11]:

1° *Резольвенты замыканий Q_k и H_k сходятся в операторной норме при $k \to \infty$ (снятие урезания) к резольвентам некоторых самосопряженных операторов Q_∞, H_∞, причем резольвенты Q_k и H_k непрерывны по норме по k при $0 \leqslant k \leqslant \infty$.*

2° *Для любого $\tau \in (0, 1)$ существуют константы $\zeta > 0$, $C < \infty$ такие, что*

$$\zeta N_\tau \leqslant H_k + C$$

равномерно по $0 \leqslant k \leqslant \infty$.

Из последнего свойства следует:

3° *Резольвенты H_k и Q_k, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, непрерывны в операторной норме и компактны, т. е. $Q \in \mathrm{Dir}(\mathcal{H})$. Индекс $i(Q_{k,+})$ постоянен при $0 \leqslant k \leqslant \infty$.*

4° $$i(Q_{k,+}) = \mathrm{Tr}(\gamma e^{-\beta H_k}), \quad 0 \leqslant k \leqslant \infty.$$

Тот факт, что $e^{-\beta H_k}$ ядерный, следует из оценки снизу 2° и явного подсчета: при $\tau, \beta > 0$

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\beta N_{\tau,b}} = \prod_{p \in \hat{T}} (1 - \exp(-\beta\omega^\tau(p)))^{-2},$$

$$\mathrm{Tr}\, \gamma e^{-\beta N_{\tau,f}} = \prod_{p \in \hat{T}} (1 - \exp(-\beta\omega^\tau(p)))^{2}.$$

Этот подсчет делается отдельно для каждого p как хорошо известный подсчет статсуммы для свободных бозе и ферми газа.

5° *Если V имеет степень n, то*

$$i(Q_{k,2}) = n - 1.$$

В силу постоянства индекса последний результат достаточно доказать при $k = 0$, что следует из рассмотренной выше комплексной модели Весса — Цумино ($N = 2$).

Заметим, что предельный гамильтониан H_∞ определен в фоковском пространстве, хотя D_0 не входит в его область определения. Этот факт характерен для суперсимметрической модели, в отличие от обычных моделей Y_2 Юкавы в размерности $1 + 1$ (см. [14]), где меняется само гильбертово пространство из-за перенормировок. В этой модели диаграммы имеют те же самые расходимости, что и Y_2, но они сокращаются (см. ниже).

Результат 1° выводится как стандартное следствие из непрерывности по норме отображения

$$k \to \exp(-\beta H_k)$$

сходимости по мере

$$\lim_{k\to\infty} \exp(-\beta H_k),$$

а это в свою очередь доказывается евклидовыми методами после представления $\exp(-\beta H_k)$ по формуле Фейнмана — Каца — Нельсона. Сначала при этом мы получаем евклидово поле с грассмановыми переменными для ферми-полей, после чего с помощью формулы Мэттьюза — Салама грассмановы переменные выинтегрируются.

Нам понадобятся следующие обозначения.

Пусть

$$C(x-y) = (2\pi l)^{-1} \sum_{p^1 \in \hat{T}} \int \frac{1}{p^2+m^2} e^{-i(p,\, x-y)}\, dp_0, \qquad p = (p^0, p^1)$$

— ковариация свободного бозонного евклидова поля на цилиндре $\mathbb{R} \times T$, μ_C — соответствующая гауссова мера,

$$\Phi_k(x) = \int_T \chi_k(x_1 - x_1')\, \Phi(x_0, x_1')\, dx_1'$$

— регуляризованное по пространству поле. Пусть

$$S(x-y) = (2\pi l)^{-1} \sum_{p^0 \in \hat{T}} \int \frac{-\bar{p}+m}{p^2+m^2} e^{-i(p,\, x-y)}\, dp^0,$$

$\bar{p} = p^0\gamma_0^E$, $\gamma_0^E = -i\sigma_1$, $\gamma_1^E = -i\sigma_2$ — евклидовы матрицы Дирака.

Частный случай ФКН-формулы имеет вид

$$(6) \qquad (\Omega,\ e^{-\beta H_k}\Omega) = \int \det(1 - K^{(k)}) \exp(-A^{(k)})\, d\mu_C,$$

где Ω — вакуум в пространстве Фока,

$$A^{(k)} = \int_{[0,\,\beta]\times T} (m\Phi \cdot P'(\Phi_k^*) + m\Phi^* \cdot P'(\Phi_k) + |P'(\Phi_k)|)\, dx$$

соответствует чисто бозонному члену в гамильтониане, а det возникает из интегрирования фермионов.

Оператор $K^{(k)}$ на соболевском пространстве $\mathcal{H}_\alpha(\mathbb{R} \times T) \oplus \mathcal{H}_\alpha(\mathbb{R} \times T)$ имеет ядро

$$K^{(k)}(x, y) = \frac{1}{2} \int_T dz_1 [S(x-z)\, \chi_k(z_1 - y_1)\, ((P(\Phi_k(z)) + P''(\Phi_k(y))\, \Lambda_+ + \text{h. c.}],$$

$$\Lambda_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ оператор $K^{(k)}$ ядерный с вероятностью 1. Аналогичные формулы имеют место для КМШ-состояний и супер КМШ-состояний

$$(7) \qquad \langle\cdot\rangle_\beta = \frac{\mathrm{Tr}\,(\cdot\, e^{-\beta H_k})}{\mathrm{Tr}\,(e^{-\beta H_k})}, \quad \langle\cdot\rangle_\beta^\gamma = \frac{\mathrm{sTr}\,(\cdot\, e^{-\beta H_k})}{\mathrm{sTr}\,(e^{-\beta H_k})}.$$

Заметим, что простые гауссовы вычисления показывают, что для свободного гамильтониана (т. е. $P = 0$) вакуумное состояние индуцируется на срезе $x_0 = 0$ гауссовским полем $\mu_C \otimes \mu_S$, где μ_S — гауссовское квазисостояние (см. [21]) с ковариацией S на грассмановой алгебре на $\mathcal{H}_\alpha$ ($\mathbb{R} \times T$). Состояние $\langle\cdot\rangle_\beta^\gamma$ индуцируется тоже произведением гауссовских мер на S' ($[0, \beta] \times T$), ковариации C_β и S_β которых задаются соответствующими обратными операторами с периодическими граничными условиями по x_0 и x_1. Для $\langle\cdot\rangle_\beta$ берутся антипериодические граничные условия для S по x_1.

Для индекса i (Q_+) имеет место формула (6), но с гауссовой мерой μ_{C_β} вместо μ_C.

Для этой суперсимметрической модели возможно полное сокращение ультрафиолетовых расходимостей с помощью следующего приема, использующего регуляризованные детерминанты $\det_n$:

$$\det(1-K) = \det_n(1-K)\exp\left(-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\operatorname{Tr}K^j\right).$$

Подынтегральное выражение в (6) можно переписать в виде

$$\det{}_3(1-K^{(k)})\exp(-\tilde{A}^{(k)}), \tag{8}$$

где

$$\tilde{A}^{(k)} = A^{(k)} + \operatorname{Tr}K^{(k)} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(K^{(k)})^2. \tag{9}$$

Если выделить виковскую часть у A,

$$A^{(k)} = :A^{(k)}: + C^{(k)}(0)\int\limits_{T\times[0,\beta]}(mP''(\Phi_k^*) + mP''(\Phi_k))\,dx + \sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l!}(C^{(k)}(0))^l\int :|P^{(l)}(\Phi_k)|^2:dx. \tag{10}$$

Тогда сингулярности во втором члене (9) и втором члене (10) взаимно уничтожаются, а логарифмические сингулярности в третьих членах (9) и (10) также сокращаются. После этого можно доказать, что $\tilde{A}^{(k)}$ сходится в L_p при $k \to \infty$. Эта процедура сокращения расходимостей гораздо проще, конечно, чем соответствующая процедура в модели Y_2.

Аналогичное верно и для операторов

$$H_\tau^{(k)} = H^{(k)} - \zeta N_\tau$$

для $0 \leqslant \tau < 1$ и достаточно малых $\zeta \geqslant 0$. Отсюда уже стандартными, но довольно громоздкими рассуждениями доказываются утверждения 1°—2°.

В «вещественной» модели Весса — Цумино $\mathcal{H}_1 = L_2(T)$, $a_+ = a_-$, $b_+ = b_-$ и Q_0 определяется так же (без i). Однако в ней уже нужны перенормировки в гамильтониане — правда просто виковские точки в

$$Q_{P,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_T(\psi_1(x) + \psi_2(x)):P'(\varphi_k(x)):dx.$$

Результаты и техника вполне аналогичны за исключением того, что в формуле Мэттьюза — Салама возникает пфаффиан вместо детерминанта (соответственно числу грассмановых переменных).

10. Пфаффианы (см. [15]). Вычисления с фермионами дают детерминанты или пфаффианы в зависимости от того, задан ли гауссов функционал $\langle\cdot\rangle$ на грассмановой алгебре с образующими ξ_i или η_i, $\bar\eta_i$, причем $\langle\eta_i\eta_j\rangle = \langle\bar\eta_i\bar\eta_j\rangle = 0$,

$$\langle\eta_1\bar\eta_1\ldots\eta_n\bar\eta_n\rangle = \det\langle\eta_i\bar\eta_i\rangle,$$

$$\langle\xi_1\ldots\xi_{2n}\rangle = \operatorname{Pf}\langle\xi_i\xi_j\rangle = \operatorname{Pf}A,$$

где $A = (A_{ij})$ — кососимметрическая матрица ($\langle \xi_i \xi_j \rangle$). Пфаффиан может быть также определен с помощью интеграла Березина

$$\mathrm{Pf}\, A = \int \exp\Big(\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,\, j \leq 2n} A_{ij} \xi_i \xi_j\Big) = \int \exp\Big(\frac{1}{2}(\xi, A\xi)\Big)\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{|\pi|} A_{\pi(1)\pi(2)} \dots A_{\pi(2n-1)\pi(2n)}.$$

Легко показать, что

$$(\mathrm{Pf}\ A)^2 = \det A.$$

Минором пфаффиана, соответствующим подмножеству $\sigma \subset \{1, \dots, 2n\}$, называется

$$\mathrm{Pf}^{\sigma} A = \pi(\sigma, \bar{\sigma})\, \mathrm{Pf}\, A_{\bar{\sigma}},$$

где $\bar{\sigma}$ — дополнение σ, $A_{\bar{\sigma}}$ — матрица на строках и столбцах $\bar{\sigma}$, $\pi(\sigma, \bar{\sigma})$ — знак перестановки, где σ стоят в возрастающем порядке, а за ними $\bar{\sigma}$ в таком же.

