В. А. Малышев, Критические состояния многочастичных систем с сильным взаимодействием на окружности, *Пробл. передачи информ.*, 2011, том 47, выпуск 2, 117–127

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 47 2011 Вып. 2

УДК 621.391.1 : 519.2

© 2011 г. **В. А. Малышев**

КРИТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ С СИЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ НА ОКРУЖНОСТИ

Обычно в многокомпонентных системах рассматриваются две шкалы – макро и микро, причем считается, что переменные макрошкалы полностью определяются переменными микрошкалы. Показывается, что в рассматриваемой системе частиц с сильным локальным (кулоновским) взаимодействием это не всегда так. Именно, информация о некоторых макропеременных может быть закодирована на шкале, существенно меньшей микрошкалы.

§ 1. Введение

В многокомпонентных системах с сильным локальным взаимодействием могут быть явления, не встречающиеся в стандартных системах статистической физики и других многокомпонентных системах. Так, система с N компонентами в ограниченном макрообъеме порядка 1 (макрошкала) имеет естественную микрошкалу порядка $\frac{1}{N}$. Воздействие на систему, а значит, и на каждую ее компоненту, макроскопической силы (порядка 1) проявляется обычно в изменениях на самой макрошкале и одновременно в малых, порядка $\frac{1}{N}$, изменениях микрокомпонент (см., например, [1]). Однако в рассматриваемых ниже системах с сильным кулоновским отталкиванием между частицами в положении равновесия влияние такой силы проявляется только на шкале, гораздо меньшей стандартной микрошкалы. Иначе говоря, информация о макросиле не видна ни на макрошкале, ни на обычной микрошкале, а только на более тонкой. Если это явление имеет место вне зависимости от свойств непрерывности внешней силы, то само существование положений равновесия существенно зависит от свойств непрерывности внешней силы.

Модель. Рассмотрим систему

$$0 \leqslant x_1(t) < \ldots < x_N(t) < L \tag{1}$$

идентичных классических точечных частиц на отрезке $[0, L]$ с периодическими граничными условиями (т.е. на окружности S длины L). Динамика этой системы точек задается системой из N уравнений

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + F(x_i) - A\frac{dx_i}{dt}, \tag{2}$$

где $A \geqslant 0$, F – внешняя сила, а взаимодействие –

$$U(x_1, \ldots, x_N) = V(x_2 - x_1) + V(x_3 - x_2) + \ldots + V(x_1 - x_N),$$

где, конечно, $x_1 - x_N$ понимается как $x_1 + (L - x_N)$; иначе говоря, здесь и далее разности берутся по часовой стрелке. Предполагается, что потенциал V – симметричный и отталкивающий, и более того,

$$\begin{aligned} &V(x) = V(-x) > 0, \quad V(r) = \alpha r^{-a+1} > 0, \quad r = |x|, \\ &f(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = \alpha(a-1)r^{-a} > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Далее мы предполагаем, что $a > 1$, и полагаем $\alpha(a-1) = 1$, т.е. $f(r) = r^{-a}$. Неподвижные (критические) конфигурации $X = (x_1, \dots, x_N)$ этой системы определяются уравнениями

$$f(x_k - x_{k-1}) + F(x_k) - f(x_{k+1} - x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, N, \tag{4}$$

предполагая, что положительные силы действуют по часовой стрелке и что $x_0 = x_N$, $x_{N+1} = x_1$. Наша цель – исследовать эти уравнения.

Результаты. Если $F \equiv 0$, то очевидно, что неподвижная конфигурация единственна с точностью до сдвига, причем для всех $i = 1, \dots, N$

$$|x_{i+1} - x_i| = \frac{L}{N}.$$

Если F – не тождественный ноль, ситуация существенно сложнее. Однако есть следующий общий результат.

Теорема 1. *Пусть внешняя сила $F(x)$ является ограниченной функцией, и пусть существует последовательность $(x_1^{(p)}, \dots, x_{N_p}^{(p)})$, $p = 1, 2, \dots,$ неподвижных конфигураций с $N_p \to \infty$. Тогда при $p \to \infty$ равномерно по $i = 1, \dots, N_p$*

$$\left|x_{i+1}^{(p)} - x_i^{(p)}\right| \sim \frac{L}{N_p}.$$

Существование и единственность неподвижной конфигурации не имеют таких общих результатов, но имеют ряд интересных эффектов, связанных с пределом $N \to \infty$. Пусть сила потенциальна на окружности, т.е. $\int\limits_S F(x)\,dx = 0$, тогда потенциал может быть определен как

