Том 65 **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ 2020** **Выпуск 1**

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ НА ЧЕТВЕРТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ

С 2 по 9 июня 2019 г. состоялась 4-я Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-4). Она (как и предыдущая МКСМ-3) проходила в пос. "Дивноморское" (г. Геленджик) в спортивно-оздоровительном комплексе "Радуга" Донского государственного технического университета. Организаторами нынешней конференции стали: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (отдел теории вероятностей и математической статистики); Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (кафедра теории вероятностей); Национальный комитет Общества Бернулли по математической статистике, теории вероятностей, комбинаторике и их применениям; Российский университет дружбы народов и Донской государственный технический университет (кафедра высшей математики). Как и на предыдущих трех конференциях, работой МКСМ-4 руководил председатель Оргкомитета и Программного комитета академик РАН А. Н. Ширяев.

В МКСМ-4 наряду с известными российскими учеными приняли участие крупные специалисты из Франции, Германии, Португалии, Болгарии. Российские участники были представлены следующими городами: Воронеж, Зерноград, Калуга, Майкоп, Москва, Нижний Новгород, Ростов-на-Дону, Самара, Санкт-Петербург, Таганрог, Уфа, Хабаровск. Примерно четверть докладов была сделана аспирантами и студентами. Всего были сделаны 21 пленарный и 44 секционных доклада.

Локальному оргкомитету во главе с И. В. Павловым удалось решить основные технические вопросы, связанные с проведением МКСМ-4. Участники конференции признали ее работу успешной.

А. Н. Ширяев, И. В. Павлов

Ниже публикуются тезисы докладов и сообщений участников конференции.

Афанасьев В. И. (Москва, Россия). **Функциональные предельные теоремы для разложимых ветвящихся процессов с двумя типами частиц.**

Рассмотрим ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с двумя типами частиц. Предположим, что частица первого типа порождает потомков обоих типов,

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5367

причем в одинаковых количествах, а частица второго типа порождает потомков только своего типа.

Пусть $\varphi(\,\cdot\,)$ и $\psi(\,\cdot\,)$ — производящие функции неотрицательных целочисленных случайных величин ξ и η. Предположим, что максимальный шаг распределения случайной величины ξ равен 1. Кроме того, предположим, что $\mathbf{E}\xi = 1$, $\mathbf{D}\xi := \sigma_1^2 \in (0,\infty)$ и $\mathbf{E}\eta = 1$, $\mathbf{D}\eta := 2b_2 \in (0,\infty)$.

Введем производящие функции для потомства частицы первого или второго типа соответственно рассматриваемого ветвящегося процесса: при $s_1, s_2 \geqslant 0$

$$f_1(s_1,s_2) = \varphi(s_1 s_2), \qquad f_2(s_1,s_2) = \psi(s_2);$$

обозначим ξ_n и η_n количества частиц первого и второго типов соответственно в n-м поколении рассматриваемого ветвящегося процесса. Предполагается, что $\xi_0 = 1$ и $\eta_0 = 0$. Положим $\Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$.

Зададим случайные процессы: $\{l_0^+(t),\, t \geqslant 0\}$ — локальное время броуновской экскурсии, а $\{Y(t),\, t \geqslant 0\}$ — феллеровская диффузия. Положим $S = \int_0^{\infty} Y(b_2 t)\, dt$ и введем плотности вероятностей при $y > 0$

$$p_1(y) = \frac{\mathbf{P}^{(1)}(\sqrt[4]{S} > y)}{\mathbf{E}^{(1)}\sqrt[4]{S}}, \qquad p_2(y) = \frac{2}{\mathbf{E}^{(1)}\sqrt[4]{S}}\,\frac{\mathbf{P}^{(1)}(\sqrt[4]{S} > y^{-1/2})}{y^{3/2}}$$

(верхний индекс при $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ означает, что $Y(0) = 1$). Приведем основные результаты (см. [1], [2]).

Теорема 1. *При $N \to \infty$*

$$\left\{ \frac{\xi_{\lfloor t\sqrt[4]{N}\rfloor}}{\sqrt[4]{N}},\, t \geqslant 0 \,\middle|\, \Sigma_2 > N \right\} \xrightarrow{D} \left\{ \frac{\sigma_1}{2\nu} l_0^+\!\left(\frac{\sigma_1}{2} t\nu\right),\, t \geqslant 0 \right\},$$

где ν — случайная величина с плотностью вероятностей p_1, не зависящая от процесса $\{l_0^+(t),\, t \geqslant 0\}$, а $\xrightarrow{D}$ обозначает сходимость по распределению в $D[0,\infty)$.

Теорема 2. *При $N \to \infty$*

$$\left\{ \frac{\eta_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor}}{\sqrt{N}},\, t > 0 \,\middle|\, \Sigma_2 > N \right\} \xrightarrow{D} \{Y(b_2 t),\, t > 0 \mid S > 1\},$$

причем случайная величина $Y(0)$ имеет плотность вероятностей p_2, а символ $\xrightarrow{D}$ обозначает сходимость по распределению в $D(0,\infty)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. И. Афанасьев, “О разложимом ветвящемся процессе с двумя типами частиц”, *Современные проблемы математики, механики и математической физики. II*, Сборник статей, Тр. МИАН, **294**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2016, 7–19; англ. пер.: V. I. Afanasyev, “On a decomposable branching process with two types of particles”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **294** (2016), 1–12.
2. В. И. Афанасьев, “Функциональная предельная теорема для разложимого ветвящегося процесса с двумя типами частиц”, *Матем. заметки*, **103**:3 (2018), 323–335; англ. пер.: V. I. Afanasyev, “A functional limit theorem for decomposable branching processes with two particle types”, *Math. Notes*, **103**:3 (2018), 337–347.

Алымова Е. В., Кудрявцев О. Е. (Ростов-на-Дону, Россия). **Применение нейронной сети для предсказания поведения финансовых временных рядов**[1]**.**

Построена нейронная сеть долгой краткосрочной памяти (LSTM) [1] для прогнозирования поведения валютной пары BTC/USD. В ее основе лежит логистическое распределение, функция распределения которого служит функцией активации сети.

Сеть обучена на данных истории торгов с интервалом в одну минуту, рассчитанных по каждому показателю торгов как логарифмы отношений значений следующей минуты к предыдущей. Целевой индикатор (рост/снижение) рассчитывается на основе логарифма отношения закрытия торгов на пятой минуте к открытию на первой минуте.

Для сети LSTM построена таблица сопряженности и рассчитаны показатели критерия Мак-Немара [2] по формуле $\chi^2 = (\mathrm{FP} - \mathrm{FN})^2/(\mathrm{FP} + \mathrm{FN})$, где FP и FN — количество случаев ложного предсказания роста (падения) цены.

Утверждение. *По критерию Мак-Немара* ($\chi^2 = 2.3 < \chi^2_{\mathrm{cr}} = 3.8$) *при уровне значимости* 5% *не отклоняется гипотеза о том, что модель поведения финансового ряда на основе показателей логарифмической доходности согласуется с реальным процессом изменения финансового ряда* BTC/USD.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. Fischer, C. Krauss, “Deep learning with long short-term memory networks for financial market predictions”, *European J. Oper. Res.*, **270**:2 (2018), 654–669.
2. T. G. Dietterich, “Approximate statistical tests for comparing supervised classification learning algorithms”, *Neural Comput.*, **10**:7 (1998), 1895–1923.

Белопольская Я. И. (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия). **Применение нейронной сети для предсказания поведения финансовых временных рядов**[2]**.**

Наша цель — вывести замкнутые системы стохастических уравнений для диффузионных процессов, ассоциированных с системами квазилинейных параболических уравнений с кросс-диффузией [1]–[3]. При этом рассматриваемые параболические уравнения интерпретируются как прямые уравнения Колмогорова и выводятся формулы типа формулы Фейнмана–Каца для вероятностных представлений слабых решений задачи Коши для этих параболических уравнений. Общая теория иллюстрируется на примере задачи Коши для простейшей системы магнитогидродинамики

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = \frac{\sigma^2}{2}\Delta v + (\nabla \times B) \times B, \quad v(0,y) = v_0(y) \in \mathbf{R}^3, \tag{1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu^2}{2}\Delta B + \nabla \times (v \times B), \quad B(0,y) = B_0(y) \in \mathbf{R}^3, \qquad y \in \mathbf{R}^3, \quad t \in [0,T]; \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00910).
[2]Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 17-11-01136).

здесь v — скорость проводящей жидкости, B — напряженность магнитного поля. Пусть $w_m(t)$ — независимые винеровские процессы, ξ_{0m} — случайные величины с распределениями $u_{0m}(dy)$, не зависящие от $w_m(t)$, и $u_{0m}(dy) = u_{0m}(y)\,dy$, где $u_{0m} = v_{0m}$ при $m = 1,2,3$ и $u_{0m} = B_{0m}$ при $m = 4,5,6$.

Зададим случайные процессы $\xi_m(t)$, $\eta_m(t)$ соотношениями

$$\xi_m(t) = \xi_{0m} + \sigma w_m(t), \quad m = 1,2,3, \qquad \xi_m(t) = \xi_{0m} + \mu w_m(t), \quad m = 4,5,6, \tag{3}$$

$$\eta_m(t) = 1 + \int_0^t c_m(u(\theta,\xi_m(\theta)), \nabla u(\theta,\xi_m(\theta)))\eta_m(\theta)\,d\theta, \tag{4}$$

где $u = (u_1,\dots,u_6)$, $u_m = v_m$ при $m = 1,2,3$ и $u_m = B_m$ при $m = 4,5,6$,

$$\int_{\mathbf{R}^d} h_m(y)\,u_m(t,dy) = \mathbf{E}[h_m(\xi_m(t))\eta_m(t)], \qquad m = 1,\dots,6, \tag{5}$$

и коэффициенты $c_m\colon \mathbf{R}^6\times(\mathbf{R}^6\otimes\mathbf{R}^3) \to \mathbf{R}$ определяются из соотношений (1), (2). В силу теоремы Рисса соотношение (5) можно заменить соотношением

$$u_m(t,y) = \int_{\mathbf{R}^d} p_m(0,x,t,y)u_{0m}(x)\,dx + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \widetilde{c}_m^{\,u}(t,z)p_m(\theta,z,t,y)u_m(\theta,z)\,dz\,d\theta, \tag{6}$$

где $p_m(0,x,t,y)$ — плотности переходных вероятностей процессов $\xi_m(t)$,

$$\widetilde{c}_m^{\,u}(t,z) = c_m(u(t,z),\nabla u(t,z)) \quad \text{и} \quad u_m(t,dy) = u_m(t,y)\,dy.$$

Теорема. *Пусть $u_{0m} \in W^{1,1}(\mathbf{R}^3)$. Тогда существует единственное решение стохастической системы* (3), (4), (6), *определенное на некотором интервале* $[0,T]$, *и функции $u_m \in L^1([0,T],W^{1,1}(\mathbf{R}^d))\cap L^1([0,T],L^\infty(\mathbf{R}^d))$ определяют единственное ослабленное решение задачи Коши* (1), (2).

В одномерном случае аналогичный результат получен в работе [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ya. Belopolskaya, “Stochastic models for nonlinear cross-diffusion systems”, *Statistics and simulation*, Springer Proc. Math. Stat., **231**, Springer, Cham, 2018, 145–159.
2. Я. И. Белопольская, “Стохастическая интерпретация квазилинейных параболических систем с кросс-диффузией”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **61**:2 (2016), 268–299; англ. пер.: Ya. I. Belopolskaya, “Stochastic interpretation of quasilinear parabolic systems with cross diffusion”, *Theory Probab. Appl.*, **61**:2 (2017), 208–234.
3. Ya. I. Belopolskaya, “Probabilistic counterparts of nonlinear parabolic partial differential equation systems”, *Modern stochastics and applications*, Springer Optim. Appl., **90**, Springer, Cham, 2014, 71–94.
4. Я. И. Белопольская, А. О. Степанова, “Стохастическая интерпретация системы МГД–Бюргерс”, *Вероятность и статистика*. 26, Зап. науч. сем. ПОМИ, **466**, ПОМИ, СПб., 2017, 7–29.

Белова Ю. В. (Ростов-на-Дону, Россия), **Никитина А. В., Филина А. А.** (Таганрог, Россия). **Статистическая обработка натурных данных для изучения биогенного загрязнения мелководного водоема стоками рек при моделировании его экологического состояния**[3)]**.**

При изучении биогенного загрязнения мелководного водоема стоками рек использовались детерминистические уравнения в частных производных. Входящие в них параметры и функции, например функция продуктивности фитопланктона и коэффициент турбулентного переноса загрязняющих веществ в вертикальном направлении, определялись вероятностными моделями.

Теорема. *Пусть* $q_i(x,y,z,t)$, $R_i \in C^2(D_t) \cap C(\overline{D}_t)$, $D_t = G \times (0 < t < T_0)$, $R_i = p_i(q_j)q_i + \overline{R}_i$, $i \neq j$; $\mu_i = \mathrm{const} > 0$; $U, \nu_i(z) \in C^1(\overline{G})$; $q_i^0 \in C(\overline{G})$, $i = 1,\ldots,10$. *Тогда при выполнении неравенств*

$$\max_G\{\mu_i,\nu_i\} - \frac{1}{\lambda_0}\max_G\{|p_i|\} > 0 \quad \textit{и} \quad 2\mu_i\left(\frac{1}{L_x^2}+\frac{1}{L_y^2}\right)+\frac{2\nu_i}{L_z^2} \geqslant \varphi_i$$

для всех $i = 1,\ldots,10$ (*функции* φ_i *определяются источниками загрязняющих веществ*), *где*

$$\lambda_0 = \pi^2\left(\frac{1}{L_x^2}+\frac{1}{L_y^2}+\frac{1}{L_z^2}\right)$$

и L_x, L_y, L_z *— максимальные размеры расчетной области* G, *модельная задача, описывающая процесс продукции-деструкции в мелководном водоеме* [1], *имеет единственное решение.*

При статистической обработке натурных данных вычислялись следующие значения: коэффициенты асимметрии C_s, эксцесса C_e, дисперсия D и стандартное отклонение σ, коэффициент вариации C_ν, отношение C_s/C_ν, коэффициент автокорреляции и отношение Неймана. Для определения значимости автокорреляционных связей использовался критерий Андерсона. По отношению Неймана с заданным уровнем значимости проверялась значимость коэффициента автокорреляции для рассматриваемых биогенных веществ. Так как статистический анализ показал неоднородность данных натурных наблюдений в выборках, их необходимо разделить на сезоны и месяцы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. V. Nikitina, L. Kravchenko, I. Semenov, Yu. Belova, A. Semenyakina, "Modeling of production and destruction processes in coastal systems on a supercomputer", *MATEC Web Conf.*, **226** (2018), 04025, 7 pp.

Bordag L. A. (Zittau, Germany). **Optimization problem for a portfolio with an illiquid asset in the case of an exponential utility function.**

We study an optimization problem for a portfolio with an illiquid, a risky and a risk-free asset in the framework of continuous time. Problems of such type lead to a three-dimensional nonlinear Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) equation on the value function $V(l,h,t)$. In this framework we suppose that the illiquid asset is

[3)] Работа выполнена по теме № 2.6905.2017/БЧ в рамках госзадания Минобрнауки России в части НИР.

sold in an exogenous random moment of time T with a prescribed liquidation time distribution with a survival function $\overline{\Phi}(T)$. The HJB equation in the case of a negative exponential utility function $U^{\mathrm{EXPn}}(c) = -e^{-ac}$ after formal maximization procedure will take the form

$$\begin{aligned}
V_t(l,h,t) &+ \frac{1}{2}\eta^2 h^2 V_{hh}(l,h,t) + (rl+\delta h)V_l(l,h,t) + (\mu-\delta)hV_h(l,h,t)\\
&- \frac{(\alpha-r)^2 V_l^2(l,h,t) + 2(\alpha-r)\eta\rho h V_l(l,h,t)V_{lh}(l,h,t) + \eta^2\rho^2\sigma^2 h^2 {V_{lh}}^2(l,h,t)}{2\sigma^2 V_{ll}(l,h,t)}\\
&+ \frac{1}{a}V_l(l,h,t)\ln V_l(l,h,t) - \frac{1}{a}\big(1+\ln\overline{\Phi}(t)\big)V_l(l,h,t)\\
&- \frac{\ln a}{a}V_l(l,h,t) = 0, \qquad V\to 0, \quad t\to\infty. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Earlier we studied similar optimization problems with a HARA and a logarithmic utility functions in [1], [2]. In this paper we study the optimization problem with negative and positive exponential utility functions (EXPn and EXPp), which are economically equivalent. It is well known that both, the logarithmical (LOG) and EXPn utility functions, are connected with the HARA utility: in the first case the parameter of the HARA utility is going to zero and in the second case to infinity. In [1], [2], devoted to the optimization problem with a general HARA and LOG utility functions we proved that also the corresponding analytical and Lie algebraic structures are connected by the same limiting procedure. In this paper we show that the case of EXPn utility function differs from the case of the HARA utility function and has its own special Lie algebraic structure which is not connected to the HARA case by the limiting procedure. We carry out the Lie group analysis of PDEs for EXPn and EXPp utility functions and we are able to obtain the admitted symmetry algebras.

Theorem. *The HJB equation* (1) *admits the four-dimensional Lie algebra* $L_4^{\mathrm{EXPn}} = \langle \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4\rangle$, *where*

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{ar}\frac{\partial}{\partial l} - V\frac{\partial}{\partial V}, \qquad \mathbf{U}_2 = \frac{\partial}{\partial V},$$
$$\mathbf{U}_3 = -\frac{1}{ar}\left(e^{rt}\int e^{-rt}\, d\ln\overline{\Phi}(t)\right)\frac{\partial}{\partial l} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathbf{U}_4 = e^{rt}\frac{\partial}{\partial l},$$

with the following nontrivial commutation relations: $[\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2] = \mathbf{U}_2$, $[\mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4] = \mathbf{U}_4$. *Except finite dimensional Lie algebra* L_4^{EXPn} *the equation* (1) *admits also an infinite dimensional algebra* $L_\infty = \langle \psi(h,t)\partial/\partial V\rangle$, *where the function* $\psi(h,t)$ *is any solution of the linear parabolic PDE* $\psi_t(h,t) + (1/2)\eta^2 h^2 \psi_{hh}(h,t) + (\mu-\delta)h\psi_h(h,t) = 0$.

We prove explicitly that both optimization problems with EXPn and EXPp utility functions are connected by a one-to-one analytical substitution and are identical from the economical, analytical or Lie algebraic point of view. We provide the complete set of nonequivalent group invariant reductions of the three-dimensional PDEs corresponding to the optimization problem with the EXPn and EXPp utility functions to two-dimensional PDEs in accordance with an optimal system of sub-algebras of the admitted Lie algebra. We prove that in one case the invariant reduction is consistent with the boundary condition. The two-dimensional PDE is more convenient for applications of numerical methods than the original three-dimensional PDE. Because of the uniqueness of the solution of the HJB equation we can use the reduced two-dimensional PDE to study the properties of the optimal solution and the investment-consumption strategies.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. A. Bordag, I. P. Yamshchikov, “Optimization problem for a portfolio with an illiquid asset: Lie group analysis”, *J. Math. Anal. Appl.*, **453**:2 (2017), 668–699.
2. L. A. Bordag, I. P. Yamshchikov, D. Zhelezov, “Portfolio optimization in the case of an asset with a given liquidation time distribution”, *Int. J. Eng. Math. Model.*, **2**:2 (2015), 31–50.

Чистяков А. Е., Проценко С. В. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Исследование точности решения волновой задачи с возмущенными начальными условиями**[4]**.**

В ходе экспедиционных исследований Азовского моря были получены данные о пульсациях скоростей водного потока в некоторых точках водоемов с помощью зонда ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler) WHS600 Sentinel [1]. Найдены коэффициенты корреляции исходных данных компонент вектора скорости с полученными нормальным и логнормальным распределениями. Данные натурных измерений используются в качестве начальных условий при моделировании волновых процессов. Ниже приведены теоретические оценки погрешности решения волновой задачи на основе численных методов.

Теорема. *Пусть* $|k| < 2$, $k = 2 - \lambda_i\tau^2/(1+\lambda_i\sigma\tau^2)$, *где* τ *— шаг по времени,* σ *— вес схемы,* λ_i *— собственные числа оператора* Λ, $\Lambda c = \sum_{j=1}^{r}(\mu c_{\overline{x}_j})_{x_j}$, $(\,\cdot\,)_{\overline{x}_j}$ *и* $(\,\cdot\,)_{x_j}$ *— левая и правая разностные производные по пространственному направлению* x_j, r *— размерность пространства. Тогда погрешность численного решения волновой задачи с возмущенными начальными условиями*

$$c''_{tt} = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} c),$$
$$c\big|_{x=0} = 0, \quad c\big|_{x=l} = 0, \quad c\big|_{t=0} = c_0, \quad c'_t\big|_{t=0} = c_1, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t \geqslant 0,$$

имеет вид

$$\psi_i^{n+1} = C^n\psi_i^0 + \xi^n;$$

здесь ψ_i^0 *— погрешность задания начальных условий,*

$$C^n = \cos(n\varphi) + \frac{k}{\sqrt{4-k^2}}\sin(n\varphi), \qquad \cos\varphi = \frac{k}{2},$$

n *— номер слоя по временной переменной;* ξ^n *— погрешность, накопленная при переходах между временными слоями, для которой имеет место оценка*

$$|\xi^n| \leqslant \frac{2n}{\sqrt{4-k^2}}\big|k - 2\cos\big(\sqrt{\lambda_i}\,\tau\big)\big|\sqrt{(\alpha_{i,0})^2 + \frac{1}{\lambda_i}(\alpha_{i,1})^2},$$

где $c = \sum_i \alpha_i X_i$ *и* X_i *— собственные векторы оператора* Λ.

[4] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-00623).

Замечание. В работе рассмотрены граничные условия в форме Дирихле (жесткая граница); в случае граничных условий в форме Неймана (мягкая граница) результат будет аналогичным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. А. Гущин, А. В. Никитина, А. А. Семенякина, А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, "Модель транспорта и трансформации биогенных элементов в прибрежной системе и ее численная реализация", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **58**:8 (2018), 120–137; англ. пер.: V. A. Gushchin, A. I. Sukhinov, A. V. Nikitina, A. E. Chistyakov, A. A. Semenyakina, "A model of transport and transformation of biogenic elements in the coastal system and its numerical implementation", *Comput. Math. Math. Phys.*, **58**:8 (2018), 1316–1333.

Чуб Е. Г., Погорелов В. А. (Ростов-на-Дону, Россия). **О некотором решении задачи оптимального управления нелинейными стохастическими системами на основе использования информационных критериев**[5]**.**

Теорема. *Пусть объект описывается нелинейным дифференциальным уравнением* $\dot{Y} = F_1(Y,t) + F_2(Y,t)V + U$, *где* Y *— функция, описывающая динамику объекта,* F_1, F_2 *— известные нелинейные функции, удовлетворяющие условию Липшица для всех* Y, t *и дифференцируемые* N *раз на интервале времени* (t_0,t), V *— нормированный белый гауссовский шум,* U *— искомое управление, минимизирующее функционал* $J = \int_D \Phi_1[\rho]\,dY + \int_{t_0}^{t}\int_D \Phi_2[U]\,dY\,dt$, *при этом* D *— область пространства состояния, определяемая оптимальным управлением,* $\rho(Y,t)$ *— плотность вероятностей процесса* Y, *описываемая уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова.*

Если плотность распределения $\rho(Y,t)$ допускает гауссовскую аппроксимацию, в качестве Φ_1 используется критерий Шеннона и $\Phi_2[U] = U^2$, то управление находится в явном виде: $U = (1/2)\partial\rho/\partial Y$, а параметры распределения определяются из системы

$$m'(t) = q(m(t)), \quad D'(t) = -2q'(m(t))D(t) + b(m(t)),$$

где $m(t)$ — математическое ожидание, $D(t)$ — дисперсия распределения,

$$q(Y,t) = F_1(Y,t) + \frac{1}{2}F_2\frac{\partial F_2(Y,t)}{\partial Y}, \quad b(Y,t) = F_2^2(Y,t).$$

Представленное управление легко реализуется в современных вычислителях.

Данекянц А. Г., Неумержицкая Н. В. (Ростов-на-Дону, Россия). **О рациональных и иррациональных интерполяционных мартингальных мерах**[6]**.**

Данный доклад является продолжением работ [1], [2] и связан с вопросом существования невырожденных слабо интерполяционных мартингальных мер (н.с.и.м.м.) одношагового рынка с дисконтированной ценой акции $Z =$

[5] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00451).
[6] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00451).

