1970 5

Кибернетика

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

В. А. МАЛЫШЕВ

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ КЛАССОВ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. I

УДК 519.8

В настоящей работе изложены некоторые вопросы подхода к исследованию методов случайного поиска при решении экстремальных задач, позволяющему оценивать эффективность такого поиска. Доказывается, что для «почти всех» задач данного класса распределение целевой функции хорошо приближается классическими распределениями теории вероятностей. Получен аналог центральной предельной теоремы теории вероятностей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть дан полный неупорядоченный граф $\mathfrak{A}$, состоящий из n_α вершин $a_1, \ldots, a_{n_\alpha}$, называемых *гнездами*, и $m_\alpha = C^2_{n_\alpha}$ ребер (a_i, a_j); $i < j$; $i, j = 1, \ldots, n_\alpha$. Множество этих ребер будем считать пронумерованным некоторым образом: $A_1, A_2, \ldots, A_{m_\alpha}$. Каждому ребру $A_k = (a_i, a_j)$ приписывается некоторое положительное число $g_{ij} = g(a_i, a_j) = g(A_k)$, называемое *длиной* (или весом) данного ребра. Можно, например, считать вершины графа расположенными в некотором метрическом пространстве.

Задан также второй граф $\mathfrak{B}$ с $n_\beta \leqslant n_\alpha$ вершинами $b_1, \ldots, b_{n_\beta}$ — *блоками* — и m_β ребрами: $B_k = (b_{i_k}, b_{j_k})$, $k = 1, \ldots, m_\beta$, называемыми *путями*.

Рассмотрим следующую задачу: требуется так разместить блоки в гнездах, чтобы сумма длин путей между блоками была минимальной. Иначе говоря, требуется найти такое взаимно однозначное отображение φ множества $\{b_1, \ldots, b_{n_\beta}\}$ в множество $\{a_1, \ldots, a_{n_\alpha}\}$, чтобы величина

$$S = \sum_{k=1}^{m_\beta} g(\varphi(B_k)); \quad \varphi(B_k) = (\varphi(b_{i_k}), \varphi(b_{j_k}))$$

была минимальной.

Возможные применения

1. Компоновка радиоэлектронной и другой аппаратуры. S интерпретируется как общая длина связей между блоками.

2. Пусть требуется создать сеть связи между пунктами $a_1, \ldots a_{n_\alpha}$, причем каждый пункт может быть соединен только с двумя другими. Граф $\mathfrak{B}$ при этом состоит из одного контура (замкнутого), а S является просто общей длиной сети связи.

3. Пусть деталь обрабатывается на автоматической линии. Граф $\mathfrak{B}$ определяется прохождением детали по станкам (данный станок может использоваться несколько раз). Требуется найти расположение станков (с фиксированным множеством мест установки) с минимальным временем обработки (для этого необходимо и достаточно, чтобы минимальным было время прохождения детали между станками).

При больших n_β, m_β нахождение абсолютного минимума — довольно трудоемкая задача, поэтому для нахождения приближенного минимума пользуются легко программируемым методом Монте-Карло. Будем считать, что на множестве Φ всех взаимно однозначных вложений задано равномерное распределение P_Φ. При моделировании этого метода на вычислительных машинах случайно выбираются значения φ. При этом для реальных задач выборочное распределение S оказывается приближенно нормальным. Далее этот факт объясняется и исследуется распределение величины S. Указано также обобщение задачи о назначении на графе для более широкого класса задач нелинейного целочисленного программирования.

2. МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ S

Введем случайные величины $\xi_k = g(\varphi(B_k))$, $\varphi \in \Phi$. Очевидно, что они одинаково распределены и $MS =$

$$= m_\beta M\xi_1 = mg_{\text{ср.}}, \text{ где } g_{\text{ср.}} = \frac{1}{m_\alpha}\sum_{k=1}^{m_\alpha} g_k, \; g = g(A_k).$$

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{g}_j = (g_j - g_{\text{ср.}}), \qquad \tilde{\xi}_i = \xi_i - M\xi_i = \xi_i - g_{\text{ср.}};$$

$$\tilde{S} = (S - MS).$$

Займемся теперь подсчетом высших моментов величины $\widetilde{S}$. Имеем

$$M(S^k) = M\left[\left(\sum_{i=1}^{m_\beta} \xi_i\right)^k\right] =$$

$$= \sum_{1 \leqslant p_1 < \ldots < p_l \leqslant m_\beta} \sum_l \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_l=k} \times$$

$$\times \frac{k!}{i_1! \ldots i_l} M\xi_{p_1}^{i_1} \ldots \xi_{p_l}^{i_l}.$$

Рассмотрим всевозможные графы с l ребрами без изолированных вершин, параллельных ребер и петель. Разобьем множество этих графов на классы эквивалентности, считая два графа эквивалентными тогда и только тогда, когда они изоморфны ($\sim$) [1]. Число классов эквивалентности $U(l) < \infty$. Выбираем из каждого класса по одному представителю Γ_u^l, $u = 1, \ldots, U(l)$.

Множеству ребер $\{A_{p_1}, \ldots, A_{p_l}\}$ графа $\mathfrak{A}$ (или $\mathfrak{L}$) сопоставим граф $(A_{p_1}, \ldots, A_{p_l})$ (частичный подграф графа $\mathfrak{A}(\mathfrak{L})$, состоящий из этих ребер и вершин, являющихся концами по крайней мере одного из этих ребер).