Если J_i, $i = 1, \dots, 2n$, — грассмановы элементы с

$$\{\xi_i, J_k\} = \{J_i, J_k\} = 0,$$

то хорошо известны формулы

$$\int \exp\Big(\frac{1}{2}(\xi, A^{-1}\xi) + (J, \xi)\Big) d\xi = \mathrm{Pf}(A^{-1}) \exp\Big(\frac{1}{2}(J, AJ)\Big),$$
$$\int \Big(\prod_{j \in \sigma} \xi_j\Big) \exp\Big(\frac{1}{2}(\xi, A\xi)\Big) d\xi = \mathrm{Pf}^{\sigma} A = (-1)^{|\sigma|/2}\, \mathrm{Pf}((A^{-1})\sigma)\, \mathrm{Pf}\, A.$$

Относительный пфаффиан определяется как

$$\mathrm{Pf}(A, B) = \sum_{\sigma} \mathrm{Pf}\, A_{\sigma}\, \mathrm{Pf}\, B_{\sigma}.$$

Если A обратима, то можно доказать, что

$$\mathrm{Pf}(A, B) = \frac{\mathrm{Pf}(A^{-1} - B)}{\mathrm{Pf}(A^{-1})}.$$

В общем случае

$$[\mathrm{Pf}\,(A,\ B)]^2 = \det(1 - AB).$$

Пусть теперь $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство с фиксированным комплексным сопряжением C. Оператор A называется *косостранспонированным*, если $A^* = CAC$. Пусть $I_p^a(\mathcal{H})$ — косостранспонированные операторы p-класса Шаттена. Регуляризованные относительные пфаффианы обладают свойствами

$$\mathrm{Pf}_n\,(A,\ B)^2 = \det{}_n\,(1 - AB), \quad A, B \in I_{2n}^a,$$
$$\mathrm{Pf}_n(A, B) = \mathrm{Pf}\,(A, B) \exp\Big(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \mathrm{Tr}\,(AB)^j\Big)$$

и определяются как

$$\mathrm{Pf}_n(A, B) = \mathrm{Pf}\big((AB)^{\frac{n-1}{2}} A,\ (BA)^{\frac{n-1}{2}} B T_n(AB)\big),$$
$$T_n(t) = \int_0^1 s^{n-1} \exp\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(st)^k}{k!}\Big) ds.$$

11. Квантовая дифференциальная геометрия. Эта наука, развитая Конном [16, 17] (см. также [19, 20, 78]), выросла из обобщения идей классической

K-теории и расширений C^*-алгебр. В применении к бесконечномерным объектам она привела к обобщению понятия индекса на случай, когда Q не есть оператор Дирака, даже когда Q имеет только формальный смысл. Собственно таких примеров пока мало (в бесконечном объеме, когда H и Q имеют непрерывный спектр), но они должны возникнуть в самое ближайшее время.

Пусть $C^n(\mathfrak{A})$ — множество всех плотно определенных $(n+1)$-линейных функционалов на квантовой алгебре $\mathfrak{A}$, непрерывных относительно нормы

$$\| a \|_* = \| a \| + \| da \|.$$

Соответствующая норма $f_n \in C^n(\mathfrak{A})$ обозначается $\| f_n \|_*$. Примером такого функционала является характер Чжэня для $\mathfrak{s}$-KMS-функционала ω

$$\tau_n(a_0, \ldots, a_n) = i^{\varepsilon_n} \int\limits_{0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant 1} \!\!\cdots\!\! \int \omega(a_0 \alpha_{is_1}(da_1^\gamma)\, \alpha_{is_2}(da_2) \ldots \alpha_{is_n}(da_n^{\gamma^n}))\, ds_1 \ldots ds_n,$$

определенный для $a_0, \ldots, a_n$, $\varepsilon_n = n \pmod 2$.

Пусть $C(\mathfrak{A})$ — множество последовательностей $f = (f_0, f_1, \ldots)$, $f_n \in C^n(\mathfrak{A})$, удовлетворяющих условию роста Конна

$$\sqrt{n}\, \| f_n \|_*^{1/n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

$C(\mathfrak{A})$ имеет градуировку $\gamma f_n(a_0, \ldots, a_n) = f_n(a_0^\gamma, \ldots, a_n^\gamma)$ и разлагается на четную и нечетную часть

$$C(\mathfrak{A}) = C_+ \oplus C_-.$$

Конн ввел два линейных оператора

$$b\colon C^n \to C^{n+1}, \quad B\colon C^n \to C^{n-1};$$

$$(bf)_{n+1}(a_0, \ldots, a_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j f_n(a_0, \ldots, a_j a_{j+1}, \ldots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f_n(a_{n+1}^\gamma a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

$$(Bf)_{n-1}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{(n-1)j} (f_n(1, a_{n-j}^\gamma, \ldots \ldots, a_{n-1}^\gamma, a_0, \ldots, a_{n-j-1}) + (-1)^{n-1} f_n(a_{n-j}^\gamma, \ldots, a_{n-1}^\gamma, a_0, \ldots, a_{n-j-1}, 1)$$

для $f_n \in C_+$ и без значков γ для $f_n \in C_-$. Пусть $C^e(\mathfrak{A})$ — пространство последовательностей $f = (f_0, f_2, f_4, \ldots)$, а $C^0(\mathfrak{A})$ — с нечетными номерами.

Рассматривается «полный циклический» комплекс

$$\ldots \xrightarrow{\partial} C^e(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\partial} C^o(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\partial} C^e(\mathfrak{A}) \to \ldots,$$

где $\partial = b + B$. Можно проверить, что $b^2 = B^2 = \delta^2 = 0$.

Группы когомологий обозначаются H^e и H^0.

Т е о р е м а 1) *Существует* $c > 0$, *что*

$$\| \tau_n \|_* \leqslant \frac{1}{n!} |\omega|(1)\, e^{cn},$$

где $|\omega| = \omega_{1,+} + \omega_{1,-} + \omega_{2,+} + \omega_{2,-}$ *для единственного разложения*

$$\omega = \omega_{1,+} - \omega_{1,-} + i(\omega_{2,+} - \omega_{2,-}),$$

$$\omega_{k,\pm} \geqslant 0, \quad \omega_{k,+} \perp \omega_{k,-}.$$

2) $\tau_{2k} \in C_+$, $\tau_{2k-1} \in C_-$ *и* τ *является коциклом, т. е.*

$$\partial\tau = 0.$$

3) *если* $q(\lambda) \in \mathfrak{A}_- \cap D(d)$ *непрерывно дифференцируема по* $\lambda \in [0, 1]$, *то характеры Чженя* $\tau^{q(\lambda)}$ *относительно* $\omega^{q(\lambda)}$ *когомологичны.*

Индекс суперпроизводной d^e на квантовой алгебре $(\mathfrak{A}^e, \gamma, \alpha^e, d^e)$ определяется относительно s-KMS-функционала ω^e

$$i_{\omega^e}(d^e) = \omega^e(1) = \omega^e(e).$$

Свойство s-KMS заменяет условие фредгольмовости в случае его отсутствия, но индекс, конечно, может не быть целочисленным. В классической дифференциальной геометрии многообразия M характер Чженя определяет изоморфизм между группой Гротендика $K_{\mathbb{C}}(M)$, построенной по классам эквивалентности векторных расслоений над M и четной частью кольца когомологий $H^{even}(M)$.

В некоммутативном случае $K_{\mathbb{C}}(M)$ заменяется на группу Гротендика $K_0(\mathfrak{A}_+)$ классов эквивалентности идемпотентов в $\mathrm{Mat}(\mathfrak{A}_+)$, а $H^{even}(M)$ — на четную часть циклической когомологии $H^e(\mathfrak{A}_+)$.

Алгебра $(k \times k)$-матриц $\mathfrak{A}_k = \mathrm{Mat}_k(\mathfrak{A})$ с коэффициентами из $\mathfrak{A}$ есть квантовая алгебра $(\mathfrak{A}_k, \tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}, \tilde{d})$, где $\tilde{\gamma}$ строится естественным образом, $(\tilde{d}a)_{ij} = d(a_{ij})$, $\tilde{\omega}(a) = \sum_{i=1}^{n} \omega(a_{ii})$ есть s-KMS-функционал. Определим

$$\tilde{\tau} = \tau \circ \mathrm{Tr} \in C(\mathfrak{A}_k).$$

Положим для каждого циклического коцикла τ на $C(\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$ — некоторая квантовая алгебра, и идемпотента $e \in \mathfrak{B}$

$$\langle \tilde{\tau}, e \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \hat{\tau}_{2n}(e, e, \ldots, e),$$

где $\hat{\tau}$ — произвольный нормализованный коцикл, когомологичный τ (см. [17]), и это определение зависит лишь от класса когомологий τ.

Теорема об индексе [7]. *Для всех k и $e \in \mathfrak{A}_k$*

$$\langle \tilde{\tau}, e \rangle = \tilde{\omega}^e(\tilde{d}^e).$$

В случае $k = 1$ и $d(a) = Qa - a^{\gamma}Q$ с нечетным фредгольмовым Q

$$\langle \tau, e \rangle = i_{\omega e}(d^e) = \mathrm{Ind}((eQe)_+),$$

где Ind *означает индекс Атьи — Зингера, a_+ — компоненту Q, отображающую $\frac{1}{2}(1+\gamma)\mathcal{H}$ в $\frac{1}{2}(1-\gamma)\mathcal{H}$.*

ЧАСТЬ II
КВАНТОВЫЕ СОЛИТОНЫ

1. Двумерная модель Изинга с непрерывным временем. Это есть случайное поле на $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} = \{(x, \tau): x \in \mathbb{Z}, \tau \in \mathbb{R}\}$, принимающее два значения ± 1. Для любого $x \in \mathbb{Z}$ зададим сначала стационарный марковский процесс $\xi_x(\tau)$ с двумя состояниями ± 1 и инфинитезимальной матрицей $H_x = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$. Они независимы для различных x. Пусть (Ω, Σ, μ_0) — вероятностное пространство, где все эти процессы определены. Можно считать, что Ω есть множество всех функций $f(x, \tau)$ на $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, кусочно постоянных по τ при заданном x. Введем гиббсовскую перестройку $\mu_{L,T}$ на (Ω, Σ) с плотностью

$$\frac{d\mu_{L,T}}{d\mu_0} = Z_{L,T}^{-1} \exp\left(\beta \sum_{x=-L}^{L-1} \int \xi_x(\tau)\, \xi_{x+1}(\tau)\, d\tau\right). \tag{1}$$

Пусть $\mu_{L,T}^{\pm}$ — соответствующие меры для $(\pm)$-граничных условий. Хорошо известно [24], что при достаточно больших β и $\ln \frac{1}{\lambda} > 4\beta$ существуют трансляционно инвариантные слабые пределы этих мер $\mu^{\pm} = \lim\limits_{L,\,T\to\infty} \mu^{\pm}_{L,\,T}$ и при этом

$$\langle \xi_0(0)\rangle_{\mu^-} = -\langle \xi_0(0)\rangle_{\mu^-} \to 1 \text{ при } \beta \to \infty.$$

Рассмотрим измеримое взаимно однозначное отображение $T_{a,b}$ множества Ω в себя

$$(T_{a,\,b}f)(x,\tau) = \begin{cases} -f(x,\tau), & a \leqslant x \leqslant b, \\ f(x,\tau) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и определим меру $T^*_{a,\,b}\mu$ на (Ω, Σ):

(2) $$(T^*_{a,\,b}\mu)(A) = \mu\,(T_{a,\,b}A), \quad A \in \Sigma_0,$$

где Σ_0 — наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все $\xi_x(0)$.