$(Z_k, \mathscr{F}_k)_{k=0}^1$ (определение н.с.и.м.м. можно найти в [1], [2]). Процесс Z определен на счетном пространстве исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$; $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathscr{F}_1$ — множество всех подмножеств Ω; $a := Z_0$, $b_i := Z_1(\omega_i)$, $i = 1, 2, \dots$, $\mathbf{b} := (b_1, b_2, \dots)$. Предполагается, что рассматриваемый рынок безарбитражен, т.е. допускает мартингальные меры $P = (p_1, p_2, \dots)$ на $(\Omega, \mathscr{F}_1)$, для которых $p_i = P(\omega_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots$, и процесс $Z = (Z_k, \mathscr{F}_k, P)_{k=0}^1$ является мартингалом.

Ненулевую последовательность $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots)$ будем называть финитной, если ее компоненты рациональны и среди них лишь конечное число ненулевых. Для последовательности действительных чисел $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots)$ обозначим через $\mathscr{L}(\mathbf{d})$ совокупность чисел вида $\sum r_i d_i$, где $\mathbf{r}$ пробегает все финитные последовательности.

Теорема. 1. *Пусть число a иррационально, а последовательность $\mathbf{b}$ содержит бесконечное число различных рациональных чисел. Если $a \notin \mathscr{L}(\mathbf{b})$, то исходный рынок допускает н.с.и.м.м.*

2. *Пусть число a и все члены последовательности $\mathbf{b}$ рациональны. Если мартингальная мера $P = (p_1, p_2, \dots)$ такова, что $\mathscr{L}(P)$ состоит лишь из иррациональных чисел, то P есть н.с.и.м.м.*

Первый пункт теоремы является обобщением результата из [2]. Пункт 2 теоремы подкрепим следующим примером.

Пример. Пусть последовательность положительных чисел $\mathbf{d}$ такова, что $\mathscr{L}(\mathbf{d})$ состоит лишь из иррациональных чисел (например, если число t трансцендентно, то последовательность $(t, t^2, t^3, \dots)$ обладает этим свойством). Находим последовательность $(c_1, c_2, \dots)$ положительных рациональных чисел такую, что $\sum c_i d_i = 1$. Полагаем $p_i = c_i d_i$. Пусть a — произвольное рациональное число. Находим последовательность рациональных чисел $\mathbf{b}$ такую, что $\sum b_i p_i = a$. Тогда $P = (p_1, p_2, \dots)$ является н.с.и.м.м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Pavlov, “New family of one-step processes admitting special interpolating martingale measures”, *Global and Stochastic Analysis*, **5**:2 (2018), 111–119.
2. А. Г. Данекянц, Н. В. Неумержицкая, “Обобщение одного результата о существовании слабо интерполяционных мартингальных мер”, в ст. “Тезисы докладов, представленных на Третьей международной конференции по стохастическим методам”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **64**:1 (2019), 151–204; англ. пер.: A. G. Danekyants, N. V. Neumerzhitskaia, “Generalization of a result on the existence of weakly interpolating martingale measures”, in “Abstracts of talks given at the 3rd International conference on stochastic methods”, *Theory Probab. Appl.*, **64**:1 (2019), 134–135.

Димитров Д. В. (Москва, Россия)**. Оценивание дивергенции Кульбака–Лейблера с помощью статистик k-ближайших соседей и приложения**[7]**.**

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные векторы $\{X_i, Y_i,\ i \in \mathbf{N}\}$ такие, что $\operatorname{law}(X_1) = \operatorname{law}(X)$ и $\operatorname{law}(Y_1) = \operatorname{law}(Y)$, где X и Y — случайные векторы, принимающие значения в пространстве $\mathbf{R}^d$, $d \geqslant 1$. Пусть

[7] Работа выполнена при поддержке гранта МГУ им. М. В. Ломоносова “Современные проблемы фундаментальной математики и механики”.

X и Y имеют плотности $p = d\mathbf{P}_X/d\mu$ и $q = d\mathbf{P}_Y/d\mu$ относительно меры Лебега μ в $\mathbf{R}^d$. Исследуются оценки дивергенции Кульбака–Лейблера $D(\mathbf{P}_X \,\|\, \mathbf{P}_Y) := \int_{\mathbf{R}^d} p(x)\ln(p(x)/q(x))\,\mu(dx)$, построенные по двум выборкам $\mathbf{X}_n := \{X_1,\dots,X_n\}$ и $\mathbf{Y}_m := \{Y_1,\dots,Y_m\}$, $n,m \in \mathbf{N}$. Метод построения оценок $\widehat{D}_{n,m}(k,l)$ (см. [1]) основан на использовании специальных статистик k-ближайших соседей. В случае дифференциальной энтропии Шеннона похожие оценки были рассмотрены в статье [2] для $k = 1$. В [1] для произвольного $k \geqslant 1$ нами предложены широкие условия на плотности p и q, которые гарантируют асимптотическую несмещенность и L^2-состоятельность оценок дивергенции. Сформулируем новый результат в случае, когда $p(x)$ и $q(x)$ являются плотностями смесей распределений, т.е. $p(x) := \sum_{i=1}^{I} \alpha_i p_i(x)$ и $q(x) := \sum_{j=1}^{J} \beta_j q_j(x)$, где $0 < \alpha_i < 1$, $i \in \{1,\dots,I\}$, $\sum_{i=1}^{I} \alpha_j = 1$, $0 < \beta_j < 1$, $j \in \{1,\dots,J\}$, $\sum_{j=1}^{J} \beta_j = 1$.

Теорема. *Пусть для некоторых* $\varepsilon, R > 0$, $N \in \mathbf{N}$ *и любых* $i, i_1, i_2 \in \{1,\dots,I\}$, $j \in \{1,\dots,J\}$ *функционалы* $K_{p_i,q_j}(2,N)$, $Q_{p_i,q_j}(\varepsilon,R)$, $T_{p_i,q_j}(\varepsilon,R)$, $K_{p_{i_1},p_{i_2}}(2,N)$, $Q_{p_{i_1},p_{i_2}}(\varepsilon,R)$, $T_{p_{i_1},p_{i_2}}(\varepsilon,R)$ *конечны. Тогда для фиксированных* $k,l \in \mathbf{N}$ *оценки* $\widehat{D}_{n,m}(k,l)$ *являются* L^2*-состоятельными, т.е.*

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{E}\big(\widehat{D}_{n,m}(k,l) - D(\mathbf{P}_X \,\|\, \mathbf{P}_Y)\big)^2 = 0.$$

Определения функционалов K_{f_1,f_2}, Q_{f_1,f_2} и T_{f_1,f_2} для плотностей f_1, f_2 можно найти в статье [1]. В качестве следствия получаем, что оценки дивергенции Кульбака–Лейблера между любыми двумя смесями гауссовских распределений в $\mathbf{R}^d$ с невырожденными ковариационными матрицами являются L^2-состоятельными.

Рассмотрено приложение введенных оценок к поиску неоднородностей в волокнистом материале, заполняющем некоторый параллелепипед $U \subset \mathbf{R}^3$. В отличие от метода, предложенного в работе [3] и основывающегося на оценках дифференциальной энтропии Шеннона, мы используем скан-статистики, построенные с помощью оценок $\widehat{D}_{n,m}(k,l)$ и определенные для фиксированного множества параллелепипедов, лежащих в U. Результаты симуляций также обсуждаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Bulinski, D. Dimitrov, *Statistical estimation of the Kullback–Leibler divergence*, arXiv: 1907.00196.
2. A. Bulinski, D. Dimitrov, “Statistical estimation of the Shannon entropy”, *Acta Math. Sin.* (*Engl. Ser.*), **35**:1 (2019), 17–46.
3. P. Alonso Ruiz, E. Spodarev, “Entropy-based inhomogeneity detection in fiber materials”, *Methodol. Comput. Appl. Probab*, **20**:4 (2018), 1223–1239.

Дьяконова Е. Е., Ватутин В. А. (Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия). **Эволюция слабо докритических ветвящихся процессов в случайной среде: размер популяции на начальном этапе**[8]**.**

Пусть $\mathscr{Z} := \{Z_n, n = 0,1,\dots\}$ — ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС), задаваемой последовательностью случайных независимых одинаково

[8]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-01-00111).

распределенных производящих функций $\{f_n(s),\, n = 1, 2, \dots\}$ (см. статью [1], где дано детальное описание свойств таких процессов). Обозначим

$$X_n = \ln f_n'(1), \qquad \eta_n = \frac{f_n''(1)}{(f_n'(1))^2}.$$

ВПСС называется *слабо докритическим*, если $\mathbb{E}[X_1] < 0$ и найдется число $0 < \beta < 1$ такое, что $\mathbb{E}[X_1 e^{\beta X_1}] = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathscr{Z}$ *— слабо докритический ВПСС, удовлетворяющий условиям* $\mathbb{E}[X_1^2 e^{\beta X_1}] < \infty$ *и* $\mathbf{E}[(\ln^+ \eta_1)^{2+\varepsilon}] < \infty$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$. *Если* $r = r(n) \to \infty$ *так, что* $r = o(n)$, *то при* $n \to \infty$

$$\mathscr{L}\left(\frac{1}{\sqrt{r}} \ln Z_r \,\middle|\, Z_n > 0\right) \to \mathscr{L}(B_1),$$

где $\{B_t,\, t \geqslant 0\}$ *— броуновское движение, рассматриваемое при его неотрицательности при всех* $t \geqslant 0$ *(см. статью* [2], *в которой содержится соответствующее определение).*

Этот результат дополняет теорему 1 работы [3], где рассматривался случай $r \sim tn$ для $t \in (0, 1)$. Заметим, что аналог этого утверждения для критических ВПСС был доказан в статье [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Kersting, V. Vatutin, *Discrete time branching processes in random environment*, Math. Stat. Ser., ISTE, London; John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2017, xiv+273 pp.
2. R. T. Durrett, D. L. Iglehart, D. R. Miller, "Weak convergence to Brownian meander and Brownian excursion", *Ann. Probab.*, **5**:1 (1977), 117–129.
3. В. И. Афанасьев, "Функциональная предельная теорема для логарифма умеренно докритического ветвящегося процесса в случайной среде", *Дискрет. матем.*, **10**:3 (1998), 131–147; англ. пер.: V. I. Afanasyev, "A functional limit theorem for the logarithm of a moderately subcritical branching process in a random environment", *Discrete Math. Appl.*, **8**:4 (1998), 421–438.
4. V. Vatutin, E. Dyakonova, "Path to survival for the critical branching processes in a random environment", *J. Appl. Probab.*, **54**:2 (2017), 588–602.

Esquível M. L. (FCT NOVA & CMA UNL, Portugal). **On a stochastic model for a cooperative banking scheme for microcredit**[9)].

For microcredit modeling purposes, we consider:

$$S_t = P_t - R_t = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{N_t^i} X_{i,j}\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{M_t^i} Y_{i,k}\right), \tag{1}$$

a model — with zero interest rate — for a *collective vault* of m *vault* owners such that, for each owner $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, the r.v. $X_{i,j}$ (respectively, $Y_{i,k}$) represents

9)This work was partially supported through the project UID/MAT/00297/2013 (Centro de Matemática e Aplicações) financed by the Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portuguese Foundation for Science and Technology).

the payments (respectively, the loans granted) with common nontrivial moment generating function φ_i (respectively, ψ_i) and $(N_t^i)_{t\geqslant 0}$ (respectively, $(M_t^i)_{t\geqslant 0}$) is the counting Poisson process for the payments times (respectively, the granted loans times) such that $N_t^i \frown \mathscr{P}(\nu_i)$ (respectively, $M_t^i \frown \mathscr{P}(\mu_i)$) and all the random variables are independent. As a consequence of the optional sampling theorem for continuous martingales, we have the following result ensuring the stability of the *collective vault*, meaning, the solvency of the microbank [1].

Theorem. *Let the first ruin time after time $\delta > 0$ be given by*

$$\tau_\delta := \inf\{t > \delta \colon S_t < 0\}.$$

Then the cumulant generating function of S_1 is given by

$$g(u) := \ln(\mathbf{E}[e^{uS_1}]) = \sum_{i=1}^{m} \bigl(\nu_i(\varphi_i(u) - 1) + \mu_i(\psi_i(-u) - 1)\bigr).$$

And, if either $\mathbf{E}[P_1] > \mathbf{E}[R_1]$ — which is a condition at time $t = 1$ — or

$$\forall\, i = 1, \ldots, m \quad \forall\, t > 0 \quad \mathbf{E}\Biggl[\sum_{k=1}^{M_t^i} Y_{i,k}\Biggr] < \mathbf{E}\Biggl[\sum_{j=1}^{N_t^i} X_{i,j}\Biggr],$$

then, there exists $u_a < 0$ with $g(u_a) < 0$ such that

$$\mathbf{P}[\tau_\delta < +\infty] \leqslant e^{\delta g(u_a)}.$$

As an example, in the case where $X_{i,j} \frown \chi^2_{k_i}(\lambda_{1,i})$ and $Y_{i,k} \frown \chi^2_{l_i}(\lambda_{2,i})$ and with the parameters given in the following table, the conditions of the theorem are verified and we can determine $u_a^\star < 0$ such that $g(u_a^\star) = \min_{u_a<0}(g(u_a))$ and we get $u_a^\star = -0.0790191$ with $g(u_a^\star) = -6.40092$. Then, $\mathbf{P}[\tau_1 < +\infty] \approx 0.00166003$ and also $\mathbf{P}[\tau_2 < +\infty] \approx 2.75568 \cdot 10^{-6}$.

i	$\lambda_{1,i}$	κ_i	ν_i	$\lambda_{2,i}$	l_i	μ_i	$\mu_i(\lambda_{2,i} + l_i)$	$\nu_i(\lambda_{1,i} + \kappa_i)$
1	1	4	10	6	3	1.1	9.9	50
2	1.8	5	12	7	3	0.9	9.	81.6
3	2.3	4	9	7	3	1.2	12.	56.7

The practical management of a *collective vault* requires a set of conditioning lending rules that destroy the independence [2], [3]. An example presented, deserving further study, is obtained by replacing at each time t the receivables R_t by $\min(R_t, (1+\alpha)S_t^+)$, which amounts to grant the requested loan R_t only if $R_t \leqslant (1+\alpha)\max(S_t, 0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. L. Esquível, P. P. Mota, J. P. Pina, *On a stochastic model for a cooperative banking scheme for microcredit*, 2019, preprint.
2. Hua Dong, Zaiming Liu, “The ruin problem in a renewal risk model with two-sided jumps”, *Math. Comput. Modelling*, **57**:3-4 (2013), 800–811.
3. J. J. Rebello, K. K. Thampi, “Some ruin theory components of two sided jump problems under renewal risk process”, *Int. Math. Forum*, **12**:7 (2017), 311–325.

Федоткин М. А., Зорин А. В. (Нижний Новгород, Россия). **Стохастические модели процессов адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований.**

В настоящем докладе собраны разрабатываемые в Нижегородском государственном университете методы математического и имитационного моделирования и анализа процессов управления конфликтными потоками неоднородных требований. В основе этих методов лежит использование понятия *абстрактной стохастической управляющей системы* Ляпунова–Яблонского [1]. При таком подходе реализуются следующие принципы: дискретность актов функционирования управляющей системы, нелокальность описания блоков управляющей системы. Управляющую систему составляют: 1) блок формирования входных потоков; 2) входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{\widehat{m}}$, $1 \leqslant \widehat{m} < \infty$, и потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}, \dots, \Pi_m^{\text{нас}}$, $1 \leqslant m < \infty$; 3) очереди $O_1, O_2, \dots, O_m$; 4) блок стратегии механизма обслуживания; 5) обслуживающее устройство; 6) алгоритм управления потоками; 7) выходные потоки $\Pi_1^{\text{вых}}, \Pi_2^{\text{вых}}, \dots, \Pi_m^{\text{вых}}$. Пусть возрастающая последовательность $\{\tau_i,\ i = 0, 1, 2, \dots\}$ определяет шкалу моментов наблюдения. На промежутке $(\tau_i, \tau_{i+1}]$ случайные элементы задают: χ_i — состояние блока формирования входных потоков, η_i — вектор количества требований по входным потокам, ξ_i — вектор количества требований по потокам насыщения и $\overline{\xi}_i$ — вектор количества требований по выходным потокам. К моменту τ_i относятся Γ_i — состояние обслуживающего устройства и κ_i — вектор длин очередей. Тогда математической моделью процесса управления конфликтными потоками является векторная случайная последовательность

$$\{(\tau_i, \chi_i, \eta_i, \xi_i, \Gamma_i, \kappa_i, \overline{\xi}_i),\ i = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Теорема. *При указанных в работах* [2]–[5] *ограничениях на условные распределения векторной последовательности* $\{(\tau_i, \chi_i, \eta_i, \xi_i),\ i = 0, 1, 2, \dots\}$ *и функциональных соотношениях между* Γ_{i+1}, κ_{i+1}, $\overline{\xi}_i$, *с одной стороны, и* Γ_i, κ_i, η_i, ξ_i *— с другой, векторная последовательность*

$$\{(\chi_i, \Gamma_i, \kappa_i, \overline{\xi}_{i-1}),\ i = 0, 1, 2, \dots\} \tag{1}$$

является счетной управляемой цепью Маркова.

Здесь управление появляется в виде рекуррентного соотношения $\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i)$. Также в работах [2]–[5] получены необходимые и достаточные условия существования стационарного распределения для последовательности (1).

Предлагаемый подход позволяет найти ограничения на параметры процесса управления конфликтными потоками неоднородных требований, при которых существует стационарный режим. Кроме того, оказывается возможным определить квазиоптимальные параметры по условию минимума среднего времени пребывания произвольного требования в системе путем имитационного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Ляпунов, С. В. Яблонский, “Теоретические проблемы кибернетики”, Проблемы кибернетики: сб. ст., **9**, Физматгиз, М., 1963, 5–22.

2. А. В. Зорин, М. А. Федоткин, “Оптимизация управления дважды стохастическими неординарными потоками в системах с разделением времени”, *Автомат. и телемех.*, 2005, № 7, 102–111; англ. пер.: A. V. Zorin, M. A. Fedotkin, “Optimization of control of doubly stochastic nonordinary flows in time-sharing systems”, *Autom. Remote Control*, **66**:7 (2005), 1115–1124.
3. Е. В. Кудрявцев, М. А. Федоткин, “Анализ дискретной модели системы адаптивного управления конфликтными неоднородными потоками”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 15. *Вычисл. матем. и киберн.*, 2019, № 1, 19–26; англ. пер.: E. V. Kudryavtsev, M. A. Fedotkin, “Analysis of a discrete model of an adaptive control system for conflicting nonhomogeneous flows”, *Moscow Univ. Comput. Math. Cybernet.*, **43**:1 (2019), 17–24.
4. M. Rachinskaya, M. Fedotkin, “Stationarity conditions for the control systems that provide service to the conflicting batch Poisson flows”, *Analytical and computational methods in probability theory*, ACMPT 2017, Lecture Notes in Comput. Sci., **10684**, Springer, Cham, 2017, 43–53.
5. Е. В. Пройдакова, М. А. Федоткин, “Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками”, *Автомат. и телемех.*, 2008, № 6, 96–106; англ. пер.: E. V. Proidakova, M. A. Fedotkin, “Control of output flows in the system with cyclic servicing and readjustments”, *Autom. Remote Control*, **69**:6 (2008), 993–1002.

Филина А. А. (Таганрог, Россия)**, Никитина А. В.** (Таганрог, Россия)**, Лященко Т. В.** (Таганрог, Россия)**, Кравченко Л. В.** (Зерноград, Россия)**, Забалуева А. И.** (Таганрог, Россия)**. Математическое моделирование микробиологической деструкции нефтяного загрязнения прибрежной системы на основе стохастического подхода**[10]**.**

Система детерминистических уравнений, описывающая процессы биодеградации углеводородов нефти в прибрежной системе на основе комбинированных методов математического моделирования с использованием стохастического подхода, с входящими в нее вероятностными подмоделями учитывает одновременное влияние внешних факторов (включая соленость, температуру и освещенность) на скорость массообмена:

$$(P_i)'_t + \operatorname{div}(\mathbf{u}P_i) = \mu_i \Delta P_i + \varphi_i, \qquad i \in 1, \ldots, 4; \tag{1}$$

здесь P_i — концентрации i-й компоненты: 1 — нефть, 2 — биогенное вещество, 3, 4 — зеленая водоросль (*Chlorella vulgaris Beijer*) и ее метаболит; $\mathbf{u}$ — вектор скорости водного потока; μ_i — коэффициенты диффузии; φ_i — химико-биологический источник [1].

Теорема. *Пусть второе уравнение системы* (1) *с учетом флуктуации среды имеет вид* $\dot{P}_2 = (\alpha - \beta + y(t))P_2$, $m(t) = P_2^0 e^{(\alpha-\beta)t}$, $\sigma^2(t) = P_2^0 e^{2(\alpha-\beta)t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$, *где* α, β *— скорость роста и смертность фитопланктона*; $\delta = \alpha - \beta$; P_2^0 *— концентрация* P_2 *в начальный момент времени*; $m(t)$, $\sigma^2(t)$ *— математическое ожидание и дисперсия флуктуации* $y(t)$. *Тогда при* $\delta < \sigma^2$ *вероятность вырождения популяции Chlorella vulgaris Beijer со временем увеличивается, стремясь в пределе к единице — популяция вероятностно неустойчива, т.е. достаточно длительное воздействие возмущений с большой вероятностью*

[10] Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 17-11-01286).

может привести к ее гибели. При $\delta > \sigma^2$ вероятность вырождения уменьшается, и при $t \to \infty$ стремится к нулю — популяция в этом смысле устойчива.

Адекватность предложенных вероятностных моделей наблюдений проверялась на основе алгоритма, в котором учитываются значения дисперсий ряда фактических значений параметра и его составляющей, вызванной воздействием элементов случайности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. А. Гущин, А. В. Никитина, А. А. Семенякина, А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, “Модель транспорта и трансформации биогенных элементов в прибрежной системе и ее численная реализация”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **58**:8 (2018), 120–137; англ. пер.: V. A. Gushchin, A. I. Sukhinov, A. V. Nikitina, A. E. Chistyakov, A. A. Semenyakina, “A model of transport and transformation of biogenic elements in the coastal system and its numerical implementation”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **58**:8 (2018), 1316–1333.

Гликлих Ю. Е. (Воронеж, Россия)**. Стохастические уравнения с текущими скоростями и с осмотическими скоростями (производные в среднем)[11].**

Предварительные сведения о производных в среднем, в частности о текущих скоростях (симметрических производных в среднем D_{S}), осмотических скоростях (антисимметрических производных в среднем D_{A}) и квадратических производных в среднем D_2, можно найти в [1].

Предположим, что диффузионный коэффициент, т.е. поле симметрических матриц $(a^{ij}(x))$, гладко, автономно и положительно определено. Так как все матрицы $(\alpha^{ij}(x))$ невырождены и поле гладко, существует гладкое поле обратных симметрических и положительно определенных матриц (α_{ij}). Это поле может быть использовано как новая риманова метрика $\alpha(\,\cdot\,,\cdot\,) = \alpha_{ij}\,dx^i \otimes dx^j$ на $\mathbf{R}^n$. Форма объема метрики $\alpha(\,\cdot\,,\cdot\,)$ имеет вид $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij}(x))}\;dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$.

Обозначим символом $\rho(t,x)$ плотность вероятностного распределения случайного элемента $\xi(t)$ относительно формы объема $dt\wedge\Lambda_\alpha$ на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, т.е. для любой непрерывной ограниченной функции $f\colon[0,T]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ выполняется соотношение

$$\int_0^T \mathbf{E}(f(t,\xi(t)))\,dt = \int_0^T \left(\int_\Omega f(t,\xi(t))\,d\mathbf{P}\right)dt = \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n} f(t,x)\rho(t,x)\,dt\wedge\Lambda_\alpha.$$

Пусть на $\mathbf{R}^n$ заданы борелевское векторное поле $v(t,x)$ и борелевское поле симметрических неотрицательно определенных матриц $\alpha(t,x)$. Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) = v(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t)) \end{cases} \tag{1}$$

называется уравнением первого порядка с текущими скоростями.

[11]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00048).

Везде далее поля v и α гладкие и все матрицы $\alpha(x)$ автономны и положительно определены. Если $v(t,x)$, $\alpha(x)$ и частные производные коэффициентов (a^{ij}) удовлетворяют неравенству Ито и плотность ρ начального значения гладка и нигде не равна нулю, доказано, что (1) имеет решение (см. [2]).

