ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

1967

т. 177, № 2

Доклады Академии наук СССР
1967. Том 177, № 2

УДК 518.61

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. А. МАЛЫШЕВ

ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛИНИЙ БЕЗ ПОТЕРЬ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 I 1967)

Различные модификации определения сложности реализации дискретных функций кибернетическими управляющими системами хорошо известны. Однако вопрос о сложности некоторых кибернетических методов решения практических задач не укладывается в разработанные схемы. Так, на практике часто применяется метод электрического моделирования ([2], [4]). В данной заметке задача оценки сложности электрического моделирования формулируется как задача о приближении некоторым классом рациональных функций. Получены оценки сложности сверху и снизу.

1. Сложность электрических цепей с сосредоточенными параметрами. Под пассивной электрической цепью (A, φ) с сосредоточенными параметрами будем понимать связный неразделимый граф A вместе с функцией φ, сопоставляющей каждой паре ребер (b_i, b_j) этого графа число L_{ij}, $i \neq j$, а каждому ребру b_i — три числа $L_i, C_i, R_i \geqslant 0$ ([1]). Будем говорить о цепи без потерь, если все R_i равны нулю. Сложностью $S(A, \varphi)$ цепи (A, φ) будем называть общее количество чисел L_{ij}, L_i, C_i, R_i, отличных от нуля.

Для любого целого $n \geqslant 0$ введем класс W_n рациональных функций вида:

$$Z(\omega) = k_\infty p + \frac{k_0}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i p}{p^2 + \omega_i^2}, \quad p = i\omega,$$

$$k_0,\ k_\infty \geqslant 0, \quad k_i,\ \omega_i > 0.$$

Пусть $W = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} W_n$. Если $Z \in W_n$, то положим $\nu(Z) = n$.

Известно, что каждому двухполюснику (цепь с двумя выделенными вершинами — полюсами) (A, φ) однозначно ставится в соответствие (будем обозначать это соответствие Φ) некоторая функция из класса W; $\Phi(A, \varphi) = Z(A, \varphi)$ — его входное сопротивление. При этом для любой функции $Z(\omega)$ из класса W_n существует двухполюсник (A, φ) такой, что $\Phi(A, \varphi) = Z(\omega)$ и что (A, φ) имеет число связности, равное $n+1$, $n+2$ ребра и сложность, не бо́льшую $2n+2$.

Лемма 1. *Если N — число связности двухполюсника и $\tilde{n}$ — число его ребер, то $\nu(A, \varphi) \leqslant N \leqslant \tilde{n} \leqslant S(A, \varphi)$. Отсюда*

$$\nu(A, \varphi) \leqslant S(A, \varphi) \leqslant 2\nu(A, \varphi) + 2,$$
$$S(A, \varphi)/2 - 1 \leqslant \nu(A, \varphi) \leqslant S(A, \varphi). \tag{1}$$

2. Класс функций $\tilde{W}$. Пусть на интервале $[0, l]$ вещественной оси задана система дифференциальных уравнений относительно функций $U(x)$ и $I(x)$

$$U'(x) = -i\omega L(x) I(x), \quad I'(x) = -i\omega C(x) U(x), \tag{2}$$

где ω — произвольное комплексное число (частота). Функции $L(x)$ и $C(x)$ будем предполагать далее дважды непрерывно дифференцируемыми и строго положительными на $[0, l]$ (такие функции будем называть допустимыми).

Если граничное условие на конце $x = l$ задается в одном из следующих видов: 1) $I(l) = 0$; 2) $U(l) = 0$; 3) $U(l) = Z(\omega)I(l)$, $Z(\omega) \in W$, то для системы (2) однозначно определена функция $\tilde{Z}(\omega) = U(0)/I(0)$. Будем обозначать ее также $\tilde{W}^i(l, C(x), L(x), \omega)$, $i = 1, 2, 3$.

Класс всевозможных функций $\tilde{W}^i(l, C(x), L(x), \omega)$ для системы (2) при произвольных допустимых $L(x)$ и $C(x)$, произвольном l и граничном условии i) обозначим $\tilde{W}^i$. Пусть $\tilde{W}_0{}^i$ — класс функций $\tilde{Z}(\omega)$, получающихся из систем (2) с граничным условием i) и если $L(x) = \text{const}$, $C(x) = \text{const}$. Положим $\tilde{W} = \bigcup\limits_{i=1}^{3} \tilde{W}^i$.

