УДК 519.248

В. А. МАЛЫШЕВ, Р. А. МИНЛОС

КЛАСТЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Введение

В последние годы выкристаллизовался некоторый общий класс линейных операторов, названных в работах [1, 2] кластерными операторами. Понятие кластерного оператора возникло из задач математической физики и призвано отразить известный в физике факт: в системе, состоящей из многих частиц, эти частицы группируются в небольшие жестко связанные группы — кластеры — которые движутся друг относительно друга, почти не взаимодействуя на большом удалении. Такой характер движения приводит к тому, что операторы, описывающие систему (гамильтониан или оператор Лиувилля, оператор эволюции, матрица рассеяния и т. д.), имеют некоторую специальную структуру, названную нами кластерной структурой. Математически кластерные операторы обладают рядом замечательных свойств, заслуживающих самостоятельного изучения уже вне какого-либо физического контекста. Одна из целей этой статьи — дать общее математическое изложение теории кластерных операторов. Однако для того, чтобы приводимые ниже построения и понятия не казались искусственными, мы укажем вначале несколько привычных в математической физике ситуаций, приводящих к понятию кластерного оператора.

I. Квантовые решетчатые системы.

Пусть каждой точке $t \in \mathbf{Z}^\nu$ ν-мерной решетки отнесен экземпляр $\mathscr{H}_t$ некоторого сепарабельного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ с выделенным вектором e^0 (соответствующий вектор в $\mathscr{H}_t$ обозначим через e_t^0). Обозначим через $\mathscr{H}_{\mathbf{Z}^\nu} = \overset{0}{\bigotimes\limits_{t \in \mathbf{Z}^\nu}} \mathscr{H}_t$ тензорное произведение, порожденное формальными произведениями $\bigotimes\limits_{t \in \mathbf{Z}^\nu} f_t$, $f_t \in \mathscr{H}_t$, в которых лишь конечное число f_t отлично от e_t^0 (более подробное определение $\overset{0}{\bigotimes\limits_{t \in \mathbf{Z}^\nu}} \mathscr{H}_t$ см., например, в [3]). Выбрав в $\mathscr{H}$ ортонормированный базис $\{f^i, i=0, 1 \dots\}$ так, что $f^0=e^0$, построим в $\mathscr{H}_{\mathbf{Z}^\nu}$ базис вида

$$e_m = \bigotimes_{t \in \mathbf{Z}^\nu} f_t^{(m(t))}, \tag{1.1}$$

где $m=\{m(t), t \in \mathbf{Z}^\nu\}$ — финитная целочисленная функция на $\mathbf{Z}^\nu$, принимающая значения от 0 до $d<\infty$ в случае d-мерного пространства $\mathscr{H}$ или от 0 до ∞ — в случае бесконечномерного $\mathscr{H}$. Совокупность всех таких функций будем обозначать через $\mathfrak{M}^d$ или $\mathfrak{M}^\infty$ соответственно. Таким образом, формула (1.1) задает изоморфизм пространств $\mathscr{H}_{\mathbf{Z}^\nu}$ и $l_2(\mathfrak{M}^d)$ (или $l_2(\mathfrak{M}^\infty)$).

Обозначим для любого ограниченного множества $J\subset\mathbf{Z}^\nu$ через $\mathcal{H}_J$ пространство

$$\mathcal{H}_J=\bigotimes_{t\in J}\mathcal{H}_t \tag{1.2}$$

и рассмотрим семейство $\{\Phi_J,\ J\subset\mathbf{Z}^\nu\}$ самосопряженных операторов, действующих в каждом из $\mathcal{H}_J$, причем

$$\Phi_J=\sum_{\alpha_J}\Psi_{\alpha_J}\bigotimes_{t\in J}\Phi_t^{\alpha_J(t)}, \tag{1.3}$$

где $\{\Phi^\alpha,\ \alpha\in A\}$ — конечное семейство самосопряженных операторов, действующих в $\mathcal{H}$ (Φ_t^α действует в $\mathcal{H}_t$), таких, что

$$(\Phi^\alpha e^0,\ e^0)=0 \tag{1.4}$$

при любом α; $\alpha_J=\{\alpha_J(t),\ t\in J\}$ — функция на J со значениями в A; а Ψ_{α_J} — вещественные константы. Предполагается, что семейство этих констант инвариантно относительно сдвигов решетки. Кроме того, мы допустим, что

$$\Phi_J e_J^0=0, \tag{1.5}$$

где $e_J^0=\bigotimes_{t\in J}e_t^0$ для любого $J\subset\mathbf{Z}^\nu$ и

$$\Phi_J=0\quad\text{при}\quad \operatorname{diam}J<R, \tag{1.6}$$

где R — некоторая константа (радиус взаимодействия). Обозначим через $\widehat{\Phi}_J=\Phi_J\otimes E_{\mathbf{Z}^\nu\setminus J}$, где $E_{\mathbf{Z}^\nu\setminus J}$ — единичный оператор в $\overset{0}{\bigotimes}_{t\in\mathbf{Z}^\nu\setminus J}\mathcal{H}_t$, и положим