$$W(x) = \int\limits_0^x F(x)\,dx.$$

Если потенциал $W(x)$ – гладкий, то точка минимума потенциала

$$U(x_1, \dots, x_N) + \sum_{i=1}^{N} W(x_i)$$

удовлетворяет уравнениям (4), которые, таким образом, всегда имеют решение. В то же время имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть $F(x)$ непрерывна слева с конечным числом разрывов. Если существует последовательность $N_p \to \infty$, такая что для каждого p существует хотя бы одна неподвижная конфигурация $(x_1^{(p)}, \dots, x_{N_p}^{(p)})$, то*

$$\int\limits_S F\,dx = 0, \tag{5}$$

т.е. сила $F(x)$ потенциальна на окружности.

Доказательство этой леммы будет получено при доказательстве леммы 2.

Если же потенциал $W(x)$ не гладкий, даже если сила потенциальна, то уравнения (4) далеко не всегда имеют решение, т.е. критических точек может не быть вообще. Это не удивительно, подобное явление есть, например, и в следующей простейшей модели с одной частицей, где нет критической точки: на отрезке $[0, L]$ частица движется в поле внешней силы $F(x) = F_1 > 0$, $x \in [0, M]$, $0 < M < L$, и $F(x) = F_2 < 0$, $x \in (M, L]$. Мы, однако, концентрируемся только на явлениях, связанных с числом частиц $N \to \infty$.

Уже простейший случай кусочно-постоянной функции показывает нетипичность существования положения равновесия. Пусть $F(x) = F_1$ на интервале $(0, M]$ окружности S и $F(x) = F_2$ на дополнительном интервале $(M, L]$. Мы будем часто использовать обозначения $M_1 = M$, $M_2 = L - M$, N_1, N_2 – число частиц на интервалах $(0, M]$ и $(M, L]$ соответственно, $N = N_1 + N_2$.

Наша цель – доказать следующие результаты.

Теорема 2. *Фиксируем L, $M = \frac{L}{2}$ и $F(x) = F > 0$, $x \in (0, M]$, $F(x) = -F$, $x \in (M, L]$. Тогда для достаточно больших четных N существует континуум неподвижных конфигураций. Точнее, для любой точки $x \in S$ существует неподвижная конфигурация*

$$0 < x_1 < \ldots < x_{\frac{N}{2}} \leqslant \frac{M}{2} < x_{\frac{N}{2}+1}, \ldots, x_N \leqslant L,$$

содержащая x (т.е. x совпадает с некоторым x_k). При этом число точек на отрезках $(0, M]$ и $(M, L]$ одинаково и $\Delta_k = x_{k+1} - x_k = \Delta_{N-k}$ для всех $k = 1, \ldots, \frac{N}{2}$.

Если N нечетно, то неподвижных конфигураций нет.

В доказательстве мы явно построим существующие неподвижные конфигурации.

Теорема 3. *Для произвольных $0 < C_1 < C_2 < \infty$ и произвольной последовательности $N_1^{(p)}, N_2^{(p)} \to \infty$, такой что $\frac{N_1^{(p)}}{N_2^{(p)}} \to \gamma \neq 1$, начиная с некоторого p ни для каких L, M, F_i, таких что*

$$C_1 < L, M, F_i < C_2,$$

неподвижных конфигураций не существует.

В то же время всегда можно изменить значение функции F в одной или двух точках разрыва (т.е. в точках M или L) так, что существует неподвижная конфигурация с одной или двумя частицами в точках разрыва.

§ 2. Доказательства

2.1. Равномерная асимптотика. Докажем теорему 1. Для каждого p существует по крайней мере одно значение $1 \leqslant k(p) \leqslant N$ с

$$\Delta_{k(p)}^{(p)} = x_{k(p)+1}^{(p)} - x_{k(p)}^{(p)} \leqslant \frac{L}{N_p}.$$

При этом могут быть два случая. Либо при $p \to \infty$

$$\Delta_{k(p)}^{(p)} \sim \frac{L}{N_p},$$

либо существует подпоследовательность p_n, такая что для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех p_n

$$\Delta_{k(p_n)}^{(p_n)} \leqslant \frac{L}{N_{p_n}}(1-\varepsilon).$$

Докажем, что в первом случае имеет место утверждение теоремы. Действительно, суммируем уравнения (4) с $k = k(p)+1, \ldots, m$. Здесь m – любое из чисел

$$m = k(p)+1, \ldots, N, 1, \ldots, k(p)-1$$

(мы трактуем индексы по модулю N, т.е. отождествляем x_k и x_{k+N} для всех целых k). Тогда

$$f\big(\Delta_m^{(p)}\big) = f\big(\Delta_{k(p)}^{(p)}\big) + F\big(x_{k(p)+1}^{(p)}\big) + \ldots + F\big(x_m^{(p)}\big),$$