Как известно ([3]), класс функций $\tilde{W}$ соответствует входным сопротивлениям неоднородных электрических линий с распределенными параметрами, ток $I(x)$ и напряжение $U(x)$ которых в установившемся режиме связаны уравнениями (2). Во многих случаях достаточно под моделированием линии с распределенными параметрами понимать приближение ее входного сопротивления функциями из класса W.

3. Сложность моделирования электрических линий с распределенными параметрами. Положим

$$\rho^1_{a,b}(\tilde{Z}, Z) = \max_{\omega\in[a,b]} |\tilde{Z}(\omega) - Z(\omega)|,$$

$$\rho^2_{a,b}(\tilde{Z}, Z) = \left(\int\limits_b^a |\tilde{Z}(\omega) - Z(\omega)|\, d\omega\right)^{1/2}.$$

Лемма 2. *Замыкание класса W в метрике ρ^i, $i = 1, 2$, содержит класс $\tilde{W}$.*

Сложностью $S^i_{a,b}(\tilde{Z}, \varepsilon, V)$ ε-моделирования на интервале $[a, b]$ в метрике ρ^i функции $\tilde{Z}(\omega) \in \tilde{W}$ будем называть минимум сложностей всевозможных цепей (A, φ) с сосредоточенными параметрами таких, что

$$\rho^i_{a,b}(\tilde{Z}(\omega), Z(A, \varphi)) \leqslant \varepsilon, \quad Z(A, \varphi) \in V \subset W. \tag{3}$$

Имея в виду формулы (1), введем $\nu^i_{a,b}(\tilde{Z}, \varepsilon, V) = \min \nu(A, \varphi)$ по всем цепям (A, φ) таким, что имеет место (3). Эту величину в дальнейшем и будем оценивать. Заметим, что

$$\rho^i_{a,b}(\tilde{Z}, W_{\nu^i_{a,b}(\tilde{Z}, \varepsilon, V)}) \leqslant \varepsilon,$$

но $\rho^i_{a,b}(\tilde{Z}, W_n) > \varepsilon$ при $n < \nu^i_{a,b}(\tilde{Z}, \varepsilon, V)$. Для нас будет представлять интерес задача о поведении $\nu^i(Z, \varepsilon, W)$ для конкретных функций $\tilde{Z}(\omega)$ при $\varepsilon \to 0$.

4. Оценки сверху. В давно известном и широко применяемом методе моделирования однородных линий (имеющих входными сопротивлениями функций из класса $\tilde{W}_0$) применяются функции $\tilde{Z}(\omega)$, заданные в виде непрерывной дроби специального вида:

$$Z_n = Z_{n,1} = i\omega L' + \frac{1}{i\omega C' + 1/Z_{n,2}}, \quad Z_{n,2} = i\omega L' + \frac{1}{i\omega C' + 1/Z_{n,3}}, \ldots$$

$$\ldots\ Z_{n,n} = i\omega L' + \frac{1}{i\omega C'},$$

где $L' = \text{const}$, $C' = \text{const}$. Класс таких функций обозначим V_0. Нетрудно убедиться в том, что $Z_n \in W_n$.

Лемма 3. *Если* $\tilde{Z} \in \tilde{W}_0^2$, *то*

$$\nu^1_{0,\,\omega_0}(\tilde{Z}, \varepsilon, V_0) \sim C_1/\varepsilon^{1/2}, \text{ где } C_1 = \omega_0 l\,[L^{3/2}C^{1/2}\,\mathrm{tg}\,(\omega_0 l\,(LC)^{1/2})]^{1/2}.$$

Дальнейшие результаты показывают, что сложность ε-моделирования во всем классе W значительно ниже.