Лемма 1. *Пусть $\rho(t,x)$, $v(t,x)$, $\alpha(x)$ и Λ_α такие же, как выше, и решение (1) существует. Тогда поток векторного поля $(1, v(t,x))$ на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ сохраняет форму объема $\rho(t,x)\,dt\wedge\Lambda_\alpha$, т.е. производная Ли $L_{(1,v(t,x))}\rho(t,x)\,dt\wedge\Lambda_\alpha$ равна нулю.*

Система вида

$$\begin{cases} D_{\mathrm{A}}\xi(t) = u(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t)), \end{cases} \tag{2}$$

где $u(t,x)$ — борелевское векторное поле, а α — как выше, называется дифференциальным уравнением первого порядка с осмотическими скоростями.

Используя свойства осмотических скоростей и квадратических производных, а также теорему Стокса, можно найти $\rho(t,x)$ для решения (2). Введем $p(t,x) = \ln\rho(t,x)$.

Условие 1. При всех $t\in[0,T]$ интеграл $\int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n} e^{p(t,x)}\,dt\wedge\Lambda_\alpha$ конечен, т.е. равен некоторой конечной константе $C_{(t)}$, которая C^∞-гладка по t.

Теорема 1. *Если условие 1 выполнено, то при сделанных выше предположениях уравнение (2) имеет решение для некоторого начального значения, у которого плотность гладкая, нигде не равна нулю и зависит от правой части. Это решение не единственно.*

Доказательство использует лемму 1 при нахождении текущей скорости решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yu. E. Gliklikh, *Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics*, Theoret. Math. Phys., Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011, xxiv+436 pp.
2. С. В. Азарина, Ю. Е. Гликлих, “О разрешимости неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с текущими скоростями”, *Матем. заметки*, **100**:1 (2016), 3–12; англ. пер.: S. V. Azarina, Yu. E. Gliklikh, “On the solvability of nonautonomous stochastic differential equations with current velocities”, *Math. Notes*, **100**:1 (2016), 3–10.

Гущин А. А. (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия). **Совместное распределение максимума и терминального значения макс-непрерывного локального субмартингала[12].**

В 1993 г. К. Роджерс [1] охарактеризовал класс всех возможных совместных распределений терминального значения случайного процесса и его максимума для двух семейств процессов — равномерно интегрируемых мартингалов и п.н. сходящихся непрерывных локальных мартингалов, выходящих из нуля.

[12]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00290).

Оказывается, что во втором случае можно и естественно расширить семейство процессов с сохранением соответствующего класса совместных распределений. А именно, рассмотрим совокупность $\mathscr{X}$ всех п.н. сходящихся непрерывных справа локальных субмартингалов $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, $X_0 = 0$, у которых процесс текущего максимума $\overline{X}_t := \sup_{s\leqslant t} X_s$ непрерывен (такие процессы иногда называют макс-непрерывными). В докладе обсуждаются следующие вопросы: 1) описание класса совместных распределений $\mathrm{Law}(X_\infty, \overline{X}_\infty)$ терминального значения X_∞ процесса и его глобального максимума $\overline{X}_\infty$, когда X пробегает всю совокупность $\mathscr{X}$; 2) построение для каждой меры μ из этого класса того или иного "простого" представителя X из $\mathscr{X}$ с $\mathrm{Law}(X_\infty, \overline{X}_\infty) = \mu$. Из теоремы Роджерса следует, что всегда найдется непрерывный локальный мартингал с таким свойством. Мы предлагаем альтернативное доказательство этого факта. Второй вопрос интересен еще и потому, что, как мы доказываем, будет ли процесс X из $\mathscr{X}$ замкнутым субмартингалом, замкнутым супермартингалом или равномерно интегрируемым мартингалом, зависит только от совместного распределения $\mathrm{Law}(X_\infty, \overline{X}_\infty)$.

Предложение 1. *Для процесса X из $\mathscr{X}$ определим замену времени $C_s := \inf\{t\colon \overline{X}_t > s\}$. Тогда процесс $Y := X \circ C := (X_{C_s})_{s\geqslant 0}$ является макс-непрерывным субмартингалом относительно фильтрации $(\mathscr{F}_{C_s})_{s\geqslant 0}$ и представляется в виде*

$$Y_s = s\mathbf{1}_{\{s<\overline{X}_\infty\}} + X_\infty \mathbf{1}_{\{s\geqslant \overline{X}_\infty\}}.$$

В частности, $Y_\infty = X_\infty$ и $\overline{Y}_\infty = \overline{X}_\infty$.

Предложение 2. *Пусть W и L — случайные величины на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, $W \geqslant \max\{L, 0\}$ и функция*

$$s \rightsquigarrow \mathbf{E}[s\mathbf{1}_{\{s<W\}} + L\mathbf{1}_{\{s\geqslant W\}}], \qquad s \geqslant 0,$$

равна нулю при $s = 0$ и монотонно не убывает по s. Определим $\mathscr{F}_s$ как σ-алгебру подмножеств из $\mathscr{F}$, пересечение которых с множеством $\{W > s\}$ либо пусто, либо совпадает с $\{W > s\}$. Положим

$$Y_s = s\mathbf{1}_{\{s<W\}} + L\mathbf{1}_{\{s\geqslant W\}}. \tag{1}$$

Тогда $Y = (Y_s)_{s\geqslant 0}$ — $(\mathscr{F}_s)$-субмартингал.

Из предложений 1 и 2 вытекают ответы на оба сформулированных выше вопроса. Для того, чтобы для вероятностной меры $\mu = \mu(dx, dy)$ на $\mathbf{R}^2$ с носителем в множестве $\{(x, y)\colon y \geqslant \max\{x, 0\}\}$ нашелся такой процесс X из $\mathscr{X}$, что $\mu = \mathrm{Law}(X_\infty, \overline{X}_\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$s \rightsquigarrow \int [s\mathbf{1}_{\{y>s\}} + x\mathbf{1}_{\{y\leqslant s\}}]\, \mu(dx, dy), \qquad s \geqslant 0,$$

была равна нулю при $s = 0$ и монотонно не убывала по s. Для каждой такой меры μ мы можем построить "простой" субмартингал Y вида (1), для которого $\mathrm{Law}(Y_\infty, \overline{Y}_\infty) = \mu$. Если теперь вложить субмартингал Y в броуновское движение с помощью замены времени, состоящей из минимальных моментов остановки, пользуясь теоремой Монро или ее обобщениями, то можно определить некоторым образом непрерывный мартингал X и обосновать, что $\mathrm{Law}(X_\infty, \overline{X}_\infty) = \mu$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. C. G. Rogers, “The joint law of the maximum and terminal value of a martingale”, *Probab. Theory Related Fields*, **95**:4 (1993), 451–466.

Кабанов Ю. М. (Université Bourgogne Franche-Comté, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, ФИЦ ИУ). **Вероятности разорения с рисковыми инвестициями.**

Пусть $X = X^u$ — обобщенный процесс Орнштейна–Уленбека, т.е. решение линейного стохастического уравнения

$$dX_t = X_{t-}\,dR_t + dP_t, \qquad X_0 = u > 0,$$

где R и P — независимые процессы Леви, $\Delta R > -1$, а P не является субординатором. Пусть $\tau^u := \inf\{t\colon X_t^u \leqslant 0\}$ — момент разорения, $\Psi(u) := \mathbf{P}(\tau^u < \infty)$ — вероятность разорения. Эта модель включает в качестве частного случая хорошо изученные модели страховой компании Лундберга–Крамера без инвестиций ($dR_t = 0$) и с детерминированными инвестициями ($dR_t = r \neq 0$). Частные случаи модели с инвестициями в рисковый актив, динамика цены которого описывается геометрическим броуновским движением ($dR_t = a\,dt + \sigma\,dW_t$, $\sigma \neq 0$), изучались в работах [1], [2] с использованием интегро-дифференциальных уравнений для вероятности разорения. Было показано, что $\Psi(u) \sim Cu^{-\beta}$, $C > 0$, при $u \to \infty$ в предположении, что $\beta := 2a/\sigma^2 - 1 > 0$. Общая модель указанного вида была введена в рассмотрение и изучалась в серии работ Паулсена, основной результат которых состоит в том, что в невырожденном случае мы имеем $\Psi(u) \sim Cu^{-\beta}$, где β — корень уравнения $H(\beta) = 0$, существование которого предполагается. Здесь H — куммулянтная функция приращения логарифма цены рискового актива $V_t = \ln \mathscr{E}_t(R)$, а именно $H(p) := \ln \mathbf{E} e^{-qV_1}$. Паулсен использовал для нахождения асимптотики неявную теорию восстановления Кестена–Голди (она же — теория уравнений в смысле распределений). К сожалению, до недавнего времени эта теория не давала прямого ответа, когда константа C положительна. Доказательство этого факта в изучаемом контексте вело к дополнительным предположениям и неудобоваримой формулировке основного результата о точной асимптотике вероятности разорения. Недавние результаты из неявной теории восстановления позволяют получить следующее легко запоминающееся утверждение [3].

Теорема. *Пусть распределение V_1 — неарифметическое, процесс P имеет скачки только вверх, $H(\beta+) < \infty$. Если $\int |x|^\beta I_{\{x>1\}}\,\Pi_P(dx) < \infty$, где Π_P — мера Леви процесса P, то $\Psi(u) \sim Cu^{-\beta}$, $C > 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Frolova, Yu. Kabanov, S. Pergamenshchikov, “In the insurance business risky investments are dangerous”, *Finance Stoch.*, **6**:2 (2002), 227–235.
2. Yu. Kabanov, S. Pergamenshchikov, “In the insurance business risky investments are dangerous: the case of negative risk sums”, *Finance Stoch.*, **20**:2 (2016), 355–379.
3. Yu. Kabanov, S. Pergamenshchikov, *Ruin probabilities for a Lévy-driven generalised Ornstein–Uhlenbeck process*, arXiv: 1604.06370.

Карачанская Е. В. (Хабаровск, Россия). **Построение континуума инвариантных преобразователей для автоморфных функций в n-мерном ($n \geqslant 2$) пространстве.**

Предложен метод построения функции, обеспечивающей автоморфность заданной функции. Рассматривается применение данной теоремы для построения системы диффузионных уравнений Ито со скачками, для которой функция $u(t,\mathbf{x}) \in \mathscr{C}^{1,1}_{t,\mathbf{x}}$ является стохастическим первым интегралом [1], [2].

Теорема. *Пусть* $\mathbf{x}\colon [0,T] \to \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, $u\colon [0,T] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ *и* $h\colon [0,T] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $m \geqslant 1$. *Предположим, что выполняются следующие условия*: 1) $u(t,\mathbf{x}) \in \mathscr{C}^{1,1}_{t,\mathbf{x}}$; 2) $h(t,\mathbf{x},\gamma) \in \mathscr{C}^{1,1,1}_{t,x,\gamma}$; 3) $\alpha(t,\mathbf{x}) \in \mathscr{C}_0(t,\mathbf{x})$, $\alpha(t,\mathbf{x}) \neq 0$ *для всех* t *и* $\mathbf{x}$; 4) $\mathbf{y}(t,\mathbf{x},\gamma)$ *есть решение системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial \mathbf{y}(\,\cdot\,,\gamma)}{\partial\gamma} = \det\begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \\ \dfrac{\partial u(t,\mathbf{y}(\,\cdot\,,\gamma))}{\partial y_1} & \dfrac{\partial u(t,\mathbf{y}(\,\cdot\,,\gamma))}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial u(t,\mathbf{y}(\,\cdot\,,\gamma))}{\partial y_n} \\ \varphi_{31}(t,\mathbf{y}(\,\cdot\,,\gamma)) & \varphi_{32}(t,\mathbf{y}(\,\cdot\,,\gamma)) & \dots & \varphi_{3n}(t,\mathbf{y}(\,\cdot\,,\gamma)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(t,\mathbf{y}(\,\cdot\,,\gamma)) & \varphi_{n2}(t,\mathbf{y}(\,\cdot\,,\gamma)) & \dots & \varphi_{nn}(t,\mathbf{y}(\,\cdot\,,\gamma)) \end{bmatrix},$$

удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{y}(t,\mathbf{x},0) = \mathbf{x}$, *где* $\varphi_{ij}(\,\cdot\,) = \partial\varphi_i(\,\cdot\,)/\partial y_j$, *и множество* $\{u(t,\mathbf{y}) \cup \{\varphi_i(t,\mathbf{y})\}_{i=3}^n\}$ *есть совокупность функционально независимых функций. Тогда функция* $h(t,\mathbf{x},\gamma) = \mathbf{y}(t,\mathbf{x},\gamma) - \mathbf{x}$ *есть инвариантный преобразователь, обеспечивающий автоморфность для любой функции* $u(t,\mathbf{x}(t))$: $u(t,\mathbf{x}(t) + h(t,\mathbf{x}(t),\gamma)) = u(t,\mathbf{x}(t))$. *Более того, множество инвариантных преобразователей для* $u(t,\mathbf{x}(t))$ *континуально.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. В. Карачанская, “Обобщенная формула Ито–Вентцеля для случая нецентрированной пуассоновской меры, стохастический первый интеграл и первый интеграл”, *Матем. тр.*, **17**:1 (2014), 99–122; англ. пер.: E. V. Karachanskaya, “The generalized Itô–Venttsel' formula in the case of a noncentered Poisson measure, a stochastic first integral, and a first integral”, *Siberian Adv. Math.*, **25**:3 (2015), 191–205.
2. В. А. Дубко, “Проблема инвариантности и алгоритм построения множества автоморфных преобразований для заданной функции”, *Відкриті еволюціонуючі системи*, т. 2 (Киев, 2003), ВНЗ ВМУРоЛ, Киев, 2004, 66–68.

Кочеганов В. М. (Нижний Новгород, Россия). **Анализ тандема систем массового обслуживания с циклическим управлением с продлением.**

Рассматривается тандем систем массового обслуживания. Требования первой системы обслуживаются в классе циклических алгоритмов. После обслуживания высокоприоритетные требования первой системы немгновенно поступают на обслуживание во вторую систему и становятся высокоприоритетными требованиями для второй системы. Во второй системе требования обслуживаются в классе циклических алгоритмов с продлением. Постановка задачи и построение математической модели могут быть найдены в работе [1]. Центральное место в математической модели занимает многомерная счетная марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i});\, i \geqslant 0\}$. Пусть $\{\tau_i;\, i = 0, 1, \dots\}$ — это дискретные моменты наблюдения за системой. Пусть также Γ_i — это состояние обслуживающего устройства в течение интервала времени $(\tau_{i-1};\tau_i]$; $\varkappa_{j,i}\in\mathbf{Z}_+$ — количество требований в очереди j-го входного потока в момент τ_i; $\eta_{j,i}\in\mathbf{Z}_+$ — количество требований, прибывших в очередь j-го входного потока в течение интервала времени $(\tau_i;\tau_{i+1}]$; $\overline{\xi}_{j,i}\in\mathbf{Z}_+$ — количество требований, реально обслуженных из очереди j-го входного потока в течение интервала времени $(\tau_i;\tau_{i+1}]$, $j\in\{1,2,3,4\}$. В работе [1] были получены достаточные условия существования стационарного режима для марковских цепей $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i});\ i\geqslant 0\}$ и $\{(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{3,i});\ i\geqslant 0\}$. В работе [2] была построена имитационная модель и были проведены серии экспериментов для более глубокого изучения системы. В настоящей работе представлено необходимое условие для последовательности $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i});\ i\geqslant 0\}$.

Теорема. *Для того чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i});\ i\geqslant 0\}$ имела стационарное распределение, необходимо выполнение неравенства*

$$\max_{k=1,\dots,d}\frac{\sum_{r=1}^{n_k}\ell(k,r,3)}{\lambda_3 f_3'(1)\sum_{r=1}^{n_k}T^{(k,r)}}>1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. М. Кочеганов, А. В. Зорин, “Достаточное условие существования стационарного режима очередей первичных требований в тандеме систем массового обслуживания”, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2018, № 2, 49–74.
2. А. В. Зорин, В. М. Кочеганов, “Статистический анализ и оптимизация тандема систем массового обслуживания в классе циклических алгоритмов с продлением”, *УБС*, **78** (2019), 122–148.

Кочеганова (Рачинская) М. А. (Нижний Новгород, Россия)**. Предельные теоремы для многомерной марковской последовательности как модели системы обслуживания, управляемой пороговым алгоритмом с продлением.**

Рассматривается управляющая система массового обслуживания с $m\geqslant 2$ конфликтными входными потоками. Первый поток является высокоприоритетным, а поток с номером m — высокоинтенсивным. Постановка задачи приведена в [1]. Построена модель в виде многомерной цепи Маркова $\{(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\varkappa_{m,i},\xi'_{1,i-1},\xi'_{m,i-1}),\ i=0,1,2,\dots\}$ с рекуррентными соотношениями

$$\Gamma_{i+1}=u(\Gamma_i,\varkappa_{1,i},\eta_{1,i}),\qquad \varkappa_{j,i+1}=\max\{0,\varkappa_{j,i}+\eta_{j,i}-\xi_{j,i}\},$$
$$\xi'_{j,i}=\min\{\varkappa_{j,i}+\eta_{j,i},\xi_{j,i}\},\qquad j=\overline{1,m}.$$

Здесь введена временная шкала $\{\tau_i;\ i=0,1,2,\dots\}$, а также следующие случайные величины и элементы: Γ_i — состояние обслуживающего устройства на промежутке $[\tau_i,\tau_{i+1})$; $\eta_{j,i}$ — число поступивших заявок по j-му потоку на $[\tau_i,\tau_{i+1})$; $\xi_{j,i}$ и $\xi'_{j,i}$ — максимальное и реальное число обслуженных заявок j-го потока на промежутке $[\tau_i,\tau_{i+1})$; $\varkappa_{j,i}$ — число ожидающих заявок j-го потока в момент τ_i. Функция $u(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,)$ реализует алгоритм для управления потоками с продлением, пороговым приоритетом и обратной связью по количеству ожидающих заявок высокоприоритетного потока. Доказана эргодическая теорема. Доказаны теоремы о необходимых и достаточных условиях существования стационарного распределения цепи Маркова, например следующая.

Теорема. *Критерий существования стационарного режима по первому потоку заключается в выполнении неравенства* $\lambda_1 T^*(2s_1 + q_1 + 1) - l_1 < 0$. *Здесь* λ_1, q_1, s_1 *— параметры входного потока,* T^* *— длительность наименьшего цикла управляющего алгоритма,* l_1 *— пропускная способность обслуживающего устройства по первому потоку.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. А. Рачинская, М. А. Федоткин, "Исследование условий существования стационарного режима в системе конфликтного обслуживания неоднородных требований", *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2018, №51, 33–47.

Кожевин А. А. (Москва, Россия)**. Информационный подход к отбору значимых признаков**[13]**.**

Доклад посвящен оценкам условной энтропии [1] и совместной информации в смешанной модели [2], а также новому результату о процедуре отбора значимых признаков (факторов), основанной на информационном подходе.

Смешанная модель описывается в работе [1]. Пусть $\zeta_n = \{(X^i, Y^i)\}_{i=1}^n$ — выборка из н.о.р.с.в., $(X^1, Y^1) \sim (X, Y)$, где $X = (X_1, \dots, X_d)$ — абсолютно непрерывный случайный вектор со значениями в $\mathbf{R}^d$, а Y — дискретная случайная величина со значениями в конечном множестве M. Набор индексов $S = \{s_1, \dots, s_m\} \subset \{1, \dots, d\}$ ($s_i \neq s_j$ для $i \neq j$) и набор факторов X_S, где $u_L = (u_{l_1}, \dots, u_{l_m})$ для $u = (u_1, \dots, u_d)$ и $L = \{l_1, \dots, l_m\}$, будем называть значимыми, если для каждого $y \in M$ выполняется равенство $f_{Y|X}(y \mid X) = f_{Y|X_S}(y \mid X_S)$ п.н. Пусть $Q_m = \{\{l_1, \dots, l_m\} \subset \{1, \dots, d\} \colon l_i \neq l_j,\, i \neq j\}$. Для каждого $L \in Q_m$ составим выборку $\zeta_{n,L} = \{(X_L^i, Y^i)\}_{i=1}^n$. Оценим совместную информацию $I(X_L; Y)$ для каждой выборки $\zeta_{n,L}$ с помощью метода, предложенного в работе [2]. Соответствующие значения оценок обозначим $\widehat{I}_{n,k,L}$, где $k \in \{1, \dots, n-1\}$ — параметр метода.

Положим $\widehat{S}_{n,k} = \operatorname{argmax}_{L \in Q_m} \widehat{I}_{n,k,L}$. Если максимум $\widehat{I}_{n,k,L}$ достигается на нескольких множествах из Q_m, то в качестве $\widehat{S}_{n,k}$ возьмем первое из них в смысле лексикографического порядка. Для такой процедуры отбора значимых признаков верен следующий новый результат.

Теорема. *Пусть* m *известно и набор значимых факторов длины* m *единственен. Предположим, что плотность* $f_X(\,\cdot\,)$ *строго положительна и для каждого набора* $L \subset \{1, \dots, d\}$ *плотность* $f_{X_L,Y}(\,\cdot\,, y)$ *при каждом* $y \in M$ *является* C_0*-стягиваемой* ($C_0 > 0$), *и пусть для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{E}|\ln f_{X_L}(X_L)|^{2+\varepsilon} < \infty.$$

Тогда $\mathbf{P}(\widehat{S}_{n,k} = S) \to 1$ *при* $n \to \infty$ *для любого* $\alpha \in (0,1)$ *и* $k \propto n^\alpha$.

[13] Работа выполнена при поддержке гранта МГУ им. М. В. Ломоносова "Современные проблемы фундаментальной математики и механики".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Bulinski, A. Kozhevin, “Statistical estimation of conditional Shannon entropy”, *ESAIM Probab. Stat.*, **23** (2019), 350–386.
2. A. Bulinski, A. Kozhevin, “Statistical estimation of mutual information for mixed model”, *Methodology and Computing in Appl. Probab.* (to appear).

Красий Н. П., Павлов И. В. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Обобщение модели с приоритетами**[14]**.**

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ рассмотрим функцию вида

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \prod_{j=1}^{k} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} f_j(u_j, \cdot). \tag{1}$$

Теорема. *Пусть для функций $f_j(u_j, \omega)$, $j = 1, \ldots, k$, выполнены условия:*

1) $f_j(u_j, \omega)$ определена и измерима на $[0, \infty) \times \Omega$, при $\mathbf{P}$-почти всех $\omega \in \Omega$ непрерывна на $[0, \infty)$ и удовлетворяет равенству $f_j(0, \omega) = 0$;

2) $f_j(u_j, \omega)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$ при $\mathbf{P}$-почти всех $\omega \in \Omega$, причем первая и вторая производные ограничены на множествах вида $K \times \Omega$, где K — компакт на $(0, \infty)$;

3) при $\mathbf{P}$-почти всех $\omega \in \Omega$ и всех $u_j \in (0, \infty)$ функция $f_j(u_j, \omega)$ строго больше нуля, ее первая производная строго больше нуля, а ее вторая производная строго меньше нуля;

4) $u_k = -\sum_{j=1}^{k-1} c_j u_j + c_k$, где $c_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Тогда функция (1) имеет в области $\{u_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, k-1,\ \sum_{j=1}^{k-1} c_j u_j < c_k\}$ единственную стационарную точку, являющуюся локальной (а также глобальной) точкой максимума.

Если положить $f_j(u_j, \omega) = u_j^{\alpha_j(\omega)}$, где $\alpha_j(\omega)$ — случайная величина (приоритет), $\mathbf{P}(\alpha_j = 0) = 0$ и $\mathbf{P}(0 < \alpha_j < 1) > 0$, то (1) совпадает с функцией, получаемой в задаче оптимизации квазилинейной модели с независимыми приоритетами α_j (см. [1]). Представленная теорема обобщает теорему 1 в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. В. Павлов, С. И. Углич, “Оптимизация сложных систем квазилинейного типа с несколькими независимыми приоритетами”, *Вестник РГУПС*, 2017, № 3(67), 140–145.

Кудрявцев Е. В. (Нижний Новгород, Россия)**. Предельные теоремы для систем управления потоками в классе алгоритмов с обратной связью.**

Рассматриваются предельные свойства последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, 2, \ldots\}$, в которой $\Gamma_i \in \{\Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(8)}\}$ и $\kappa_i = (\kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}) \in \{0, 1, 2, \ldots\} \times \{0, 1, 2, \ldots\} = X \times X$. Компоненты векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, 2, \ldots\}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям $\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i')$

[14] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00451).

и $\varkappa_{i+1} = v(\Gamma_i, \varkappa_i, \eta_i, \xi_i)$. В работах [1], [2] определены случайные векторы $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}) \in X \times X$, $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}) \in X \times X$, случайный элемент $\eta'_i \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$ и их распределения. Установлено свойство марковости последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i);\ i \geqslant 0\}$, проведена классификация ее состояний и найдены условия существования стационарного режима.