$$H=\sum_{J\subset\mathbf{Z}^\nu}\widehat{\Phi}_J. \tag{1.7}$$

Оставляя в стороне вопрос о том, при каких условиях H является самосопряженным оператор в $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}^\nu}$, мы заметим лишь, что в силу (1.5) и (1.6) для любого e_m, $m\in\mathfrak{M}_d$ (или $\mathfrak{M}^\infty$)

$$He_m=\sum_{J:\,J\cap\operatorname{supp}m\neq\varnothing}\widehat{\Phi}_J e_m\in\mathcal{H}_{\mathbf{Z}^\nu} \tag{1.8}$$

и в силу (1.4) матричные элементы $H_{mm'}=(He_m,\ e_{m'})$ равны

$$H_{mm'}=\sum_{\substack{I\subseteq\operatorname{supp}m\\ I'\subseteq\operatorname{supp}m'\\ I\neq\varnothing,\,I'\neq\varnothing}}\omega(m|_I,\ m'|_{I'}), \tag{1.9}$$

где

$$m|_I=\begin{cases} m(x), & x\in I,\\ 0, & x\,\overline{\in}\, I,\end{cases}\qquad m\in\mathfrak{M}^d,\ d\ll\infty,$$

и

$$\omega(n,\ n')=(\widehat{\Phi}_{\operatorname{supp}n\cup\operatorname{supp}n'}e_n, e_{n'}),$$
$$n,\ n'\in\mathfrak{M}^d,\ d\ll\infty. \tag{1.10}$$

Разложение (1.9), (1.10) по вводимой ниже терминологии и представляет собой аддитивное кластерное разложение H.

II. Рассмотрим периодическую квантовую систему (т. е. систему, группа симметрий которой содержит группу $\mathbf{Z}^\nu$) с гамильтонианом вида

$$H=\Sigma K(n,n')\prod_{(t,\alpha)\in\mathbf{Z}^\nu\times\mathfrak{A}}(a(t,\alpha))^{n(t,\alpha)}(a^*(t,\alpha))^{n'(t,\alpha)}, \tag{1.11}$$

где суммирование происходит по всем парам целочисленных финитных функций на множестве $\mathbf{Z}^\nu\times\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое дополнительное множество индексов), а $a(t,\alpha)$, $a^*(t,\alpha)$ — операторы рождения и уничтожения, действующие в фоковском пространстве $\mathcal{F}=\mathrm{Exp}^{\mathrm{sym}}l_2(\mathbf{Z}^\nu\times\mathfrak{A})$ (т. е. в симметризованной тензорной экспоненте пространства $l_2(\mathbf{Z}^\nu\times\mathfrak{N})$). Пространство $\mathcal{F}$ естественным образом изоморфно пространству $l_2(\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}^\infty)$, где $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}^\infty$ — совокупность целочисленных финитных функций на множестве $\mathbf{Z}^\nu\times\mathfrak{A}$ и матричные элементы оператора $H\{H_{mm'},\ m,m'\in\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}^\infty\}$ снова, оказывается, допускают разложение, подобное разложению (1.9).

III. Приведенные примеры показывают, что для типичных систем математической физики пространство их состояний может быть реализовано как $l_2(\mathfrak{M}^d)$ (или $l_2(\mathfrak{M}^\infty)$), а матричные элементы их гамильтонианов допускают кластерное разложение, подобное разложению (1.9). Отметим, однако, что многие важные функции гамильтониана, скажем оператор эволюции $\exp\{itH\}$ или резольвента $(H-zE)^{-1}$, не имеют разложения в точности такого, как (1.9), но допускают уже более сложное разложение. Так, например, для большого класса гамильтонианов H вида (1.7), (1.3) или (1.11) матричные элементы оператора $\exp\{-tH\}$ в подходящем базисе $\{e_m,\ m\in\mathfrak{M}^d\}$ представимы в виде $(t>0)$

$$(\exp\{-tH\})_{mm'}=\sum_k\sum_{\substack{(I_1,\dots,I_k)\\(I'_1,\dots,I'_k)\\ \cup I_i=\mathrm{supp}\,m;\ I_i\cap I_j=I'_i\cap I'_j=\varnothing,\ j\neq i\\ \cup I'_i=\mathrm{supp}\,m'}}\prod_{i=1}^k\omega(m|_{I_i},m'|_{I'_i},t), \tag{1.12}$$