2. Связь с одномерной квантовой моделью Изинга. Обозначим $\mathscr{L}_\mu = L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ и пусть $(\cdot\,,\,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathscr{L}_\mu$. Пусть $\mathscr{H}_V$ — подпространство $\mathscr{L}_{\mu_0}$ случайных величин, зависящих лишь от $\xi_x(0)$, $x \in V \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{A}_V$ — C^*-алгебра всех линейных операторов в $\mathscr{H}_V$, индуктивный предел $\mathfrak{A}$ этих $\mathfrak{A}_V$ совпадает с обычной C^*-алгеброй квазилокальных наблюдаемых квантовой спиновой системы на $\mathbb{Z}$. Пусть $e^{\pm}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \xi_x(0))$ — базис в $\mathscr{H}_x$. Каждая вероятностная мера μ на Σ_0 определяет состояние φ_μ на $\mathfrak{A}$:

(3) $$\varphi_\mu(A) = (\chi_\Omega, A\chi_\Omega),$$

где χ_Ω — тождественная единица на Ω. Правая часть (3) имеет очевидный смысл для локальных A и продолжается на всю $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathscr{L}_\mu$ можно отождествить с пространством ГНС-представления по состоянию φ_μ с циклическим вектором χ_Ω.

Для любого $V = [-L, L]$ рассмотрим гамильтониан

(4) $$H_V = \sum_{x=-L}^{L} H_x + \sum_{x=-L-1}^{L} H_{x,\,x+1},$$

где $H_x = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$ в базисе $e^{\pm}_x$, $H_{x,\,x+1}$ — оператор умножения на $\beta\xi_x(0)\,\xi_{x+1}(0)$ и выбор $\xi_{-L-1}(0)$, $\xi_{L+1}(0)$ задает граничные условия. По теореме Робинсона (см. [25]) существует группа $*$-автоморфизмов η_t алгебры $\mathfrak{A}$, которая определяется на локальных A формулой

$$\eta_t(A) = \lim_{L\to\infty} \exp(iH_V t)\,A\exp(-iH_V t).$$

На $\mathfrak{A}$ определено также представление η_x группы $\mathbb{Z}$ пространственных сдвигов. Пусть E_V — наименьшее собственное значение H_V и $\hat{H}_V = H_V - E_V$. Нетрудно показать, что $\varphi^{\pm}_\mu$ являются основными состояниями относительно η_t.

3. Гамильтоново построение солитонных секторов. Энергия взаимодействия в фиксированный момент времени для конфигурации ξ_x с точностью до константы есть

$$E(\xi) = -\beta\sum_x (\xi_x\xi_{x+1} - 1).$$

Очевидно, что вариация $E(\xi') - E(\xi)$ конечна для любых ξ', ξ, отличающихся в конечном числе мест. Конфигурация ξ такая, что $E(\xi') - E(\xi) \geqslant 0$ для всех таких ξ' называется *локальным экстремумом*. Наряду с вакуумными конфигурациями $\xi^{\pm}_x \equiv \pm 1$ с энергией $E(\xi^{\pm}) = 0$ существует локально экстремальная конфигурация, называемая *классическим солитоном — кинком*

$$\xi^{s,\,x_0}_x = \xi^s_x = \begin{cases} 1, & x \geqslant x_0, \\ -1, & x < x_0, \end{cases} \quad E(\xi^s) = \beta.$$

Вообще, классический солитон определяется как локально экстремальная конфигурация с конечной энергией (отличная от вакуумной). Квантованию этого солитона и антисолитона $\xi^{as} = -\xi^{s}$ соответствуют меры

$$\mu^s = T^*_{0,\infty}\mu^+, \quad \mu^{as} = T^*_{-\infty,0}\mu^+, \tag{5}$$

называемых *солитонной* и *антисолитонной*.

Теорема 1. *В низкотемпературной области меры* μ^+, μ^-, μ^s, μ^{as} *взаимно сингулярны* (см. [24]).

Пространства $\mathscr{L}_{\mu^\pm}$ называются *вакуумными*, а $\mathscr{L}_{\mu^s}$, $\mathscr{L}_{\mu^{as}}$ — *солитонным* и *антисолитонным секторами* соответственно. Каждый из этих секторов «инвариантен» относительно η_t и η_x. Для вакуумных секторов это есть общая теорема (см. [25]), следующая из инвариантности состояний $\mu^\pm$. В солитонном случае инвариантных относительно η_t, η_x векторов нет.

Теорема 2. *В солитонном секторе существуют такие унитарные операторы* V_t *и* V_x, *что*

$$V_{x,t}\pi_s(A)V_{x,t}^{-1} = \pi_s(\eta_{x,t}A),$$

где π_s — ГНС-*представление* $\mathfrak{A}$ *относительно состояния* φ_{μ^s}.

Доказательство простое и мы его приведем. Пусть α_x — автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_x$: $\alpha_x A = u_x A u_x^{-1}$, где u_x переставляет e_x^+ и e_x^-. Положим $\alpha_{a,b} = \prod_{a\leqslant x\leqslant b}\alpha_x$. Тогда $\varphi_{\mu^s}(A) = \varphi_{\mu^+}(\alpha_{0,\infty}A)$. Можно считать α_x автоморфизмом $\mathfrak{A}$. Рассмотрим сплетающий изоморфизм T: $\mathscr{L}_{\mu^+}\to\mathscr{L}_{\mu^s}$ такой, что

$$T\pi_+(A) = \pi_s(\alpha_{0,\infty}A)\,T,$$

где π_+, π_s — ГНС-представления относительно φ_{μ^+}, φ_{μ^s}. T очевидным образом связан с $T_{0,\infty}$. Вместо $V_{x,t}$ мы будем искать операторы

$$U_{x,t} = T^{-1}V_{x,t}T$$

в $\mathscr{L}_{\mu^+}$, удовлетворяющие соотношениям

$$TU_{x,t}T^{-1}T\pi_+(\alpha_{0,\infty}A)\,T^{-1}TU_{x,t}^{-1}T^{-1} = T\pi_+(\alpha_{0,\infty}\eta_{x,t}A)\,T^{-1}, \tag{6}$$
$$U_{x,t}BU_{x,t}^{-1} = (\alpha_{0,\infty}\eta_{x,t}\alpha_{0,\infty})\,B,\quad B\in\pi_+(\mathfrak{A}).$$

Рассмотрим сначала случай временной эволюции. Тогда (6) имеет вид

$$U_{x,t}BU_{x,t}^{-1} = \alpha_{0,\infty}(e^{itH_+}(\alpha_{0,\infty}B)\,e^{-itH_+}),$$

где H_+ — ГНС-гамильтониан в $\mathscr{L}_{\mu^+}$. Но

$$\alpha_{0,\infty}(e^{it\hat H_V}(\alpha_{0,\infty}B)\,e^{-it\hat H_V}) = e^{it\alpha_{0,\infty}(\hat H_V)}Be^{-it\alpha_{0,\infty}(\hat H_V)}$$

сходится при $|V|\to\infty$ для достаточно малых t в топологии нормы. Но

$$\alpha_{0,\infty}(\hat H_V) = \hat H_V - 2\beta\xi_0(0)\,\xi_{-1}(0) \equiv \hat H_V + \delta H.$$

Можно определить тогда унитарную группу U_t в $\mathscr{L}_{\mu^+}$ формулой

$$U_t = e^{it(H_+ + \delta H)}$$

и гамильтониан в солитонном секторе

$$H_s = T(H_+ + \delta H)\,T^{-1}.$$

Для пространственных сдвигов получим

$$U_xBU_x^{-1} = \alpha_{0,x-1}\eta_x B,$$

откуда из унитарной представимости η_x и $\alpha_{0,x-1}$ в $\mathscr{L}_{\mu^+}$ и следует результат.

4. Евклидово построение солитонных секторов. Для простоты терминологии мы будем рассматривать здесь $\mathbb{Z}^2$, имея в виду дословный перенос на

$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Пусть $(\mathbb{Z}^2)^*$ — двойственная, т. е. сдвинутая на $(^1/_2, {}^1/_2)$ решетка. Пусть $x_1, \ldots, x_k \in (\mathbb{Z}^2)^*$, $y_1, \ldots, y_m \in Z^2$. Рассмотрим достаточно большой куб $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ с $(+)$-граничными условиями и определим «корреляционные функции»

$$S_{k,m}(x, y) = S_{k,m}(x_1, \ldots, x_k;\ y_1, \ldots, y_m)$$

сначала в Λ, а затем при $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^2$. Если k нечетно, положим $S_{km} = 0$, а для $k = 2n$ сначала осуществим следующее построение. Проведем произвольно пути $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ по ребрам $(\mathbb{Z}^2)^*$, соединяющие попарно вершины и определим «внешнее калибровочное поле» на ребрах $\langle ij\rangle$ решетки $\mathbb{Z}^2$:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } \langle ij\rangle^* \in \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n \equiv \gamma, \\ \ \ 1, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\langle ij\rangle^*$ — ребро двойственной решетки, перпендикулярное к $\langle ij\rangle$. Обозначим π_y путь на $\mathbb{Z}^2$ из $y = (y^0, y^1)$ в (y^0, ∞) и положим

$$\xi_\gamma(y) = \xi(y)(-1)^{\pi_y(\gamma)},$$

где $\xi(y)$ — конфигурация из ± 1, а $\pi_y(\gamma)$ — число пересечений π_y с γ.

Определение 1.

$$(7) \qquad S_{2n,m}(x_1, \ldots, x_{2n}; y_1, \ldots, y_m) =$$
$$= \lim_{\Lambda} Z^{-1}_{\Lambda,+} \langle \xi_\gamma(y_1) \cdots \xi_\gamma(y_m) \exp\big(\beta \sum_{\langle y, y'\rangle} \sigma_{yy'}\xi(y)\xi(y')\big)\rangle_{0,+},$$
$$Z_{\Lambda,+} = \langle \exp(\beta \sum \xi(y)\xi(y')\rangle_{0,+},$$

где $\langle\cdot\rangle_{0,+}$ — сумма по конфигурациям в Λ с $(+)$-граничными условиями.

Их основные свойства таковы.