и значит, для некоторого $C = \sup|F(x)| > 0$

$$f\big(\Delta_m^{(p)}\big) = f\big(\Delta_{k(p)}^{(p)}\big) + r_m^{(p)}, \quad |r_m^{(p)}| \leqslant CN_p,$$

или

$$\Delta_m^{(p)} = \left(\big(\Delta_{k(p)}^{(p)}\big)^{-a} + r_m^{(p)}\right)^{-\frac{1}{a}} \sim \frac{L}{N_p}\left(1 + r_m^{(p)}\frac{L^a}{N_p^a}\right)^{-\frac{1}{a}},$$

откуда и следует результат. Докажем теперь, что второй случай невозможен. Аналогично показывается, что для всех достаточно больших p_n и всех m

$$\Delta_m^{(p_n)} \leqslant (1-\varepsilon)\frac{L}{N_{p_n}}\left(1 + r_m^{(p_n)}\frac{L^a(1-\varepsilon)}{N_{p_n}^a}\right)^{-\frac{1}{a}} \leqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{L}{N_{p_n}},$$

откуда, суммируя по $m = 1, \ldots, N$, получаем $L \leqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)L$, что невозможно.

2.2. Условия существования. Следующая лемма (вместе с леммой 1) дает список препятствий для существования неподвижной точки.

Лемма 2. *Справедливы следующие утверждения.*

- *Если отношение* $\frac{F_2}{F_1}$ *иррационально, то неподвижных конфигураций нет.*
- *Для фиксированных* M_i, F_i, N *неподвижная конфигурация может существовать не более чем для одного разбиения числа* $N = N_1 + N_2$, *где* N_i *– число частиц на отрезке длины* M_i *соответственно.*
- *Пусть* M_i, F_i *фиксированы. Тогда необходимым условием существования хотя бы одной неподвижной конфигурации для каждого* p *некоторой последовательности* $N^{(p)}$, $p = 1, 2, \ldots$, *является существование разбиения* $N_1^{(p)} + N_2^{(p)} = N$, *такого что*

$$\frac{M_1}{M_2} = -\frac{F_2}{F_1} = \frac{N_1^{(p)}}{N_2^{(p)}}. \tag{6}$$

Доказательство. Заметим, что для фиксированного N необходимым условием неподвижности конфигурации является условие

$$\sum F(x_i) = 0, \tag{7}$$

которое получается суммированием уравнений (4). В нашем случае (7) переходит в условие

$$F_1N_1 + F_2N_2 = 0. \tag{8}$$

Отсюда следуют два первых утверждения леммы. Отметим, что возникает необходимое условие арифметического характера: F_1 и F_2 должны быть соизмеримы.

Заметим теперь, что по теореме 1 при $p \to \infty$

$$\left| \frac{L}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} F(x_i^{(p)}) - \sum_{i=1}^{N_p} F(x_i^{(p)})\big(x_{i+1}^{(p)} - x_i^{(p)}\big) \right| \to 0,$$

и значит,

$$\frac{L}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} F(x_i^{(p)}) \xrightarrow{p\to\infty} \int\limits_S F\,dx = F_1 M_1 + F_2 M_2,$$

что дает доказательство леммы 1, так как ввиду (7) левая часть тождественно равна нулю. Кроме того, получаем первое равенство в (6), а второе следует из (8). ▲

2.3. Вспомогательная задача на отрезке. Рассмотрим систему идентичных классических точечных частиц на отрезке $[0, L] \subset \mathbb{R}$

$$0 \leqslant x_1 < \ldots < x_N \leqslant L$$

с тем же взаимодействием (3), но с вполне неупругими граничными условиями. Это значит, что если крайняя частица подлетает к концу интервала, она останавливается, и может отойти от него, только если результирующая сила станет направленной внутрь отрезка. Тогда условием равновесия является следующая система:

$$\begin{aligned} &F(0) - f(x_2) \leqslant 0, \quad F(L) + f(L - x_{N-1}) \geqslant 0, \\ &f(x_k - x_{k-1}) + F(x_k) - f(x_{k+1} - x_k) = 0, \quad k = 2, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{9}$$

Мы будем рассматривать неподвижные конфигурации, такие что $x_1 = 0$, $x_N = L$. Можно показать, что других нет, но это нам не понадобится.