где $\omega(m,m',t)$ — функция от пар m,m', стремящаяся достаточно быстро к нулю при взаимном удалении точек из носителей пары (m,m') или при росте самих значений m или m'. Разложение (1.12), а также более общее разложение, вводимое ниже, принято называть кластерным разложением, а операторы, допускающие такие разложения, — кластерными операторами. Основная задача, связанная с этим классом операторов, — изучение структуры их спектра и характера рассеяния. Есть много оснований предполагать, что спектр и рассеяние для кластерных операторов могут быть описаны в терминах так называемых «каналов», подобно тому как описывается спектр многочастичного оператора Шредингера (см., например, [4]). Пока мы далеки от оправдания этой гипотезы, но некоторые частные результаты и примеры подтверждают ее. Отметим, что доказательству того, что оператор $\exp\{-tH\}$ допускает кластерное разложение (1.12), посвящены работы [1, 5, 6, 7]. Они основаны на сведении оператора $\exp\{-tH\}$ к так называемой трансфер-матрице некоторого случайного гиббсовского поля. Этот прием, кроме прочего, приводит к корректному определению самого гамильтониана H в термодинамическом пределе. С тем, чтобы дать представление об используемой технике и схеме рассуждения, мы рассматриваем в качестве примера построение трансфер-матрицы (включая доказательство ее кластерности) и оператора H для случая модели Изинга с непрерывным временем.

Укажем в заключение, что мы не затронули здесь вопросов, касающихся построения инвариантных k-частичных подпространств кластерного оператора. Некоторые результаты такого рода имеются в наших работах [2] (см. также более старые работы [6, 8]).

§ 2. Определение кластерных операторов

Пусть в пространстве $l_2(\mathfrak{M}^d)$, где $1 \leqslant d \leqslant \infty$, действует оператор A, матричные элементы $A_{m,m'}$, $m, m' \in \mathfrak{M}^d$ которого допускают следующее разложение (кластерное разложение):

$$A_{m,m'} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{(I_1,\dots,I_k) \\ (I_1',\dots,I_k') \\ \cup I_i = \operatorname{supp} m \\ \cup I_i' = \operatorname{supp} m' \\ I_i \cap I_j = I_i' \cap I_j' = \varnothing, i \neq j, i,j=1,\dots,k, I_i \neq \varnothing, I_i' \neq \varnothing}} \omega_k [(m|_{I_1}, m'|_{I_1'}), \dots, (m|_{I_k}, m'|_{I_k'})]. \tag{2.1}$$

Здесь

$$\omega_k[(m_1, m_1'), \dots, (m_k, m_k')], \quad k=1, 2, \dots,$$

симметрические функции, определенные на наборах пар (m_i, m_i'), $i=1, \dots, k$, функций из $\mathfrak{M}^d$ и удовлетворяющие следующим условиям.

1. Полная трансляционная инвариантность: для любого k и любых векторов $s_1, s_2, \dots, s_k \in \mathbf{Z}^\nu$

$$\omega_k [(\tau_{s_1} m_1, \tau_{s_1} m_1'), \dots (\tau_{s_k} m_k, \tau_{s_k} m_k')] = \omega_k [(m_1, m_1'), \dots (m_k, m_k')], \tag{2.2}$$

где τ_s — преобразование в $\mathfrak{M}^d$, порожденное сдвигом решетки $\mathbf{Z}^\nu$ на вектор $s \in \mathbf{Z}^\nu$:

$$(\tau_s m)(x) = m(x-s), \quad x \in \mathbf{Z}^\nu, \quad m \in \mathfrak{M}^d. \tag{2.3}$$

Замечания. I. Здесь уместно подчеркнуть, что хотя в разложение (2.1) входят значения функций ω_k от наборов $\{(m_i, m_i'), \dots, (m_k, m_k')\}$ пар функций, таких что носители m_i попарно не пересекаются (а также попарно не пересекаются и носители m_i', $i=k, \dots, k$), функции ω_k следует считать заданными на всевозможных наборах $\{(m_i, m_i'), i=1, \dots, k\}$ так, что выполняется условие (2.2).