I (калибровочная инвариантность). Правая часть (7), как и требуется для корректности обозначений, не зависит от выбора $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Действительно, пусть γ_1 деформировано в $\tilde\gamma_1$ при неподвижных концах и A — область между γ_1 и $\tilde\gamma_1$. Сделаем преобразование $\xi(y) \to \xi(y)\varepsilon_A(y)$, где $\varepsilon_A(y) = -1$ при $y \in B$ и 1 в остальных точках. При этом правая часть (7) не изменится: изменение в ξ компенсируется изменением в $\sigma_{yy'}$, зависящем от γ.

II. При достаточно больших $\beta > 0$ термодинамический предел существует. Это следует из низкотемпературного кластерного разложения для модели Изинга, если заметить, что

$$(8) \qquad S_{2n,m}(\vec{x}; \vec{y}) = \langle \xi_\gamma(y_1) \cdots \xi_\gamma(y_m) \exp\beta \sum_{\langle y, y'\rangle^* \in \gamma} (-2\xi(y)\xi(y'))\rangle_+,$$

где $\langle\cdot\rangle_+$ — среднее в модели Изинга в Λ с $(+)$-граничными условиями.

III. $S_{2n,m}$ не являются корреляционными функциями случайного поля, но обладают свойством OS-положительности.

Пусть $\mathcal{F}_+$ — линейное пространство с базисом, состоящим из 1 и значков

$$|x_1, \ldots, x_k;\ y_1, \ldots, y_m\rangle, \quad x_i^0, \ \ y_j^0 > 0.$$

Предскалярное произведение двух базисных векторов определяется как

$$(F, F') = S_{k+k', m+m'}(x_1, \ldots, x_k, \theta x_1', \ldots, \theta x_{k'}';\ y_1, \ldots, y_m, \theta y_1', \ldots, \theta y_{m'}'),$$

если

$$F = |x_1, \ldots, x_k;\ y_1, \ldots, y_m\rangle,$$
$$F' = |x_1', \ldots, x_{k'}';\ y_1', \ldots, y_{m'}'\rangle.$$

Утверждается, что для всех $F \in \mathcal{F}_+$

$$(9) \qquad (F, F) = 0.$$

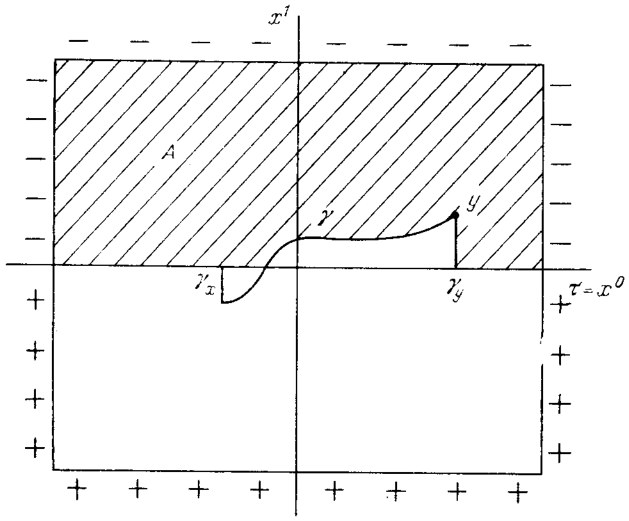
Для простоты рассмотрим случай, когда

$$F = \sum f_x \mid x\rangle,$$

где надо, таким образом, доказать, что

$$\sum_{x,\, y} S_{2,0}(x, y)\bar{f}_{\theta x} f_y \geqslant 0.$$

Рассмотрим рисунок. Перевернем спин в A (выше кривой $\gamma_k \cup \gamma \cup \gamma_y$).



Тогда $S_{2,0}(x, y)$ окажется представленной в виде

$$S_{2,0}(x, y) = \langle F_{\gamma_x} F_{\gamma_y}\rangle_{+-},$$

где, например,

$$F_{\gamma x} = \exp\Big(-2\beta \times \times \sum_{\langle y',\, y''\rangle \in \gamma_x} \xi(y')\,\xi(y'')\Big),$$

$\langle\cdot\rangle_{+-}$ — среднее в модели Изинга в Λ с $(-)$-граничными условиями выше оси x^0 и $(+)$-граничными условиями ниже. Тогда

$$(F, F) = \langle(\theta\Phi)\,\Phi\rangle_{+-} \geqslant 0$$

для $\Phi = \sum_x f_x F_{\gamma_x}$, т. е. сводится к OS-положительности самой модели Изинга.

Свойство (9) позволяет стандартным образом построить физическое гильбертово пространство $\mathscr{H}_{\text{физ}}$ как пополнение факторпространства $\mathscr{F}_+$ по $\mathscr{N} = \{F\colon (F, F) = 0\}$. Определим трансфер-матрицу $\mathscr{T}_\tau$ с матричными элементами

$$(F, \mathscr{T}_\tau F') = \langle(\theta F)\, F'_\tau\rangle,$$

где F'_τ — сдвиг F' на вектор $(\tau, 0)$. Очевидно, $\mathscr{T}_\tau = \mathscr{T}^*_\tau$, $\|\mathscr{T}_\tau\| \leqslant 1$. В случае непрерывного времени определен гамильтониан $H_{\text{физ}}$:

$$e^{-\tau H_{\text{физ}}} = \mathscr{T}_\tau.$$

IV (разбиение на секторы). Пусть $\mathscr{H}_+$ $(\mathscr{H}_s)$ — подпространство $\mathscr{H}_{\text{физ}}$, порожденное всеми $\mid x_1, \ldots, x_k;\ y_1, \ldots, y_m\rangle$ с четными (нечетными) k соответственно. Из того, что $S_{k,m} = 0$ для нечетных k следует, что

$$\mathscr{H}_{\text{физ}} = \mathscr{H}_+ \oplus \mathscr{H}_s. \tag{10}$$

При этом $\hat{1}$ (образ 1 при отображении $\mathscr{F}_+ \to \mathscr{H}_{\text{физ}}$) принадлежит $\mathscr{H}_+$ и называется *вакуумом* (в $(+)$-фазе). $\mathscr{H}_+$ называется *вакуумным сектором*, $\mathscr{H}_s$ — *солитонным*. Заметим, что $\mathscr{H}_+$ совпадает с физическим гильбертовым пространством для модели Изинга с $(+)$-граничными условиями, что следует, если разложить экспоненту в правой части (8). Заметим для дальнейшего, что сдвиг $\mathscr{F}^\tau_+$ пространства $\mathscr{F}_+$ на вектор $(\tau, 0)$, $\tau > 0$, всюду плотен в $\mathscr{H}_{\text{физ}}$. Это особенно ясно для непрерывного времени ввиду свойств непрерывности по τ.

Чтобы увидеть связь между гамильтоновым и евклидовым подходами, надо вместо $(+\ -)$-граничных условий на рисунке рассмотреть $(+)$-граничные условия, но изменить знак взаимодействия на ребрах, пересекающих фиксированную прямую, параллельную оси времени.

V (п о л я). Определим линейные операторы $s(x)$ и $\xi(y)$ в $\mathcal{H}_{\text{физ}}$ для $x^0 > 0$, $y^0 > 0$ следующим образом:

$$(11)\quad \begin{cases} s(x)\,|\,x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_m\rangle = |\,x, x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_m\rangle, \\ \xi(y)\,|\,x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_m\rangle = |\,x_1, \ldots, x_k; y, y_1, \ldots, y_m\rangle, \end{cases}$$

если $x^0 < x_i^0$, $i = 1, \ldots, k$, или $y^0 < y_j^0$, $j = 1, \ldots, m$, соответственно. Для непрерывного времени x^0 и y^0 могут равняться 0 и достаточно определить операторы $\xi(y)$ и $s(x)$ формулами (11) для этого случая.

Надо проверить корректность этого определения, т. е. что

$$s(x)\,N \subset N, \quad \xi(y)\,N \subset N,$$

т. е., например, что

$$\langle(\theta\,(\xi\,(y)\,F))\,\xi\,(y)\,F\rangle = 0, \text{ если } \langle(\theta F)\,F\rangle = 0.$$

Это следует из марковости: пусть, например, $F \in \mathcal{H}_+$; тогда из $\langle(\theta F)\,F\rangle = 0$ следует, что $\mathsf{M}\,(F/\Sigma_\tau) = 0$ для некоторого $\tau \geqslant 0$. Поэтому и $\mathsf{M}\,(\xi\,(y)\,F/\Sigma_\tau) = 0$ для $y^0 \leqslant \tau$.

Остальные случаи аналогичны.

$s(x)$ называется *солитонным полем*, $\xi(y)$ — *полем параметра порядка*. Алгебра $\mathfrak{A}_0$, порожденная всеми $\xi(y)$, $y^0 \geqslant 0$, называется *алгеброй наблюдаемых*; алгебра $\mathfrak{A}$, порожденная $\xi(y)$ и $s(x)$ — *полевой алгеброй*.

По определению

$$s(x)\,\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_s, \quad s(x)\,\mathcal{H}_s \subset \mathcal{H}_+,$$

а ξ оставляет $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_s$ инвариантным. Можно ввести релятивистские поля

$$s(t, x^1) = e^{itH} s\,(0, x^1)\, e^{-itH}$$

и аналогично для ξ.

VI (д у а л ь н а я а л г е б р а). Заметим, что $S_{2n,m}$ симметричны по x и y в отдельности, поэтому

$$(12)\qquad s(x)\,s(\tilde{x}) = s(\tilde{x})\,s(x), \quad \xi(y)\,\xi(\tilde{y}) = \xi(\tilde{y})\,\xi(y).$$

Докажем, что в модели с непрерывным временем, если $x^0 = y^0 = 0$, то

$$(13)\qquad \xi(y)\,s(x) = (-1)^{\theta(x^1-y^1)}\,s(x)\,\xi(y),$$

где $\theta(x^1) = 1$, $x^1 > 0$ и 0 для $x^1 < 0$.

Используем формулу

$$s(x)\,\xi(y)\,|\,x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_m\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} |\,x, x_1, \ldots, x_k; y^{(\varepsilon)}, y_1, \ldots, y_m\rangle,$$

где $x = (0, x^1)$, $y^{(\varepsilon)} = (\varepsilon, y^1)$, $\varepsilon > 0$, и аналогичную формулу для $\xi(y)\,s(x)$.

Докажем, что для всех F и F'

$$(F', s(x)\,\xi(y)\,F) = (-1)^{\theta(y^1-x^1)}\,(F', \xi(y), s(x)\,F),$$

что сводится к доказательству соотношения

$$(14)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} S_{2n,m}(x_1, \ldots, x_{2n-1}, x; y^{(\varepsilon)}, y_2, \ldots, y_m) = \\ = (-1)^{\theta(y^1-x^1)} \lim_{\varepsilon\to 0} S_{2n,m}(x_1, \ldots, x_{2n-1}, x^{(\varepsilon)}; y, y_2, \ldots, y_m)$$

для всех $x_1, \ldots, x_{2n-1}, y_2, \ldots, y_m$. Это следует из определения: удобно выбрать γ состоящим из объединения $n+1$ пути, один из которых ведет из x в $(\infty, 0)$. Тогда правая и левая части (14) отличаются знаком, указывающим различие в знаке $\xi_\gamma(y)$.