Пусть $A(l, u)$ $[B(l, u)]$—число систем индексов $(p_1, \ldots, p_l)$, $p_1 < \ldots < p_l$ таких, что граф $(A_{p_1}, \ldots, A_{p_l})$ $[(B_{p_1}, \ldots, B_{p_l})]$ изоморфен Γ_u^l. Для данной системы индексов $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_l)$ обозначим $A(\bar{q}, l, u)$ число систем индексов $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_l)$ таких, что граф $A_{\bar{r}} = (A_{r_1}, \ldots, A_{r_s})$ можно таким образом отобразить взаимно однозначно на граф $A_{\bar{q}} = (A_{q_1}, \ldots, A_{q_l})$, чтобы при этом отображении ребро A_{r_i} перешло в ребро A_{q_i}, $i = 1, \ldots, l$. Такой изоморфизм будем обозначать $\approx$.

Для данного набора индексов $\tau = (i_1, \ldots, i_l)$ обозначим $\eta(\tau)$ число различных индексов в τ, а $(\tau) = k_1(\tau)! \ldots k_{\eta(\tau)}(\tau)!$, где $k_j(\tau)$ — числа индексов в группах по величине индексов.

Имеем далее

$$M(\widetilde{S}^k) = \sum_{1 \leqslant q_1, \ldots, q_l \leqslant m_\beta} \sum_{\substack{\tau \\ i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_l}} \times$$

$$\times \frac{1}{(\tau)} \frac{k!}{i_1! \ldots i_l!} M\widetilde{\xi}_{q_1}^{i_1} \ldots \widetilde{\xi}_{q_l}^{i_l},$$

$$\sum_{1 \leqslant q_1, \ldots, q_l \leqslant m_\beta} M\xi_{q_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{\xi}_{q_l}^{i_l} =$$

$$= \sum_{u=1}^{u(l)} \sum_{\substack{\bar{q} \\ B_{\bar{q}} \sim \Gamma_u^l}} M\widetilde{\xi}_{q_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{\xi}_{q_l}^{i_l} =$$

$$= \sum_{u=1}^{u(l)} \sum_{\substack{\bar{q} \\ B_{\bar{q}} \sim \Gamma_u^l}} \frac{1}{A(\bar{q}, l, u)} \sum_{\substack{\bar{p} \\ A_{\bar{p}} \approx B_{\bar{q}}}} \widetilde{g}_{p_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{g}_{p_l}^{i_l}.$$

Числа $A(\bar{q}, l, n)$ одинаковы для всех $\bar{q}$ таких, что $B_{\bar{q}} = (B_{q_1}, \ldots, B_{q_l}) \sim \Gamma_u^l$ и равны $A(l, u) \cdot D(l, u)$, где $D(l, u)$ — число автоморфизмов графа Γ_u^l. Следовательно, можно преобразовать

$$\sum_{\substack{\bar{q} \\ B_{\bar{q}} \sim \Gamma_u^l}} \frac{1}{A(\bar{q}, l, u)} \sum_{\substack{\bar{p} \\ A_{\bar{p}} \approx B_{\bar{q}}}} \widetilde{g}_{p_1}^{i_1} \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \widetilde{g}_{p_l}^{i_l} = \frac{1}{A(l, u) \cdot D(l, u)} \sum_{\substack{\bar{q} \\ B_{\bar{q}} \sim \Gamma_u^l}} \sum_{\substack{\bar{p} \\ A_{\bar{p}} \approx B_{\bar{q}}}} \times$$

$$\times \widetilde{g}_{p_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{g}_{p_l}^{i_l}.$$

В сумме справа число членов с одинаковыми индексами $(p_1, \ldots, p_l)$ равно, очевидно, $B(l, u) \times \times D(l, u)$. Тогда выражение справа равно

$$\frac{B(l, u)}{A(l, u)} \sum_{\substack{\bar{p} \\ A_{\bar{p}} \sim \Gamma_u^l}} \widetilde{g}_{p_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{g}_{p_l}^{i_l}.$$

Окончательно получим

$$M(\widetilde{S}^k) = \sum \sum_{\substack{(\tau) \\ i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_l \\ i_1 + \ldots + i_l = k}} \frac{1}{(\tau)} \cdot \frac{k!}{i_1! \ldots i_l!} \times$$

$$\times \sum_{u=1}^{u(l)} \frac{B(l, u)}{A(l, u)} \sum_{\substack{\bar{p} \\ A_{\bar{p}} \sim \Gamma_u^l}} \widetilde{g}_{p_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{g}_{p_l}^{i_l}$$

или

$$M(\widetilde{S}^k) = \sum_l \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_l \\ i_1 + \ldots + i_l = k}} \frac{k!}{i_1! \ldots i_l!} \times$$

$$\times \sum_{u=1}^{u(l)} \frac{B(l,u)}{A(l,u)\cdot l!} \sum_{\substack{\bar p \\ A_{\bar p} \sim \Gamma_u^l}} \tilde g_{p_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot \tilde g_{p_l}^{i_l}. \qquad (2.1)$$

В частности, имеем выражение для дисперсии

$$D(\tilde S) = \frac{m_\beta}{m_\alpha} \sum_{i=1}^{m_\alpha} \tilde g_i^2 + \frac{2B}{m_\alpha (n_\alpha - 2)} \sum{}' \tilde g_i \tilde g_k +$$

$$+ \frac{2\left(\frac{1}{2} m_\beta (m_\beta - 1) - B\right)}{m_\alpha (m_\alpha - n_\alpha + 1)} \sum{}'' \tilde g_i \tilde g_k , \qquad (2.2)$$