II. Очевидно, что условие 1 влечет трансляционную инвариантность оператора A:

$$U_s(A) = A U_s, \quad s \in \mathbf{Z}^\nu,$$

где U_s — естественное унитарное представление группы сдвигов $\mathbf{Z}^\nu$ в $l_2(\mathfrak{M}^d)$:

$$(U_s f)(m) = f(\tau_s^{-1} m), \quad f \in l_2(\mathfrak{M}^d), \quad m \in \mathfrak{M}^d, \quad s \in \mathbf{Z}^\nu. \tag{2.4}$$

2. Кластерные оценки. Введем сначала некоторые понятия и обозначения. Пусть $Y_t \subset \mathbf{Z}^\nu \times R^1$, $t \in R^1$ множества

$$Y_t = \mathbf{Z}^\nu \times \{t\}, \tag{2.5}$$

которые мы будем называть слоями. Слой Y_0 отождествим с решеткой $\mathbf{Z}^\nu$. Для любого подмножества $I \subseteq \mathbf{Z}$ и числа $t \in R^1$ обозначим через $I^{(t)}$ сдвиг $I^{(0)} \equiv I$ на вектор $te_{\nu+1}$, $e_{\nu+1} = (0, 0, \dots, 1)$. Рассмотрим в $\mathbf{Z}^\nu \times$

$\times R^1$ метрику

$$\rho[(x_1, t_1), (x_2, t_2)] = \sum_{s=1}^{\nu} |x_1^{(s)} - x_2^{(s)}| + |t_1 - t_2|,$$

где $x_i = (x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(\nu)})$, $i=1, 2$. Для любого конечного множества $B \subset \mathbf{Z}^\nu \times R^1$ обозначим через $d(B)$ наименьшую длину связного графа, построенного на точках B (длина графа = сумме длин его ребер, измеренных в метрике ρ).

Перейдем теперь к оценкам функций ω_k. А именно, мы предположим, что существуют такое число $t \in R^1$ и такие параметры λ и $\varkappa$, $0<\lambda<1$, $0<\varkappa\leqslant 1$, и число $M_k>0$, $k=1, 2, \ldots$, что

$$|\omega_k[(m_1, m_1'), \ldots (m_k, m_k')]| \leqslant M_k \prod_{i=1}^{k} \varkappa^{|m_i|+|m_i'|} \lambda^{d[\operatorname{supp} m_i \cup (\operatorname{supp} m_i')^{(t)}]}, \quad (2.6)$$

где $|m| = \sum_{x \in \mathbf{Z}^\nu} m(x)$, $m \in \mathfrak{M}^d$.

Оператор A в l_2, для которого имеет место разложение (2.1), так что функции ω_k удовлетворяют условиям 1 и 2, мы назовем кластерным (относительно момента $t \in R^1$), а параметры λ и $\varkappa$ — параметрами кластерности. Функции ω_k, входящие в разложение (2.1), называют кластерными функциями оператора A. Отметим, что для того, чтобы можно было бы корректно говорить о кластерных функциях оператора A, нужно установить единственность разложения (2.1).

Теорема 2.1. *Пусть матричные элементы оператора A, действующего в $l_2(\mathfrak{M}^d)$, допускают кластерное разложение* (2.1), *причем входящие в это разложение функции удовлетворяют условиям* 1) *и* 2). *Тогда такое разложение единственно.*

Доказательство. Теорема будет, очевидно, доказана, если мы выразим кластерные функции ω_k через сами матричные элементы $A_{m,m'}$. Пусть $\tau = (I, I')$ — пара конечных подмножеств $\mathbf{Z}^\nu$. Обозначим через $\mathfrak{B}_\tau$ структуру всевозможных разбиений $\varkappa = (\tau_1, \ldots, \tau_s)$ пары τ на попарно-пересекающиеся подпары $\tau_i = (I_i, I_i')$ непустых подмножеств:

$$\bigcup I_i = I, \ \bigcup I_i' = I', \ I_i \cap I_j = I_i' \cap I_j' = \varnothing,$$
$$i \neq j, \ i, j = 1, 2, \ldots, s; \ s = 1, 2, \ldots .$$

При этом $\varkappa_1 < \varkappa_2$, если все элементы разбиения $\varkappa_1$ целиком содержатся внутри элементов $\varkappa_2$. Пусть $(m, m') \in \mathfrak{M}^d \times \mathfrak{M}^d$ и $\tau = (\operatorname{supp} m, \operatorname{supp} m')$. Для каждого $\varkappa = \{(I_1, I_1'), \ldots, (I_s, I_s')\} \in \mathfrak{B}_\tau$ введем величину

$$\omega_{m,m'}(\varkappa) = \omega_s[(m|_{I_s}, m'|_{I_1'}), \ldots, (m|_{I_s}, m'|_{I_s'})],$$

и пусть далее

$$g_{m,m'}(\varkappa) = \sum_{\varkappa' \leqslant \varkappa} \omega_{m,m'}(\varkappa'). \quad (2.7)$$

Используя свойства 1 и 2 функций ω_k и разложение (2.1) легко вывести, что

$$g_{m,m'}(\varkappa) = \lim_{\substack{\rho(t_i, t_j) \to \infty \\ i,j=1,\ldots,s}} A_{\sum_{i=1}^{s} \tau_{t_i}(m|_{I_i}), \ \sum_{j=1}^{s} \tau_{t_j}(m'|_{I_j'})}, \quad (2.8)$$