VII (ф е р м и-п о л я). Положим для $x^0 = y^0 = 0$

$$\psi(y) = \xi(y)\,s\left(y - \left(0, \frac{1}{2}\right)\right).$$

Заметив, что (13) означает, что $\xi(y)$ коммутирует с $s(x)$, если x лежит по одну сторону от y, и антикоммутирует, если — по другую, мы видим, что

$$\psi(y)\,\psi(x) = -\psi(x)\,\psi(y) \text{ при } x^1 \neq y^1.$$

В то же время

$$\psi^2(x) = \xi(x)\, s\left(x - \left(0, \frac{1}{2}\right)\right) \xi(x)\, s\left(x - \left(0, \frac{1}{2}\right)\right) =$$
$$= (-1)^{\theta\left(-\frac{1}{2}\right)} \xi^2(x)\, s^2\left(x - \left(0, \frac{1}{2}\right)\right) = 1.$$

Иначе говоря, $\psi(x)$ образуют клиффордову алгебру на нулевом временном слое.

VIII (связь с двойственностью). Напомним, что такое двойственность в модели Изинга (см. обзор [25]).

Рассмотрим обобщенную статистическую сумму в $\Lambda \cap \mathbb{Z}^2$ в модели Изинга в (замкнутом) кубе $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ с целочисленными вершинами и пустыми граничными условиями

$$Z_\Lambda(\vec{\beta}) = \sum_\sigma \exp \sum_{\substack{|t-t'|=1 \\ t,\, t' \in \Lambda}} \beta_{tt'} \sigma_t \sigma_{t'}$$

(в обычной статистической сумме $\beta_{tt'} \equiv \beta$). Разложение экспоненты (см. [25]) показывает, что

$$Z_\Lambda(\vec{\beta}) = \prod_{\substack{|t-t'|=1 \\ t,\, t' \in \Lambda}} 2 \operatorname{ch} \beta_{tt'} \sum_\Gamma \prod_{(t,\, t') \in \Gamma} \operatorname{th} \beta_{tt'}; \tag{15}$$

сумма берется по всем подмножествам Γ ребер решетки, лежащих в Λ, таких, что в каждой вершине решетки сходится четное (0, 2, 4) число ребер Γ.

Рассмотрим такую же систему на множестве Λ^* точек решетки $\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, принадлежащих Λ, с (+)-граничными условиями

$$Z_{\Lambda^*}(\vec{\beta}^*) = \sum_\sigma \exp\left(\sum \sigma_t \sigma_{t'} \beta^*_{tt'}\right),$$

где $\sum$ берется по всем соседним точкам решетки $\mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ таким, что хотя бы одна из них принадлежит Λ^*. Каждой конфигурации σ на Λ^* обычным образом сопоставляется «контур» Γ на $\mathbb{Z}^2 \cap \Lambda$. Тогда

$$Z_{\Lambda^*}(\vec{\beta}^*) = \prod_{\substack{|t-t'|=1 \\ t,\, t' \in \Lambda}} \exp(\beta^*_{tt'}) \sum_\Gamma \prod_{(t,\, t') \in \Gamma} \exp(-2\beta^*_{tt'}). \tag{16}$$

Если $\beta_{tt'} \equiv \beta$, $\beta^*_{tt'} \equiv \beta^*$, то при

$$\exp(-2\beta^*) = \operatorname{th} \beta \tag{17}$$

имеем

$$\frac{Z_\Lambda(\beta)}{(2 \operatorname{ch} \beta)^v} = \frac{Z_{\Lambda^*}(\beta^*)}{\exp(\beta^* v)}, \tag{18}$$

где v — число ребер Λ.

Рассмотрим случай, когда β мало, а β^*, определяемое формулой (17), велико. Тогда равенство (18) определяет соответствие между статсуммами в высокотемпературной и низкотемпературной областях.

Первое замечание состоит в том, что существует линейный изоморфизм пространства четных случайных величин (четных полиномов от σ) $\mathfrak{A}_e^\beta$ в высокотемпературной области на пространство всех случайных величин $\mathfrak{A}^{\beta^*}$ в низкотемпературной области. Мы его сейчас построим. Возьмем для этого ребро $\zeta = (t, t') \in \Lambda \cap \mathbb{Z}^2$ и случайную величину

$$f_\zeta = e^{-\beta\sigma_t\sigma_{t'}} \cdot 2\,\mathrm{ch}\,\beta \in \mathfrak{A}_e^\beta$$

и поставим ей в соответствие индикатор $f_\zeta^* \in \mathfrak{A}^{\beta *}$ события, состоящего в том, что через ζ_* не проходит ни один контур Г, умноженный на $\exp \beta^*$.

Тогда из формул (15)—(18), следует, что их средние равны, и аналогично равны средние от произведений таких попарно различных величин

$$\langle f_\Gamma \rangle_\beta = \langle f_\Gamma^* \rangle_{\beta^*},$$

где

$$f_\Gamma = \prod_{\zeta \in \Gamma} f_\zeta, \quad f_\Gamma^* = \prod_{\zeta \in \Gamma} f_\zeta^*$$

для любого множества ребер Г. Функции f_Γ^* линейно независимы и порождают все $\mathfrak{A}^{\beta *}$. Отсюда и следует первое замечание.

Рассмотрим теперь физические гильбертовы пространства $\mathscr{H}^\beta$ и $\mathscr{H}^{\beta *}$, построенные либо с помощью конструкции Остервальдера — Шредера, либо марковским способом, при этом $\mathscr{H}^{\beta *}$ строится по (+)-граничным условиям. Заметим, что $\mathscr{H}^\beta$ разбивается в прямую сумму четных и нечетных элементов:

$$\mathscr{H}^\beta = \mathscr{H}^{\beta, e} \oplus \mathscr{H}^{\beta, 0}.$$

При этом нечетночастичные подпространства в $\mathscr{H}^\beta$ содержатся в нечетной части, а четночастичные — в четной. Конструкцию этих k-частичных подпространств до $k \leqslant N(\beta)$ см. в [67].

Можно легко показать, что из вышеупомянутого построения следует изоморфизм $\mathscr{H}^{\beta *}$ и $\mathscr{H}^{\beta, e}$. Следовательно, в $\mathscr{H}^{\beta *}$ есть только четночастичные подпространства. Вышеприведенная евклидова конструкция $\mathscr{H}_s$ фактически дает изоморфизм $\mathscr{H}^{\beta, 0}$ и $\mathscr{H}_s$ показывая тем самым, что в $\mathscr{H}_s$ есть только нечетночастичные пространства. Действительно, при конструкции Остервальдера — Шредера скалярное произведение двух нечетных полиномов есть среднее от четного полинома, но четные полиномы линейно выражаются через f_Γ. Таким образом скалярные произведения в $\mathscr{H}^{\beta, 0}$ могут быть выражены в терминах средних от f_Γ^* при обратной температуре β^*, что фактически и делалось выше. Заметим, что солитонные функции Швингера могут быть переписаны в контурном виде с несколькими незамкнутыми контурами. Например, двухточечные функции имеют вид

$$S(x_1, x_2) = \frac{\sum\limits_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} Z(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma(x_1, x_2))}{\sum\limits_{\gamma_1', \ldots, \gamma_n'} Z(\gamma_1', \ldots, \gamma_n')},$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и контур $\gamma(x_1, x_2)$, соединяющий x_1, x_2, попарно не пересекаются.

Имеет место, таким образом,

Теорема 1. *$\mathscr{H}_s$ содержит одночастичное пространство и k-частичные пространства для нечетных $k \leqslant N(\beta^*)$. Наоборот, $\mathscr{H}_+$ содержит четночастичные пространства.*

Это следует из описанного выше соответствия с $\mathscr{H}^\beta$ и построения этих подпространств в [67].

ЧАСТЬ III
БОЗОН-ФЕРМИОННОЕ СООТВЕТСТВИЕ

1. Непрерывные аналоги бесконечномерных алгебр Ли. В $V = C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset L_2(\mathbb{R}, dx)$ определим операторы a с ядрами $a(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Операция коммутирования таких операторов дает алгебру Ли $\mathfrak{gl}(\mathbb{R})$ — алгебру Ли группы Ли всех обратимых операторов вида $1 + a$. Операторы с ядром

$a(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R})$, равным нулю при $|x-y| > d = d(a)$ образуют более широкую алгебру Ли $\mathfrak{A}(\mathbb{R})$. Удобно ввести одномерные операторы E_{fg} с ядром $f\bar{g}$. При этом

$$(1) \qquad [E_{fg}, E_{jh}] = (j, g) E_{fh} - (f, h) E_{jg}.$$

Пусть Vect $(\mathbb{R})$ — алгебра Ли комплексных C^∞ векторных полей на $\mathbb{R}: \left\{f(x)\frac{d}{dx},\ f \in C^\infty(\mathbb{R})\right\}$ со скобкой Ли

$$\left[f(x)\frac{d}{dx}, g(x)\frac{d}{dx}\right] = (fg' - f'g)\frac{d}{dx},$$

что для «обобщенных образующих»

$$d_k = i \exp(ikx)\frac{d}{dx}, \qquad k \in \mathbb{R},$$

дает

$$(2) \qquad [d_k, d_{k'}] = (k - k') d_{k+k'}.$$

Введем антилинейную антиинволюцию ω в Vect $\mathbb{R}$ посредством

$$\omega(d_k) = d_{-k}, \quad \omega(\lambda a) = \bar{\lambda}\omega(a),$$

при этом

$$\omega([a, b]) = [\omega(b), \omega(a)].$$

Мы выделим подалгебру $\mathscr{D} \subset$ Vect $(\mathbb{R})$, порожденную $\frac{d}{dx}$ и $f(x)\frac{d}{dx}$ для всех $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Она удобна для рассмотрения представлений в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Такое представление называется унитарным, если для вещественных элементов $a \in \mathscr{D}$ ia самосопряжены в существенном на некоторой области $\mathscr{H}_0$ и переводят $\mathscr{H}_0$ в себя. Заметим, что вещественные элементы инвариантны относительно $-\omega$. Таким образом,

$$(h, ah') = (\omega(a) h, h')$$

для всех $h, h' \in \mathscr{H}_0$, $a \in \mathscr{D}$, т. е. $a^* = \omega(a)$. Заметим, что мы иногда обозначаем одной буквой элементы алгебры и соответствующий оператор представления. Используя эту неоднозначность языка d_0 назовем *оператором энергии*.