где Σ' означает суммирование по всем парам ребер (A_i, A_k), имеющим общую вершину, а Σ'' — по парам ребер, не имеющим общей вершины; B — число различных частичных подграфов графа $\mathfrak{L}$ вида $(b_i b_j, b_i b_k)$ (два ребра с общей вершиной) равно $\sum_{i=1}^{n_\beta} C_{r_i}^2$, где r_i — число ребер, выходящих из вершины b_i графа $\mathfrak{L}$. После преобразования $\Sigma'' \tilde g_i \tilde g_k = -\Sigma \tilde g_i^2 - \Sigma' \tilde g_i \tilde g_k$ получим

$$D(\tilde S) = \left[\sum \tilde g_i^2 \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha} - \frac{m_\beta^2}{m_\alpha^2}\right) + 2\left(\frac{B}{m_\alpha n_\alpha} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\frac{1}{2} m_\beta^2}{m_\alpha^2}\right) \sum{}' \tilde g_i \tilde g_k\right] \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n_\beta}\right)\right). \qquad (2.3)$$

3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Распределение случайной величины $\tilde S$ зависит от графа $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}$, системы чисел $\tilde g_1, \ldots, \tilde g_{m_\alpha}$ и соответствия между этими числами и ребрами графа $\mathfrak{A}$. По аналогии с классическими теоремами теории вероятностей введем следующую *схему серий* в задаче о назначении на графе.

Пусть для любого целого числа $k > 0$ заданы:

1) графы $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}(n_{\alpha k}, m_{\alpha k})$ с ребрами $A_1, \ldots, A_{m_{\alpha k}}$ и $\mathfrak{L}_k = \mathfrak{L}(n_{\beta k}, m_{\beta k})$ с ребрами $B_1, \ldots, B_{m_{\beta k}}$;

2) равномерное распределение P_{Φ_k} на множестве всех вложений $\Phi_k = \{\varphi : \mathfrak{A}_k \to \mathfrak{L}_k\}$;

3) система чисел $G_k : \tilde g_1, \ldots, \tilde g_{m_{\alpha k}}$ и соответствие между этими числами и ребрами графа $\mathfrak{A}_k$: $h_k = \begin{pmatrix} A_1, \ldots, A_{m_{\alpha k}} \\ \tilde g_{i_1}, \ldots, \tilde g_{i_{m_{\alpha k}}} \end{pmatrix}$. Нас будет интересовать предельное поведение величины $\tilde S_k = \sum_{i=1}^{m_{\beta k}} \tilde g(\varphi(B_i))$ при $k, m_{\alpha k}, m_{\beta k} \to \infty$.

Заметим, что данная схема не является схемой серий для слабо зависимых случайных величин в обычном смысле этого понятия (см. [2] и [3], где гипотеза о слабой зависимости используется для нахождения предельного распределения целевой функции).

Как будет ясно из дальнейшего, основную роль в предельном поведении $\tilde S_k$ играет соответствие h_k. Во второй части работы приведен пример, из которого видно, что при любых последовательностях серий $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{L}_k$, $\{\tilde g_{ik}\}$ можно подобрать h_k так, что при одной нормировке предельное распределение для S_k может быть весьма разнообразным и может вообще не существовать. Здесь мы докажем, что почти для всех h_k асимптотика распределения $\tilde S_k$ находится в полной аналогии с классическими теоремами для сумм независимых случайных величин.

Чтобы сформулировать результат более точно, на множестве H_k всех h_k введем равномерное распределение $\left(\text{каждое } h_k \text{ имеет вероятность } P_{H_k}(h_k) = \frac{1}{m_{\alpha k}!}\right)$ и включим его в нашу схему серий. Обозначим $P_{H_k}(\varepsilon)$ вероятность того, что распределение $F_{h_k}(x)$ случайной величины $\frac{\tilde S_k}{\sqrt{D\tilde S_k}}$ отличается от нормального $\Phi(x)$ больше, чем на ε, т. е.

$$\varrho(F_{h_k}(x), \Phi(x)) > \varepsilon.$$

Расстояние ϱ между распределениями можно понимать, например, в смысле

$$\varrho(F, F') = \max_{-\infty < x < \infty} |F(x) - F'(x)|.$$

Теорема 1. Пусть в схеме серий $(\mathfrak{A}_k, \mathfrak{L}_k, \{g_{ik}\})$ $m_{\beta k}$, $m_{\alpha k} - m_{\beta k} \to \infty$. Тогда, для того чтобы для этой схемы серий $P_{H_k}(\varepsilon) \to 0$ для любого $\varepsilon > 0$ при $k \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы для этой схемы серий выполнялось следующее условие Линдеберга: для любого $\delta > 0$ при $k \to \infty$

$$\frac{\sum\limits_{\tilde{g}^2_{jk} > \delta^2 \sum\limits_i \tilde{g}^2_{ik}} \tilde{g}^2_{jk}}{\sum\limits_{j=1}^{m_{\alpha k}} \tilde{g}^2_{jk}} \to 0.$$

Замечание 1. Если для некоторого $\delta > 0$ $\delta \leqslant \frac{m_{\beta k}}{m_{\alpha k}} \leqslant 1 - \delta$, то условие Линдеберга сводится к условию равномерной бесконечной малости

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\max g^2_{ki}}{\sum\limits_{i=1}^{m_{\alpha k}} \tilde{g}^2_k} = 0.$$

Следствие. Теорема 1 выполняется, если вместо равномерности распределения P_{H_k} потребовать, чтобы

$0 < \underline{\lim} \, [m_{\alpha k}! \inf\limits_{h_k} P_{H_k}(h_k)] \leqslant \overline{\lim} \, (m_{\alpha k}! \, P_{H_k}(h_k)) < \infty.$

Для доказательства теоремы нужна следующая лемма.