где предельный переход происходит по некоторой последовательности наборов $(t_1^{(n)}, \ldots, t_s^{(n)})$ из s векторов решетки $\mathbf{Z}^\nu$, таких, что

$\rho(t_i^{(n)}, t_j^{(n)})\to\infty$, $n\to\infty$, $i\neq j$. Таким образом, функция $g_{m,m'}(\varkappa)$, $\varkappa\in\mathfrak{B}_\tau$ на структуре $\mathfrak{B}_\tau$ однозначно определяется самим оператором A. Отсюда величины

$$\omega_{m,m'}(\varkappa)=\sum_{\varkappa'\leqslant\varkappa}\mu_{\mathfrak{B}_\tau}(\varkappa,\varkappa')\,g_{m,m'}(\varkappa'),\tag{2.9}$$

где $\mu_{\mathfrak{B}_\tau}(\cdot,\cdot)$ — функция Мебиуса структуры $\mathfrak{B}_\tau$, также определяются однозначно по оператору A. Далее, в случае, когда пары функций $(m_1, m_1'), \ldots, (m_s, m_s')$ таковы, что

$$\operatorname{supp} m_i\cap\operatorname{supp} m_j=\operatorname{supp} m_i'\cap\operatorname{supp} m_j'=\varnothing,\quad i\neq j,$$

значение

$$\omega_s[(m_1, m_1'), \ldots .(m_s, m_s')]=\omega_{\overline{m},\overline{m}'}(\varkappa)$$

при $\overline{m}=\sum_1^s m_i$, $\overline{m}'=\sum_1^s m_i'$ и соответствующем разбиении $\varkappa$. В случае же произвольного набора пар (m_i, m_i'), $i=1, \ldots, s$, значение $\omega_s[(m_1, m_1'), \ldots, (m_s, m_s')]$ определяется с помощью свойства 1). Теорема доказана.

Укажем сейчас некоторые специальные и наиболее употребительные случаи кластерных разложений.

а) Аддитивное кластерное разложение. Пусть матричные элементы оператора A, действующего в $l_2(\mathfrak{M}^d)$, имеют вид

$$A_{m,m'}=\sum_{\substack{I\subseteq\operatorname{supp} m\\ I'\subseteq\operatorname{supp} m'}} j(m|_I, m'|_{I'}),\quad m, m'\in\mathfrak{M}^d,\tag{2.10}$$

$$m|_{Z^\nu\setminus I}=m'|_{Z^\nu\setminus I'},\quad I\neq\varnothing,\ I'\neq\varnothing,$$

где $j(m, m')$ — некоторая функция от пары (m, m'), такая, что:

1) $j(\tau_s m, \tau_s m')=j(m, m')$, $s\in\mathbf{Z}^\nu$, $m, m'\in\mathfrak{M}^d$, (2.11)

2) $|j(m, m')|\leqslant M\lambda^{d[\operatorname{supp} m\cup(\operatorname{supp} m')^{(0)}]}$, $M>0$, $0<\lambda<1$. (2.12)

Покажем, что разложение (2.10) является частным случаем разложения (2.1). Пару, состоящую из одинаковых функций m', m', причем таких, что $\operatorname{supp} m'$ — одноточечное множество, назовем элементарной парой, а остальные пары (m', m') — неэлементарными. Положим

$$\omega_s[(m_1, m_1'), \ldots, (m_s, m_s')]=0,\tag{2.13}$$

если в наборе $\{(m_1, m_1'), \ldots, (m_s, m_s')\}$ встречается более, чем одна неэлементарная пара. Далее

$$\omega_s[(m_1, m_1'), \ldots, (m_s, m_s')]=j(m_1, m_1').\tag{2.14}$$

Если в наборе $\{(m_1, m_1'), \ldots, (m_s, m_s')\}$ ровно одна неэлементарная пара — (m_1, m_1'). Наконец,

$$\omega_s[(m_1, m_1'), \ldots, (m_s', m_s')]=\sum_{i=1}^s j(m_i, m_i')\tag{2.15}$$

в случае, когда все пары (m_i, m_i'), $i=1, 2, \ldots, s$, элементарны. В силу оценки (2.12) и свойства (2.11) разложение (2.10) эквивалентно кластерному разложению с функциями ω_s, $s=1, 2, \ldots$, определяемыми равенствами (2.13), (2.14), (2.15). **При этом оператор является кластерным относительно момента 0 и его параметры кластерности —λ и $\varkappa=1$.**

б) Мультипликативное кластерное разложение. Так называют кластерное разложение, в котором любая кластерная функция ω_k имеет вид

$$\omega_k[(m_1, m_1'), \ldots, (m_k, m_k')] = \prod_{i=1}^{k} \omega_1[(m_i, m_i')], \tag{2.16}$$

где ω_1 — кластерная функция, определенная на парах (m, m') и удовлетворяющая оценке

$$|\omega_1(m, m')| \leqslant \varkappa^{|m|+|m'|} \lambda^{d(\operatorname{supp} m \cup (\operatorname{supp} m')^{(t)})} \tag{2.17}$$

при некотором t и λ, $\varkappa$.