Лемма 3. *Предположим, что внешняя сила $F > 0$ постоянна. Тогда для достаточно больших N неподвижная точка $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, такая что $x_1 = 0$, $x_N = L$, существует и единственна, причем $\Delta_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 2, \ldots, N-1$, аналитически зависят от L, F и Δ_1.*

Доказательство. Удобно ввести величины δ_k посредством

$$\Delta_k = x_{k+1} - x_k = \frac{L}{N-1}(1 + \delta_k).$$

Из (9) имеем

$$f(x_{k+1} - x_k) = f(x_2) + (k-1)F, \tag{10}$$

или

$$f\left(\frac{L}{N-1}(1+\delta_k)\right) - f\left(\frac{L}{N-1}(1+\delta_1)\right) = (k-1)F.$$

Перепишем это следующим образом:

$$(1+\delta_k)^{-a} - (1+\delta_1)^{-a} = Q_k = (k-1)q, \quad q = \left(\frac{L}{N-1}\right)^a F, \tag{11}$$

или

$$1 + \delta_k = [(1+\delta_1)^{-a} + Q_k]^{-\frac{1}{a}}, \tag{12}$$

что определяет δ_k как вещественно аналитическую функцию по L, F, δ_1 для $L > 0$, $F > 0$, $|\delta_1| < 1$. Можно записать это в виде

$$\delta_k = \left[1 - a\delta_1 + \frac{a(a+1)}{2}\delta_1^2 + O(\delta_1^3) + Q_k\right]^{-\frac{1}{a}} - 1 =$$
$$= \delta_1 - a^{-1}Q_k + \frac{a^{-1}(a^{-1}+1)}{2}Q_k^2 - (a^{-1}+1)\delta_1 Q_k + g_3(\delta_1, N, k), \tag{13}$$

где

$$g_3(\delta_1, N, k) = O\big((|\delta_1| + Q_k)^3\big)$$

и g_3 является вещественно аналитической функцией по L, F, δ_1 для $L > 0$, $F > 0$, $|\delta_1| < 1$.

Суммируя по k и используя условие $\sum\limits_{k=1}^{N-1}\delta_k = 0$, получим

$$\sum_{k=1}^{N-1}\delta_k = 0 = (N-1)\delta_1 - \big(a^{-1} + (a^{-1}+1)\delta_1\big)\sum_{k=2}^{N-1}Q_k + \frac{a^{-1}(a^{-1}+1)}{2}\sum_{k=2}^{N-1}Q_k^2 +$$
$$+ \sum_{k=2}^{N-1} g_3(\delta_1, N, k),$$

откуда

$$\delta_1 = (N-1)^{-1}\left(\big(a^{-1} + (a^{-1}+1)\delta_1\big)\sum_{k=2}^{N-1}Q_k - \frac{a^{-1}(a^{-1}+1)}{2}\sum_{k=2}^{N-1}Q_k^2\right) + G(\delta_1, N) =$$
$$= \big(a^{-1} + (a^{-1}+1)\delta_1\big)q\Big(\frac{N}{2} - 1\Big) - \frac{a^{-1}(a^{-1}+1)}{2}q^2\frac{(N-2)(2N-3)}{6} + G(\delta_1, N),$$
$$G(\delta_1, N) = (N-1)^{-1}\sum_{k=2}^{N-1} g_3(\delta_1, N, k) = O\big((|\delta_1| + Q_{N-1})^3\big) = O\big((|\delta_1| + N^{-a+1})^3\big).$$

Так как последнее уравнение имеет вид $\delta_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\delta_1^n$, где в правой части стоит аналитическая функция с малыми коэффициентами c_n, то методом последовательных приближений (итерацией) получаем единственное решение для δ_1. При этом

$$\begin{aligned}&\delta_1 = a^{-1}q\Big(\frac{N}{2} - 1\Big) + \frac{a^{-1}(a^{-1}+1)}{12}q^2(N-2)(N-3) + J_1(N),\\ &J_1(N) = o(N^{-2a+2}),\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\delta_{N-1} = \delta_1 - a^{-1}Q_{N-1} + \frac{a^{-1}(a^{-1}+1)}{2}Q_{N-1}^2 - (a^{-1}+1)\delta_1 Q_{N-1} +\\ &\quad + g_3(\delta_1, N, N-1) = -a^{-1}q\Big(\frac{N}{2} - 1\Big) + \frac{a^{-1}(a^{-1}+1)}{12}q^2(N-2)(N-3) +\\ &\quad + J_{N-1}(N), \quad J_{N-1}(N) = o(N^{-2a+2}). \quad \blacktriangle\end{aligned} \tag{15}$$