Алгебра $\mathscr{D}$ вкладывается в $\mathfrak{A}(\mathbb{R})$ посредством представления

$$(3) \qquad (d_k f)(\lambda) = -(\lambda - k + \alpha + \beta + \beta k) f(\lambda - k).$$

При $\beta + \bar{\beta} = 1$, $\alpha + \beta = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ (3) определяет унитарное представление $\mathscr{D}$ в $L_2(\mathbb{R}, d\lambda)$. Это представление называется $V_{\alpha\beta}$-*представлением* (оно получается действием инфинитезимальных диффеоморфизмов на систему плотностей $z^{x+\alpha}(dz)^\beta$, $x \in \mathbb{R}$).

Еще одним примером является алгебра токов: множество отображений $g(x)$ прямой $\mathbb{R}$ в группу Ли $\mathscr{G}$ с поточечным коммутированием.

Обычно рассматривается подалгебра $\mathfrak{G}'(\mathbb{R})$ алгебры токов с образующими $g(k) \equiv g(k;\ x) = g\cdot e^{ikx}$, $k \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, и соотношениями коммутации

$$[g(k), g'(k')] = [g, g'](k + k').$$

2. Центральные расширения. Непрерывный аналог Vir $(\mathbb{R})$ алгебры Вирасоро есть расширение $\mathscr{D}$ с помощью одномерного центра $\mathbb{C}c$, т. е.

$$\mathrm{Vir}(\mathbb{R}) = \mathscr{D} \oplus \mathbb{C}c,$$

причем коммутационные соотношения для d_0, c и обобщенных образующих имеют вид

$$(4) \qquad \begin{cases} [d_k, d_{k'}] = (k - k') d_{k+k'} + a(k, k') c, \\ [d_k, c] = 0, \end{cases}$$

при этом $a(0, k) = -a(k, 0)$ — обобщенная функция одной переменной, $a(k, k')$ — двух; $a(0, 0) = 0$.

Используем тождество Якоби:

$$0 = [d_0, [d_0, d_k]] + [d_k, [d_0, d_0]] + [d_0, [d_k, d_0]] = [d_0, (-kd_k + a(0, k) c)] + [d_0, (kd_k + a(k, 0) c)] = k^2 d_k - ka(0, k) c - k^2 d_k + ka(0, k) c;$$

имеем

$$a(0, k) = a(k, 0),$$

а из антикоммутативности имеем

$$a(0, k) = -a(k, 0).$$

Отсюда

$$a(k, 0) = a(0, k) = 0. \tag{5}$$

Из тождества Якоби для $d_0, d_k, d_{k'}$ имеем

$$[d_0, [d_k, d_{k'}]] = -(k + k')[d_k, d_{k'}]. \tag{6}$$

Отсюда, подставляя (4) и (5) в (6), имеем

$$(k + k') a(k, k') c = 0.$$

Поэтому

$$[d_k, d_{k'}] = (k - k') d_{k+k'} + \delta(k + k') a(k) c, \tag{7}$$

где

$$a(k) = -a(-k)$$

по антикоммутативности. Тождество Якоби и (7) для d_l, d_m, d_n с $l + m + n = 0$ дают

$$(m - n) a(m + n) - (2n + m) a(m) + (n + 2m) a(n) = 0.$$

Деля на n и переходя к пределу $n \to 0$, имеем (так как $a(0) = 0$)

$$ma'(m) - 3a(m) + 2ma'(0) = 0.$$

Общим решением служит

$$a(m) = \alpha m + \beta m^3.$$

Замена базиса $d_0' = d_0 + {}^1/_2 \alpha c$, $d_k' = d_k$, $k \neq 0$, показывает, что при фиксированном β алгебры $\mathrm{Vir}(\mathbb{R})$ с разным α изоморфны. В частности, при $\beta = 0$ они изоморфны прямой сумме алгебры Ли $\mathscr{D}$ и $\mathbb{C}c$.

Рассмотрим также центральное расширение $\mathfrak{A}(\mathbb{R})$,

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(\mathbb{R}) = \mathfrak{A}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C}c,$$

с соотношением

$$[a, b] = ab - ba + \alpha(a, b) c, \quad a, b \in \mathfrak{A}, \tag{8}$$

где 2-коцикл $\alpha(a, b)$ — 2-линейный кососимметричный функционал, и нужный нам вид указан в следующем параграфе.

Центральным расширением $\mathfrak{G}'$ является алгебра Каца — Муди $\widehat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}' \oplus \mathbb{C}c$ с соотношениями

$$\begin{cases} [g(k), c] = 0, \\ [g(k), h(l)] = [g, h](k + c) + k\delta(k + l)(g, h) c, \end{cases} \tag{9}$$

если на $\mathfrak{G}$ существует инвариантная симметрическая невырожденная билинейная форма $(\cdot, \cdot)$, например, если $\mathfrak{G}$ редуктивна. Проверка тождества Якоби использует

$$(k + l + m)\delta(k + l + m) = 0.$$

Если $\mathfrak{G}$ есть одномерная абелева группа Ли R, мы получаем частный случай алгебры Гейзенберга (алгебра коммутационных соотношений на полупрямой) с обобщенными образующими $b(k)$, $k \in R$,

$$[b(k),\ b(l)] = k\delta(k+l),$$

или для $b(f) = \int f(k)\, b(k)\, dk$,

$$(10) \qquad [b(f),\ b(g)] = \int kf(k)\, g(-k)\, dk$$

с вещественными f и g.

3. Представления в пространстве Дирака. Бозонизация. Пространство Дирака есть фермионное пространство Фока $F = \mathcal{F}_{as}(L_2(\mathbb{R}))$ с выделенным разбиением одночастичного пространства

$$L_2(\mathbb{R}) = L_2(\mathbb{R}_+) \oplus L_2(\mathbb{R}_-) \equiv L_+ \oplus L_-$$

на «частицы» и «дырки». Для любого «заряда» $m \in \mathbb{Z}$ обозначим

$$F^{(m)} = \bigoplus_{k,\, l:\ k-l=m} [L_+^{\otimes k} \otimes L_-^{\otimes l}], \quad F = \bigoplus_{m=-\infty}^{\infty} F^{(m)}.$$

Рассмотрим представление $\mathfrak{gl}(\mathbb{R})$ в F, определенное посредством

$$r_F(E_{fg}) = a^*(f)\, a(g).$$

Это есть представление, так как в соответствии с (1)

$$[a^*(f)\, a(g),\ a^*(j)\, a(h)] = (j,\ g)\, a^*(f)\, a(h) - (f,\ h)\, a^*(j)\, a(g),$$

где мы считаем $a(g)$ антилинейным по g.

Рассмотрим другое представление

$$r_D(E_{fg}) = \begin{cases} a^*(f)\, a(g), & \operatorname{supp} f,\ \operatorname{supp} g \subset \mathbb{R}_+,\\ a(\bar f)\, a^*(\bar g), & \operatorname{supp} f,\ \operatorname{supp} g \subset \mathbb{R}_-,\\ a^*(f)\, a^*(\bar g), & \operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_+,\ \operatorname{supp} g \subset \mathbb{R}_-,\\ a(\bar f)\, a(g), & \operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}_-,\ \operatorname{supp} g \subset \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Это представление получается композицией r_F и представлениям клиффордовой алгебры операторов рождения — уничтожения. Представление r_D сохраняет заряд m и является неприводимым в $F^{(m)}$.

При попытке расширить представление r_D на $\mathfrak{A}$ или $\overline{\mathfrak{A}}$ возникает трудность, что

$$r_D(I) = \int_{\mathbb{R}_+} a^*(k)\, a(k)\, dk + \int_{\mathbb{R}_-} a(k)\, a^*(k)\, dk$$

есть бесконечная константа и мы изменим представление, просто вычтя ее $r(E_{fg}) = r_D(E_{fg}) - (P_-f,\ P_-g)$. Это есть проективное представление $\mathfrak{A}(\mathbb{R})$ или линейное представление алгебры Ли $\overline{\mathfrak{A}}(\mathbb{R})$ с 2-коциклом

$$\alpha(E_{fg},\ E_{jh}) = (P_-f,\ P_-h)(P_+j,\ P_+g) - (P_+f,\ P_+h)(P_-j,\ P_-g).$$

Действительно,

$$[r(E_{fg}),\ r(E_{jh})] = [r_D(E_{fg}),\ r_D(E_{jh})] = (j,\ g)\, r_D(E_{fg}) - (f,\ g)\, r_D(E_{jg}) =$$
$$= r([E_{fg},\ E_{jh}]) + (j,\ g)(P_-f,\ P_-h) - (f,\ g)(P_-j,\ P_-g) \equiv r([E_{fg},\ E_{jh}]) +$$
$$+ \alpha(E_{fg},\ E_{jh}).$$

Рассмотрим теперь операторы сдвига Λ_k в $L_2(\mathbb{R})$ с ядром $a(x,\ y) = \delta(x - y - k)$ и сглаженные $\Lambda_f \in \mathfrak{A}(R)$ с ядром $f(x - y)$. Имеем

$$\alpha(\Lambda_f,\ \Lambda_g) = \int kf(k)\, g(-k)\, dk.$$

Действительно, представляя Λ_f в виде

$$\Lambda_f = \int dk\, da\, f(k)\, E\delta_{k+a}\delta_a, \quad \Lambda_g = \int dk' da' g(k') E\delta_{k'+a'}\delta_{a'},$$

где

$$\delta_{k+a} = \delta(x - k - a), \quad \delta_a = \delta(y - a).$$

Имеем

$$\int fg\alpha\,(E_{\delta_{k+a}\delta_a}, \quad E_{\delta_{k'+a'}\delta_{a'}}) =$$

$$= \int fg\,[(P_-\delta_{k+a}, P_-\delta_{a'})\,(\delta_a, \delta_{k'+a'}) - (P_-\delta_a, P_-\delta_{k'+a'})\,(\delta_{k+a}, \delta_{a'}) =$$

$$= \int\limits_{a'<0} fg\delta(a' - k - a)\,\delta(k' + a' - a) - \int\limits_{a<0} fg\delta\,(k' + a' - a)\,\delta(a' - k - a) =$$

$$= \Big(\int\limits_{a'<0} - \int\limits_{a<0}\Big) f(a' - a)\, g(a - a')\, da\, da' = \int sf(s)\, g(-s)\, ds.$$

Мы получили, что $r(\Lambda_f)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[r(\Lambda_f), r(\Lambda_g)] = \int kf(k)\, g(-k)\, dk,$$

т. е. таким же, как (10), и мы получаем представление алгебры Гейзенберга в фермионном пространстве.

4. Евклидова бозонизация. Она состоит прежде всего в тождественном равенстве корреляционных функций некоторых свободных ферми- и бозе-полей.