Теорема. *Для существования предельного распределения марковской последовательности* $\{(\Gamma_i, \varkappa_i);\ i \geqslant 0\}$ *необходимо выполнение неравенства* $\theta_1\lambda_1 M_1/\mu_{1,2} + \theta_2\lambda_2 M_2/\mu_{2,2} < 1$, *где* λ_1, λ_2, M_1, M_2, θ_1, θ_2, $\mu_{1,2}$, $\mu_{2,2}$ *являются параметрами распределений для* η_i *и* ξ_i.

Заметим, что последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_i);\ i \geqslant 0\}$ является математической моделью системы управления конфликтными потоками разнотипных требований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. В. Кудрявцев, М. А. Федоткин, “Анализ дискретной модели системы адаптивного управления конфликтными неоднородными потоками”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 15. *Вычисл. матем. и киберн.*, 2019, № 1, 19–26; англ. пер.: E. V. Kudryavtsev, M. A. Fedotkin, “Analysis of a discrete model of an adaptive control system for conflicting nonhomogeneous flows”, *Moscow Univ. Comput. Math. Cybernet.*, **43**:1 (2019), 17–24.
2. Е. В. Кудрявцев, М. А. Федоткин, “Исследование математической модели адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований”, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2019, № 1, 23–37.

Кудрявцев О. Е. (Ростов-на-Дону, Россия). **О подходах к вычислению цен опционов типа lookback европейского и американского стиля**[15]**.**

Опционы lookback представляют собой “экзотические” деривативы, выплата по которым зависит от экстремума цены базового актива, достигаемого в течение срока жизни опциона. Оцениванием опционов lookback в различных моделях занимался целый ряд исследователей. Наиболее эффективные подходы — это методы, использующие интегральные преобразования (см., например, [1], [4]).

С практической точки зрения необходимо оценивать опционы lookback не только в начальный момент времени, но и в течение всего срока действия опциона. Пусть $S_t = e^{X_t}$ — цена базового актива, управляемого экспоненциальной моделью Леви. Тогда в момент t цену европейского опциона lookback put с плавающей (фиксированной) ценой исполнения и датой истечения срока T, зависящую от $X_t = x$ и экстремума цены базового актива, наблюдаемого до момента t, можно выразить следующим образом:

$$V_{\mathrm{fl}}(t,x,y) = \mathbf{E}^x\big[e^{-r(T-t)}(e^{\max\{\overline{X}_T, y\}} - e^{X_T})\big],$$
$$V_{\mathrm{fx}}(t,x,y) = \mathbf{E}^x\big[e^{-r(T-t)}(K - e^{\min\{\underline{X}_T, y\}})_+\big],$$

где K — цена исполнения, r — безрисковая ставка, $\overline{X}_t$ и $\underline{X}_t$ — процессы супремума и инфимума.

[15]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00910).

Оба вида опционов могут быть оценены путем непосредственного применения обобщенного метода Монте-Карло, основанного на факторизации Винера–Хопфа, [3]. Численные эксперименты показывают, что указанный метод для опционов lookback в моделях Леви является достаточно быстрым и точным по сравнению с методами из [1], [4].

Вторая часть доклада посвящена методам конечных разностей, позволяющим оценивать американские опционы lookback в рамках модели Блэка–Шоулза. В отличие от европейских опционов lookback, американские опционы lookback не могут быть оценены по явным формулам даже в модели Блэка–Шоулза (см. [2]) и требуют использования численных методов.

Обозначим через $U_{\mathrm{fl}}(t,x,y)$ функцию цены американского опциона lookback put с плавающей ценой исполнения на акцию с выплатой дивидендов с конечной датой T, зависящую от $X_t = x$ и $\overline{X}_t = y$.

Теорема 1. *Пусть q — ставка по дивидендам. Функция цены $U_{\mathrm{fl}}(t,x,y)$ может быть представлена следующим образом*:

$$U_{\mathrm{fl}}(t,x,y) = e^y - e^x + e^y F(t, x-y), \qquad x \leqslant y,$$

где $F(t,x)$ — неубывающая по x функция, которая удовлетворяет условию $F(T,x)=0$ и является решением вариационного неравенства:

$$\begin{gathered}\max\bigl(F, \partial_t F + 0.5\sigma^2\partial_x^2 F + (r - 0.5\sigma^2 - q)\partial_x F \\ - rF - r + qe^x\bigr) = 0, \qquad t<T, \quad x<0, \\ 1 + F(t,0) - \frac{\partial F}{\partial x}(t,0) = 0, \qquad t<T.\end{gathered}$$

Мы применяем метод Винера–Хопфа, чтобы доказать теорему, и эффективно решаем соответствующую задачу с помощью итерационной конечно-разностной схемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Boyarchenko, S. Levendorskiĭ, “Efficient Laplace inversion, Wiener–Hopf factorization and pricing lookbacks”, *Int. J. Theor. Appl. Finance*, **16**:3 (2013), 1350011, 40 pp.
2. Min Dai, Yue Kuen Kwock, “American options with lookback payoff”, *SIAM J. Appl. Math.*, **66**:1 (2005), 206–227.
3. О. Е. Кудрявцев, “Приближенная факторизация Винера–Хопфа и методы Монте-Карло для процессов Леви”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **64**:2 (2019), 228–257; англ. пер.: O. E. Kudryavtsev, “Approximate Wiener–Hopf factorization and Monte Carlo methods for Lévy processes”, *Theory Probab. Appl.*, **64**:2 (2019), 186–208.
4. O. Kudryavtsev, S. Levendorskii, *Efficient pricing options with barrier and lookback features under Lévy processes*, Working paper, 2011, 29 pp.

Кузнецов Д. Ф. (Санкт-Петербург, Россия)**. Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.**

Данная работа продолжает начатые в [1] исследования по построению эффективных методов среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, применяемых при численном решении стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Теорема. *Пусть* $\psi_1(\tau),\ldots,\psi_k(\tau)$ *— непрерывные на* $[t,T]$ *функции,* $\phi_j(\tau)$ *— полный ортонормированный полиномиальный или тригонометрический базис в* $L_2([t,T])$ *и* $i_1,\ldots,i_k=0,1,\ldots,m$. *Тогда* $I^k_{T,t}=\mathrm{l.i.m.}_{p_1,\ldots,p_k\to\infty} I^{p_1\ldots p_k}_{T,t}$ $(k\in\mathbf{N})$, $J^k_{T,t}=\mathrm{l.i.m.}_{p\to\infty} J^{k,p}_{T,t}$ $(k\leqslant 5)$, *причем*

$$\mathbf{E}(I_{T,t}-I^{p_1\ldots p_k}_{T,t})^2\leqslant k!\left(\|K\|^2-\sum_{j_1}^{p_1}\cdots\sum_{j_k=0}^{p_k}C^2_{j_k\ldots j_1}\right)$$

для всех $T-t\in(0,1)$, *где*

$$I^k_{T,t}=\int_t^T\psi_k(t_k)\cdots\int_t^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{W}^{(i_1)}_{t_1}\cdots d\mathbf{W}^{(i_k)}_{t_k},$$

$$J^k_{T,t}=\int_t^T\cdots\int_t^{t_2}\circ d\mathbf{W}^{(i_1)}_{t_1}\cdots\circ d\mathbf{W}^{(i_k)}_{t_k},$$

$$I^{p_1\ldots p_k}_{T,t}=\sum_{j_1=0}^{p_1}\cdots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\left(\prod_{\ell=1}^k\zeta^{(i_\ell)}_{j_\ell}-\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{(\ell_1,\ldots,\ell_k)\in G_k}\prod_{s=1}^k\phi_{j_s}(\tau_{\ell_s})\Delta\mathbf{W}^{(i_s)}_{\tau_{\ell_s}}\right),$$

$$J^{k,p}_{T,t}=\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{p}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{\ell=1}^k\zeta^{(i_\ell)}_{j_\ell},$$

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int_{[t,T]^k}K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{\ell=1}^k\phi_{j_\ell}(t_\ell)\,dt_1\cdots dt_k,$$

$\|\cdot\|$ *— норма в* $L_2([t,T]^k)$, d *и* $\circ d$ *— дифференциалы Ито и Стратоновича соответственно,* $K(t_1,\ldots,t_k)=I\{t_1<\cdots<t_k\}\psi_1(t_1)\ldots\psi_k(t_k)$, $\mathbf{W}^{(i)}_\tau$ $(i=1,\ldots,m)$ *— независимые стандартные винеровские процессы,* $\mathbf{W}^{(0)}_\tau=\tau$, $\Delta\mathbf{W}^{(i)}_{\tau_j}=\mathbf{W}^{(i)}_{\tau_{j+1}}-\mathbf{W}^{(i)}_{\tau_j}$, $\zeta^{(i)}_j=\int_t^T\phi_j(\tau)\,d\mathbf{W}^{(i)}_\tau$ $(i\neq 0)$ *— независимые одинаково распределенные* $N(0,1)$*-случайные величины,* $t=\tau_0<\cdots<\tau_N=T$, $\max_{0\leqslant j\leqslant N-1}(\tau_{j+1}-\tau_j)\to 0$ *при* $N\to\infty$, $H_k=\{(\ell_1,\ldots,\ell_k)\colon \ell_1,\ldots,\ell_k=0,1,\ldots,N-1\}$, $L_k=\{(\ell_1,\ldots,\ell_k)\colon \ell_1,\ldots,\ell_k=0,1,\ldots,N-1;\ \ell_g\neq\ell_r\,(g\neq r);\ g,r=1,\ldots,k\}$, $G_k=H_k\setminus L_k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. Ф. Кузнецов, *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*, С программами в среде MATLAB, Изд. 6-е, перераб. и доп., Электронный журнал “Дифференциальные уравнения и процессы управления”, №4, СПбПУ, СПб., 2018, 1073 с., http://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2018.4/article.2.1.html.

Кузнецов К. С. (Санкт-Петербург, Россия)**. Управление средневзвешенной ценой продаж производителя на товарных биржах с заранее запланированным объемом продаж.**

Теорема. *Будем считать, что* $t \in \mathbf{N}_0$ *и* Δt *соответствует временному интервалу между днями, когда совершаются сделки, т.е.* $t = 0, 1, \ldots, T$. *Наблюдаемая цена* $\widetilde{x}_t$ *на товарных биржах является реализацией стохастического процесса* [1], [2], *подчиняющегося стохастическому дифференциальному уравнению*

$$dx_t = c_t x_t\, dt + \sigma x_t\, dW_t,$$

где c_t — *коэффициент сноса,* W_t — *стандартный винеровский процесс и* σ — *коэффициент волатильности, являющийся постоянной величиной. Предположим, что количество проданного за промежуток времени* $[0, t]$ *товара* $\widetilde{a}_t$ *определяется следующей формулой:*

$$\widetilde{a}_t = A\widetilde{x}_t + B + \widetilde{x}_t A \frac{1}{\sigma^2 T} e^{\sigma^2 (T-t)} - \widetilde{x}_t A \frac{1}{\sigma^2 T} - \widetilde{x}_t A \frac{T-t}{T},$$

где

$$A = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \quad B = -\frac{a_{\max} - a_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} x_{\min} + a_{\min}$$

и $a_{\max}$, $x_{\max}$, $a_{\min}$, $x_{\min}$ — *константы такие, что* $a_{\max} > a_{\min}$, $x_{\max} > x_{\min}$, $a_{\max} > 0$, $x_{\max} > 0$, $a_{\min} > 0$, $x_{\min} > 0$. *Тогда если стоимость товара уменьшается* ($\widetilde{x}_0 > \widetilde{x}_1 > \cdots > \widetilde{x}_T$) *на заранее определенном временном интервале* $[0, T]$, *то средневзвешенная цена продаж производителя будет расти:* $\widetilde{x}_0^{\mathrm{av}} < \widetilde{x}_1^{\mathrm{av}} < \cdots < \widetilde{x}_T^{\mathrm{av}}$. *Если же стоимость товара возрастает* ($\widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \cdots < \widetilde{x}_T$) *на заранее определенном временном интервале* $[0, T]$ *и неравенство*

$$\frac{\widetilde{x}_i}{\widetilde{x}_{i-1}} > \left(\frac{1}{\sigma^2 T} e^{\sigma^2 (T-(i-1))} - \frac{1}{\sigma^2 T} + \frac{i-1}{T}\right) \left(\frac{1}{\sigma^2 T} e^{\sigma^2 (T-i)} - \frac{1}{\sigma^2 T} + \frac{i}{T}\right)^{-1}$$

выполнено для всех $i = 1, \ldots, T$, *то средневзвешенная цена продаж производителя будет возрастать:* $\widetilde{x}_0^{\mathrm{av}} < \widetilde{x}_1^{\mathrm{av}} < \cdots < \widetilde{x}_T^{\mathrm{av}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. A. Vavilov, K. S. Kuznetsov, “Weighted average price management of manufacturer sales on commodity exchanges”, *Int. J. Financ. Eng.*, **05**:03 (2018), 1850029, 17 pp.
2. С. А. Вавилов, К. С. Кузнецов, “Стохастическая модель управления средневзвешенной ценой продаж производителя на товарных биржах”, *Автомат. и телемех.*, 2019, № 6, 142–155; англ. пер.: S. A. Vavilov, K. S. Kuznetsov, “A stochastic control model for the average price of manufacturer sales on commodity exchanges”, *Autom. Remote Control*, **80**:6 (2019), 1098–1108.

Lépinette E. (Dauphine University, Paris)**. Conditional cores and conditional convex hulls of random sets.**

In the paper [1] by E. Lépinette and I. Molchanov, we define two nonlinear operations with random (not necessarily closed) sets in Banach space: the conditional core and the conditional convex hull. While the first is sublinear, the second one is superlinear (in the reverse set inclusion ordering). Furthermore, we introduce the generalized conditional expectation of random closed sets and show that it is sandwiched between the conditional core and the conditional convex hull. The results rely on measurability properties of not necessarily closed random sets considered from the point of view of the families of their selections. Furthermore, we develop analytical tools suitable to handle random convex (not necessarily compact) sets in Banach spaces; these tools are based on considering support functions as functions of random arguments. The paper is motivated by applications to assessing multivariate risks in mathematical finance.

Let $\mathbf{X}$ be a separable (real) Banach space with norm $\|\cdot\|$ and the Borel σ-algebra $\mathscr{B}(\mathbf{X})$ generated by its strong topology. Fix a complete probability space $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Let $\mathscr{H}$ be a sub-σ-algebra of $\mathscr{F}$, which may coincide with $\mathscr{F}$. An *$\mathscr{H}$-measurable random set* (shortly, random set) is a set-valued function $\omega \mapsto X(\omega) \subseteq \mathbf{X}$ from Ω to the family of all subsets of $\mathbf{X}$, such that its graph

$$\operatorname{Graph} X = \{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbf{X} \colon x \in X(\omega)\} \tag{1}$$

belongs to the product σ-algebra $\mathscr{H} \otimes \mathscr{B}(\mathbf{X})$.

Definition 1. An $\mathscr{H}$-measurable random element ξ such that $\xi(\omega) \in X(\omega)$ for almost all $\omega \in \Omega$ is said to be an $\mathscr{H}$-measurable *selection* (selection in short) of X; $\mathrm{L}^0(X, \mathscr{H})$ denotes the family of all $\mathscr{H}$-measurable selections of X.

Definition 2. Let X be any set-valued mapping. The conditional core $\mathrm{m}(X \mid \mathscr{H})$ of X (also called $\mathscr{H}$-core) is the largest $\mathscr{H}$-measurable random set X' such that $X' \subseteq X$ a.s.

Lemma. *If* $\mathrm{m}(X \mid \mathscr{H})$ *exists and is almost surely nonempty, then*

$$\mathrm{L}^0(X, \mathscr{H}) = \mathrm{L}^0(\mathrm{m}(X \mid \mathscr{H}), \mathscr{H}), \tag{2}$$

in particular $\mathrm{m}(X \mid \mathscr{H})$ *is a.s. nonempty if and only if* $\mathrm{L}^0(X, \mathscr{H}) \neq \varnothing$.

The following theorem is one of our main result. The general case is an open problem.

Theorem. *If X is a random closed set, then* $\mathrm{m}(X \mid \mathscr{H})$ *exists and is a random closed set, which is a.s. convex (respectively, is a cone) if X is a.s. convex (respectively, is a cone).*

This concept of conditional core naturally appears in geometrical financial models in presence of transaction costs [2]. Indeed, for such models in discrete time, the dynamics of a portfolio process V is $V_t - V_{t-1} \in -G_t$, where G is a random closed set [3] adapted to the filtration $(\mathscr{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ of consideration. This is equivalent to $V_{t-1} \in G_t + V_t$, i.e., $V_{t-1} \in \mathrm{m}(G_t \mid \mathscr{F}_{t-1})$.

The conditional core is related to another concept, the conditional convex hull $\mathrm{M}(X \mid \mathscr{H})$, see [1]. In particular, they are “dual” each other when X is a random cone. More precisely, if X is a convex cone, we have $\mathrm{m}(X \mid \mathscr{H}) = \mathrm{M}(X^* \mid \mathscr{H})^*$, where $*$ designates the positive dual.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Lépinette, I. Molchanov, “Conditional cores and conditional convex hulls of random sets”, *J. Math. Anal. Appl.*, **478**:2 (2019), 368–392.
2. E. Lepinette, I. Molchanov, *Risk arbitrage and hedging to acceptability*, arXiv: 1605.07884.

3. E. Lepinette, Tuan Tran, “General financial market model defined by a liquidation value process”, *Stochastics*, **88**:3 (2016), 437–459.

Лыков А. А., Малышев В. А., Меликян М. В. (Москва, Россия)**. Проблемы устойчивости для бесконечной цепочки осцилляторов.**

Мы рассматриваем бесконечное число точечных частиц $\cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots$, $k \in \mathbf{Z}$, на $\mathbf{R}$ (бесконечная цепочка осцилляторов) с формальным гамильтонианом

$$H = \sum_k \frac{v_k^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} \sum_k (x_k - ka)^2 + \frac{\omega_1^2}{2} \sum_k (x_{k+1} - x_k - a)^2, \qquad a > 0,$$
$$y = \{y_k(t) = x_k(t) - ka\}, \qquad v(t) = \{\dot{y}_k = \dot{x}_k\}, \qquad M(t) = \sup_{k \in \mathbf{Z}} |y_k(t)|.$$

Далее представлены результаты (совсем другие результаты относительно подобных цепочек см. в [1], [2]) касательно стабильности (в l_∞) их фиксированных точек (точки, где энергия системы равна нулю) при различных возмущениях.

Теорема 1. *Пусть* $y(0), v(0) \in l_2(\mathbf{Z})$. *Тогда*:

1) *если* $\omega_0 > 0$, *то* $\sup_{t \geqslant 0} M(t) < \infty$;

2) *если* $\omega_0 = 0$, *то для всех* $t \geqslant 0$ *верно неравенство*

$$M(t) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\omega_1}} \|v(0)\|_2 \sqrt{t} + \|y(0)\|_2,$$

однако для любого $\delta > 1/2$ *существуют начальные условия* $y(0) = 0$, $v(0) \in l_2(\mathbf{Z})$ *такие, что (здесь* Γ *— гамма-функция)* $\lim_{t\to\infty} (y_0(t)/\sqrt{t}) \ln^\delta t = \Gamma(\delta) > 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\omega_0 = 0$ *и* $v(0) = 0$. *Тогда*:

1) *если* $y(0) \in l_\infty(\mathbf{Z})$, *то для всех* $t \geqslant 0$ *верно неравенство*

$$M(t) \leqslant (c\sqrt{t} + 2) M(0)$$

с некоторой константой $c \geqslant 0$;

2) *если* $y_k(0)$, $k \in \mathbf{Z}$, *— независимые одинаково распределенные случайные величины, ограниченные по* k *с вероятностью* 1 *(т.е.* $\sup_k |y_k(0)| < \infty$ *п.н.), то для всех* $n \in \mathbf{Z}$

$$\mathbf{P}\Big(\limsup_{t\to\infty} y_n(t) = +\infty\Big) = \mathbf{P}\Big(\liminf_{t\to\infty} y_n(t) = -\infty\Big) = 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. A. Lykov, V. A. Malyshev, M. V. Melikian, “Phase diagram for one-way traffic flow with local control”, *Phys. A*, **486** (2017), 849–866.
2. A. A. Lykov, V. A. Malyshev, “From the N-body problem to Euler equations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **24**:1 (2017), 79–95.

Макарова А. В., Горлов В. А. (Воронеж, Россия). **Стохастические дифференциальные включения с производными в среднем, со специального вида правой частью**[16]**.**

Доказана разрешимость стохастических дифференциальных включений с производными в среднем с многозначной, полунепрерывной снизу, разложимой правой частью в $\mathbf{R}^n$.

Теорема [1]**.** *Рассмотрим в* $\mathbf{R}^n$ *многозначное поле* $\mathbf{a}$ *— полунепрерывное снизу с замкнутыми разложимыми образами и многозначное положительно определенное поле* $\boldsymbol{\alpha}$ *— полунепрерывное снизу с замкнутыми разложимыми образами, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$\|\operatorname{tr}\alpha(t,x)\| < K(1+\|x\|)^2, \tag{1}$$

$$\|a(t,x)\| < K(1+\|x\|) \tag{2}$$

для всех $\alpha(t,x)\in\boldsymbol{\alpha}$, $a\in\mathbf{a}$ *и некоторого* $K>0$.

Тогда для начального условия $\xi(0)=\xi_0$ *включение*

$$\begin{cases} D\xi(t)\in\mathbf{a}(t,\xi(t)),\\ D_2\xi(t)\in\boldsymbol{\alpha}(t,\xi(t)) \end{cases} \tag{3}$$

имеет решение при всех $t\in[0,T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. V. Makarova, “Stochastic inclusions with forward mean derivatives having decomposable right-hand sides”, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, **12**:2 (2019), 143–149.

Мартынов Г. В. (ИППИ РАН, Москва, Россия). **Новый критерий Крамера–Мизеса для проверки многомерной равномерности при больших размерностях.**

Рассматривается задача проверки равномерности распределения на кубе $[0,1]^m$, $m\geqslant 2$. Для решения этой задачи предлагается следующая статистика:

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}_n^2 &= n\int_{[0,1]^m}\bigl(\widetilde{F}_n(t_1,\ldots,t_m)-\widetilde{F}(t_1,\ldots,t_m)\bigr)^2\,dt_1\cdots dt_m\\ &= \int_{[0,1]^m}\widetilde{\xi}_n^2(t_1,\ldots,t_m)\,dt_1\cdots dt_m.\end{aligned}$$

Здесь $\widetilde{F}(t_1,\ldots,t_m)=t_1^{r_1}\cdots t_m^{r_m}$ является обобщенной функцией равномерного распределения на $[0,1]^m$. Предполагается, что константы $r_1,\ldots,r_m$ больше -1. Соответствующая обобщенная эмпирическая функция распределения есть $\widetilde{F}_n(t_1,\ldots,t_m)=(1/n)\sum_{i=1}^n\prod_{j=1}^m I\{T_{i,j}<t_j^{r_j}\}$, где $T_i=(T_{i,1},\ldots,T_{i,m})$, $i=1,\ldots,n$, являются n наблюдениями случайного m-вектора T, имеющего при H_0 равномерное распределение на $[0,1]^m$. Обозначим через $\widetilde{\xi}_n(t_1,\ldots,t_m)$ обобщенный эмпирический процесс.

[16] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00048).

Теорема. *Обобщенный эмпирический процесс* $\widetilde{\xi}_n(t_1,\ldots,t_m)$ *слабо сходится в* $L^2([0,1]^m)$ *к гауссовскому процессу с ковариационной функцией*

$$\widetilde{K}(t_1,\ldots,t_m,\tau_1,\ldots,\tau_m)=\prod_{j=1}^{m}\min(t_j^{r_j},\tau_j^{r_j})-\prod_{j=1}^{m}t_j^{r_j j}\tau_j^{r_j}.$$

Если $r_j=1$, $j=1,\ldots,m$, то статистика $\widetilde{\omega}_n^2$ превращается в классическую статистику ω_n^2 для проверки равномерности распределения на $[0,1]^m$. Эта статистика рассмотрена, в частности, в [1] и [2]. Преимущество новой статистики заключается в том, что при подходящем выборе последовательности r_j, $j=1,2,\ldots$, ее предельное распределение при $m\to\infty$ сходится к некоторому невырожденному распределению (см. [3]). Распределение классической статистики в этом случае вырождается. Хотя предельные распределения обоих типов статистик могут быть вычислены точно, значения самих статистик по заданной выборке вычисляются по методу Монте-Карло.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Н. Кривякова, Г. В. Мартынов, Ю. Н. Тюрин, “О распределении статистики ω^2 в многомерном случае”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **22**:2 (1977), 415–420; англ. пер.: E. N. Krivyakova, G. V. Martynov, Yu. N. Tyurin, “On the distribution of the ω^2 statistics in the multidimensional case”, *Theory Probab. Appl.*, **22**:2 (1978), 406–410.
2. Г. В. Мартынов, *Критерии омега-квадрат*, Наука, М., 1978, 79 с.
3. G. Martynov, “A Cramér–von Mises test for Gaussian processes”, *Mathematical statistics and limit theorems*, Springer, Cham, 2015, 209–229.