2.4. Построение неподвижных конфигураций. Заметим, что если $X = (x_1, \ldots, x_N)$ – неподвижная конфигурация на окружности с заданной $F(x)$, то любая ее подпоследовательность (без пропусков) $X_{kl} = (x_k, \ldots, x_l)$ является неподвижной конфигурацией на отрезке $[x_k, x_l]$ (с той же силой $F(x)$) в смысле п. 2.3. Действительно, при ограничении на отрезок мы отбрасываем часть силы в крайних точках, направленную внутрь отрезка. Значит, на концах сила направлена вовне отрезка, что дает выполнение первых двух неравенств в (9). Наоборот, если для заданной конфигурации $X=(x_1,\dots,x_N)$ неподвижной конфигурацией (с той же силой $F(x)$) на отрезке окружности между точками x_k и x_l (по часовой стрелке) будет $X_{kl}=(x_k,\dots,x_l)$, а конфигурация $X_{kl}=(x_{l-1},\dots,x_{k+1})$ будет неподвижной конфигурацией на отрезке между точками x_{l-1} и x_{k+1}, то X является неподвижной конфигурацией на окружности. Такая ситуация называется склейкой. В симметрическом случае, т.е. в условиях теоремы 2, при склейке мы используем зеркальную симметрию.

Симметрический случай. Докажем теорему 2. Пусть N четно и $x\in S$. Построим неподвижную конфигурацию, содержащую x, для случая одинакового числа $\frac{N}{2}$ точек на отрезках $(0,M]$ и $(M,L]$.

Рассмотрим неподвижную конфигурацию с $\frac{N}{2}+2$ точками

$$0=y_1<\ldots<y_{\frac{N}{2}+2}=M+m$$

на отрезке $[0,M+m]$ ($m>0$ – малое вещественное число) с постоянной силой $F>0$, как в п. 2.3. По лемме 3 она единственна и имеет разности

$$\Delta_k=y_{k+1}-y_k=\frac{M+m}{\frac{N}{2}+1}(1+\delta_k),\quad k=1,\dots,\frac{N}{2}+1,\quad \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}+1}\Delta_k=M+m,$$

вычисленные в п. 2.3. По этим разностям построим неподвижную конфигурацию $X=(x_1,\dots,x_N)$ на окружности. Определим индукцией по часовой стрелке для некоторого $b>0$

$$x_N=L-b,\quad x_1=-b+\Delta_1,\quad x_2=x_1+\Delta_2,\quad \dots,$$
$$x_{\frac{N}{2}+1}=x_{\frac{N}{2}}+\Delta_{\frac{N}{2}+1}=-b+\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}+1}\Delta_k=-b+M+m,$$

и далее индукцией против часовой стрелки

$$x_N=L+x_1-\Delta_1,\quad x_{N-1}=x_N-\Delta_2,\quad \dots,\quad x_{N-k}=x_{N-k+1}-\Delta_{k+1},\quad \dots,$$
$$x_{\frac{N}{2}}=x_{\frac{N}{2}+1}-\Delta_{\frac{N}{2}+1}.$$

Мы видим, что эти определения согласованы, и из них следует, что

$$x_{\frac{N}{2}+1}-x_1=x_N-x_{\frac{N}{2}}=M+m-\Delta_1.$$

Для того чтобы построенная конфигурация была конфигурацией на окружности длины L, необходимо дополнительное условие $2(M+m)-\Delta_1-\Delta_{\frac{N}{2}+1}=L$ (так как два отрезка длины $M+m$ покрывают окружность, но отрезки $\Delta_1,\Delta_{\frac{N}{2}+1}$ учитываются при этом по два раза), или

$$2m=\Delta_1+\Delta_{\frac{N}{2}+1}. \tag{16}$$

Это дает уравнение для m:

$$2m=\frac{M+m}{\frac{N}{2}+1}(1+\delta_1)+\frac{M+m}{\frac{N}{2}+1}(1+\delta_{\frac{N}{2}+1})=\frac{M}{N}+h(m,N),$$

где функция h аналитична по m и согласно разложениям (14), (15)

$$h(m,N) = o\left(\frac{|m|}{N} + \frac{1}{N^2}\right).$$

Поэтому это уравнение имеет единственное решение $m = O\left(\frac{1}{N}\right)$.