Лемма 3.1. Если $m_{\beta k} \to \infty$, $m_{\alpha k} - m_{\beta k} \to \infty$, то в схеме серий $(\mathfrak{A}_k, \mathfrak{L}_k, G_k)$ для любого $\varepsilon > 0$ $P_{H_k}[(1-\varepsilon) D_k \leqslant D_{\Phi_k}[\tilde{S}(h_k, \varphi)] \leqslant (1+\varepsilon) D_k] \to 1$, где

$$D_k = \sum_{i=1}^{m_{\alpha k}} \tilde{g}^2_{ki} \frac{m_{\beta k}}{m_{\alpha k}} \left(1 - \frac{m_{\beta k}}{m_{\alpha k}}\right).$$

Доказательство. Имеем (см. (2.3))

$$M_{H_k} \sum g_{ki} g_{kl} = \frac{m_{\alpha k}(n_{\alpha k} - 2)}{m_{\alpha k}(m_{\alpha k} - 1)} \times$$

$$\times \sum_{i \neq l} g_{kl} g_{kl} = -\frac{n_{\alpha k} - 2}{m_{\alpha k} - 1} \sum g^2_{kl}.$$

Отсюда, используя 2.3 и учитывая, что $B \leqslant \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{m_{\beta k}} r_i^2 \leqslant 2 \frac{m^2_{\beta k}}{n_{\beta k}}$, так как $\sum r_i = 2m_{\beta k}$, получим

$$M_H D(\check{S}_k) = \sum g_i^2 \left(\frac{m_{\beta k}}{m_{\alpha k}} - \frac{m^2_{\beta k}}{m^2_{\alpha k}}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{n_\beta}\right)\right).$$

Теперь нужно оценить $D_{H_k} D(\tilde{S}^k)$. Для этого запишем выражение для $D(\tilde{S}^k)$ в виде

$$D(S^k) = a_k \sum g^2_{ki} + b_k \sum{}' g_{ki} g_{kj},$$

причем в силу предыдущего $b_k = O(a_k)$. Далее,

$$M_{H_k}[D(S^k)]^2 = a_k^2 \sum_{i,j=1}^{m_{\alpha k}} g^2_{ki} g^2_{kj} + 2a_k b_k M_{H_k} \times$$

$$\times \left(\sum{}' g^3_{ki} g_{kj} + \sum_{i \neq j \neq k}{}''' g^2_{ki} g_{kj} g_{kl}\right) +$$

$$+ b_k^2 M_{H_k} \left(\sum{}' g^2_{ki} g^2_{kj} + \sum_{i \neq j \neq l}{}^{(\mathrm{IV})} g^2_{ki} g_{kj} g_{kl} +\right.$$

$$\left. + \sum{}^{(\mathrm{V})} g_{ki} g_{kj} g_{kl} g_{km}\right).$$

Знаки суммирования означают следующее: $\sum'''$ — j и l таковы, что ребра A_j и A_l имеют общую вершину, $\sum^{(\mathrm{IV})}$ — i, j, l таковы, что A_i, A_j, A_l имеют общую вершину, $\sum^{(\mathrm{V})}$ — A_i и A_l имеют общую вершину, A_l и A_m имеют общую вершину. Замечая, что, например,

$$M_{H_k} \sum{}' g^3_{ki} g_{kj} = \frac{m_{\alpha k}(n_{\alpha k} - 2)}{m_{\alpha k}(m_{\alpha k} - 1)} \sum_{i \neq j} g^3_{ki} g_{kj},$$

имеем

$$M_{H_k}[D(S^k)]^2 \sim a_k^2 \sum_{i,j=1}^{m_{\alpha k}} g^2_{kj} g^2_{ki} +$$

$$+ 2a_k b_k \left[\frac{n_{\alpha k}}{m_{\alpha k}} \sum g^3_{ki} g_{kj} + \frac{n_{\alpha k}}{m_{\alpha k}} \sum \ldots\right] +$$

$$+ b_k^2 \left[\frac{n_{\alpha k}}{m_{\alpha k}} \sum g^2_{ki} g^2_{kj} + \frac{n^2_{\alpha k}}{m^2_{\alpha k}} \sum \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{n^2_{\alpha k}}{m^2_{\alpha k}} \sum \ldots\right].$$

Так как

$$\sum_{i \neq j} g^3_{ki} g_{kj} = -\sum g^4_{ki}; \quad \sum_{i \neq j \neq l} g^2_{ki} g_{kj} g_{kl} =$$

$$= -\sum g^2_{ki} g^2_{kl} + \sum g^4_{ki},$$

$$\sum g_{ki} g_{kj} g_{kl} g_{km} = -3 \sum g^2_{ki} g_{kj} g_{kl} =$$

$$= 3 \sum g^2_{ki} g^2_{kj} - 3 \sum g^4_{ki},$$

то окончательно получим

$$D_{H_k}\left(D\left(\frac{S_k}{\sqrt{D_k}}\right)\right)=$$

$$=\frac{\begin{array}{c}a_k^2\sum g_{ki}^2g_{kj}^2+O\left(\frac{1}{n_\alpha}\right)\times\\ \times O\left(\sum g_{ki}^2g_{kj}^2\right)-a_k^2\sum g_{ki}^2g_{kj}^2\end{array}}{a_k^2\sum g_{ki}^2g_{kj}^2\left(1+O\left(\frac{1}{n_\beta}\right)\right)}=O\left(\frac{1}{n_\beta}\right).$$

Отсюда с помощью неравенства Чебышева получим доказательство леммы.

Пусть $r_k(\varphi,\varphi')$ — число общих ребер у образов $\varphi(\mathfrak{L}_k)$ и $\varphi'(\mathfrak{L}_k)$ при отображениях $\varphi,\varphi'\in\Phi_k$ соответственно, а P_k — мера $P_{\Phi_k}\times P_{\Phi_k}$ на пространстве $\Phi_k\times\Phi_k$.