Мелкумова Л. Э. (Самара, Россия)**. Упрощенная конструкция из парных копул (Simplified PCC) и воспроизводимость условных квантилей.**

Конструкция из парных копул (PCC — pair copul construction; см., например, [1]) представляет собой иерархический способ построения многомерных вероятностных распределений с использованием двумерных копул, который стал широко применяться в прикладных задачах с конца 1990-х годов. В основе PCC — представление трехмерного условного распределения через двумерные условные распределения с помощью соединительной копулы:

$$F_{12|3}(x_1,x_2\mid x_3)=C_{12|3}(F_{1|3}(x_1\mid x_3),F_{2|3}(x_2\mid x_3);x_3).$$

В том случае, когда функция $C_{12|3}$ не зависит от x_3, данную конструкцию называют упрощенной конструкцией из парных копул, а соответствующее предположение о независимости — упрощающим предположением (simplifying assumption). В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема. *Пусть для тройки случайных величин* (X_1,X_2,X_3) *с абсолютно непрерывной функцией распределения* $F_{123}(x_1,x_2,x_3)$ *и строго монотонными маргинальными и условными распределениями выполняется упрощающее предположение, т.е.* $C_{12|3}$ *не зависит от* x_3*. Тогда для трехмерного условного распределения* $F_{1|23}(x_1|x_2,x_3)$*, соответствующего* $F_{123}(x_1,x_2,x_3)$*, выполняется свойство воспроизводимости условных квантилей*

$$q_{1|23}^{(x_1^0,x_2^0,x_3^0)}\bigl(q_{2|3}^{(x_2^0,x_3^0)}(x_3),x_3\bigr)=q_{1|3}^{(x_1^0,x_3^0)}(x_3),\tag{1}$$

где $q^{(\mathbf{x^0})}_{i|\mathbf{j}}(\mathbf{x_j})$ *— условные квантили, проходящие через точку* $\mathbf{x^0}$*. Верно и обратное: если выполняется воспроизводимость* (1)*, справедливо упрощающее предположение.*

Свойство воспроизводимости условных квантилей и его вариант — “полная” воспроизводимость — подробно рассматриваются в [2], где также приводятся примеры распределений, обладающих этим свойством, и дается необходимое условие полной воспроизводимости, связанное с дифференциальным уравнением Пфаффа специального вида. Настоящая работа также устанавливает связь между копулами, соответствующими различным парам случайных величин в тройке (X_1, X_2, X_3), в случае полной воспроизводимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Stöber, H. Joe, C. Czado, “Simplified pair copula constructions–limitations and extensions”, *J. Multivariate Anal.*, **119** (2013), 101–118.
2. S. Ya. Shatskikh, L. E. Melkumova, “Reducing the sample size when estimating conditional quantiles”, *CEUR Workshop Proceedings*, **1638** (2016), 769–781, http://ceur-ws.org/Vol-1638/.

Насыров Ф. С. (Уфа, Россия)**. О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений.**

Пусть на $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[t_0,T]}, \mathbf{P})$ задан $\mathscr{F}_t$-винеровский процесс $W(t)$, $\mathscr{P}$ есть σ-алгебра предсказуемых множеств, а $\mathscr{B}(\mathbf{R}^2)$ — борелевская σ-алгебра.

Теорема. 1. *Обыкновенное дифференциальное уравнение со случайной правой частью вида* $y' = f(t, W(t), y + W(t))$, $t \in [t_0, T]$, $y(t_0) = y_0$, *где* $f(t, v, y) = f(t, v, y, \omega)$ *—* $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(\mathbf{R}^2)$*-измеримая случайная функция, обладает сильным решением, если с вероятностью* 1

$$|f(t, v, y)| \leqslant n(t), \quad \text{где } n(t) = n(t, \omega) \text{ суммируема по } t. \tag{1}$$

2. *Пусть* $X(s)$ *– произвольная непрерывная функция и выполнены следующие условия:* (a) *уравнение* $(\varphi^*)'_v = \sigma(t, v, \varphi^*)$ *допускает общее решение* $\phi^*(t, v, C(t))$; (b) *измеримая функция*

$$f(t, y) = \frac{B(t, X(t), \varphi^*(t, X(t), y)) - (\varphi^*)'_t(t, X(t), y)}{\sigma(t, X(t), \varphi^*(t, X(t), y))}$$

удовлетворяет неравенству (1) *с неслучайной функцией* $n(t)$*. Тогда существует решение* $\xi(t) = \phi^*(t, X(t), C(t))$ *уравнения с симметричным интегралом*

$$\xi(t) - \xi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X(s), \xi(s)) * dX(s) + \int_{t_0}^{t} B(s, X(s), \xi(s))\, ds. \tag{2}$$

3. *Если с вероятностью* 1 *справедливы предположения предыдущего утверждения с борелевской функцией* $\sigma(t, u, \varphi)$ *и* $\mathscr{P} \times \mathscr{B}(\mathbf{R}^2)$*-измеримой функцией* $B(t, u, \varphi, \omega)$*, то существует сильное решение уравнения Стратоновича вида* (2) *с* $X(s)$*, замененным на* $W(s)$*.*

4. *Пусть дано уравнение Ито*

$$d\xi(t) = \sigma(t, W(t), \xi(t))\, dW(t) + B(t, W(t), \xi(t))\, dt, \qquad \xi(0) = \xi_0. \tag{3}$$

Если справедливы предположения п. 3 *и непрерывная функция* $\sigma(t, u, \varphi)$ *имеет непрерывные частные производные* $\sigma'_u(t, u, \varphi)$ *и* $\sigma'_\varphi(t, u, \varphi)$, *то существует сильное решение* $\xi(t) = \phi^*(t, W(t), C(t))$ *уравнения* (3) *и случайная функция* $\phi(t, W(t)) \equiv \phi^*(t, W(t), C(t))$ *с вероятностью* 1 *удовлетворяет соотношению*

$$\phi'_t(t, W(t)) = -\frac{1}{2}\, \phi''_{uu}(t, W(t)) + b\big(t, W(t), \phi(t, W(t))\big), \qquad t \in [t_0, T].$$

Наумов В. А. (Хельсинки, Финляндия)**, Гайдамака Ю. В.** (Москва, Россия)**, Самуйлов К. Е.** (Москва, Россия)**. Мультипликативные ресурсные системы массового обслуживания с потерями**[17]**.**

Ресурсные системы массового обслуживания (СМО) с потерями, в которых поступившим заявкам требуется один или более видов ограниченных ресурсов, являются обобщением классической системы с потерями Эрланга. Ресурсная СМО с потерями и произвольной функцией распределения объемов единственного ресурса исследовалась в [1]. С тех пор опубликовано много работ, посвященных СМО со случайными объемами ресурсов. Введенные в [2] понятия положительных и отрицательных заявок существенно расширили область применения теории массового обслуживания. В ресурсных СМО поступление отрицательной заявки приводит к увеличению объема ресурса, доступного положительным заявкам [3]. Мы исследуем ресурсную СМО с положительными и отрицательными заявками нескольких видов, интенсивности поступления и обслуживания которых зависят от числа соответствующих заявок в системе. Такая система описывается однородным скачкообразным марковским процессом $\mathrm{X}(t) = (\vec{\xi}(t), \theta(t))$, где целочисленный вектор $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_K(t))$ указывает на число заявок каждого вида в системе в момент t, а вектор $\theta(t) = (\theta_1(t), \ldots, \theta_K(t))$ перечисляет объемы ресурсов, занятых каждой заявкой.

Теорема. *Стационарное распределение процесса* $X(t)$ *представимо в следующем виде*:

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = p_0 \Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \prod_{k=1}^{K} \prod_{j=1}^{n_k} \frac{\lambda_k(j-1)}{\mu_k(j)},$$

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{y} \leqslant \mathbf{x},\, \mathbf{yU} \leqslant \mathbf{R}} F_1(d\mathbf{y}_{1,1}) \cdots F_K(d\mathbf{y}_{K,n_K}),$$

где $F_k(\mathbf{x})$ — *совместная функция распределения объемов ресурсов, требуемых заявке типа* k.

[17] Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН “5-100” и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 17-07-00845 и № 18-00-01555 (18-00-01685).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Л. Ромм, В. В. Скитович, “Об одном обобщении задачи Эрланга”, *Автомат. и телемех.*, 1971, № 6, 164–168; англ. пер.: E. L. Romm, V. V. Skitovich, “On certain generalization of problem of Erlang”, *Autom. Remote Control*, **32**:6 (1971), 1000–1003.
2. E. Gelenbe, “Product-form queuing networks with negative and positive customers”, *J. Appl. Probab.*, **28**:3 (1991), 656–663.
3. V. Naumov, K. Samouylov, “Analysis of multi-resource loss system with state-dependent arrival and service rates”, *Probab. Engrg. Inform. Sci.*, **31**:4 (2017), 413–419.

Павлов И. В., Цветкова И. В. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Интерполяционные дефляторы и интерполяционные мартингальные меры**[18]**.**

Хорошо известно, что на безарбитражных финансовых (B,S)-рынках при фиксированной физической вероятности Q существует взаимно однозначное соответствие между мартингальными мерами (м.м.), эквивалентными Q, и мартингальными (относительно Q) дефляторами (м.д.). Если (B,S)-рынок определен на не более чем счетном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{F},Q)$, то для построения хеджирующих портфелей оказалось полезным рассматривать “наиболее справедливые” м.м., названные нами интерполяционными [1], [2]. Соответствующие им дефляторы мы также называем интерполяционными. Поясним это определение на одношаговой модели.

Пусть $(\mathscr{F}_k)_{k=0}^1$ — фильтрация на Ω: $\mathscr{F}_0=\{\Omega,\varnothing\}$, $\mathscr{F}_1$ — множество всех подмножеств счетного Ω, имеющих (кроме $\varnothing$) строго положительную Q-вероятность. Пусть $Z=(Z_k,\mathscr{F}_k,Q)_{k=0}^1$ — дисконтированная цена акции, а $H=(H_k,\mathscr{F}_k,Q)_{k=0}^1$ — строго положительный м.д. с $H_0=1$. Зафиксируем некоторое индексируемое параметром α семейство интерполирующих фильтраций $\mathbf{F}=\{\mathbf{F}^\alpha\}$, где $\mathbf{F}^\alpha=(\mathscr{F}_n^\alpha)_{n=0}^\infty$ и для каждого индекса α выполняются равенства $\mathscr{F}_0^\alpha=\mathscr{F}_0$, $\mathscr{F}_\infty^\alpha=\mathscr{F}_1$. Рассмотрим следующие мартингальные интерполяции исходного дефлятора: $H_n^\alpha=E^Q[H_1\mid\mathscr{F}_n^\alpha]$, $n=0,1,2,\dots$. С другой стороны, пусть P — $\mathbf{F}$-интерполяционная м.м. процесса Z, т.е. при каждом α процесс $Z_n^\alpha=E^P[Z_1\mid\mathscr{F}_n^\alpha]$, $n=0,1,2,\dots$, допускает единственную м.м. (а именно, только меру P). Если в исходной модели мере P соответствует H (т.е. $dP=H_1\,dQ$), то из обобщенной формулы Байеса вытекает, что $H_n^\alpha Z_n^\alpha=E^Q[H_1Z_1\mid\mathscr{F}_n^\alpha]$ при каждом α, т.е. H_n^α является м.д. процесса Z_n^α. Так как P есть единственная м.м. процесса Z_n^α, то H_n^α — единственный м.д. этого процесса. Из проведенных рассуждений вытекает следующее утверждение.

Предложение. *Мартингальный дефлятор H процесса Z, соответствующий мартингальной мере P, является интерполяционным тогда и только тогда, когда он обладает следующим свойством единственности: для любого α процесс H_n^α является единственным мартингальным дефлятором процесса Z_n^α.*

[18]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00451).

В докладе в терминах параметров процесса Z и свойств физической меры Q приводятся условия существования интерполяционных дефляторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. В. Павлов, В. В. Шамраева, И. В. Цветкова, “О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счетного вероятностного пространства”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **61**:1 (2016), 173–181; англ. пер.: I. V. Pavlov, V. V. Shamraeva, I. V. Tsvetkova, “On the existence of martingale measures satisfying the weakened condition of noncoincidence of barycenters in the case of countable probability space”, *Theory Probab. Appl.*, **61**:1 (2017), 167–175.
2. I. V. Pavlov, “New family of one-step processes admitting special interpolating martingale measures”, *Global and Stochastic Analysis*, **5**:2 (2018), 111–119.

Переварюха А. Ю. (Санкт-Петербург, Россия). **Модель популяции вредителя со стохастическим переходом к фазе вспышки численности**[19]**.**

Предложим модификацию вычислительной модели [1] для вспышки численности вредителя леса *Cardiaspina albitextura* после выхода популяции насекомых из интервала Ω_s контроля регулирующих факторов. Выживаемость поколений определим формулой $R = N(T)$ от значения $N(0) = \lambda S$, $S \in \Omega_S$; на интервале $t \in [0, \dots, \xi, \omega, \dots, T]$ опишем, согласно трем стадиям онтогенеза псиллид, различные темпы убыли численности предикативно переопределяемой системой:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha\overline{w}(\xi)N(t) + \overline{\Theta}(N(0))\beta)N(t), & 0 < t < \xi, \\ -\left(\dfrac{\alpha_1 N(\xi)}{w(\omega)} + \beta\right)N(t), & \xi < t < \omega, \\ -(\alpha_2 N(t))N(t-\varsigma), & \omega < t < T, \end{cases} \tag{1}$$

где ς — запаздывание, возникающее из-за отложенного действия плотностной регуляции, $[0,\xi]$, $[\xi,\omega]$ — длительности стадий, α, β — коэффициенты убыли, $\Theta(N(0)) = [1 + \exp(-\kappa N(0)^2)]$, $\lim_{N(0)\to\infty} \Theta(N(0)) = 1$, — пороговое снижение эффективности воспроизводства в $S < \mathscr{L} \in \mathbf{N}$. Пусть $\mathscr{L} \subset U_1 \in \Omega_S$ — область малочисленной группы, где воспроизводство обусловлено случайными факторами. Пусть $\overline{\Theta}(N(0), w) = \Theta(N(0)) \times w(t)$, где $w(t)$ — показатель условного размерного развития, определяемый из уравнения $\dot{w}(t) = [G/(N^{2/3} + \sigma)] \times \gamma$, $w(0) = w_0$, γ — равномерно распределенная случайная величина. Полученная на основе унимодальной зависимости $\psi(x) = \bigcup_{N(0)} N(T)$, $N(0) \in \mathbf{Z}_+$, численных решений трех задач Коши (1) на интервале $t \in [0, T]$ траектория итераций $x_{n+1} = \psi(x_n)$, $x_0 < \mathscr{L}$, обладает свойством ограниченного стохастического возмущения. Вместо пороговой точки x^* такой, что $\psi(x_*) = x_* < \max\psi(x)$, $\forall\, x < x_* - \epsilon$, мы получим некоторую окрестность $\lim_{n\to\infty}\psi^n(x_*) = U_0$, $U_0 < \epsilon$. Множество U_0 образует интервал вероятностного поведения траектории, имитирующий ситуацию случайной вспышки от малой группы насекомых.

[19] Работа выполнена в рамках бюджетной темы АААА-А16-116051250009-8 Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН.

Теорема 1. *Вероятность события* $\{x_0 < x_*,\ \psi^k(x_0) > \max\psi(x)$ *при* $k<\infty\}$ *положительна.*

Теорема 2. *Для всех* x_0 *и* $\psi^n(x_0)$ *существует устойчивое* ω*-предельное множество* $\psi^p(x_i)=\psi^{p+2}(x_i)$, $x_i > \max\psi(x)$.

Модель (1) сочетает стохастическое и детерминированное поведения в двух диапазонах, не имеющих гладкой границы для интервала контролируемой динамики численности вредителя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Ю. Переварюха, “Моделирование коллапса промысловой популяции при стохастической неопределенности”, в ст. “Тезисы докладов, представленных на Второй международной конференции по стохастическим методам”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **62**:4 (2017), 820–821; англ. пер.: A. Yu. Perevaryukha, in “Abstracts of talks given at the 2nd International conference on stochastic methods”, *Theory Probab. Appl.*, **62**:4 (2018).

Платонова М. В., Цыкин С. В. (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия). **О вероятностных аппроксимациях решения задачи Коши для уравнений типа Шрёдингера**[20]**.**

Рассмотрим задачу Коши для уравнения типа Шрёдингера высокого порядка

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\,\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}, \quad u(0,x)=\varphi(x), \qquad m\in\mathbf{N}.$$

В работе [1] был предложен вероятностный метод построения аппроксимации решения задачи Коши $u(t,x)$ для уравнения Шрёдингера ($m=1$) средними значениями функционалов от стохастических процессов. Мы обобщим предложенный подход на случай, когда $m\geqslant 2$.

Пусть ν – пуассоновская случайная мера на $(0,\infty)\times(0,\infty)$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt,dx)=\frac{dt\,dx}{x^{2m+1}};$$

для $\varepsilon>0$ определим случайную величину $\xi_\varepsilon(t)=\int_0^t\int_\varepsilon^{e\varepsilon} x\,\nu(ds,dx)$. Определим функцию

$$u_\varepsilon(t,x)=\mathbf{E}\bigl[(\varphi_-*h_\varepsilon)(x-\sigma\xi_\varepsilon(t))+(\varphi_+*h_\varepsilon)(x+\sigma\xi_\varepsilon(t))\bigr],$$

где

$$\varphi_+(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)\,dp, \quad \varphi_-(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)\,dp,$$

а функция $h_\varepsilon(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{h}_\varepsilon(p)=\exp\biggl(-t\int_\varepsilon^{e\varepsilon}\biggl(\sum_{j=1}^{2m-1}\frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!}+\frac{(i|p|\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!}\biggr)\frac{dx}{x^{2m+1}}\biggr).$$

[20]Работа первого автора выполнена при поддержке РНФ (грант № 17-11-01136).

Теорема. *Для любой функции* $\varphi \in W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$ *и* $t \geqslant 0$ *существует константа* $C > 0$ *такая, что*

$$\|u(t,x) - u_\varepsilon(t,x)\|_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant Ct\varepsilon^2 \|\varphi\|_{W_2^{2m+2}(\mathbf{R})}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, “Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера”, *Вероятность и статистика.* 24, Зап. науч. сем. ПОМИ, **454**, ПОМИ, СПб., 2016, 158–175; англ. пер.: I. A. Ibragimov, N. V. Smorodina, M. M. Faddeev, “On a limit theorem related to probabilistic representation of solution to the Cauchy problem for the Schrödinger equation”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **229**:6 (2018), 702–713.

Пресман Э. Л. (Москва, Россия)**, Форманов Ш. К.** (Ташкент, Узбекистан)**. Об одной модификации условий Линдеберга и Ротаря.**

Рассматривается схема серий для сумм независимых (внутри серии) случайных величин с конечными дисперсиями и нулевыми математическими ожиданиями. Без ограничения общности предполагается, что сумма дисперсий внутри серии равна единице. Линдеберг ввел характеристику, которая каждому $\varepsilon > 0$ ставит в соответствие последовательность $\{L_n(\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$ сумм дисперсий ε-хвостов распределений слагаемых. Хорошо известно (см., например, [1, гл. III, § 4]), что условие Линдеберга ($\lim_{n\to\infty} L_n(\varepsilon) = 0\ \forall\, \varepsilon > 0$) является достаточным для нормальной сходимости последовательности соответствующих сумм, а в случае выполнения условия равномерной бесконечной малости слагаемых условие Линдеберга является необходимым.

Каждому $\alpha > 0$ поставим в соответствие последовательность сумм абсолютных моментов порядка $2{+}\alpha$ для урезанных на единичном уровне распределений слагаемых, а ее сумму с характеристикой Линдеберга, соответствующей $\varepsilon = 1$, назовем α-характеристикой последовательности $\{L_n^\alpha\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема. (a) *Если* $\lim_{n\to\infty} L_n^\alpha = 0$ *для некоторого* $\alpha > 0$, *то выполняется условие Линдеберга.*

(b) *Если выполняется условие Линдеберга, то* $\lim_{n\to\infty} L_n^\alpha = 0$ *для всех* $\alpha > 0$.

Таким образом, для проверки нормальной сходимости вместо того, чтобы проверять сходимость к нулю характеристики Линдеберга *при любом* $\varepsilon > 0$ достаточно проверить что *существует* такое $\alpha > 0$, что α-характеристика сходится к нулю.

В. И. Ротарь (см. [2] или [1, гл. III, § 5]) рассмотрел аналог характеристики Линдеберга и показал, что сходимость его характеристики к нулю для любого $\varepsilon > 0$ является необходимым и достаточным условием для нормальной сходимости без предположения о равномерной бесконечной малости слагаемых. Мы приводим соответствующую модификацию и характеристики Ротаря.

Эти результаты приводятся в работе [3], при этом в русской версии работы [3] в формулировке и доказательстве леммы 2 имеется неточность, устраненная в английской версии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Н. Ширяев, *Вероятность*–1, 3-е изд., МЦНМО, М., 2004, 520 с.; англ. пер. 4-го изд.: A. N. Shiryaev, *Probability*–1, 3rd ed., Grad. Texts in Math., **95**, Springer, New York, 2016, xvii+486 pp.
2. В. И. Ротарь, "К обобщению теоремы Линдеберга–Феллера", *Матем. заметки*, **18**:1 (1975), 129–135; англ. пер.: V. I. Rotar', "An extension of the Lindeberg–Feller theorem", *Math. Notes*, **18**:1 (1975), 660–663.
3. Э. Л. Пресман, Ш. К. Форманов, "О предельной теореме Линдеберга–Феллера", *Докл. РАН*, **485**:5 (2019), 548–552; англ. пер.: E. L. Presman, Sh. K. Formanov, "On Lindeberg–Feller limit theorem", *Dokl. Math.*, **99**:2 (2019), 204–207.

Родионов И. В. (Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия)**. О параметрическом оценивании хвостов распределений**[21]**.**

Настоящий доклад посвящен задаче параметрического оценивания хвостов распределений. Задача оценивания хвоста распределения является центральной для статистики экстремумов последовательностей независимых случайных величин. Общепринятым для данной теории является семипараметрический подход, основанный на теореме Пикандса–Балкема–де Хаана (см. [1], [2]), в рамках которого задача оценивания хвоста распределения сводится к вычислению оценки так называемого индекса экстремального значения (подробнее см. [3]). Упомянутый подход хорошо себя зарекомендовал в случае, когда хвост распределения является степенным, что характерно для финансовых и страховых задач. Однако с помощью данного подхода невозможно различить распределения, хвосты которых убывают экспоненциально [4]. Кроме того, условия теоремы Пикандса–Балкема–де Хаана не выполнены для большого класса распределений, в частности для распределений с логарифмическими хвостами. Поэтому возникла необходимость предложить общий метод оценивания хвоста распределения, не основанный на этой теореме, который может быть применен для большинства важных для практики распределений.

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с непрерывной функцией распределения F. Обозначим через $X_{(1)} \leqslant \dots \leqslant X_{(n)}$ вариационный ряд выборки $\mathbf{X}$. Очевидно, что только наибольшие порядковые статистики могут быть использованы в задаче оценивания хвоста распределения. Предположим, что F принадлежит параметрическому семейству непрерывных хвостов распределений $\mathscr{F} = \{F_\theta,\, \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbf{R}$. О том, как выбирать подходящее параметрическое семейство в рамках данной задачи, см. [4], [5]. Рассмотрим статистику

$$R_{k,n}(\theta) = \ln(1 - F_\theta(X_{(n-k)})) - \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} \ln(1 - F_\theta(X_{(i)}))$$

и основанную на ней оценку параметра θ

$$\widehat{\theta}_{k,n} = \arg\{\theta \colon R_{k,n}(\theta) = 1\}.$$

[21] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00090).