Из вышеприведенных определений следует, что $\Delta_k = \Delta_k(m)$ зависят от m, а $x_k = x_k(m,b)$ – от m и b, и при этом, как мы знаем из п. 2.3, $\Delta_k(m) > \Delta_{k+1}(m)$ для всех k. В частности, для заданного m интервал $\Delta_1(m)$ – максимальный из интервалов $\Delta_k(m)$. Кроме того,

$$\Delta_k(m') > \Delta_k(m), \quad m' > m,$$
$$x_k(m, b+c) = x_k(m,b) + c.$$

Чтобы из этой склейки получилась неподвижная точка на окружности (т.е. чтобы выпонялись условия равновесия), надо потребовать, чтобы точки $x_1, \ldots, x_{\frac{N}{2}}$ лежали в интервале $(0, M]$, а остальные – в интервале $(M, L]$. Необходимым и достаточным условием этого будут неравенства

$$x_1 > 0, \tag{17}$$
$$x_{\frac{N}{2}} = -b + M + m - \Delta_{\frac{N}{2}+1} < M, \tag{18}$$
$$x_{\frac{N}{2}+1} = -b + M + m > M. \tag{19}$$

Первое сводится к

$$0 < b < \Delta_1(m), \tag{20}$$

второе и третье – к

$$b < m < \Delta_{\frac{N}{2}+1}(m) + b. \tag{21}$$

Положим

$$b(m) = \frac{\Delta_1(m)}{2}.$$

Легко видеть, что все неравенства (20), (21) при этом выполняются.

Пусть $x_k(m, b(m))$ – ближайшая к x точка неподвижной конфигурации с параметрами $m, b(m)$. Пусть, например, $x_k < x$. Тогда

$$x - x_k \leqslant \frac{\Delta_{k-1}(m)}{2}.$$

Выбрав теперь $b = b(m) + x - x_k$, получим точку x как k-ю точку новой конфигурации: $x = x_k(m,b)$.

Несуществование для нечетного N следует из третьего утверждения леммы 2.

Замечание. Для заданных x и k неподвижная конфигурация с $x = x_k$ единственна, что следует из монотонности функции $x_k(b)$ по b. Вопрос, могут ли быть для данного x две неподвижные конфигурации, такие что для одной из них $x = x_k$, а для другой $x = x_{k+1}$, требует более точных вычислений и здесь не рассматривается.

Несимметрический случай. Докажем теорему 3. Пусть для некоторого p существует неподвижная конфигурация, далее мы опускаем индекс p. Тогда она имеет следующий вид:

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N_1} \leqslant M < x_{N_1+1} < \ldots < x_N \leqslant L,$$

т.е. точки $x_1, \ldots, x_{N_1+1}$ лежат в интервале действия силы $F_1 > 0$, а точки $x_{N_1+1}, \ldots$ $\ldots, x_N$ – в интервале действия силы $F_2 < 0$. Эта конфигурация определяет две вспомогательные неподвижные конфигурации на отрезках $[0, M_i + m_i]$, $i = 1, 2$, с $N_i + 2$ точками

$$0 = y_1^i < \ldots < y_{N_1+2}^i = M_i + m_i$$

и силами F_i соответственно, которые определяются своими разностями

$$u_{i,k} = y_{k+1}^i - y_k^i = \frac{M_i + m_i}{N_i + 1}(1 + \delta_{i,k}).$$

При этом $u_{1,k}$ определяются по координатам $x_N, x_1, \ldots, x_{N_1+1}$:

$$x_1 = L - x_N + u_{1,1}, \quad x_2 = x_1 + u_{1,2}, \quad \ldots, \quad x_{N_1+1} = x_{N_1} + u_{1,N_1+1},$$

а $u_{2,k}$ – по точкам $x_1, x_N, x_{N-1}, \ldots, x_{N_1}$ (в обратном порядке):

$$x_N = x_1 + L - u_{2,1}, \quad x_{N-1} = x_N - u_{2,2}, \quad \ldots, \quad x_{N_1} = x_{N_1+1} - u_{2,N_2+1}.$$

Для согласования должны быть выполнены два условия:

$$u_{1,1} = u_{2,1}, \quad u_{1,N_1+1} = u_{2,N_2+1}, \tag{22}$$

а длина L определится по формуле

$$L = M_1 + m_1 + M_2 + m_2 - u_{1,1} - u_{1,N_1+1}, \tag{23}$$

что аналогично (16), так как окружность длины L покрывается двумя отрезками, причем $u_{1,1}$ и u_{N_1+1} при объединении двух отрезков учитываются два раза. Также должно быть $F_2N_2 + F_1N_1 = 0$. Удобно обозначить $\widehat{M_i} = M_i + m_i$.