§ 3. Некоторые свойства кластерных операторов

Обозначим через $\mathfrak{A}_{t,\lambda,\varkappa}$ класс ограниченных операторов в $l_2(\mathfrak{M}^d)$, кластерных относительно момента t, и параметры кластерности которых равны λ и $\varkappa$. Очевидно, что $\mathfrak{A}_{t,\lambda,\varkappa}$ — линейное пространство, причем при сложении операторов их кластерные функции также складываются.

Обозначим через $\widehat{\mathfrak{A}}_{t,\lambda,\varkappa} \subset \mathfrak{A}_{t,\lambda,\varkappa}$ подпространство тех операторов из $\mathfrak{A}_{t,\lambda,\varkappa}$, для которых $\sup_k M_k < \infty$, и введем в $\widehat{\mathfrak{A}}_{t,\lambda,\varkappa}$ норму

$$|||A|||_{t,\lambda,\varkappa} = \inf M, \tag{3.1}$$

где нижняя грань берется по всем M, для которых выполняются оценки (2.6), если в них положить $M_k = M$, $k = 1, 2, \ldots$. Относительно нормы (3.1) $\widehat{\mathfrak{A}}_{t,\lambda,\varkappa}$ становится банаховым пространством. Оператор A^*, сопряженный к кластерному оператору A, по-прежнему кластерный, и его кластерные функции равны

$$\omega_k^{A^*}[(m_1, m_1'), \ldots, (m_k, m_k')] = \omega_k^A[(m_1', m_1), \ldots, (m_k', m_k)], \tag{3.2}$$

где $\omega_k{}^A$ — кластерные функции оператора A. В частности, если

$$\omega_k^A[(m_1, m_1'), \ldots, (m_k, m_k')] = \omega_k^A[(m_1', m_1), \ldots, (m_k', m_k)], \tag{3.3}$$

то оператор A самосопряжен.

Следующая теорема позволяет оценить операторную норму $|||A|||$ кластерного оператора $A \in \widehat{\mathfrak{A}}_{t,\lambda,\varkappa}$ в предположении, что параметры $\varkappa$ и λ достаточно малы, а t велико.

Обозначим через $C(\lambda)$ сумму

$$C(\lambda) = \sum_{\substack{x \in Z^\nu \\ x \neq 0}} \lambda^{\rho(0,x)}. \tag{3.4}$$

Мы предположим, что

$$C(\lambda) \leqslant (3e)^{-1}, \quad \varkappa < 1/3. \tag{3.5}$$

Теорема 3. 1. *Пусть выполнены условия (3.5) и $t > t_0 = t_0(\varkappa, \lambda)$. Тогда для любого $A \in \widehat{\mathfrak{A}}_{t,\lambda,\varkappa}$*

$$\|A\| \leqslant B|||A|||_{t,\lambda,\varkappa} \cdot |\lambda|^{|t|} \cdot \varkappa, \tag{3.6}$$

где B — некоторая абсолютная константа.

Доказательство. Воспользуемся оценкой

$$\|A\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sup_m \sum_{m'} |a_{m,m'}| + \sup_{m'} \sum_m |a_{m,m'}|\right), \tag{3.7}$$

вытекающей из следующего равенства

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ \|y\|\leqslant 1}} |(Ax, y)|$$

и неравенств

$$|(Ax, y)| \leqslant \Big|\sum_{m,n} a_{m,n} x_m y_n\Big| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{m,n} |a_{m,n}|(x_m^2 + y_n^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_m x_m^2 \sum_n |a_{mn}| + \sum_n y_n^2 \sum_m |a_{m,n}|\Big) \leqslant$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sup_m \sum_n |a_{m,n}| + \sup_n \sum_m |a_{mn}|\Big),$$