Поле Дирака $\psi_\alpha(x)$, $\overline{\psi}_\alpha(x)$, $\alpha = 0, 1$, где точки $x = (x^0, x^1) \in \mathbb{R}^2$ отождествлены с комплексными числами $x = ix^0 + x^1$, как гауссово поле, определяется двухчастичными функциями, ненулевые среди которых равны

$$\langle\overline{\psi}_\alpha(x)\,\psi_\beta(y)\rangle - (i\overline{\partial} + m)_{\alpha\beta} G_m(x - y),$$

где G_m — ядро $(-\Delta + m^2)^{-1}$,

$$\overline{\partial} = \gamma^0\partial^0 + \gamma^1\partial^1 = 2\begin{pmatrix} 0 & \overline{\partial} \\ \partial & 0 \end{pmatrix}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}}.$$

$$\gamma^0 = \sigma_2, \ \gamma^1 = \sigma_1, \ \gamma^5 = \sigma_3.$$

При $m \to 0$

$$\langle\overline{\psi}_1(x)\,\psi_2(y)\rangle = \frac{i}{2\pi}(\overline{x} - \overline{y})^{-1} = -\overline{\langle\overline{\psi}_2(x)\,\psi_1(y)\rangle}. \tag{11}$$

С другой стороны, рассмотрим скалярное случайное гауссово поле χ с нулевой массой на $\mathbb{R}^2$, определенное на функциях $f \in S(\mathbb{R}^2)$ с нулевым интегралом, производящим функционалом

$$\int e^{(\chi, f)} d\mu_0(\chi) = \langle e^{(\chi, f)}\rangle_0 = \exp(2\pi(f, \Delta^{-1}f)) \tag{12}$$

(на остальных функциях (12) можно положить равным нулю). Тогда утверждается, что

$$:e^{i\chi}:(x) \stackrel{\text{def}}{=} :e^{(\chi,\, \delta_x)}:_{m_0} \stackrel{\text{def}}{=} e^{(\chi,\, \delta_x)}\, e^{2\pi(\delta_x,\, (-\Delta+m_0^2)^{-1}\delta_x)}$$

для некоторого m_0 можно отождествить с $\overline{\psi}_1(x)\,\psi_1(x)$, а $:e^{-i\chi}:(x)$ с $\overline{\psi}_2(x)\,\psi_2(x)$ в том смысле, что равны все их корреляционные функции, т. е.

$$\Big\langle \prod_{j=1}^{n} :e^{i\chi}:(x_j) : e^{-i\chi}:(y_j)\Big\rangle = \Big\langle \prod \overline{\psi}_1(x_i)\,\psi_1(x_i) \prod \overline{\psi}_2(y_i)\,\psi_2(y_i)\Big\rangle.$$

Это — элементарный подсчет с использованием

$$\Big\langle \prod_{j=1}^{n} :e^{i\varepsilon_j\chi}:(x_j)\Big\rangle = \prod_{j=1}^{n} c(m_0)^{\varepsilon_j^2} \exp\Big[-2 \sum_{1\le i<j\le n} \varepsilon_i\varepsilon_j \ln \frac{1}{|x_i - x_j|}\Big]$$

при $\Sigma\varepsilon_j = 0$, и формулы Коши

$$\frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)(y_j-y_i)}{\prod\limits_{i,\,j=1}^{n}(x_i-y_j)} = \det\frac{1}{x_i-y_j} \tag{13}$$

(m_0 выбирается из условия $c(m_0)=\frac{1}{2\pi}$). Однако сами ферми-поля $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\overline{\psi}_1(x)$, $\overline{\psi}_2(x)$ отождествляются с полями

$$:e^{\pm i\chi/2}:(x)\cdot D(2\pi,\,x);\quad :e^{\pm i\chi/2}:(x)\cdot D(-2\pi,\,x).$$

соответственно, где «поля беспорядка» определяются своими «корреляционными функциями»:

фиксируем наборы $w=(w_1,\ldots,w_k)$ точек $\mathbb{R}^2$ и вещественных чисел $\Phi=(\Phi_1=\Phi_{w_1},\ldots,\Phi_k=\Phi_{w_k})$, $\sum\Phi_i=0$, и полагаем для произвольного функционала от χ

$$\left\langle\prod_{i=1}^{k}D(\Phi_i,w_i)\cdot F(\chi)\right\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \int F(\chi)\,d\mu_{\Phi,\,w}(\chi), \tag{14}$$

где $d\mu_{\Phi,\,w}$ — новая гауссова мера, которую мы сейчас определим. Для этого рассмотрим одномерное расслоение над $M=\mathbb{R}\setminus\{w_1,\ldots,w_k\}$ со слоем $\mathbb{R}$ и аддитивным действием группы R на нем. Сечения этого расслоения можно отождествить с функциями на универсальной накрывающей $\widetilde{M}$, $\pi\colon\widetilde{M}\to M$ — соответствующая проекция, при этом значения функций на $\widetilde{M}$ в точках x и y таких, что $\pi(x)=\pi(y)$, удовлетворяют

$$\alpha(x)-\alpha(y)=\sum_{i=1}^{k}\Phi_i n(\pi\omega,w_i),$$

где ω — кривая на $\widetilde{M}$, соединяющая x и y, а $n(\pi\omega,\,w_i)$ — число вращения ее проекции относительно w_i. Фиксируем одно такое сечение

$$\alpha_0(x)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\Phi_i}{2\pi}\varphi(x,w_i),$$

где $\varphi(x,\,w_i)$ — угол между лучом из x, проходящим через w_i и лучом из x в положительном направлении оси Ox^1. Тогда произвольное сечение α имеет вид

$$\alpha=\alpha_0+\chi,$$

где χ — однозначная функция на M.

Ковариантная производная ∇ при этом может быть отождествлена с обычной производной на $\widetilde{M}$. Введем «плоскую» связность

$$A=\nabla\alpha,$$

которую можно рассматривать как 1-ток на $\mathbb{R}^2$ (1-форму с коэффициентами в обобщенных функциях). Ее кривизна равна

$$F=\nabla A=\sum_{i=1}^{k}\Phi_i\delta(x-w_i)\,dx^0\wedge dx^1.$$

Формально мера $d\mu_{\Phi,\,w}$ определяется действием

$$\frac{1}{8\pi}\int(\nabla\chi+A)^2\,d^2x$$

со связностью A в качестве внешнего калибровочного поля. Иначе говоря, формально

$$\int e^{i(\chi,f)} d\mu_{\Phi,w}(\chi) = \int d\mu_0(\chi)\, e^{-\frac{1}{4\pi}(\nabla\chi, A) - \frac{1}{8\pi}(A,A)} e^{i(\chi,f)}.$$

Но A гармонична, поэтому $(\nabla\chi, A) = 0$, если χ однозначна на M. Мы заменяем логарифмически расходящееся выражение

$$(A, A) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j=1}^{k} \Phi_i \Phi_j \ln \frac{1}{|w_i - m_j|}$$

на

$$(A, A)_{\mathrm{ren}} = \frac{1}{2\pi} U(\Phi, w) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j} \Phi_i \Phi_j \ln \frac{1}{|w_i - w_j|}$$

и, таким образом, определяем

$$\int e^{i(\chi,f)} d\mu_{\Phi,w}(\chi) = e^{-\frac{1}{8\pi}(A,A)_{\mathrm{ren}}} e^{2\pi(f, \Delta^{-1} f)}.$$

Таким образом, правая часть (14) для $F(\chi) = e^{i(\chi,f)}$ равна 0, если $\hat f(0) \neq 0$, а при $\hat f(0) = 0$ равна $\exp\left[-\frac{1}{16\pi^2} U(\Phi, w)\right] \exp[2\pi(f, \Delta^{-1} f)]$.

Рассмотрим теперь случай

$$w = (x, y), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n),$$
$$\Phi_{x_i} = 2\pi, \quad \Phi_{y_j} = -2\pi,$$

причем

$$x_1^0 < \ldots < x_n^0 < y_n^0 < \ldots < y_1^0.$$

Заметив, что при нашем выборе φ, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \pm \pi$, где $(+)$ соответствует $y^0 > x^0$, а $(-)$ соответствует $y^0 < x^0$, в точности так же, как выше, с использованием (13) можно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi)^{-n/2} \left\langle \prod_{j=1}^{n} [:e^{i\chi/2}: (x_j + \varepsilon) D(2\pi, x_j) : e^{-i\chi/2} : (y_j + \varepsilon) D(-2\pi, y_j)\right\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=}$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \left\langle \prod_{j=1}^{n} :e^{i\chi/2}: (x_j) D(2\pi, x_j) : e^{-i\chi/2} : (y_j) D(-2\pi, y_j)\right\rangle =$$
$$= \left(-\frac{i}{2\pi}\right)^n \det \frac{1}{x_i - y_j} = \left\langle \prod_{j=1}^{n} \psi_1(x_j) \bar\psi_2(y_j) \right\rangle$$

(ε — сдвиг по оси Ox^0).

Любая пара среди полей ψ, $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-)$, $\mu = \frac{1}{2}(\mu^+ + \mu^-)$, где $\sigma^\pm(x) = {:}e^{\pm i\chi/2}{:}\,(x)$, $\mu^\pm(x) = D(\pm 2\pi, x)$ удовлетворяет дуальной алгебре, аналогичной описанной выше для модели Изинга. На этом пути получается явный вид корреляционных функций в критической модели Изинга. Этот формализм переносится на произвольную риманову поверхность. Кроме того, он позволяет дать евклидову трактовку модели Тирринга (см. все это в [38]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Jaffe A., Lesniewski A., Lewenstein M. Ground state structure in supersymmetric quantum mechanics // Ann. Phys.— 1987.— V. 178.— P. 313—329.
[2] Jaffe A., Lesniewski A. Supersymmetric quantum fields and infinite dimensional analysis.— Preprint / Harvard University, December 29, 1987. HUTMP B210.
[3] Borisov N. Y., Müller W., Schrader R. Relative index theorems and supersymmetric scattering theory // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 114.— P. 475—513.