Теорема 1. *Пусть параметрическое семейство $\mathscr{F}$ является упорядоченным по параметру θ (определение см. в [6]). Тогда при $k \to \infty$, $k/n \to 0$, $n \to \infty$ решение уравнения $R_{k,n}(\theta) = 1$ относительно θ единственно п.н., а $\widehat{\theta}_{k,n}$ является состоятельной оценкой параметра θ.*

В настоящем докладе мы обсуждаем свойства предложенного метода, а именно единственность решения уравнения $R_{k,n}(\theta)=1$, состоятельность и асимптотическую нормальность оценки $\widehat{\theta}_{k,n}$, а также модификацию метода для оценивания вейбулловского и лог-вейбулловского хвостового индекса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. A. Balkema, L. de Haan, “Residual life time at great age”, *Ann. Probab.*, **2**:5 (1974), 792–804.
2. J. Pickands, III, “Statistical inference using extreme order statistics”, *Ann. Statist.*, **3** (1975), 119–131.
3. L. de Haan, A. Ferreira, *Extreme value theory. An introduction*, Springer Ser. Oper. Res. Financ. Eng., Springer, New York, 2006, xviii+417 pp.
4. И. В. Родионов, “О различении классов хвостов распределений”, *Пробл. передачи информ.*, **54**:2 (2018), 29–44; англ. пер.: I. V. Rodionov, “On discrimination between classes of distribution tails”, *Probl. Inf. Transm.*, **54**:2 (2018), 124–138.
5. И. В. Родионов, “Критерий различения хвостов распределений типа Вейбулла”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **63**:2 (2018), 402–413; англ. пер.: I. V. Rodionov, “A discrimination test for tails of Weibull-type distributions”, *Theory Probab. Appl.*, **63**:2 (2018), 327–335.
6. I. Rodionov, “On parametric estimation of distribution tails”, *4th ISNPS* (Salerno, 2018) (to appear).

Родоченко В. В., Кудрявцев О. Е. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Непараметрический метод калибровки модели CGMY для криптовалютных рынков с применением регрессии на основе гауссовских процессов**[22]**.**

Рассмотрим набор данных вида $(X,y) = \{(x_i,y_i),\ i = 1,\dots,n\}$, где x_i — обработанные котировки BTC/USD и вероятности перехода логарифмов приращений цены актива через набор барьеров, а y_i — набор откалиброванных по ним (см., например, [1]) параметров модели CGMY. Мы используем алгоритм регрессии на основе гауссовских процессов (GRP) из [2], чтобы найти соотношение между x_i и y_i в виде $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$, где $f(x)$ — гауссовский процесс, а набор независимых одинаково распределенных величин $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$, $\sigma^2 \geqslant 0$, моделирует шум в данных. Для $X^* \in X$ мы подбираем параметры квадратичной экспоненциальной ковариационной функции, строим матрицу $K(X^*,X^*)$; полагаем $f \sim N(0,K(X^*,X^*))$ и используем предположение о виде f, чтобы получить набор $(X,f) = \{(x_i,f_i),\ i=1,\dots,n\}$. В ходе обучения алгоритма мы обращаем $K(X^*,X^*)$ и вычисляем окончательный вид $f(x)$, следуя процедуре из [2]. Для $X^{**} \in X \setminus X^*$ мы сравниваем (X^{**},f) с (X^{**},y). Предобученный метод GPR кратно превосходит метод из [1] в скорости.

[22]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00910).

Утверждение. *Две выборки по* 50 *образцов значений процесса* $CGMY$ *с* $t = 1/365$ *и параметрами, полученными соответственно методом из* [1] *и при помощи* GPR, *неразличимы с точки зрения критерия Уилкоксона при* 5*-процентном уровне значимости.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. O. Kudryavtsev, S. Grechko, “Statistical methods for calibrating models of cryptocurrencies prices”, *Accounting and Statistics*, **4**:52 (2018), 67–76.
2. J. De Spiegeleer, D. B. Madan, S. Reyners, W. Schoutens, “Machine learning for quantitative finance: fast derivative pricing, hedging and fitting”, *Quant. Finance*, **18**:10 (2018), 1635–1643; https://doi.org/10.2139/ssrn.3191050.

Рохлин Д. Б. (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия). **Анализ некоторых механизмов стимулирования в многоагентных системах**[23]**.**

В докладе рассматриваются три задачи, связанные с управлением ресурсами в многоагентных системах. В каждой из них цель состоит в построении стимулирующей функции, побуждающей агентов следовать стратегиям, которые оптимальны для менеджера системы. Остановимся подробнее на задаче о распределении пропускных способностей соединений сети между большим числом пользователей.

Рассмотрим сеть с m соединениями и N пользователями. Каждый пользователь i передает пакеты через фиксированный набор соединений. Структура сети определяется матрицей маршрутизации $R = (R_i^j) \in \mathbf{R}^{m\times N}$. Ее столбцы $R_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, N$, являются двоичными m-мерными векторами такими, что $R_i^j = 1$, если соединение j используется пользователем i, и $R_i^j = 0$ в противном случае. Пропускные способности соединений описываются вектором $b \in \mathbf{R}^m$ со строго положительными компонентами. Пользователи оценивают качество работы сети с помощью функций полезности $u_i(x^i)$, зависящих от скорости $x^i \in \mathbf{R}_+$ передачи данных. Оптимальное распределение ресурсов соответствует оптимальному решению $x^* \in \mathbf{R}_+^N$ задачи *максимизации полезности сети* (NUM: network utility maximization):

$$u(x) = \sum_{i=1}^N u_i(x^i) \to \max, \qquad Rx = \sum_{i=1}^N R_i x^i \leqslant b, \qquad x \in \mathbf{R}_+^N,$$

сформулированной в работе [2].

При заданных ценах соединений $\overline{\lambda} \in \mathbf{R}_+^m$ пользователи выбирают оптимальные скорости передачи информации $\overline{x}_i$, максимизируя разность между полезностью и ценой $\overline{x}_i$: $\overline{x}^i \in \arg\max_{x^i\in\mathbf{R}_+}\bigl(u_i(x^i) - x^i\sum_{j=1}^m \overline{\lambda}^j R_i^j\bigr)$. Цель управления состоит в том, чтобы стимулировать оптимальное распределение ресурсов x^* путем назначения цен соединений $\lambda^* \in \mathbf{R}_+^m$.

[23] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-19-01038).

Теорема 1. *Пусть функции u_i дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям $u_i(0) = 0$, $0 < u_i'(0) \leqslant B < \infty$, а функции $-u_i$ являются $(N\sigma)$-сильно выпуклыми: $-u_i''(x^i) \geqslant N\sigma$, $x^i \in \mathbf{R}_+$, $\sigma > 0$. Определим λ_t по рекуррентной формуле*

$$\lambda_{t+1} = \Pi_\Lambda\big(\lambda_t - \eta_t(b - NR_{\xi_{t+1}}\overline{x}^{\,\xi_{t+1}}(\lambda_t))\big), \qquad t \geqslant 1, \quad \lambda_1 \in \Lambda,$$

где Π_Λ — проекция на гиперкуб $\Lambda = [0, B]^m$, $\eta_t = K/\sqrt{t}$, а ξ_t — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $\{1, \dots, N\}$. Тогда для $\overline{\lambda}_T = (1/T)\sum_{t=1}^T \lambda_t$ справедливы оценки:

$$\mathbf{E}\bigg(\sum_{i=1}^N R_i^j \overline{x}^i(\overline{\lambda}_T) - b^j\bigg)^+ \leqslant \sqrt{\frac{2D}{\sigma}}\,\frac{1}{T^{1/4}}, \qquad u(x^*) - \mathbf{E}u(\overline{x}(\overline{\lambda}_T)) \leqslant B\sqrt{\frac{2D}{\sigma}}\,\frac{1}{T^{1/4}},$$

где $D = mB^2/(2K) + KL^2$, $y^+ = \max\{y, 0\}$.

Предлагаемый алгоритм не использует информацию о суммарном трафике на каждом соединении. Он сравнивается теоретически и посредством компьютерных экспериментов с быстрым методом градиентного спуска Нестерова, примененного к задаче NUM в работе [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Beck, A. Nedić, A. Ozdaglar, “An $O(1/k)$ gradient method for network resource allocation problems”, *IEEE Trans. Control Netw. Syst.*, **1**:1 (2014), 64–73.
2. F. P. Kelly, A. K. Maulloo, D. K. H. Tan, “Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability”, *J. Oper. Res. Soc.*, **49**:3 (1998), 237–252.

Рядовкин К. С. (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия)**. Ветвящиеся случайные блуждания на периодических решетках**[24]**.**

Пусть $g_1, \dots, g_d \in \mathbf{Z}^d$ – набор линейно независимых векторов с целочисленными координатами. Назовем решеткой множество $\Gamma = \{g \in \mathbf{Z}^d \colon g = \sum_{j=1}^d n_j g_j,$ $n_j \in \mathbf{Z},\ j = 1, \dots, d\}$. Рассмотрим ветвящееся случайное блуждание на $\mathbf{Z}^d$ с переходными интенсивностями $a(v, u)$, удовлетворяющими условиям

$$a(v, u) = a(u, v) = a(v + g, u + g) \quad \text{и} \quad \sum_{w \in \mathbf{Z}^d} \|w\|^2 |a(v, w)| < \infty$$

при всех $u, v \in \mathbf{Z}^d$ и $g \in \Gamma$. Также предположим, что случайное блуждание неприводимо. Пусть источники ветвления расположены в каждой вершине $v \in \mathbf{Z}^d$, а интенсивности ветвления $b_k(v)$ на k потомков удовлетворяют условиям

$$\beta_n(v) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^n b_k(v) < \infty \quad \text{и} \quad \beta_n(v + g) = \beta_n(v)$$

[24]Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 17-11-01136).

при всех $v \in \mathbf{Z}^d$, $g \in \Gamma$ и $n = 1, 2$. Асимптотическое поведение среднего числа частиц такого ветвящегося случайного блуждания рассмотрено в [1].

Обозначим через $\mathscr{A}$ оператор эволюции средней численности частиц, а через λ — правый край спектра этого оператора. Через $M_2(v, u, t)$ обозначим второй момент численности частиц в вершине u в момент t, если в нулевой момент времени в точке v была одна частица.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda > 0$. *Тогда при* $t \to +\infty$

$$M_2(v, u, t) = \frac{e^{2\lambda t} t^{-d} c(v, u)}{\lambda} (1 + O(t^{-1})),$$

где $c(v, u)$ *может быть вычислена явно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. В. Платонова, К. С. Рядовкин, “Ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbf{Z}^d$ с периодически расположенными источниками ветвления”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **64**:2 (2019), 283–307; англ. пер.: M. V. Platonova, K. S. Ryadovkin, “Branching random walks on $\mathbf{Z}^d$ with periodic branching sources”, *Theory Probab. Appl.*, **64**:2 (2019), 229–248.

Рыков В. В., Козырев Д. В. (Москва, Россия)**. О чувствительности стохастических моделей**[25]**.**

Устойчивость характеристик систем к изменению их входных данных и внешних воздействий является одной из ключевых проблем всего естествознания. Для стохастических систем устойчивость часто означает нечувствительность их характеристик к виду распределений их исходной информации. В докладе приводится новая трактовка некоторых известных классических и современных результатов о строгой и асимптотической нечувствительности характеристик ряда стохастических систем к виду распределений их исходной информации.

1. *Теорема Севастьянова* [1] означает нечувствительность стационарных вероятностей состояний системы Эрланга с пуассоновским входящим потоком к виду распределений времени обслуживания. Аналогично, BCMP-*теорема* [2] утверждает нечувствительность выходных характеристик широкого класса стохастических сетей к виду распределений длительности обслуживания в узлах сети.

2. В *теореме Коваленко* [3] содержатся необходимые и достаточные условия нечувствительности стационарных вероятностей резервированной системы к виду распределений времени ремонта ее компонент. В *теоремах Гнеденко* и *Соловьёва* [4], [5] доказано, что при “быстром” восстановлении функция надежности дублированной системы сходится к экспоненте для любых распределений времени безотказной работы и ремонта ее компонент, что можно рассматривать как асимптотическую нечувствительность характеристик системы к виду распределений ее исходной информации. На предыдущей конференции было предложено [6] обобщение этого результата для различных классов систем и при более широких предположениях относительно отказов компонент.

[25]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00633, 17-07-00142).

3. *Теорему Спарре Андерсена* об аппроксимации вероятности разорения в моделях страхования в условиях Крамера–Лундберга можно трактовать как ее нечувствительность к виду распределения интервалов между наступлением страховых случаев. При этом вероятность разорения существенно чувствительна к виду распределения величины ущерба.

4. Принадлежность оптимальной стратегии управления марковским процессом классу простых марковских стратегий также можно трактовать как ее нечувствительность к наблюдениям за процессом вплоть до момента принятия решения. Обобщение этого результата на класс дискретно управляемых полурегенерирующих процессов, которыми успешно моделируются многие стохастические системы, содержится в [7].

5. Изучение чувствительности моделей запасов и гарантийного анализа предлагается в качестве проблем для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. А. Севастьянов, “Эргодическая теорема для марковских процессов и ее применение к телефонным системам с отказами”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **2**:1 (1957), 106–116; англ. пер.: B. A. Sevast'yanov, “An ergodic theorem for Markov processes and its application to telephone systems with refusals”, *Theory Probab. Appl.*, **2**:1 (1957), 104–112.
2. И. Н. Коваленко, *Исследования по анализу надежности сложных систем*, Наукова Думка, Киев, 1975, 210 с.
3. F. Baskett, K. M. Chandy, R. R. Muntz, F. D. Palacios, “Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers”, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **22**:2 (1975), 248–260.
4. Б. В. Гнеденко, “О дублировании с восстановлением”, *Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернет.*, 1964, № 5, 111–118.
5. А. Д. Соловьёв, “Резервирование с быстрым восстановлением”, *Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернет.*, 1970, № 1, 56–71.
6. В. В. Рыков, Д. В. Козырев, “Проблемы чувствительности стохастических моделей”, в ст. “Тезисы докладов, представленных на Третьей международной конференции по стохастическим методам”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **64**:1 (2019), 189; англ. пер.: V. V. Rykov, D. V. Kozyrev, in “Abstracts of talks given at the 3rd International conference on stochastic methods”, *Theory Probab. Appl.*, **64**:1.
7. M. Yu. Kitaev, V. V. Rykov, *Controlled queueing systems*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995, x+287 pp.

Рытова А. И. (Москва, Россия)**. Ветвящееся блуждание с бесконечным числом начальных частиц и тяжелыми хвостами**[26]**.**

Рассматривается случайное поле $n(t,\cdot)$ частиц на $\mathbf{Z}^d$, $d \geqslant 1$, эволюция которого включает блуждание частиц по решетке и ветвление, т.е. гибель и размножение частиц на произвольное число потомков, в начале координат. В начальный момент времени в каждой точке $x \in \mathbf{Z}^d$ находится по одной частице, которая определяет субпопуляцию $n_x(t,\cdot)$ произошедших от нее частиц. Для ветвящегося случайного блуждания (ВСБ) с тяжелыми хвостами (см. определения в [1]) на основе утверждений из [1]–[3] получена следующая теорема.

[26]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-01-0468-а).

Теорема 1. *Для симметричного ВСБ на* $\mathbf{Z}^d$, $d \geqslant 1$, *с параметром* $\alpha \in (0,2)$, *определяющим тяжесть хвостов блуждания, при* $t \to \infty$ *справедливы соотношения*

$$\mathbf{E}\, n(t,y) \sim C(y)\, v(t), \quad \mathbf{E}\, n_x(t,y) \sim C(x,y)\, u(t),$$

здесь функции $v(t)$, $u(t)$ *равны функции* $e^{\lambda t}$ *для надкритического ВСБ, функциям* $v_{\mathrm{cr}}(t)$, $u_{\mathrm{cr}}(t)$ *и* $v_{\mathrm{sub}}(t)$, $u_{\mathrm{sub}}(t)$ *для критического и докритического ВСБ соответственно и имеют вид*

(a) $v_{\mathrm{cr}}(t) = 1$, $\quad u_{\mathrm{cr}}(t) = t^{-1/\alpha}$, $\quad v_{\mathrm{sub}}(t) = t^{1/\alpha-1}$, $\quad u_{\mathrm{sub}}(t) = t^{1/\alpha-2}$;

(b) $v_{\mathrm{cr}}(t) = 1$, $\quad u_{\mathrm{cr}}(t) = t^{-1}$, $\quad v_{\mathrm{sub}}(t) = \ln^{-1} t$, $\quad u_{\mathrm{sub}}(t) = t^{-1}\ln^{-2} t$;

(c) $v_{\mathrm{cr}}(t) = t^{d/\alpha-1}$, $\quad u_{\mathrm{cr}}(t) = t^{d/\alpha-2}$, $\quad v_{\mathrm{sub}}(t) = 1$, $\quad u_{\mathrm{sub}}(t) = t^{-d/\alpha}$;

(d) $v_{\mathrm{cr}}(t) = t\ln^{-1} t$, $\quad u_{\mathrm{cr}}(t) = \ln^{-1} t$, $\quad v_{\mathrm{sub}}(t) = 1$, $\quad u_{\mathrm{sub}}(t) = t^{-d/\alpha}$;

(e) $v_{\mathrm{cr}}(t) = t$, $\quad u_{\mathrm{cr}}(t) = 1$, $\quad v_{\mathrm{sub}}(t) = 1$, $\quad u_{\mathrm{sub}}(t) = t^{-d/\alpha}$;

где λ, $C(x,y)$, $C(y)$ — *некоторые положительные константы и для всех возможных комбинаций размерности пространства* d *и параметра блуждания* $\alpha \in (0,2)$ *определены случаи*: (a) $d/\alpha \in (1/2,1)$; (b) $d/\alpha = 1$; (c) $d/\alpha \in (1,2)$; (d) $d/\alpha = 2$; (e) $d/\alpha \in (2,\infty)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Rytova, E. Yarovaya, “Survival analysis of particle populations in branching random walks”, *Comm. Statist. Simulation Comput.*, Publ. online: 2019.
2. E. Ermakova, P. Makhmutova, E. Yarovaya, “Branching random walks and their applications for epidemic modeling”, *Stoch. Models*, **35**:3 (2019), 300–317.
3. И. И. Христолюбов, Е. Б. Яровая, “Предельная теорема для надкритического ветвящегося блуждания с источниками различной интенсивности”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **64**:3 (2019), 456–480; англ. пер.: I. I. Khristolyubov, E. B. Yarovaya, “A limit theorem for supercritical random branching walks with branching sources of varying intensity”, *Theory Probab. Appl.*, **64**:3 (2019), 365–384.

Сайфутдинова Н. А., Бутко Д. А., Сайфутдинова С. С. (Ростов-на-Дону, Россия). **Алгоритм вычисления надежности водопроводной сети с учетом износа оборудования.**

При эксплуатации водопроводных сетей важным вопросом является вопрос их надежной работы, изучаемый, например, в [1]. В работе представлен новый подход к вычислению надежности кольцевой водопроводной сети с использованием ее структурной схемы.

Пусть сеть S_1 содержит N_1 узлов и M_1 трубопроводов. Обозначим $I_1 = \{1,2,\ldots,N_1\}$, $J_1 = \{1,2,\ldots,M_1\}$. Структурная схема представляет собой ориентированный граф $G_1 = \{V^{(1)}, X^{(1)}\}$, где $V^{(1)} = \{v_i, i \in I_1\}$ — вершины графа, $X^{(1)} = \{x_j,\ j \in J_1\}$ — дуги. Узел, соответствующий вершине v_1, будем называть водопитателем, а узел, соответствующий вершине v_{N_1}, будем называть потребителем. Под надежностью сети будем понимать вероятность подачи воды от водопитателя к потребителю (событие A). Пусть $\mathbf{P}(A_i)$, $i \in I_1$, — вероятности безотказной работы узлов и $\mathbf{P}(B_j)$, $j \in J_1$, — вероятности безотказной работы участков трубопроводов. Пусть l_1 — количество путей из вершины v_1 в v_{N_1}. Каждый путь s_k, $k = 1, 2, \ldots, l_1$, — это набор узлов и трубопроводов, через которые проходит вода из вершины v_1 к вершине v_{N_1}, в связи с этим можно ввести событие $D_k = B_{j_1}^{(k)} A_{i_1}^{(k)} B_{j_2}^{(k)} \cdots A_{i_n}^{(k)} B_{j_m}^{(k)}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I_1$ и $j_1, j_2, \ldots, j_m \in J_1$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 1. *Надежность сети S_1 равна*

$$P^{(1)}(A) = \mathbf{P}(A_1)\biggl(1 - \prod_{k=1}^{l_1} \mathbf{P}(\overline{D_k})\biggr)\mathbf{P}(A_{N_1}).$$

Рассмотрим другую сеть S_2, содержащую N_2 узлов и M_2 участков трубопроводов. Если рассмотреть случай $\mathbf{P}(A_i) = p$, $\mathbf{P}(B_j) = q$ для всех возможных i и j, то можно сравнить надежности этих сетей. Основной результат дает следующая теорема.

Теорема 2. *Если $N_1 < N_2$, то $P^{(1)}(A) < P^{(2)}(A)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. М. Гальперин, “О процедуре определения надежности функционирования объектов систем водоснабжения и водоотведения”, *Вестник СГАСУ. Градостроительство и архитектура*, 2014, № 1(14), 52–67.

Ширяева Л. К. (Самарский государственный экономический университет, Россия). **О повернутых версиях трехпараметрической копулы Граббса.**

Рассмотрим статистики Граббса $T_{n,(1)} = (\overline{X} - \min\{X_i\})/S$ и $T_n^{(1)} = (\max\{X_i\} - \overline{X})/S$, вычисленные по нормально распределенной выборке объема n (см. [1]). Пусть в выборке $\{X_i\}_{i=1}^n$ имеется одно аномальное наблюдение (выброс), чей номер неизвестен. Предположим, что выброс отличается от остальных наблюдений параметрами сдвига α и масштаба $\nu > 0$. Обозначим $G_{n,(1)}(t;\alpha,\nu) = \mathbf{P}(T_{n,(1)} < t)$, $G_n^{(1)}(t;\alpha,\nu) = \mathbf{P}(T_n^{(1)} < t)$, $\Upsilon_n(x,y;\alpha,\nu) = \mathbf{P}(T_{n,(1)} < x,\, T_n^{(1)} < y)$. Рекурсивные соотношения для $G_{n,(1)}(\,\cdot\,)$, $G_n^{(1)}(\,\cdot\,)$ и $\Upsilon_{n)}(\,\cdot\,)$ найдены в [2]. Согласно теореме Склара [3] копула C^{Gr}, извлеченная из распределения Υ_n, имеет вид $C^{\mathrm{Gr}}(G_{n,(1)}(x;\alpha,\nu), G_n^{(1)}(y;\alpha,\nu); n,\alpha,\nu) = \Upsilon_n(x,y;\alpha,\nu)$.

Копула Граббса описывает отрицательные взаимозависимости между случайными величинами. Для моделирования положительных взаимозависимостей можно использовать повернутые на $90°$ и $270°$ версии этой копулы, т.е. $C_{90}^{\mathrm{Gr}}(u,v;n,\alpha,\nu) = v - C^{\mathrm{Gr}}(1-u,v;n,\alpha,\nu)$ и $C_{270}^{\mathrm{Gr}}(u,v;n,\alpha,\nu) = u - C^{\mathrm{Gr}}(u,1-v;n,\alpha,\nu)$. Следующая теорема описывает свойства повернутых версий копулы Граббса.

Теорема. *Пусть $\Xi_n^{(90)} = \{0 \leqslant u \leqslant 1;\ \delta_n(1-u;\alpha,\nu) \leqslant v \leqslant 1\}$, $\Xi_n^{(270)} = \{0 \leqslant u \leqslant 1;\ 0 \leqslant v \leqslant 1 - \delta_n(u;\alpha,\nu)\}$ и $M(u,v) = \min(u,v)$ — максимальная копула. Тогда при $n \geqslant 3$: $C_{90}^{\mathrm{Gr}}(u,v;n,\alpha,\nu) = M(u,v)$ для всех $(u,v) \in \Xi_n^{(90)}$; $C_{270}^{\mathrm{Gr}}(u,v;n) = M(u,v)$ для всех $(u,v) \in \Xi_n^{(270)}$, где $\delta_n(u;\alpha,\nu) = G_n^{(1)}(\theta_n(\phi_{n,(1)}(u,v;n,\alpha,\nu)))$ и $\phi_{n,(1)}(\,\cdot\,)$ — функция, обратная к $G_{n,(1)}(\,\cdot\,)$.*

Следствие. *В случае* $n = 3$ *при всех* α *и* $\nu > 0$ *справедливо утверждение*: $C^{\mathrm{Gr}}_{90}(u, v; 3, \alpha, \nu) = C^{\mathrm{Gr}}_{270}(u, v; 3, \alpha, \nu) = M(u, v)$ *для всех* $(u, v) \in [0, 1]^2$.