где $x = \sum_n x_n e_n$ и $y = \sum_m y_m e_m$. Оценим теперь сумму $\sum_{m'} |a_{m,m'}|$:

$$\sum_m |a_{m,m'}| \leqslant \sum_{m' \in \mathfrak{M}^d} \sum_k \sum_{\substack{(I_1,\ldots,I_k)\\ (I_1',\ldots,I_k')}} |\omega_k[(m|_{I_1}, m'|_{I_1'}), \ldots, (m|_{I_k}, m'|_{I_k'})]| \leqslant$$

$$\leqslant M\varkappa^{|m|} \sum_{m'} \varkappa^{|m'|} \sum_k \sum_{\substack{\{I_i, i=1,\ldots,k\}\\ \{I_i', i=1,\ldots,k\}}} \prod_{i=1}^{k} \lambda^{d(I_i \cup (I_i')^{(t)})} =$$

$$= M\varkappa^{|m|} \sum_{I' \subset \mathbf{Z}^\nu} \sum_{\substack{m' \in \mathfrak{M}^d\\ \operatorname{supp} m' = I'}} \varkappa^{|m'|} \sum_{\substack{\{I_i, i=1,\ldots,k\}\\ \{I_i', i=1,\ldots,k\}}} \prod_{i=1}^{k} \lambda^{d(I_i \cup (I_i')^{(t)})} \leqslant$$

$$\leqslant M\varkappa^{|m|} \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k!}\Big(\sum_{\substack{B \subset I^0 \cup Y_t\\ B \cap Y_t \neq \varnothing\\ B \cap I^0 \neq \varnothing}} \lambda^{d(B)} \Big(\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\Big)^{|B \cap Y_t|}\Big) =$$

$$= M\varkappa^{|m|}\Big(\exp\Big\{\sum_{\substack{B \subset I^0 \cup Y_t\\ B \cap I^0 \neq \varnothing\\ B \cap Y_t \neq \varnothing}} \lambda^{d(B)} \Big(\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\Big)^{|B \cap Y_t|}\Big\} - 1\Big),$$

где $I^0 = \operatorname{supp} m$.

Далее,

$$k = \sum_{\substack{B \subset I^0 \cup Y_t\\ B \cap I^0 \neq \varnothing,\ B \cap Y_t \neq \varnothing}} \lambda^{d(B)} \Big(\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\Big)^{|B \cap Y_t|} \leqslant$$

$$\leqslant |I^0| \sum_{\substack{B' \subset I^0 \cup Y_t\\ B' \cap Y_t \neq \varnothing,\ 0 \in B'}} \lambda^{d(\{0\} \cup B')} \Big(\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\Big)^{|B' \cap Y_t|} \leqslant$$

$$\leqslant |I^0| \sum_{\substack{B' \subset I^0 \cup Y_t\\ B' \cap Y_t \neq \varnothing,\ 0 \in B'}} \Big(\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\Big)^{|B' \cap Y_t|} \sum_{\mathcal{G}} \lambda^{d_G},$$

где сумма берется по всем деревьям G, построенным на множестве точек $\{0\}\cup B'$, а d_G длина дерева G. Пусть далее $B'\cap I^0=(x_1, \ldots, x_n)$ и $B\cap Y_t=(y_1, \ldots, y_m)$. Переходя от суммирования по подмножествам к суммированию по упорядоченным наборам точек, получим, что

$$k\leqslant |I^0|\sum_{\substack{n\geqslant 0\\ m\geqslant 0}}\left(\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right)^m\frac{1}{m!n!}\sum_G\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n\\ y_1,\ldots,y_m}}\lambda^{d_G},$$

где суммирование $\sum\limits_G$ означает суммирование по всем деревьям, построенным на $n+m+1$-точках. При фиксированном G

$$\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n\\ y_1,\ldots,y_m}}\lambda^{d_G}\leqslant (C(\lambda))^{n+m-1}\lambda^{|t|}(C(\lambda)+1)$$

(подробнее см., например, в [2]).

Здесь предполагается, что t таково, что

$$\lambda^{|t|}\leqslant C(\lambda)/(C(\lambda)+1).$$

Воспользовавшись тем, что число деревьев не превосходит $(m+n+1)^{m+n-1}$ (см. [9]), находим, что

$$k\leqslant |I^0|\lambda^{|t|}(C(\lambda)+1)\sum_{m\geqslant 0}\left(\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right)^m(C(\lambda))^{n+m-1},$$

$$\frac{(n+m+1)^{n+m-1}}{n!m!}\leqslant |I^0|\lambda^{|t|}(C(\lambda)+1)\sum_{m\geqslant 0}\left(\frac{\varkappa}{1-\varkappa}\right)^m, \tag{3.8}$$

$$(C(\lambda))^{n+m-1}(2e)^{m+n}\equiv |I^0|\lambda^{|t|}\varkappa h(\lambda,\varkappa),$$

где $h(\lambda, \varkappa)$ ограничена при малых $\varkappa$ и λ. Итак, поскольку $|m|\geqslant |I^0|$,

$$\sum_{m'}|a_{m,m'}|\leqslant M\varkappa^{|I^0|}\left(e^{|I^0|\lambda^{|t|}\varkappa h(\lambda,\varkappa)}-1\right). \tag{3.9}$$

Полагая теперь t настолько большим, что

$$\lambda^{|t|}\varkappa h(\lambda,\varkappa)<-\ln\varkappa,$$

мы получим, что при малых $\varkappa$ и λ

$$\sup\sum_{m'}|a_{m,m'}|\leqslant B_0\lambda^{|t|}\varkappa, \tag{3.10}$$

где B_0 — абсолютная константа.