Так как (по лемме 2 или теореме 1)

$$\frac{\widehat{M_1}}{N_1 + 1} \sim \frac{\widehat{M_2}}{N_2 + 1}, \tag{24}$$

то можно записать

$$\frac{\widehat{M_1} + m}{N_1 + 1} = \frac{\widehat{M_2}}{N_2 + 1}, \quad m = o(1), \tag{25}$$

и искать m из уравнений (22), которые дадут два уравнения относительно m:

$$\frac{\widehat{M_1}}{N_1 + 1}(1 + \delta_{1,1}) = \frac{\widehat{M_1} + m}{N_1 + 1}(1 + \delta_{2,1}),$$
$$\frac{\widehat{M_1}}{N_1 + 1}(1 + \delta_{1,N_1+1}) = \frac{\widehat{M_1} + m}{N_1 + 1}(1 + \delta_{2,N_2+1}).$$

Перепишем последние в виде

$$m = \widehat{M_1}(\delta_{1,1} - \delta_{2,1})(1 + \delta_{2,1})^{-1}, \tag{26}$$

$$m = \widehat{M_1}(\delta_{1,N_1+1} - \delta_{2,N_2+1})(1 + \delta_{2,N_2+1})^{-1}. \tag{27}$$

Получили два уравнения с одной неизвестной m. Покажем, что они несовместны при малых m. Для этого сначала сравним основные члены двух рядов: для $\delta_{1,1} - \delta_{2,1}$ и $\delta_{1,N_1+1} - \delta_{2,N_2+1}$. Точнее, используя разложение (14), подсчитаем разность первых двух членов в рядах для $\delta_{1,1}$ и $\delta_{2,1}$. Заметим, что при этом мы будем использовать $|F_2|N_2 = F_1N_1$, и в формулах для $\delta_{2,1}$ должны брать $|F_2|$, так как y_k^2 соответствуют обратному порядку координат x_i. Прямой подсчет дает

$$\delta_{1,1} - \delta_{2,1} = R_1 + R_2,$$

где

$$R_1 = \frac{1}{2}a^{-1}F_1N_1\left(\frac{\widehat{M}_1}{N_1+1}\right)^a\left[1-\left(1+\frac{m}{\widehat{M}_1}\right)^a\right] =$$
$$= \frac{1}{2}a^{-1}F_1N_1\left(\frac{\widehat{M}_1}{N_1+1}\right)^a\left[-a\frac{m}{\widehat{M}_1}+O(m^2)\right],$$
$$R_2 = \frac{a^{-1}(a^{-1}+1)}{12}F_1N_1\left(\frac{\widehat{M}_1}{N_1+1}\right)^{2a}\left[N_1-\left(1+\frac{m}{\widehat{M}_1}\right)^{2a}(N_2-1)\right] =$$
$$= \frac{a^{-1}(a^{-1}+1)}{12}F_1N_1\left(\frac{\widehat{M}_1}{N_1+1}\right)^{2a}\left[(N_1-N_2)-\left(2a\frac{m}{\widehat{M}_1}+O(m^2)\right)(N_2-1)\right].$$

Таким образом, уравнение (26) будет иметь вид

$$m = \left[c_1N_1^{-a+1}m + c_2N_1^{-2a+2} + c_3N_1^{-2a+1}m + O(m^2)N_1^{-a+1}\right] \times$$
$$\times \left(1 + c_4N_1^{-a+1} + o(N_1^{-a+1})\right), \tag{28}$$

где $c_i = c_i(N)$ стремятся при $N \to \infty$ к ненулевым константам d_i, из которых нам понадобятся только

$$c_1 = -\frac{F_1}{2}\frac{N_1}{N_1+1}\left(\frac{\widehat{M}_1}{N_1+1}\right)^{a-1} \to d_1 = -\frac{F_1}{2}M_1^{a-1},$$
$$c_4 = -\frac{a^{-1}F_1}{2}N_1\left(\frac{\widehat{M}_1}{N_1+1}\right)^a \to d_4 = -\frac{a^{-1}F_1}{2}M_1^a,$$