Лемма 3.2. Если $m_{\beta k}\to\infty$ для последовательности $\mathfrak{A}_k,\mathfrak{L}_k$, то

$$P_{H_k}\left(1-\varepsilon\leqslant\left(1-\frac{r_k}{m_{\beta k}}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{m_{\beta k}}{m_{\alpha k}}}\leqslant 1+\varepsilon\right)\to 1$$

для любого $\varepsilon>0$.

Доказательство. Заметим, что ввиду равномерности распределения P_{H_k} и полноты графа $\mathfrak{A}_k$ можно зафиксировать φ' и рассматривать случайную величину $r(\varphi)=r_k(\varphi,\varphi')$ на Φ_k.$r(\varphi)$ и $r_k(\varphi,\varphi')$ имеют, очевидно, одинаковые распределения. Рассмотрим произвольное ребро B_i графа $\mathfrak{L}_k$. Вероятность того, что $\varphi(B_i)\cap\varphi'(\mathfrak{L}_k)\neq 0$, равна $\frac{m_{\beta k}}{m_{\alpha k}}$. Следовательно, $Mr(\varphi)=\frac{m_{\beta k}^2}{m_{\alpha k}}$. Далее,

$$Dr(\varphi)=M\Sigma\xi_i^2+$$

$$+M\left(\sum_{i\neq j}{}'\xi_i\xi_j+\sum{}''\xi_i\xi_j\right)-\frac{m_{\beta k}^4}{m_{\alpha k}^2},$$

где

$$\xi_i=\begin{cases}1, \text{ если } \varphi(B_i)\cap\varphi'(\mathfrak{L}_k)\neq 0,\\ 0, \text{ если } \varphi(B_i)\cap\varphi'(\mathfrak{L}_k)=0.\end{cases}$$

Σ' означает суммирование по всем таким парам (i,j), $i\neq j$, что B_i и B_j имеют общую вершину, а Σ'' — по таким, что B_i и B_j не имеют общей вершины. Используя оценку в доказательстве леммы 3.1, получим

$$M\Sigma'\xi_i\xi_j=2B\cdot\frac{2B}{n_\alpha(n_\alpha-1)(n_\alpha-2)}\leqslant 8\frac{m_{\beta k}^4}{n_{\beta k}^2n_{\alpha k}^3}=$$

$$=\begin{cases}O\left(\frac{m_{\beta k}^4}{m_{\alpha k}^2}\right), \text{ если } n_{\alpha k}=o(n_{\beta k}^2),\\ O(1), \quad \text{ если}\end{cases}$$

$$M\Sigma''\xi_i\xi_j=\frac{[m_{\beta k}(m_{\beta k}-1)-2B]^2}{m_{\alpha k}(m_{\alpha k}-n_{\alpha k}+1)}\sim\frac{m_{\beta k}^4}{m_{\alpha k}^2}.$$

Рассмотрим теперь два случая. Пусть сначала $n_{\beta k}^2\leqslant n_{\alpha k}$; тогда $D\left(\frac{r(\varphi)}{m_\beta}\right)=o(1)$ и $P\left[\left(1-\frac{r(\varphi)}{m_{\beta k}}\right)\leqslant\varepsilon\right]\to 1$. Если же $n_{\beta k}^2>n_{\alpha k}$, то аналогично с помощью неравенства Чебышева получим

$$P\left[1-\varepsilon\leqslant\frac{r(\varphi)\,m_{\alpha k}}{m_{\beta k}^2}\leqslant 1+\varepsilon\right]\to 1.$$

Лемма доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть $\varphi_{h_k}(t)$ — характеристическая функция случайной величины $\frac{1}{\sqrt{D\widetilde{S}_{h_k}}}\cdot\widetilde{S}_{h_k}$ для нашей схемы серий. Это случайная величина, зависящая от h_k. Достаточно показать, что условия теоремы необходимы и достаточны для выполнения следующего условия:

$$P_{H_k}(\max_t|\varphi_{h_k}(t)-e^{-\frac{t^2}{2}}|>\varepsilon)\to 0 \qquad (4.1)$$

при $k\to\infty$ для любого t.

Введем некоторые характеристические функции, которые понадобятся нам для доказательства теоремы. Заметив, что $S_{h_k}=S_k(\varphi,h_k)$ — случайная величина на $\Phi_k\times H_k$, запишем

$$\overline{\varphi}_k=M_{H_k}\varphi_{h_k}=M_{H_k}\left[\frac{1}{n_{\alpha k}^{(n_{\beta k})}}\sum_{\varphi\in\Phi_k}e^{it\widetilde{S}_k(\varphi,h_k)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\sqrt{DS_{h_k}}}\right]=\frac{1}{n_{\alpha k}^{(n_{\beta k})}}\sum_{\varphi\in\Phi_k}\frac{1}{C_{m_{\alpha k}}^{m_{\beta k}}}\sum_{i_1<\ldots<i_{m_{\beta k}}}\times$$

$$\times\exp\left[it\left(g_{ki_1}+\ldots+g_{ki_{m_{\beta k}}}\right)\frac{1}{\sqrt{DS_{h_k}}}\right]=$$

$$= (\text{см. лемму } 3.1) = \frac{1}{C_{m_{\alpha k}}^{m_{\beta k}}} \sum_{i_1<\dots<i_{m_{\beta k}}} \exp \times$$

$$\times \left[it\,(g_{ki_1} + \dots + g_{ki_{m_{\beta k}}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{M_{H_k} DS_{h_k}}} \right] (1+o(1)).$$