Теорема 1. *Если* $\tilde{Z} \in \tilde{W}_0^1$, *то для любого* k *такого, что* $k \geqslant 4\omega_0 l(LC)^{1/2}/\pi$ *имеет место*

$$\nu^1_{0,\,\omega_0}(\tilde{Z}, \varepsilon, W) \leqslant k - 2 + \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} + \log_2\left(\frac{2\omega_0 k}{\pi^2}\right)\left(\frac{L}{C}\right)^{1/2}\right] \Big/ 2\log\left(\frac{k\pi}{2l\omega_0\,(LC)^{1/2}}\right).$$

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1

$$\nu^1_{0,\,\omega_0}(\tilde{Z}, \varepsilon, W) \leqslant \frac{4\omega_0 l\,(LC)^{1/2}}{\pi} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\log_2\frac{l\omega_0 L}{\pi^3}.$$

Следствие 2. *В условиях теоремы* 1

$$\nu^1_{0,\,\omega_0}(\tilde{Z}, \varepsilon, W) \lesssim {}^1/_2 \log\frac{1}{\varepsilon} \Big/ \log\log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Для общего случая неоднородных линий также имеют место аналогичные результаты, например

Теорема 2. *Пусть* $\tilde{Z}(\omega) \in \tilde{W}^1$. *В связи с уравнениями* (2) *обозначим*

$$\tau(x) = \int_0^x [L(\xi)C(\xi)]^{1/2}d\xi,\; W(\tau) \leqslant \left[\frac{L(x)}{C(x)}\right]^{1/2},$$

$$\psi(\tau) = \left(\frac{W'}{2W}\right)^2 + \left(\frac{W'}{2W}\right)',\quad b = \int_0^{\tau(l)} |\psi(t)|\,dt.$$

Пусть $\tilde{I}_1(\tau)$ *—решение уравнения* $\tilde{I}''(\tau) = \psi(\tau)I(\tau)$ *с начальными условиями* $\tilde{I}_1(0) = 0$, $\tilde{I}_1'(0) = 1$. *Тогда при любом* k *таком, что* $k \geqslant 4\omega_0\tau(l)/\pi$, *и таком, что при любом* $n > k$ *имеет место*

$$1 \geqslant \frac{9b^2\tau^2(l)}{2n^2\pi^2} + \frac{2+3b}{n\pi} + \frac{(2b+5b^2)\,\tau(l)}{n\pi} +$$

$$+ 2\left|\int_0^{\tau(l)} \psi(t)\cos\frac{n\pi t}{\tau(l)}\cos\left[n\pi\left(1 - \frac{\tau}{\tau(l)}\right)\right]\left(1 - \frac{t}{\tau(l)}\right)dt\right|,$$

имеет место

$$\nu^1_{0,\,\omega_0}(\tilde{Z}, \varepsilon, W) \leqslant k - 2 + \left\{\log_2\frac{1}{\varepsilon} - \log\left(1 - \frac{\omega_0^2\tau^2(l)}{\pi^2(k + {}^1/_2)^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \log\left[\frac{6\omega_0(k - {}^1/_2)\,\tau(l)}{\pi\tilde{I}_1(\tau(l))}\left(\frac{L(0)}{C(0)}\right)^{1/2}\right]\right\} \Big/ \left\{2\log_2\frac{\pi(k + {}^1/_2)}{2\omega_0\tau(l)}\right\}.$$

5. Оценки снизу. Следующие результаты показывают, что оценки сверху п. 4 по порядку не могут быть улучшены.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *имеет место*

$$\nu^1_{0,\,\omega_0}(\tilde{Z}, \varepsilon, W) \gtrsim C\log\frac{1}{\varepsilon} \Big/ \log\log\frac{1}{\varepsilon}, \text{ где } C = 1/2e^{2\pi}.$$

Теорема 4. *Для произвольной функции* $\tilde{Z}(\omega) \in \tilde{W}$ *имеет место*

$$\nu^i_{a,b}(\tilde{Z}, \varepsilon, W) \asymp \log\frac{1}{\varepsilon} \Big/ \log\log\frac{1}{\varepsilon},\quad i = 1, 2.$$

6. Совершенно аналогичные результаты могут быть получены для других граничных условий, для цепочки линий с распределенными параметрами и включенными нагрузками, для моделирования четырехполюсников и т. д.

Поступило
23 I 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Кудрявцев, УМН, 3, 4 (1948). [2] В. А. Веников, Теория подобия и моделирования, 1966. [3] О. Н. Литвиненко, В. И. Сошников, Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике, 1964. [4] Л. И. Гутенмахер, Электрические модели, 1949.