В работе также доказывается следующая лемма.

Лемма. *Пусть статистики* $T_{3,(1)}$ *и* $T_3^{(1)}$ *вычислены по набору непрерывных случайных величин* X_1, X_2, X_3 *с произвольным распределением. Тогда копула, описывающая совместное распределение* $T_{3,(1)}$ *и* $T_3^{(1)}$, *является минимальной, а повернутые на* $90°$ *и* $270°$ *ее версии совпадают с максимальной копулой.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. E. Grubbs, "Sample criteria for testing outlying observations", *Ann. Math. Statist.*, **21**:1 (1950), 27–58.
2. Л. К. Ширяева, "О распределении статистик Граббса в случае нормальной выборки с выбросом", *Изв. вузов. Матем.*, 2017, № 4, 84–101; англ. пер.: L. K. Shiryaeva, "On distrubution of Grubbs' statistics in case of normal sample with outlier", *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), **61**:4 (2017), 72–88.
3. R. B. Nelsen, *An introduction to copulas*, 2nd ed., Springer Ser. Statist., Springer, New York, 2006, xiv+269 pp.

Шумафов М. М. (Майкоп, Республика Адыгея, Россия)**, Тлячев В. Б.** (Майкоп, Республика Адыгея, Россия)**. Стохастическая устойчивость дифференциальных уравнений второго порядка и систем.**

Изучается проблема устойчивости нелинейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка и двумерных линейных стационарных стохастических систем. Нами использован прямой метод Ляпунова, т.е. метод функций Ляпунова, развитый для вопросов устойчивости стохастических систем в работах Г. Дж. Кушнера [1] и Р. З. Хасьминского [2]. Для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных гауссовским белым шумом, даны достаточные условия устойчивости по вероятности и экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом. Для двумерных линейных стационарных стохастических систем получены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом. Исследование проводится на основе построения специальных функций Ляпунова для рассматриваемых стохастических уравнений и систем. В качестве примера рассматривается линейный осциллятор, один из параметров которого возмущается белым шумом.

Основной результат работы сформулируем для стохастической системы вида

$$dx = y\,dt, \qquad dy = [-yf(x) - g(x)]\,dt - \sigma_1 y\,d^*\xi_1(t) - \sigma_2(x)\,d^*\xi_2(t), \tag{1}$$

где $f(x)$, $g(x)$, $\sigma_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица для всех $x \in \mathbf{R}$, а $d^*\xi_1$ и $d^*\xi_2$ — стохастические дифференциалы в смысле Стратоновича.

Теорема. *Предположим, что существуют положительные константы* b_1, $\bar{b}_1$, b_2, $\bar{b}_2$ *и* s_2 *такие, что выполняются следующие условия*:

1) $0 < b_1 + \sigma_1^2/2 < f(x) < \bar{b}_1 + \sigma_1^2/2$ *для всех* $x \in \mathbf{R}$;

2) $0 < b_2 < g(x)/x < \bar{b}_2$ *для всех* $x \in \mathbf{R}$ $(x \neq 0)$, $g(0) = 0$;

3) $0 < \sigma_2(x)/x < s_2$ *для всех* $x \in \mathbf{R}$ $(x \neq 0)$, $\sigma_2(0) = 0$;

4) $s_2^2 < 2b_1 b_2$.

Тогда тривиальное решение ($x(t) \equiv 0$ $x(t) \equiv 0$) *системы* (1) *экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г. Дж. Кушнер, *Стохастическая устойчивость и управление*, Мир, М., 1969, 200 с.; пер. с англ.: H. J. Kushner, *Stochastic stability and control*, Math. Sci. Eng., **33**, Academic Press, New York–London, 1967, xiv+161 pp.
2. Р. З. Хасьминский, *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*, Наука, М., 1969, 367 с.; англ. пер.: R. Z. Has'minskiĭ, *Stochastic stability of differential equations*, Monographs Textbooks Mech. Solids Fluids: Mech. Anal., **7**, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn–Germantown, MD, 1980, xvi+344 pp.

Слепов Н. А. (Москва, Россия)**. Уточнение верхних оценок констант в предельных теоремах для случайных сумм случайных величин**[27]**.**

С использованием модификации метода Стейна и вспомогательной техники, основанной на центральном преобразовании смещения (см. [1]), доказаны новые оценки близости распределения случайных сумм случайных величин к распределению Лапласа. В частности, для случая геометрически распределенного количества независимых слагаемых найдена оптимальная оценка в предельной теореме для идеальной метрики порядка три, а полученные результаты для метрики Канторовича d_L уточняют оценки в недавних работах [1] и [2].

Теорема 1. *Пусть* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *— стационарная в широком смысле последовательность m-зависимых случайных величин с* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2$, $\rho = \sup_i \mathbf{E}|X_i^3| < \infty$, *и пусть случайная величина* $N_p \sim \mathrm{Geom}(p)$ *не зависит от этой последовательности. Положим* $W_p = \sqrt{p}\sum_{k=1}^{N_p} X_k$. *Тогда*

$$d_L(W_p, Z) \leqslant \frac{2}{\widetilde{\sigma}^2}\left[\frac{\rho}{3} + (\rho+\sigma^3)(4m^2+m)\right]\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{2}\,\widetilde{\sigma}}\left[\widetilde{\sigma}^2 + m(m+1)\sigma^2\right]p,$$

где $Z \sim \mathrm{Laplace}(0, (1/\sqrt{2})\widetilde{\sigma})$, $\widetilde{\sigma}^2 = \mathbf{E}X_{m+1}^2 + 2\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Cov}(X_{m+1}, X_i)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Pike, H. Ren, “Stein's method and the Laplace distribution”, *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, **11**:1 (2014), 571–587.
2. R. E. Gaunt, “Wasserstein and Kolmogorov error bounds for variance-gamma approximation via Stein's method I”, *J. Theoret. Probab.*, Publ. online: 2018, 1–41.

[27] Работа выполнена при поддержке гранта МГУ им. М. В. Ломоносова “Современные проблемы фундаментальной математики и механики”.

Смородина Н. В. (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия)**. Отражающиеся процессы Леви и отвечающие им семейства линейных операторов**[28]**.**

Рассматриваются одномерные марковские процессы специального вида, которые являются процессами Леви, принимающими значения на интервале (для определенности — на интервале $[0, \pi]$) и отражающимися от граничных точек. Неформально поведение такого процесса может быть описано следующим образом. У нас есть исходный процесс, к которому мы добавим некоторый дополнительный механизм отражения от границы интервала. Именно, процесс стартует из точки $x \in [0, \pi]$ и движется по своей траектории, пока не достигнет границы интервала. В момент достижения границы процесс упруго отражается от нее, оставляя на ней "скачок импульса", и продолжает двигаться дальше. Скачки импульса в каждой точке границы с течением времени накапливаются. Так как траектории процессов Леви нигде не дифференцируемы, или даже имеют чисто скачкообразные траектории, то понятие отражения от границы в данном случае требует строгого определения. Стандартный способ определения отражения непрерывной негладкой траектории связан с решением так называемой задачи Скорохода. Так как траектории рассматриваемых нами процессов не обязательно имеют непрерывные траектории, то для построения отражающегося процесса мы воспользуемся другим подходом, основанным на использовании идеологии теории обобщенных функций. Опишем основные идеи указанного подхода. Пусть $\xi(t)$, $\xi(0) = 0$, — процесс Леви, а $\xi_x(t) = x+\xi(t)$. Начальную функцию f мы будем рассматривать как основную функцию и, как это принято в теории обобщенных функций, операцию отражения переносим на нее, заменяя ее некоторой новой функцией $\widetilde{f}$, в которую мы уже подставляем исходный процесс $\xi_x(t)$. Далее мы полагаем по определению (правая часть определяет левую) $\mathbf{E} f(\widetilde{\xi_x}(t)) = \mathbf{E}\widetilde{f}(\xi_x(t))$. Построенный процесс $\widetilde{\xi_x}(t)$ обладает марковским свойством, поэтому таким образом мы определяем все конечномерные распределения.

Мы рассматриваем семейство отражающихся в вышеуказанном смысле процессов $\widetilde{\xi_x}(t)$, $x \in [0, \pi]$. Эволюция отражающихся процессов описывается двумя семействами операторов R^t, Q^t. Первое семейство является полугруппой операторов из $L_2[0, \pi]$ в $L_2[0, \pi]$ и описывает эволюцию вероятностного распределения внутри интервала. Элементы второго семейства также удобно рассматривать как операторы, действующие на функции, заданные на границе интервала (т.е. на множестве, состоящем из точек 0 и π), и переводящие их в функции из $L_2[0, \pi]$. Это семейство операторов описывает эволюцию среднего накопленного импульса в точках границы. Для рассмотренных процессов Леви можно определить не только средний накопленный импульс, но и "индивидуальный" накопленный (в точках границы) импульс каждой траектории, который мы также будем трактовать как случайный оператор $\mathscr{Q}^t(\xi(\,\cdot\,))$, зависящий уже от траектории исходного процесса, так, что для любой функции g выполнено $(Q^t g)(x) = \mathbf{E}[\mathscr{Q}^t(\xi(\,\cdot\,))g](x)$. Случайный накопленный импульс является неотрицательным аддитивным функционалом от траектории процесса. У отражающегося винеровского процесса рост накопленного импульса локализован на границе интервала (т.е. увеличение происходит только в моменты

[28] Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 17-11-01136).

выхода процесса на границу) и может быть выражен через локальное время отражающегося винеровского процесса на границе (см. [1], [2]). Для скачкообразных процессов Леви такой локализации нет даже в случае существования локального времени (см. [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. A. Brosamler, "A probabilistic solution of the Neumann problem", *Math. Scand.*, **38**:1 (1976), 137–147.
2. K. Sato, H. Tanaka, "Local times on the boundary for multi-dimensional reflecting diffusion", *Proc. Japan Acad.*, **38**:10 (1962), 699–702.
3. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, "Одна конструкция отражающихся процессов Леви", *Докл. РАН*, **484**:5 (2019), 523–526; англ. пер.: I. A. Ibragimov, N. V. Smorodina, M. M. Faddeev, "A construction of reflecting Lévy processes", *Dokl. Math.*, **99**:1 (2019), 71–74.

Сопин Э. С., Агеев К. А., Самуйлов К. Е. (Москва, Россия)**. Эффективный алгоритм расчета стационарных характеристик ресурсных систем массового обслуживания**[29]**.**

Системы массового обслуживания с ограниченными ресурсами, являющиеся обобщением классической модели Эрланга [1], в последние годы привлекли немало внимания в связи с тем, что позволяют с высокой точностью описывать процессы распределения радиоресурсов в современных беспроводных сетях. В работе [2] были получены аналитические выражения в мультипликативной форме для стационарного распределения процесса $X(t) = \{\xi(t), \theta(t)\}$, где $\xi(t)$ — число заявок в системе в момент t, а $\theta(t)$ — вектор суммарного занятого ресурса:

$$q_n(\mathbf{r}) = G(N, \mathbf{R})^{-1} \frac{\rho^n}{n!} p^{(n)}(\mathbf{r}), \tag{1}$$

где $p^{(n)}(\mathbf{r})$ является n-кратной сверткой распределения требований к ресурсам $p(\mathbf{r})$, а $G(N, \mathbf{R})$ — нормирующая константа. Вычисление сверток распределения является ресурсоемкой вычислительной задачей, в связи с чем, в продолжение статьи [3], разработан эффективный алгоритм для расчета искомых характеристик.

Теорема. *Нормирующая константа $G(N, \mathbf{R})$ вычисляется по рекуррентной формуле*

$$G(n, \mathbf{r}) = G(n-1, \mathbf{r}) + \frac{\rho}{n} \sum_{\mathbf{0} \leqslant \mathbf{i} \leqslant \mathbf{r}} p(\mathbf{i}) \big(G(n-1, \mathbf{r}-\mathbf{i}) - G(n-2, \mathbf{r}-\mathbf{i})\big) \tag{2}$$

с начальными значениями $G(0, \mathbf{r}) = 1$, $G(1, \mathbf{r}) = 1 + \rho \sum_{\mathbf{0} \leqslant \mathbf{i} \leqslant \mathbf{r}} p(\mathbf{i})$, $\mathbf{0} \leqslant \mathbf{r} \leqslant \mathbf{R}$.

[29] Работа выполнена при поддержке Программы РУДН "5-100" и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 17-07-00845 и № 18-00-01555 (18-00-01685).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Л. Ромм, В. В. Скитович, “Об одном обобщении задачи Эрланга”, *Автомат. и телемех.*, 1971, № 6, 164–168; англ. пер.: E. L. Romm, V. V. Skitovich, “On certain generalization of problem of Erlang”, *Autom. Remote Control*, **32**:6 (1971), 1000–1003.
2. В. А. Наумов, К. Е. Самуйлов, А. К. Самуйлов, “О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками”, *Автомат. и телемех.*, 2016, № 8, 125–135; англ. пер.: V. A. Naumov, K. E. Samuilov, A. K. Samuilov, “On the total amount of resources occupied by serviced customers”, *Autom. Remote Control*, **77**:8 (2016), 1419–1427.
3. E. S. Sopin, K. A. Ageev, E. V. Markova, O. G. Vikhrova, Yu. V. Gaidamaka, “Performance analysis of M2M traffic in LTE network using queuing systems with random resource requirements”, *Automat. Control Comput. Sci.*, **52**:5 (2018), 345–353.

Степович М. А. (Калуга, Россия)**, Серегина Е. В.** (Калуга, Россия)**, Туртин Д. В.** (Иваново, Россия)**. О некоторых аспектах корректности и стохастических особенностях математических моделей диффузии и катодолюминесценции в полупроводниках**[30]**.**

Рассмотрены стохастические модели диффузии [1] и последующей излучательной рекомбинации неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных в однородных полупроводниках широкими электронными или световыми пучками. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Для быстроты сходимости матричных рядов, аппроксимирующих проекционные характеристики распределения ННЗ после их диффузии* (C^{m_p} *— математическое ожидание*, C^{R_p} *– автокорреляционная функция*)*, справедливы оценки:*

$$
\begin{aligned}
\|C^{m_p} - C^{m_p}_{ik}\| \leqslant C_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{\Xi^i \exp\{-(\mu+2)r^2/(2\mu)\}}{1-\Xi}\,dr \\
+ C_2 \int_{r_1}^{r_2} \Xi^i \exp\left\{-\frac{(\mu+2)r^2}{2\mu}\right\} dr, \\
\|C^{R_p} - C^{R_p}_{ik}\| \leqslant C_3(k) \int_{r_1}^{r_2} \frac{\Xi^i \exp\{-(\mu+4)r^2/(2\mu)\}}{(1-\Xi)^2}\,dr \\
+ C_4(k) \int_{r_1}^{r_2} \Xi^i \exp\left\{-\frac{(\mu+4)r^2}{2\mu}\right\} dr.
\end{aligned}
$$

Здесь r *— непрерывная случайная величина, распределенная по нормальному закону, имеющая нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию,* k *— степень многочлена Чебышёва 1-го рода,* $\Xi \equiv \|\widetilde{W}^k_p(r)\| < 1$, $\mu > 0$, *а* C_1, C_2, $C_3(k)$ *и* $C_4(k)$ *— положительные постоянные, не зависящие от номера* i*, причем* $C_3(k)$ *и* $C_4(k)$ *с ростом* k *убывают.*

[30] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-03-00271), а также гранта РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. В. Серегина, *Использование проекционного метода для математического моделирования стохастического распределения неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах*, Автореф. дисс. … канд. физ.-матем. наук (05.13.18), ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, М., 2014, 16 с.

Сучкова Д. А. (Уфа, Россия)**. Построение решения новой версии стохастического уравнения длинной волны (BBM) с дисперсией в виде белого шума.**

Детерминированное уравнение Бенджамина–Бона–Махони (BBM)

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \tag{1}$$

как приближение для описания однонаправленного распространения волн с малой амплитудой и большой длиной в нелинейных дисперсивных системах, по сравнению с известным уравнением Кортевега–де-Фриза, обладает рядом преимуществ [1]; в частности, фазовая и групповая скорости, соответствующие линеаризованному уравнению BBM (1), ограничены для любых волновых чисел и, более того, стремятся к нулю при больших волновых числах.

Стохастическое уравнение BBM (регуляризованное уравнение длинной волны) с дисперсией в виде белого шума,

$$d_t u - d_t u_{xx} + u_x\, dt + u_x * dW + uu_x\, dt = 0, \qquad u(s) = u_s, \tag{2}$$

и стохастическое уравнение BBM с белым шумом в дисперсии и в нелинейном члене,

$$d_t u - d_t u_{xx} + u_x\, dt + u_x * dW + uu_x\, dt + uu_x * dW = 0, \qquad u(s) = u_s, \tag{3}$$

являются более адекватной моделью конкретных физических явлений, которые носят стохастический характер. Уравнение (2), так же как и уравнение, предложенное в статье [2], обладает тем преимуществом, что в случае, если шум незначителен, оно является детерминированным уравнением (1). Уравнение (3) также обладает этим свойством.

Теорема. *Решение уравнения* (2) *сводится* [3] *к решению цепочки следующих уравнений*:

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \quad u_v + u_x - u_{xxv} = 0.$$

Решение уравнения (3) *сводится к решению цепочки уравнений*

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \quad u_v + u_x + uu_x - u_{xxv} = 0.$$

В работе найдены частные решения стохастических уравнений (2) и (3), в частности для уравнения (3) — в виде бегущей волны.

Автор признателен профессору Ф. С. Насырову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony, “Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems”, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **272**:1220 (1972), 47–78.

2. M. Chen, O. Goubet, Y. Mammeri, "Generalized regularized long wave equation with white noise dispersion", *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.*, **5**:3 (2017), 319–342.

3. Ф. С. Насыров, *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ*, Физматлит, М., 2011, 212 с.

Сухинов А. И. (Ростов-на-Дону, Россия)**, Сидорякина В. В.** (Таганрог, Россия)**, Проценко С. В.** (Ростов-на-Дону, Россия)**. Численное исследование нелинейной стохастической модели транспорта наносов в прибрежных системах**[31]**.**

Настоящая работа посвящена построению и численному исследованию 2D модели транспорта наносов [1] в прибрежной зоне водоемов с учетом стохастической природы выпадения в осадок взвешенного вещества.

Теорема. *Пусть дано уравнение транспорта наносов*

$$(1-\varepsilon)\,\frac{\partial H^n}{\partial t} = \operatorname{div}\left(k^{n-1}\frac{\tau_{bc}}{\sin\varphi_0}\operatorname{grad} H^n\right) - \operatorname{div}(k^{n-1}\vec{\tau}_b) + f,$$
$$t_{n-1} < t \leqslant t_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, N,$$

где f *— функция, описывающая выпадение в осадок взвешенного вещества, имеющая стохастический характер, и функция* H *класса* $C^2(V_T)\cap C(\overline{V}_T)$, $\operatorname{grad}_{(x,y)} H^n \in C(\overline{V}_T)$, *является решением уравнения с номером* n *указанной системы в области определения* $V_T = D\times(0,T)$ *с начальными условиями* $H^1(x,y,0) = H_0(x,y)$, $H_0(x,y)\in C^2(D)\cap C(\overline{D})$, $\operatorname{grad}_{(x,y)} H_0 \in C(\overline{D})$, $(x,y)\in\overline{D}$, $\overline{D}/D = G$, $H^n(x,y,t_{n-1}) = H^{n-1}(x,y,t_{n-1})$, $(x,y)\in\overline{D}$, $n = 2,\ldots,N$, *и граничными условиями в форме Дирихле. Тогда если* $k^{n-1}\geqslant k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$, $k^{n-1}\in C^1(\overline{D})$, $n = 1,2,\ldots,N$, *и* $\sin\varphi_0 \leqslant 2\tau_{bc}$, *то при выполнении условия* $H \geqslant c_0 \equiv \mathrm{const}$ *имеет место оценка*

$$\iint_D H(T)\,dx\,dy \leqslant \iint_D H(0)\,dx\,dy + \frac{M_1}{c_0(1-\varepsilon)}\int_0^T\left(\iint_D(\tau_{bx}^2+\tau_{by}^2)\,dx\,dy\right)dt$$
$$+ M_2\int_0^T\left(\int_G H_G\,dx\right)dt + \frac{1}{1-\varepsilon}\int_0^T\left(\iint_D f\,dx\,dy\right)dt,$$

M_1, M_2 *— некоторые постоянные функции,* G *— граница расчетной области.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. И. Сухинов, В. В. Сидорякина, "Построение и исследование корректности математической модели транспорта и осаждения взвесей с учетом изменения рельефа дна", *Вестн. Донского гос. тех. ун-та*, **18**:4 (2018), 350–361.

[31] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00701).

Тихов М. С., Гришин В. А. (ННГУ, Нижний Новгород, Россия). **Простой метод уменьшения смещения непараметрической оценки функции распределения.**

Данная работа продолжает исследования, начатые в [1], [2], по оцениванию функции распределения в зависимости “доза–эффект”. Именно, пусть $\mathscr{U}^{(n)} = \{(U_i, W_i)\}_{i=1}^n$ есть выборка пары (U, W), где $W_i = I(X_i < U_i)$ — индикатор события $(X_i < U_i)$, а последовательности $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ и $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ являются независимыми. Пара (X, U) имеет совместную функцию распределения $F(x)G(u)$ и плотность $f(x)g(u) > 0$. Нас интересует оценка функции распределения $F(x)$ случайной величины X по выборке $\mathscr{U}^{(n)}$. В качестве такой оценки $F(x)$ обычно берется статистика

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{S_{2n}(x)}{S_{1n}(x)},$$

где

$$S_{2n}(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^n W_i K_h(x - U_i), \qquad S_{1n}(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^n K_h(x - U_i),$$

$\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_n)^\top$, $K_h(x) = h^{-1}K(h^{-1}x)$, $h = h(n) = n^{-1/5}$ есть параметр сглаживания. Известно, что оценка $\widehat{F}_n(x)$ не является $\sqrt{nh}$-состоятельной, поэтому определим диагональную матрицу $\mathbf{A} = \operatorname{diag}\{K_h(x-U_1), \dots, K_h(x-U_n)\}$ и норму $\|\mathbf{x}\| = \sum_{j=1}^n |x_j|$ вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$, а также норму оператора $\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1}\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$. Пусть $\mathbf{A}_k = \mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})^k$, $\widehat{S}_{2n}^{(k)}(x) = \mathbf{A}_k\mathbf{W}$, $\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\| = \lambda$. При $n \to \infty$ имеем: $0 < \lambda < 1$, т.е. оператор $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ является сжимающим, поэтому при $k \to \infty$ оценка $\widehat{S}_{2n}^{(\infty)}(x)$ будет несмещенной оценкой функции $F(x)g(x)$. Аналогичным образом устраним смещение оценки для $g(x)$ на основе статистики $S_{1n}(x)$. Пусть $\widetilde{F}_n(x) = \widehat{S}_{2n}^{(\infty)}(x)/\widehat{S}_{1n}^{(\infty)}(x)$, $\sigma^2(x) = F(x)(1 - F(x))\|K\|^2/g(x)$.

Теорема. *При некоторых условиях регулярности $\widetilde{F}_n(x)$ есть несмещенная оценка $F(x)$ и $n^{2/5}(\widetilde{F}_n(x) - F(x)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(x))$, $n \to \infty$.*

В докладе рассмотрен также метод стохастической аппроксимации для построения оценок функции распределения $F(x)$. Доказана состоятельность и асимптотическая нормальность этих оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. С. Тихов, “Фурье-метод рекурсивного оценивания функции распределения в зависимости “доза–эффект””, в ст. “Тезисы докладов, представленных на Третьей международной конференции по стохастическим методам”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **64**:1 (2019), 198–199; англ. пер.: M. S. Tikhov, in “Abstracts of talks given at the 3rd International conference on stochastic methods”, *Theory Probab. Appl.*, **64**:1 (2019).

2. М. С. Тихов, “Фурье-метод рекурсивного оценивания функции распределения в зависимости доза–эффект”, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2018, № 4, 31–49.

Ульянов В. В. (Москва, Россия)**, Кристоф Г.** (Магдебург, Германия)**, Монахов М. М.** (Москва, Россия)**. Асимптотические разложения распределений статистик на выборках случайного размера**[32]**.**

В приложениях часто размер выборки не определен заранее и может считаться случайным. В [1] показано, что асимптотические характеристики статистики могут радикально измениться, когда неслучайный объем выборки заменяется случайной величиной (с.в.). В докладе для распределений выборочных среднего и медианы на выборках случайного размера специального вида рассмотрены разложения типа Чебышёва–Эджворта и Корниша–Фишера второго порядка (см. [2]) на базе t-распределения Стьюдента и распредедения Лапласа и их квантилей, с использованием общей теоремы переноса (см. [3]), позволяющей получать асимптотические разложения для функций распределения статистик по выборкам случайного объема из асимптотических разложений для функции распределения случайного объема выборки и асимптотических разложений для функций распределения статистик по выборкам неслучайного объема.