[4] J a f f e A., L e s n i e w s k i A., O s t e r w a l d e r K. On super-KMS-functionals and entire cyclic cohomology.— Harvard University, HUTM Preprint / HUTMP 88/B229.
[5] J a f f e A., L e s n i e w s k i A. Geometry of supersymmetry.— Preprint / Harvard University, July 17, 1989. HUTMP 89/B243.
[6] P e d e r s e n G. C^*-algebras and their automorphism groups.— New York: Academic Press, 1979.
[7] J a f f e A., L e s n i e w s k i A. An index theorem for super derivations.—Preprint/ Harvard University, 1989. HUTMP 89/B236.
[8] J a f f e A. Heat kernel requalization and infinite dimensional analysis // Mathematical quantum field theory and related topics // Canadian Mathematical Proceedings.— V. 9, Joel S. Feldman and M. Lon.
[9] J a f f e A., L e s n i e w s k i A., W e i t m a n J. Index of a family of Dirac operators on loop space // Commun. Math. Phys.— 1987.— V. 112.— P. 75—88.
[10] J a f f e A., L e s n i e w s k i A., W e i t m a n J. The two — dimensional, Wess — Zumino model on a cylinder // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 114.— P. 147—165.
[11] J a f f e A., L e s n i e w s k i A. A priori estimates for $N = 2$ Wess — Zumino models on a cylinder // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 114.— P. 553—575.
[12] J a f f e A., L e s n i e w s k i A., W i e c z e r k o w s k i Ch. The Special condition on a cylinder.— Preprint / Harvard University, 1988. HUTMP 88/B223.
[13] J a f f e A., L e s n i e w s k i A., W e i t m a n J. The loop space $S^1 \to \mathbb{R}$ and supersymmetric quantum fields // Annals of Phys.— 1988.— V. 183.— P. 337—351.
[14] S e i l e r E., Schwinger functions for the Yukawa Model in Two — Dimensions with Space — Time Cutoff // Commun. Math. Phys.— 1975.— V. 42.— P. 163—182.
[15] J a f f e A., L e s n i e w s k i A., W e i t m a n J. Pfaffians on Hilbert space // J. Funct. Anal.— 1989.— V. 83.— P. 348—363.
[16] C o n n e s A. Noncommutative differential geometry // Publ. Math. IHES.— 1985.— V. 62.— P. 257—360.
[17] C o n n e s A. Cyclic cohomology of Banach algebras and characters of θ-summable Fredholm modules // K-theory.— 1988.— V. 1. P. 519—548.
[18] J a f f e A., L e s n i e w s k i A., W i s n i o w s k i M. Deformation of super — KMS functionals // Commun. Math. Phys.— 1989.— V. 121.— P. 527—540.
[19] J a f f e A., L e s n i e w s k i A., O s t e r w a l d e r K. Quantum K-theory I. The Chern character // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 118. P. 1—14.
[20] E r n s t K., F e n g P., J a f f e A., L e s n i e w s k i A. Quantum K-theory II. Homotopy invariance of the Chern character // J. Funct. Anal. (to appear).
[21] М а л ы ш е в В. А., М и н л о с Р. А. Гиббсовские случайные поля.— М.: Наука.— 1985.— 288 с.
[22] J a f f e A., L e s n i e s k i A., W i e c z e r k o w s k i Ch. A priori Quantum Field Equations.— Preprint / Harvard University, 1988.— HUTMP B228.
[23] М а л ы ш е в В. А. Солитонные секторы в решетчатых моделях с непрерывным временем // Функцион. анализ и его прил.— 1979.— Т. 13, № 1.— С. 31—41.
[24] Р ю э л л ь Д. Статистическая механика.— М.: Мир, 1974.— 368 с.
[25] М а л ы ш е в В. А., П е т р о в а Е. Н. Преобразования двойственности гиббсовских случайных полей // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: ВИНИТИ, 1981.— Т. 18.— С. 3—51.
[26] C o n n e s A. The action functional in non commutative geometry // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 117.— P. 673—683.
[27] G e t z l e r E. The degree of the Nicolai map in Supersymmetric quantum mechanics // J. Funct. Anal.— 1987.— V. 73.— P. 00.
[28] G e t z l e r E., S z e n e s A. On the Chern character of thetasummable Fredholm modules // J. Funct. Anal.— 0000.— V. 00.— P. 00.
[29] М а н и н Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия.— М.: Наука, 1984.— 335 с.
[30] B a t t l e G u y. A block spin construction of ondelettes. Part II: the QFT connection // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 114.— P. 93—102.

[31] Balaban Tadeusz, Imbrie John Z., Jaffe A. Effective Action and Cluster Properties of the Abelian Higgs Model // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 114.— P. 257—315.
[32] Federbush P. A Phase cell approach to Yan — Mills theory. I. Modes, lattice — continuum diality // Comm. Math. Phys.— 1986.— V. 107.— P. 319—329.
[33] Federbush P., Williamson C. A phase cell approach to Yang — Mills theory. II. Analysis of a mode // J. Math. Phys.— 1987. —V. 28.— P. 1416—1419.
[34] Federbush P. A phase cell approach to Yang — Mills theory. III. Local stability, modified renormalization group transformation // Commun. Math. Phys.— 1987.— V. 110.— P. 293—309.
[35] Federbush Paul. A Phase Cell Approach to Yang — Mills Theory; IV The Choice of Variables // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 144.— P. 317—343.
[36] Federbush P. A phase cell approach to Yang — Mills theory; VI. Non-abelian lattice-continuum diality // Ann. l'Inst. Henri Pointcare.— 1987.— V. 47.— P. 17—23.
[37] Marchetti P. A. Solitons in $P(\varphi)_2$ models // Europhys. Lett.— 1987.— V. 4.— P. 663.
[38] Fröhlich J., Marchetti P. A. Bosonization, Topological Solitons and Fractional Charges in Two-dimensional Quantum Field Theory // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 116.— P. 127.
[39] Fröhlich J., Marchetti P. A. Quantum Field Theory of Anyons.— Preprint.— 1988.— P. 1—24.
[40] Fröhlich J., Marchetti P. A. Soliton Quantization in Lattice Field Theories // Commun. Math. Phys.— 1987.— V. 112.— P. 343—383.
[41] Felder G., Gawedzki K., Kupiainen A. Spectra of Wess — Zumino — Witten models with arbitrary simple groups // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 117.— P. 127—158.
[42] Fröhlich J., King C. The Chern — Simons theory and knot polynomials.— Preprint ETH — TH/89—10.
[43] Fröhlich J., King C. Two-dimensional Conformal field Theory and Three-dimensional Topology.— Preprint — di ETH — TH/89—9.
[44] Gawedzki K., Kupiainen A. Coset Construction from Functional Integrals.— Preprint IHES/P/88/45.
[45] Fröhlich J. Statistics and Monodromy in two-and threedimensional Quantum field theory.— In «Differential Geometrical Methods in Theoretical Physics», Kluwer Academic Press, 1988.
[46] Alvarez Gaume L., Gomez C., Moore G., Vafa C. Strings in the operator Formalism.— Preprint/12/87.— P. 1—78.
[47] Gawedzky K. Wess — Zumino — Witten conformal field theory,— Preprint/IHES/P/89/06.
[48] Felder G., Gawedzki K., Kupiainen A. The spectrum of Wess — Zumino — Witten models // Nucl. Phys.— 1988.— Bd 299.— S. 355—366.
[49] Gawedzki K. Conformal field theory.— Preprint IHES/P/88/56 (to appear in Asterisque).
[50] Segal G. The definitions of conformal field theory // Links between Geometry and Mathematical Physics.— Swansea.— 1988.— P. 13—17.
[51] Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Paycha S., Scarlatti S. A global and stochastic analysis approach to bosonic strings and associated quantum fields // Preprint. Bochum Univ. 1989.
[52] Fröhlich J., Gabbiani F., Marchetti P. A. Superselection structure and statistics in three-dimensional local quantum theory.— Preprint ETH — TH/89—22.
[53] Хепп К. Теория перенормировок.— М.: Наука, 1974.— 254 с.
[54] Felder G., Fröhlich J., Keller G. On the structure of unitary conformal field theory. II // Representation theoretic approach (To appear in Commun. Math. Phys.)

[55] Felder G., Fröhlich J., Keller G. On the structure of unitary conformal field theory. I // Commun. Math. Phys.— 1989.— V. 124.— P. 417.

[56] Fröhlich J., Gabbiani F., Marchetti P. A. Braid statistics in three — dimensional local quantum theory.— Preprint ETH — TH/89—36.

[57] Fröhlich J. Statistics of fields, the Yang — Baxter equation and the theory of knots and links.— In «Nonperturbative Quantum Field Theory». N. Y.: Plenum, 1988.

[58] Fröhlich J., Marchetti P. A. Quantum skyrmions.— Preprint DFPD/89/TH/34.

[59] Balaban T. Convergent renormalization expansions for lattice gauge theories // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 119, № 2.— P. 243—286.

[60] Marchetti P. A. Particle structure analysis of soliton sectors in massive lattice field theoreies // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 117, № 3.— P. 501—528.

[61] Kac V. G., Raina A. K. Bombay Lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras // Advanced Series in Mathematical Physiss.— 1987.— V. 2. (World Scientific).

[62] Kac V. G. Infinite dimensional Lie algebras.— Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[63] Witten E. Non-abelian bosonization in two-dimensions // Commun. Math. Phys.— 1984.— V. 92.— P. 455—477.

[64] Vafa C. Conformal algebra of Riemann surfaces.— Preprint HUTP — 88/A053.

[65] Vafa C. Conformal theories and punctured surfaces // Phys. Lett.— 1987.— B 199.— P. 195—202.

[66] Vafa C. Operator formalism on Riemann surface // Phys. Lett.— 1987.— B 190.— P. 47—54.

[67] Malyshev V. A., Minlos R. A. Invariant Subspaces of Clustering Operators. II // Commun. Math. Phys.— 1981.— V. 82.— P. 211—226.

[68] Fröhlich J., Marchetti P. A. Quantum Field Theories of Vortices and Anyons // Commun. Math. Phys.— 1989.— V. 121, № 2.— P. 177—224.

[69] Periwal V. The Renormalization Flow, Spaces of Two-Dimensional Field Theories, and Connes Geometry // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 120, № 1.— P. 71—96.

[70] Wieczerkowski C. Symanzik's Improved Actions from the Viewpoint of the Renormalization Group // Commun. Math. Phys.— 1988.— V. 120, № 1.— P. 149—176.

[71] Balaban T., O'Carroll M., Schor R. Block renormalization group for Euclidean fermions // Commun. Math. Phys.— 1989.— V. 122, № 2.— P. 233—248.

[72] Balaban T. Large field renormalization. I. The basic step of the R-operation // Commun. Math. Phys.— 1989.— V. 122, № 3.— P. 175—202.

[73] Balaban T. Large Field Renormalization. II. Localization, Exponential and Bounds for the R-Operation // Commun. Math. Phys.— 1989.— V. 112, № 3.— P. 355—392.

[74] Nicolo F., Perfetti P. The Sine — Gordon field theory model at $\alpha^2 = 8\pi$, the nonsuperrenormalizable theory // Commun. Math. Phys.— 1989.— V. 123, № 3.— P. 425—452.

[75] Cassandro M., Nicolo F., Scoppola B. The ($N = 1$) supersymmetric Sine — Gordon model in two dimensions. II // Commun. Math. Phys.— 1989.— V. 112, № 4.— P. 681—702.

[76] Mittler P. K., Ramadas The two-dimensional O (N) nonlinear σ-model renormalization and effective actions // Commun. Math. Phys.— 1989.— V. 122, № 4.— P. 575—598.

[77] Katsura T., Shimiru Y., Yeno K. New Bosonization and conformal field theory over Z // Commun. Math. Phys.— 1989. V. 121, № 4.— P. 603—628.

[78] Kastler D. Cyclic cocycles from graded KMS functionals // Commun. Math. Phys.— 1989.— V. 121.— P. 345—350.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
25 апреля 1990 г.