Вычислим также некоторый второй момент для φ_{h_k}:

$$D_k^*(t) = M_{H_k} [(\varphi_{h_k}(t) - \bar{\varphi}_k(t))\,(\varphi_{h_k}^*(t) - \bar{\varphi}_k^*(t))] =$$

$$= M_{H_k}(\varphi_{h_k} \cdot \varphi_{h_k}^*) - \bar{\varphi}_k \cdot \bar{\varphi}_k^*.$$

Имеем

$$M_{H_k}(\varphi_{h_k} \cdot \varphi_{h_k}^*) = M_{H_k} \cdot \frac{1}{(n_{\alpha k}(n_{\beta k}))^2} \times$$

$$\times \sum_{\varphi, \varphi' \in \Phi_k} e^{it(\tilde{S}_k(h_k, \varphi) - \tilde{S}_k(h_k, \varphi'))} \frac{1}{\sqrt{D\tilde{S}_{hk}}}.$$

Введем вероятность p_r того (в смысле распределения на $\Phi_k \times \Phi_k$), что $\varphi(\mathfrak{L}_k)$ и $\varphi'(\mathfrak{L}_k)$ будут иметь ровно r общих вершин. Аналогично предыдущему получим

$$M_{H_k}(\varphi_{h_k} \cdot \varphi_{h_k}^*) = \sum_{r=0}^{m_{\beta k}} p_r \frac{1}{C_{m_{\alpha k}}^{m_{\beta k}-r} \cdot C_{m_{\alpha k}-m_{\beta k}+r}^{m_{\beta k}-r}} \times$$

$$\times \sum \exp [it\,(g_{ki_1} + \dots + g_{ki_{m_{\beta k}-r}} - \dots$$

$$\dots - g_{ki_{2m_{\beta k}-2r}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{D_k}} \cdot (1 + O(1)).$$

Обозначим

$$\bar{\bar{\varphi}}_k(t) = \frac{1}{C_{m_{\alpha k}}^{m_{\beta k}}} \sum_{i_1<\dots<i_{m_{\beta k}}} e^{it(g_{ki_1} + \dots + g_{ki_{m_{\beta k}}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{D_k}}};$$

$$\varphi_{r,k}(t) = \frac{1}{C_{m_{\alpha k}}^{m_{\beta k}-r} \cdot C_{m_{\alpha k}-m_{\beta k}+r}^{m_{\beta k}-r}} \times$$

$$\times \sum \exp \left[it\,(g_{ki_1} + \dots + g_{ki_{m_{\beta k}-r}} - \dots - g_{ki_{2m_{\beta k}-2r}}) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\sqrt{D_k}} \right].$$

Лемма 4.1. Если $\bar{\varphi}_k(t) \to l^{-\frac{t^2}{2}}$ для любого t, то равенство 4.1 выполняется тогда и только тогда, когда для любого t при $k \to \infty$

$$D_k^*(t) \to 0. \qquad (4.2)$$

Доказательство. Пусть сначала условие 4.2 выполняется. Тогда (аналог неравенства Чебышева для комплексных функций)

$$P_{H_k}(|\varphi_{h_k}(t) - \bar{\varphi}_k(t)| > \varepsilon) \leqslant \frac{D_k^*(t)}{\varepsilon^2}$$

и достаточность условия 4.2 доказана.

Пусть теперь выполняется условие 4.1. Так как

$$D_k^*(t) \leqslant P_{H_k}(|\varphi_{h_k}(t) - \bar{\varphi}_k(t)| \geqslant \varepsilon) \times$$

$$\times [\max_{h_k} |\varphi_{h_k}(t) - \bar{\varphi}_k(t)|]^2 + 1 \cdot \varepsilon^2 =$$

$$= P_{H_k}(|\varphi_{h_k} - \bar{\varphi}_k| \geqslant \varepsilon) \cdot 4 + \varepsilon^2,$$

то для любого ε $\limsup D_k^*(t) \leqslant \varepsilon^2$ и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} D_k^*(t) = 0.$$

Лемма 4.2. Пусть $m_{\beta k} \to \infty$, $m_{\alpha k} - m_{\beta k} \to \infty$. Тогда условие Линдеберга теоремы 1 необходимо и достаточно для того, чтобы для любого t

$$\bar{\varphi}_k(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Доказательство. Характеристическая функция $\bar{\varphi}_k(t)$ есть характеристическая функция для следующей случайной величины Пусть даны числа $g_{k_1}, \dots, g_{km_{\alpha k}}$. Из этого множества чисел делается выборка без возвращения $m_{\beta k}$ чисел и рассматривается их сумма S_k'. Если выбор любого конечного множества чисел объема $m_{\beta k}$ равновероятен, то $\varphi_k(t)$ и является характеристической функцией для $S_k' \cdot \frac{1}{\sqrt{D_k}}$. Доказательство необходимости и достаточности условия Линдеберга, если $m_{\beta k}$, $m_{\alpha k} - m_{\beta k} \to \infty$, для асимптотической нормальности S_k' содержится в [4].