Пусть с.в. $X, X_1, X_2, \dots \in \mathbf{R}$ и $N_1, N_2, \dots \in \mathbf{N}$ заданы на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{A}, \mathbf{P})$ и независимы в совокупности. В статистике X_n — это наблюдение, а N_n — случайный объем выборки. Пусть $T_m := T_m(X_1, \dots, X_m)$ есть статистика с неслучайным размером выборки $m \in \mathbf{N}$. Положим $T_{N_n}(\omega) := T_{N_n(\omega)}\big(X_1(\omega), \dots, X_{N_n}(\omega)\big)$, $\omega \in \Omega$, т.е. T_{N_n} — это статистика, построенная на основе T_m по выборке случайного объема N_n. Например, возьмем в качестве T_m выборочную медиану. Пусть функция распределения N_n для натуральных k имеет вид $(k/(1+k))^n$, что соответствует тому, что N_n есть максимум из n независимых с.в. с некоторым дискретным распределением Парето. Тогда можно получить неасимптотические приближения второго порядка как для распределения N_n (см. [4]), так и для T_m (см. [5]) при некоторых условиях на регулярность плотности с.в. X_1. Далее, используя уточненную теорему переноса (см. [5]), приходим к следующей теореме.

Теорема. *Справедливо неравенство* $\sup_x |F(T_{N_n}, x) - L(n, x)| \leqslant c/n^{-3/2}$, *где* $F(T_{N_n}, x)$ *— функция распределения нормированной выборочной медианы* T_{N_n} *и* $L(n, x)$ *— приближение второго порядка по степеням* $n^{-1/2}$ *с предельной функцией в виде распределения Лапласа с плотностью* $\exp\{-\sqrt{2}\,|x|\}/\sqrt{2}$.

Другие возможные статистики T_m и их приближения см. в [6, гл. 13–16], включая случай данных высокой размерности. Формулировки и доказательства всех представленных в докладе результатов см. в [4], [5], [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. В. Гнеденко, "Об оценке неизвестных параметров распределения при случайном числе независимых наблюдений", *Тр. Тбилисского матем. ин-та им. А. М. Размадзе*, **92** (1989), 146–150.

2. V. V. Ulyanov, M. Aoshima, Y. Fujikoshi, "Non-asymptotic results for Cornish–Fisher expansions", *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **218**:3 (2016), 363–368.

[32] Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 18-11-00132) и в рамках проекта "5-100".

3. В. Е. Бенинг, Н. К. Галиева, В. Ю. Королев, “Асимптотические разложения для функций распределения статистик, построенных по выборкам случайного объема”, *Информ. и ее примен.*, **7**:2 (2013), 75–83.
4. Г. Кристоф, М. М. Монахов, В. В. Ульянов, “Разложения Чебышева–Эджворта и Корниша–Фишера второго порядка для распределений статистик, построенных по выборкам случайного размера”, *Вероятность и статистика.* 26, Зап. науч. сем. ПОМИ, **466**, ПОМИ, СПб., 2017, 167–207.
5. G. Christoph, V. V. Ulyanov, V. E. Bening, *Second order expansions for sample median with random sample size*, arXiv: 1905.07765.
6. Y. Fujikoshi, V. V. Ulyanov, R. Shimizu, *Multivariate statistics. High-dimensional and large-sample approximations*, Wiley Ser. Probab. Stat., John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2010, xviii+533 pp.
7. А. С. Марков, М. М. Монахов, В. В. Ульянов, “Разложения типа Корниша–Фишера для распределений статистик, построенных по выборкам случайного размера”, *Информ. и ее примен.*, **10**:2 (2016), 84–91.

Волосатова Т. А., Павлов И. В., Углич С. И. (Ростов-на-Дону, Россия). **Проблема минимакса в задаче с приоритетами**[33]**.**

Рассмотрим функцию $\mathbf{F} = \prod_{j=1}^{k} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(u_j^{\alpha_j})$, где все u_j больше нуля, а $\alpha_j = \alpha_j(\omega)$ — случайные величины, определенные на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ и удовлетворяющие условиям $\mathbf{P}(0 < \alpha_j < 1) > 0$. Нами изучается случай, когда $u_k = -\sum_{i=1}^{k-1} c_i u_i + \sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i + b_k > 0$ и все константы b_j больше нуля. Таким образом, при любом фиксированном наборе параметров $(c_1, \dots, c_{k-1})$ функция $\mathbf{F}$ зависит от $(u_1, \dots, u_{k-1})$ (она обозначается в дальнейшем $F = F(u_1, \dots, u_{k-1})$) и определена на множестве $\bigl\{u_1 > 0, \dots, u_{k-1} > 0, \sum_{i=1}^{k-1} c_i u_i < \sum_{i=1}^{k-1} c_i b_i + b_k\bigr\}$. Из [1], [2] следует, что если все c_j больше нуля и фиксированы, то функция F имеет в своей области определения единственную точку $(u_1^*, \dots, u_{k-1}^*)$ локального максимума (эта точка является также точкой глобального максимума функции F). Обозначим $F_{\max}(c_1, \dots, c_{k-1}) = F(u_1^*, \dots, u_{k-1}^*)$.

Теорема. *Функция $F_{\max}$ в своей области определения $\{c_1 > 0, \dots, c_{k-1} > 0\}$ обладает единственной стационарной точкой. Эта точка является точкой минимума.*

Эта теорема о минимаксе применяется в задаче оптимизации взаимодействия в рамках единой системы ряда учреждений и “оптимизатора”, заинтересованного в успешном функционировании системы и действующего на основе экспертных оценок, реализуемых в задании независимых случайных приоритетов α_j.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. В. Павлов, С. И. Углич, “Оптимизация сложных систем квазилинейного типа с несколькими независимыми приоритетами”, *Вестник РГУПС*, 2017, № 3(67), 140–145.
2. Н. П. Красий, “Существование и единственность точки максимума в задаче оптимизации квазилинейных моделей с независимыми приоритетами”, *Вестник РГУПС*, 2018, № 4(72), 144–151.

[33] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00451).

Vostrikova L. (LAREMA, Université d'Angers, France)**. On the ruin problem with investment when the risky asset is a semimartingale.**

In this talk, we give new results on the ruin probability of the insurance company having initial capital $y>0$ with investment, where the business part of the insurance company X is modelled by a Lévy process with the parameters (a_X,σ_X,ν_X) and the return on investment process R is a semimartingale. We obtain upper and lower bounds on the finite and infinite time ruin probabilities $\mathbf{P}(\tau(y)\leqslant T)$, $\mathbf{P}(\tau(y)<\infty)$, as well as the logarithmic asymptotic for them. More precisely, let

$$I_T=\int_0^T e^{-\widehat{R}_s}\,ds \quad\text{and}\quad J_T(\alpha)=\int_0^T e^{-\alpha\widehat{R}_s}\,ds,$$

with $\alpha>0$ and $\widehat{R}_t=\ln\mathscr{E}(R)_t$, where $\mathscr{E}(R)$ is Doléan-Dade exponential of R. In addition we put $\beta_T=\sup\{\beta\geqslant 0\colon \mathbf{E}(J_T^{\beta/2})<\infty,\ \mathbf{E}(J_T(\beta))<\infty\}$.

Theorem 1. *Let $T>0$. Assume that $\beta_T>0$ and that, for some $0<\alpha<\beta_T$, we have*

$$\int_{|x|>1}|x|^\alpha\,\nu_X(dx)<\infty. \tag{1}$$

Then, for all $y>0$,

$$\mathbf{P}(\tau(y)\leqslant T)\leqslant\frac{C_1\mathbf{E}(I_T^\alpha)+C_2\mathbf{E}(J_T^{\alpha/2})+C_3\mathbf{E}(J_T(\alpha))}{y^\alpha},$$

where $C_1\geqslant 0$, $C_2\geqslant 0$, and $C_3\geqslant 0$ are constants that depend only on α. Moreover, if (1) *holds for all $0<\alpha<\beta_T$, then*

$$\limsup_{y\to\infty}\frac{\ln\mathbf{P}(\tau(y)\leqslant T)}{\ln y}\leqslant-\beta_T.$$

In Theorem 2 we obtain lower bound for the ruin probability which gives the logarithmic asymptotic for it. From Theorems 1 and 2, we can also obtain similar results for $\mathbf{P}(\tau(y)<\infty)$. In addition, we prove the following result for the ruin with probability 1.

Theorem 3. *Assume that $a_X<0$ or $\sigma_X>0$ or $\nu_X([-a,a])>0$ for some $a>0$. In addition assume that* ($\mathbf{P}$-*a.s.*), $I_\infty=+\infty$, $J_\infty(2)=+\infty$ *and that there exists a strictly positive finite limit* $\lim_{t\to\infty}(I_t/\sqrt{J_t(2)})=L$. *Then, for all $y>0$,*

$$\mathbf{P}(\tau(y)<\infty)=1.$$

In the case when R is Lévy process we retrieve from this theorem the known results for the ruin with probability 1.

This is joint work with J. Spielmann.

Якымив А. Л. (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия)**. Асимптотика моментов числа циклов случайной A-подстановки**[34]**.**

Зафиксируем произвольное множество A натуральных чисел. Пусть $T_n(A)$ есть совокупность всех перестановок n элементов, длины циклов которых принадлежат множеству A (так называемых A-подстановок). Рассматривается

[34] Работа выполнена в рамках госзадания МИАН.

случайная подстановка τ_n, равномерно распределенная на множестве $T_n(A)$. Через ζ_n обозначим число ее циклов. Положим $A(n) = A \cap [1,n]$, $l(n) = \sum_{i\in A(n)} 1/i$.

Теорема 1. *Пусть для некоторых постоянных* $C > 0$, $\lambda \geqslant 0$ *и* $\varrho \in (0,1]$

$$\frac{|T_n(A)|}{n!} = Cn^{\varrho-1}\big(1 + O(n^{-\lambda}L(n))\big) \qquad (n\to\infty),$$

где последовательность $\{L(n),\, n\in \mathbf{N}\}$ *медленно меняется на бесконечности. Тогда*

$$\mathbf{E}\zeta_n = l(n) + \sigma(n) + O(n^{-\varrho}) + O(n^{-\lambda}L(n)) + \big(O(n^{-\varrho}) + O(n^{-\lambda})\big)\int_1^n \frac{L(x)}{x}\,dx$$

при $n\to\infty$, *где для произвольных* $x \geqslant 1$ *мы полагаем* $L(x) = L([x])$ *и*

$$\sigma(n) = \sum_{m\in A(n-1)} \frac{1}{m}\left(\left(1-\frac{m}{n}\right)^{\varrho-1} - 1\right) \to \varrho\int_0^1 \frac{1}{x}\big((1-x)^{\varrho-1}-1\big)\,dx.$$

Получены также асимптотические формулы для k-х моментов ζ_n при фиксированных $k > 1$. Приводятся соответствующие примеры множеств A. Отметим, что асимптотические свойства $\mathbf{E}\zeta_n$ и $\mathbf{D}\zeta_n$ были изучены при $A = N$ в фундаментальной работе В. Л. Гончарова [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Л. Гончаров, “Из области комбинаторики”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **8**:1 (1944), 3–48; англ. пер.: V. Gončarov, “On the field of combinatory analysis”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1962, 1–46.

Яровая Е. Б. (Москва, Россия)**. Большие уклонения и асимптотическое поведение стохастических эволюционных систем**[35]**.**

В докладе рассматриваются процессы с генерацией и блужданием частиц на $\mathbf{Z}^d$, $d \geqslant 1$. Точки $\mathbf{Z}^d$, в которых может происходить генерация, т.е. размножение и гибель частиц, называют *источниками* ветвления, а сам процесс — *ветвящимся случайным блужданием* (ВСБ). Основное внимание уделяется асимптотическому анализу поведения численностей частиц и/или их целочисленных моментов при $t\to\infty$ для моделей: 1) симметричного ВСБ с одним источником ветвления и конечным или бесконечным числом начальных частиц (см. [1]); 2) симметричного ВСБ с конечным числом источников ветвления различной положительной интенсивности и одной начальной частицей (см. [2]); 3) ВСБ с псевдоисточниками, нарушением симметрии блуждания в источниках и одной начальной частицей (см. [3]).

Пусть $p(t,x,y)$ — переходная вероятность случайного блуждания, лежащего в основе рассматриваемого ВСБ. Как показано в [4], [5], для однородного симметричного случайного блуждания анализ больших уклонений существенным

[35]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-01-00468).

образом зависит от поведения $p(t,x,y)$ при $|y-x|+t\to\infty$ (в различных предположениях о соотношении между $|y-x|$ и t при их совместном росте), а также от поведения функции Грина $G_\lambda(y-x)=\int_0^\infty e^{\lambda t}p(t,x,y)\,dt$ при $|y-x|\to\infty$ в различных предположениях о параметре λ. Описание моделей и соответствующие доказательства можно найти, например, в [1]–[5].

В докладе приводится новая предельная теорема о поведении численностей частиц для ВСБ с псевдоисточниками u_i, $i=k+1,\dots,m$, нарушением симметрии блуждания в некоторых из источников ветвления v_j, $j=1,\dots,k$, и одной начальной частицей. Пусть $\mathscr{A}$ — самосопряженный оператор, генерирующий симметричное случайное блуждание по $\mathbf{Z}^d$, а оператор Δ_x — ортогональный проектор на элемент x. Тогда оператор $\mathscr{H}=\mathscr{A}+\sum_{i=1}^{k+m}\zeta_i\Delta_{u_i}\mathscr{A}+\sum_{j=1}^{k+l}\beta_j\Delta_{v_j}$ (несамосопряженный, если существуют $\zeta_i\neq 0$) задает эволюцию средних численностей частиц $\mathbf{E}\mu_t(y)$ в каждой точке $y\in\mathbf{Z}^d$ и среднего числа частиц $\mathbf{E}\mu_t$, где $\mu_t=\sum_{y\in\mathbf{Z}^d}\mu_t(y)$, на всей решетке (см. [3]).

Теорема 1. *Пусть оператор $\mathscr{H}$ имеет изолированное собственное значение $\lambda_0>0$, а вся остальная часть его спектра находится на полуоси $\{\lambda\in\mathbf{R}\colon \lambda\leqslant\lambda_0-\varepsilon\}$, где $\varepsilon>0$. Если $\zeta_i>-1$, $\beta_j^{(1)}>0$ и $\beta_j^{(r)}=\mathrm{O}(r!\,r^{r-1})$ для всех $j=1,\dots,k+l$ и $r\in\mathbf{N}$, то в смысле сходимости по распределению справедливы соотношения*

$$\lim_{t\to\infty}\mu_t(y)e^{-\lambda_0 t}=\psi(y)\xi,\qquad \lim_{t\to\infty}\mu_t e^{-\lambda_0 t}=\xi,$$

где $\psi(y)$ — некоторая неотрицательная функция, а ξ — невырожденная случайная величина.

Доказательство теоремы 1 основано на асимптотическом анализе моментов случайных величин $\mu_t(y)$ и μ_t. Сходимость по распределению устанавливается с помощью критерия Карлемана по схеме, предложенной в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Ermakova, P. Makhmutova, E. Yarovaya, “Branching random walks and their applications for epidemic modeling”, *Stoch. Models*, **35**:3 (2019), 300–317.
2. И. И. Христолюбов, Е. Б. Яровая, “Предельная теорема для надкритического ветвящегося блуждания с источниками различной интенсивности”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **64**:3 (2019), 456–480; англ. пер.: I. I. Khristolyubov, E. B. Yarovaya, “A limit theorem for supercritical random branching walks with branching sources of varying intensity”, *Theory Probab. Appl.*, **64**:3 (2019), 365–384.
3. E. B. Yarovaya, “Branching random walks with several sources”, *Math. Popul. Stud.*, **20**:1 (2013), 14–26.
4. С. А. Молчанов, Е. Б. Яровая, “Предельные теоремы для функции Грина решетчатого лапласиана при больших уклонениях случайного блуждания”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:6 (2012), 123–152; англ. пер.: S. A. Molchanov, E. B. Yarovaya, “Limit theorems for the Green function of the lattice Laplacian under large deviations of the random walk”, *Izv. Math.*, **76**:6 (2012), 1190–1217.
5. С. А. Молчанов, Е. Б. Яровая, “Большие уклонения для симметричного ветвящегося случайного блуждания по многомерной решетке”, *Ветвящиеся процессы, случайные блуждания и смежные вопросы*, Сборник статей. Посвящается памяти члена-корреспондента РАН Бориса Александровича Севастьянова, Тр. МИАН, **282**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2013,

195–211; англ. пер.: S. A. Molchanov, E. B. Yarovaya, “Large deviations for a symmetric branching random walk on a multidimensional lattice”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **282** (2013), 186–201.

Задорожний В. Г. (Воронеж, Россия)**. О математическом ожидании решения линейной системы дифференциальных уравнений с тремя случайными коэффициентами.**

Рассматривается задача Коши

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1(t)Ax + \varepsilon_2(t)x + \varepsilon_3(t)f(t), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $t \in \mathbf{R}$, $T = [t_0, t_1]$, $x\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ — искомая векторная функция, ε_1, ε_2 — случайные процессы Лапласа, заданные характеристическими функционалами (см. [1, с. 30])

$$\varphi_j(u) = \frac{\exp\bigl(i\int_T \xi_j(s)u(s)\,ds\bigr)}{1 + \int_T\int_T b_j(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)\,ds_1\,ds_2}, \qquad j = 1, 2,$$

ε_3 — случайный процесс, A — матрица размера $n \times n$, $f\colon T \to \mathbf{R}^n$ — заданная векторная функция, x_0 — случайный вектор. Здесь $\xi_j(s) = \mathbf{E}(\varepsilon_j(s))$ — математическое ожидание случайного процесса ε_j; $b_j(s_1,s_2) = \mathbf{E}(\varepsilon_j(s_1)\varepsilon_j(s_2)) - \mathbf{E}(\varepsilon_j(s_1))\mathbf{E}(\varepsilon_j(s_2))$ — ковариационная функция случайного процесса ε_j, $i = (-1)^{0.5}$, $u\colon T \to \mathbf{R}$ — суммируемая на T функция.

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия*:

$$\|A\|^2 \int_T\int_T b_1(s_1,s_2)\,ds_1\,ds_2 < 1, \qquad \int_T\int_T b_2(s_1,s_2)\,ds_1\,ds_2 < 1,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, x_0$ *независимы и функции* ξ_j, b_j, f *непрерывны на* T*. Тогда*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x(t)) = \exp\Bigl(A\int_{t_0}^t \xi_1(s)\,ds\Bigr)&\sum_{k=0}^{\infty} A^{2k}\Bigl(\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b_1(s_1,s_2)\,ds_1\,ds_2\Bigr)^k \\ &\times \frac{\exp\bigl(\int_{t_0}^t \xi_2(s)\,ds\,\mathbf{E}(x_0)\bigr)}{1 - \int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b_2(s_1,s_2)\,ds_1\,ds_2} \\ &+ \int_{t_0}^t \exp\Bigl(A\int_s^t \xi_1(\tau)\,d\tau\Bigr)\sum_{k=0}^{\infty} A^{2k}\Bigl(\int_s^t\int_s^t b_1(s_1,s_2)\,ds_1\,ds_2\Bigr)^k \\ &\times \frac{\exp\bigl(\int_s^t \xi_2(\tau)\,d\tau\bigr)}{1 - \int_s^t\int_s^t b_2(s_1,s_2)\,ds_1\,ds_2}\mathbf{E}(\varepsilon_3(s))f(s)\,ds\end{aligned}$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

Отметим, что интерес представляет случай, когда $T = [0, \infty)$. При этом система (1) асимптотически устойчива в среднем [2], если

$$\begin{aligned}&\Bigl\|\exp\Bigl(A\int_{t_0}^t \xi_1(s)\,ds\Bigr)\sum_{k=0}^{\infty} A^{2k}\Bigl(\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b_1(s_1,s_2)\,ds_1\,ds_2\Bigr)^k\Bigr\| \\ &\qquad\times \frac{\exp\bigl(\int_{t_0}^t \xi_2(s)\,ds\bigr)}{1 - \int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b_2(s_1,s_2)\,ds_1\,ds_2} \to 0\end{aligned}$$

при $t \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Г. Задорожний, *Методы вариационного анализа*, РХД, М.–Ижевск, 2006, 316 с.
2. В. Г. Задорожний, “Стабилизация линейных систем мультипликативным случайным шумом”, *Дифференц. уравнения*, **54**:6 (2018), 734–753; англ. пер.: V. G. Zadorozhniy, “Stabilization of linear systems by a multiplicative random noise”, *Differ. Equ.*, **54**:6 (2018), 728–747.

Житлухин М. В. (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия)**. Асимптотически оптимальные стратегии в одной модели рынка с конкуренцией** [4][36]**.**

В работе рассматривается многошаговая игровая модель, где несколько игроков (инвесторов) соперничают за распределение прибыли, выплачиваемой несколькими активами. Цель работы — изучение таких стратегий, которые являются оптимальными на бесконечном горизонте времени в том смысле, что они не проигрывают любым другим стратегиям конкурентов. Задачи подобного характера были, по-видимому, впервые рассмотрены в работе [1] для частной модели с дискретным временем, затем они изучалась (также для дискретного времени) в работах [2], [3] и др. В настоящей работе рассматривается более общая модель, причем как в дискретном, так и в непрерывном времени.

Для простоты в данной аннотации приводится формулировка модели только в дискретном времени. Пусть на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t=1}^{\infty}, \mathbf{P})$ заданы N согласованных неотрицательных последовательностей A_t^n, представляющих выплаты активов n в моменты времени t. Стратегией игрока m (где $m = 1, \dots, M$) называется последовательность $\mathscr{F}_{t-1} \otimes \mathscr{B}(\mathbf{R}_+^M)$-измеримых функций $l_t^{m,n}(\omega, y)\colon \Omega \times \mathbf{R}_+^M \to \mathbf{R}_+$, которые выражают величину капитала, инвестированную этим игроком в актив n в момент t; аргумент $y \in \mathbf{R}_+^M$ соответствует вектору капитала всех игроков в момент $t-1$. Считается, что игроки выбирают величины $l_t^{m,n}$ одновременно и независимо друг от друга.

Пусть вектор $\overline{Y}_0 = (Y_0^1, \dots, Y_0^M)$, где $Y_0^m > 0$, обозначает заданные величины капитала игроков в начальный момент времени. Тогда, по определению, величины капитала в следующие моменты задаются соотношением

$$Y_t^m = Y_{t-1}^m - \sum_n l_t^{m,n}(\overline{Y}_t) + \sum_n \biggl(\frac{l_t^{m,n}(\overline{Y}_t)}{\sum_k l_t^{k,n}(\overline{Y}_t)} A_t^n \biggr). \tag{1}$$

Первая сумма в правой части представляет затраты игрока m на инвестирование, вторая — прибыль, полученную от выплат активов (выплата каждого актива распределяется между игроками пропорционально их инвестициям в него).

Пусть $r_t^m = Y_t^m / \sum_k Y_t^k$ обозначает долю капитала игрока m в общем капитале. Следующая теорема содержит основной результат работы.

Теорема 1. *Существует стратегия $\widehat{l}$ такая, что если игрок m следует ей, то $\inf_t r_t^m > 0$ п.н. для любых стратегий конкурентов.*

[36]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10097).

Таким образом, доля капитала игрока, следующего стратегии $\widehat{l}$, все время остается отделенной от нуля. В работе эта стратегия найдена в явном виде в общей модели с непрерывным временем. Кроме того, показано, что она асимптотически единственна — все другие стратегии, обладающие этим свойством, должны быть близки к ней в некотором асимптотическом смысле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Amir, I. V. Evstigneev, K. R. Schenk-Hoppé, “Asset market games of survival: a synthesis of evolutionary and dynamic games”, *Ann. Finance*, **9**:2 (2013), 121–144.
2. L. Blume, D. Easley, “Evolution and market behavior”, *J. Econom. Theory*, **58**:1 (1992), 9–40.
3. I. Evstigneev, T. Hens, K. R. Schenk-Hoppé, “Evolutionary behavioral finance”, *The handbook of post crisis financial modeling*, Palgrave Macmillan, London, 2016, 214–234.
4. M. V. Zhitlukhin, *Asymptotic distribution of capital in a model of an investment market with competition*, arXiv: 1811.12491v1.