так как $\widehat{M}_1 \to M_1$ (заметим, что c_1, c_4 получаются только из первых членов разложения). Очевидно, что уравнение (28) имеет единственное решение $m = o(1)$, которое асимптотически равно

$$m \sim d_2N_1^{-2a+2}. \tag{29}$$

В то же время, как это видно из сравнения разложений (14) и (15), $\delta_{1,N_1+1} - \delta_{2,N_2+1}$ имеет такой же вид, но со знаком минус перед c_1 и перед c_4. Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$0 = 2c_1N_1^{-a+1}m + 2c_4c_2N_1^{-3a+3} + 2c_4c_3N_1^{-3a+2}m + O(m^2)N_1^{-a+1},$$

откуда

$$m \sim -\frac{2c_4c_2}{c_1}N_1^{-2a+2} \sim -\frac{2d_4d_2}{d_1}N_1^{-2a+2}. \tag{30}$$

Сравнивая (29) и (30), получаем необходимое условие совместности двух уравнений:

$$-\frac{2d_4}{d_1} = 2a^{-1}M_1 = 1.$$

Но так как M_1 и M_2 совершенно симметричны, такие же выкладки мы могли бы провести, взяв за основу M_2. При этом в конце выкладок получится аналогичное условие

$$2a^{-1}M_2 = 1.$$

Но эти условия не могут выполняться одновременно, так как $\gamma \neq 1$, и значит, $M_1 \neq M_2$. Случай $M_1 = M_2$ был рассмотрен отдельно (см. выше). Это доказывает первое утверждение теоремы 3.

Доказательство последнего утверждения теоремы 3 достаточно просто. Построим две неподвижные конфигурации на отрезках $[0, M]$ и $[M, L]$, как в п. 2.3. Чтобы получилась неподвижная конфигурация на окружности, надо, чтобы были в равновесии частицы в точках 0 и M. Для этого достаточно подобрать значение внешней силы в этих точках, так чтобы она уравновешивала разность сил от соседних частиц.

§ 3. Замечания

Ранее основные состояния (неподвижные конфигурации) классических частиц исследовались в связи с задачей существования и структуры решетки твердого тела (см. [2–7]). Есть также другие континуальные одномерные модели, наиболее известные – цепочки Тода и модель Френкеля – Конторовой. Во всех этих моделях предполагается, что потенциал V имеет минимум. Так, в модели Френкеля – Конторовой рассматривается в основном квадратичный гамильтониан [8], но есть и работы, где последняя модель понимается шире (см., например, [9, 10]). Однако основные состояния там рассматриваются на всей прямой. В этой статье, однако, преследуются совсем другие цели и изучаются другие явления в конечном объеме, связанные с появлением более тонкой шкалы, т.е. фактически с вторыми членами асимптотики расстояний между частицами. Мы используем прямой подход, который идейно довольно прямолинеен, но связан с громоздкими вычислениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malyshev V.A.* One-Dimensional Mechanical Networks and Crystals // Mosc. Math. J. 2006. V. 6. № 2. P. 353–358.
2. *Ventevogel W.J.* On the Configuration of a One-Dimensional System of Interacting Particles with Minimum Potential Energy per Particle // Physica A. 1978. V. 92. № 3–4. P. 343–361.
3. *Duneau M., Katz A.* Structural Stability of Classical Lattices in One Dimension // Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. A. 1984. V. 41. № 3. P. 269–290.
4. *Radin C.* Existence of Ground State Configurations // Math. Phys. Electron. J. 2004. V. 10. Paper 6 (electronic).
5. *Radin C.* Crystals and Quasicrystals: A Lattice Gas Model // Phys. Lett. A. 1986. V. 114. № 7. P. 381–383.
6. *Gardner C.S., Radin C.* The Infinite-Volume Ground State of the Lennard–Jones Potential // J. Statist. Phys. 1979. V. 20. № 6. P. 719–724.
7. *Radin C., Schulman L.S.* Periodicity of Classical Ground States // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. № 8. P. 621–622.
8. *Браун О.М., Кившарь Ю.С.* Модель Френкеля – Конторовой. Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008.
9. *Gambaudo J.-M., Guiraud P., Petite S.* Minimal Configurations for the Frenkel–Kontorova Model on a Quasicrystal // Comm. Math. Phys. 2006. V. 265. № 1. P. 165–188.
10. *Заславский А.Я.* Основные состояния в модели типа Френкеля – Конторовой // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50. № 5. С. 969–999.

Малышев Вадим Александрович
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
лаборатория больших случайных систем
malyshev@yahoo.com

Поступила в редакцию
27.12.2010
После переработки
22.02.2011