Лемма 4.3. Если $m_{\beta k} - r_k$ и $m_{\alpha k} - 2(m_{\beta k} - r_k) \to \infty$, то условие Линдеберга необходимо и достаточно для того, чтобы

$$\varphi_{r_k,k}(t) \sim e^{-t^2\left[\frac{1}{1-\frac{m_{\beta k}}{m_{\alpha k}}} \cdot \left(1 - \frac{r_k}{m_{\beta k}}\right)\right]}.$$

Используя интерпретацию, аналогичную лемме 4.2, и метод работы [4], можно доказать, что результат леммы 4.2 можно перенести на случайную величину S''_k, принимающую всевозможные значения

$$(g_{ki_1} + \ldots + g_{ki_{m_{\beta k}-r}} - g_{ki_{m_{\beta k}-r+1}} - \ldots$$
$$\ldots - g_{ki_{2m_{\beta k}-2r}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{D_k}}$$

с равными вероятностями. Дисперсия этой случайной величины, как легко убедиться, равна

$$\frac{2(m_{\beta k} - r_k)}{m_{\alpha k}} \cdot \frac{m_{\alpha k}}{m_{\alpha k} - 1} \cdot \sum_{i=1}^{m_{\alpha k}} g_{ki}^2 - \frac{1}{D_k} =$$
$$= 2\left(1 - \frac{r_k}{m_{\beta k}}\right) - \frac{m_{\alpha k}}{m_{\alpha k} - m_{\beta k}},$$

что и доказывает лемму.

Лемма 4.4. Если $m_{\beta k}$, $m_{\alpha k} - 2m_{\beta k} \to \infty$, то условие Линдеберга достаточно для того, чтобы $D_k^*(t) \to 0$ для любого t.

Доказательство. Пусть сначала выполняется условие Линдеберга. Тогда в силу лемм 4.2 и 4.3 $\varphi_k(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$ и $\varphi_{r,k}(t) \sim e^{-t^2\left(1-\frac{r_k}{m_\beta}\right)\frac{m_\alpha}{m_\alpha - m_\beta}}$. По лемме 3.2 для любого $\sum\limits_{1-\varepsilon \leqslant \frac{1-\frac{r}{m_{\beta k}}}{1-\frac{m_{\beta k}}{m_{\alpha k}}} \leqslant 1+\varepsilon} P_r \to 0$

$$D_k^*(t) = \left|\sum_{r=0}^{m_{\beta k}} p_r \varphi_{r,k}(t) - e^{-t^2}\right| + O(1) \leqslant$$
$$\leqslant O(\varepsilon) + o(1) + |(1 - O(\varepsilon))\, e^{-\theta_\varepsilon t^2} - e^{-t^2}|,$$

где $O(\varepsilon) \to 0$ и $\theta_\varepsilon \leqslant 1 + \varepsilon$. Отсюда и следует, что $D_k^*(t) \to 0$ при $k \to \infty$ для любого t.

Перейдем к значению доказательства теоремы. Достаточность следует из лемм 4.4, 4.1, 4.2. Пусть, наоборот, для любого $\varepsilon > 0$

$$P_{H_k}(|\varphi_{h_k}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}| > \varepsilon) = \delta(\varepsilon) \to 0.$$

Тогда

$$|M_{h_k}\varphi_{h_k}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}| \leqslant \varepsilon + 2\delta(\varepsilon),$$

т. е. $\varphi(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, и по лемме 4.2 условие Линдеберга должно выполняться.

5. БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ ЗАКОНЫ

Сформулируем теорему, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 1.

Рассмотрим безгранично делимый закон $F(x)$, отличный от нормального

$$\log f(t) = \int (e^{itu} - 1 - itu)\frac{1}{u^2}\, dK(u),$$

и схему серий $(\mathfrak{A}_k, \mathfrak{L}_k, G_k)$, описанную в разд. 3. Пусть

$$P(\varepsilon) = P_{H_k}(P(F_{h_k}(x), F(x))) > \varepsilon.$$

Теорема 2. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} D_k = \sigma^2, m_{\alpha k} - m_{\beta k} \to \infty$; $m_{\beta k} \to \infty$. Тогда $P(\varepsilon) \to 0$ для любого $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{m_{\beta k}}{m_{\alpha k}} \to 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{m_{\beta k}}{m_{\alpha k}} \sum\limits_{\tilde{g}_{ki} < u} \tilde{g}_{ki}^2 = K(u)$ во всех точках непрерывности $K(u)$.

6. ОБЩИЕ КЛАССЫ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Покажем, что сформулированная выше задача о назначении на графе является частным случаем задачи нелинейного целочисленного программирования. Для этого введем вспомогательные переменные x_{ij}, i, $j = 1, \ldots, n_\alpha$, которые могут принимать значения 0 и 1. При этом $x_{ij} = 1$, если j-я вершина графа $\mathfrak{L}$ переходит в i-ую вершину графа $\mathfrak{A}$ при отображении φ; в противном случае $x_{ij} = 0$. Кроме этого, введем в граф $\mathfrak{L}$ фиктивные вершины с номерами $n_\beta + 1, \ldots, n_\alpha$, если $n_\beta < n_\alpha$, и определим числа b_{jl} следующим образом: $b_{jl} = 1$, если $j, l \leqslant n_\beta$ и между j-ой и l-ой вершинами графа $\mathfrak{L}$ есть ребро, $b_{jl} = 0$ в остальных случаях.

Тогда рассматриваемая задача о назначении на графе эквивалентна нахождению минимума квадратичной формы

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n_\alpha} g_{ik} b_{jl} x_{ij} x_{kl}$$

при ограничениях

$$x_{ij} = 0, 1; \quad \sum_{i=1}^{n_\alpha} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n_\beta} x_{ij} = 1.$$

Рассмотрим теперь общую задачу нелинейного целочисленного программирования.

Требуется найти минимум вещественной функции

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

при ограничениях $x_i = 0, \; 1; \quad i = 1, \ldots, n$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X$, т. е. $f_X(x_1, \ldots, x_n) = 1$, где f_X — характеристическая функция множества X.

Лемма 6.1. Произвольная вещественная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ от булевых переменных может быть записана в виде

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i_1,\ldots,i_l} g_{i_1,\ldots,i_l} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_l} + g_0,$$

где $g_{i_1 \ldots i_l}$ — некоторые вещественные числа.

Эта лемма является аналогом известной леммы о многочленах Жегалкина в алгебре логики [5]. Доказательство получается непосредственно, если положить

$$g_{i_1 \ldots i_l} = \varphi(x_1^0, \ldots, x_n^0) -$$

$$- \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{i_1 \ldots i_k} g_{i_1 \ldots i_k} x_{i_1}^0 \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^0,$$

где $x_{i_1}^0 = \ldots = x_{i_l}^0 = 1$, а остальные x_i^0 равны 0.

Таким образом, общая задача $\{G_n, F_n\}$ определяется наборами чисел

$$G_n = \{g_{i_1 \ldots i_l}\} \text{ и } F_n = \{f_{i_1 \ldots i_l}\},$$

где $f(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma f_{i_1 \ldots i_l} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_l}$.

Алгоритмом решения задачи $\{G_n, F_n\}$ будем называть последовательность вектор-функций (возможно, случайных)

$$\bar{x}^1 = \bar{\psi}_1(\{G_n\}, \{F_n\}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\bar{x}^k = \bar{\psi}_k(\{G_n\}, \{F_n\}, \bar{x}', \ldots, \bar{x}^{k-1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Это значит, что заданы условные вероятности

$$P(\bar{x}^k / \bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{k-1}).$$

Эффективность алгоритма характеризуется распределением величины $S_m = \min_{k=1}^{m} \varphi(\bar{x}^k)$. Исследование предельного поведения S_m является обычно трудной задачей. На практике, однако, часто приходится иметь дело с классом однотипных задач, и поэтому представляет интерес исследование распределения величины S_m для большинства таких задач.

Будем говорить о классе задач, если на множестве пар наборов $\{G_n, F_n\}$ задано распределение $P(G_n, F_n)$. На практике гипотеза об этом распределении может быть введена из соображений типа инвариантности и проверена методами математической статистики.

Замечание 1 (линеаризация). В ряде теоретических исследований целевую функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ без ущерба для общности можно считать линейной. Действительно, введем дополнительные переменные $y_{i_1 \ldots i_l} = x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_l}$. Тогда задача сводится к следующей: минимизировать

$$\Sigma g_{i_1 \ldots i_l} y_{i_1 \ldots i_l}$$

при ограничениях

$$f(y_1, \ldots, y_n) \cdot \prod_{i_1 \ldots i_l} (1 + y_{i_1 \ldots i_l} - y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_l}) = 1.$$

Замечание 2. Важная задача решения системы уравнений с булевыми переменными

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

сводится к минимизации формы $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i^2$.

Здесь мы ограничимся формулировкой одного из аналогов теоремы 1 разд. 3 в общем случае для простейшего алгоритма случайного потока. Пусть $\|\bar{x}\|$ — число единиц в наборе $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\|f(x_1, \ldots, x_n)\|$ — мощность множества X. Пусть $X \subset \{\bar{x} : \|x\| = k\}$. В связи с замечанием 1 пусть требуется найти минимум $S_h = \Sigma g_{i(h)} x_i$ при ограничении $f_X = 1$.

Алгоритм есть просто выборка с возвращением, а распределение $P(G_h)$ таково, что набор G_n фиксирован, а на множестве подстановок $H_h : h_h = \begin{pmatrix} g_1 \cdots g_n \\ g_{i_1} \cdots g_{i_n} \end{pmatrix}$ задано равномерное распределение.

Теорема 3. Пусть k, $n-2k\to\infty$. Тогда, если выполняется условие Линдеберга (см. теорему 1 разд. 3) для системы чисел G_n, а также

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\|f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)\|}{\|f\|}\right)^2\sim\frac{k^2}{n}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\|f_{ik}\|}{\|f\|}\right)^2\sim\frac{k^4}{n^2},$$

где f_{ik} получена из $f(x_1,\ldots,x_n)$ подстановкой $x_i=x_k=1$. Тогда, если $F_{h_n}(x)$ — функция распределения для случайной величины $\frac{S_{h_n}-MS_{h_n}}{\sqrt{DS_{h_n}}}$, то $P_{H_n}(\varrho(F_{h_n},\Phi(x))>\varepsilon)\to 0$ при $h_n\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Если условие $X\subset\{\bar{x}:\|\bar{x}\|=k\}$ не выполняется, то получаются взвешенные предельные законы.

Заключительное замечание. Алгоритмы случайного поиска, разобранные в данной работе, являются в некотором случае простейшими. Можно, конечно, привести примеры, когда их применение будет совершенно неэффективным. Например, в случае, когда в задаче о назначении на графе имеется частичный подграф $\mathfrak{A}'$ графа $\mathfrak{A}$, изоморфный $\mathfrak{L}$, длины всех его ребер много меньше длин остальных ребер.

Однако эти алгоритмы являются существенной частью более сложных процедур,— когда дополнительно используется локальный направленный поиск от каждой случайной точки.

Оценки эффективности таких алгоритмов получены здесь в зоне нормальных уклонений. Случай больших уклонений (т. е. с большим числом испытаний), а также оценки там, где нет точных теорем, для других более сложных алгоритмов, рассматриваются во второй части работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж, Теория графов и ее применения, М., 1962.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965.
3. И. Б Моцкус, Многоэкстремальные задачи в проектировании, М., 1967.
4. J. Hajek, Limiting Distributions in Simple Random Sampling from Finite Populations, A Magyar Tudomanyos Akademia Matematikai Kutato Intezet, 5, No 3, Ser. A, 1960.
5. В. М. Глушков, Синтез цифровых автоматов, Физматгиз, М., 1962.

Поступила в редакцию 1.IV 1968