Оценка суммы $\sum\limits_m|\alpha_{m,m'}|$ аналогична. Таким образом, из (3.10) и (3.7) получаем утверждение теоремы.

Следующая теорема, показывающая, что произведение нескольких кластерных операторов снова является кластерным (хотя и с измененными параметрами кластерности), существенна в применениях, и ее доказательство уже не просто.

Теорема 3.2. *Пусть $A_i\in\widehat{\mathfrak{A}}_{t_i}$, λ, $\varkappa$, $i=1, \ldots, k$, $t_i>0$, кластерные операторы и параметры λ и $\varkappa$ достаточно малы. Тогда оператор*

$$B=A_1A_2\ldots A_k \tag{3.11}$$

кластерный и $B\in\widehat{\mathfrak{A}}_{T,C\lambda,l\varkappa}$, где $T=\sum\limits_{i=1}^k t_i$, $C=C_\nu$ — абсолютная кон-

станта (зависящая лишь от размерности ν); *при этом*

$$|||B|||_{T,c\lambda,l\varkappa} \leqslant \prod_{i=1}^{k} |||A_i|||_{t_i,\lambda,\varkappa}.$$

Доказательство. Для удобства и наглядности рассуждений введем некоторые понятия и обозначения.

Пусть $T_0=0,\ T_i=t_1+t_2+\ldots+t_i,\ i=1,\ldots,k,$

$$Y^{(i)}=Y_{T_i},\quad Y=\bigcup_{0}^{k}Y^{(i)}\subset \mathbf{Z}^\nu\times R^1. \tag{3.12}$$

Пусть $\mu=\{\mu_j{}^i,\ j=1,\ \ldots,\ j_i,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1\}$ — конечная система финитных целочисленных функций, определенных на Y и принимающих значения от 0 до d (или от 0 до ∞), причем такая, что

1) $\operatorname{supp}\mu_j^i\equiv\gamma_j^i\subset Y^{(i)}\cup Y^{(i+1)},\quad \gamma_j^i\cap Y^{(i)}\neq\varnothing,$

$$\gamma_j^i\cap Y^{(i+1)}\neq\varnothing \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

2) $\gamma_j^i\cap\gamma_{j'}^i=\varnothing,\ j\neq j',\ j,j'=1,2,\ldots,j_i,\ i=0,1,\ldots,k-1,$

3) $\left(\sum_{j=1}^{j_{i-1}}\mu_j^{i-1}\right)\Big|_{Y^{(i)}}=\left(\sum_{j=1}^{j_i}\mu_j^i\right)\Big|_{Y^{(i)}},\ i=1,2,\ldots,k-1.$

4) Система множеств $\gamma=\{\gamma_j{}^i,\ j=1,\ \ldots,\ j_i,\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1\}$ является связной (т. е. ее нельзя разбить на две подсистемы так, что никакие два множества из разных подсистем не пересекаются). Назовем такую систему μ-*связкой*. Из условий 2) и 3) вытекает, что существует такая финитная функция $m(\mu)$, определенная на Y, что

$$\operatorname{supp} m=\bigcup_{i,j}\gamma_j^i\equiv\tilde\gamma(\mu),\quad m|_{\gamma_j^i}=\mu_j^i. \tag{3.13}$$

Обозначим через $m^i(\mu)$ функцию, определенную на $Y^{(i)}$, и такую, что $m^i(\mu)=m(\mu)|_{Y^{(i)}}$. Набор связок $V=\{\mu(1),\ \ldots,\ \mu(s)\}$ назовем регулярным, если

$$\operatorname{supp} m^i(\mu(p))\cap\operatorname{supp} m^i(\mu(p'))=\varnothing,\quad i=0,k, \tag{3.14}$$
$$p\neq p',\ p,p'=1,2,\ldots,s,$$

и вполне регулярным, если условие (3.14) выполняется для всех $i=0,\ 1,\ \ldots,\ k$. Набор связок $V=\{\mu(1),\ \ldots,\ \mu(s)\}$ назовем связным, если набор множеств $(\tilde\gamma(1),\ \ldots,\ \tilde\gamma(s)),\ \tilde\gamma(p)=\tilde\gamma(\mu(p))$ является связным. Для каждого набора связок $V=\{\mu(1),\ \ldots,\ \mu(s)\}$

$$\mu(p)=\{\mu_j{}^i(p),\ j=1,\ \ldots,\ j_i(p),\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1\},\ p=1,\ \ldots,\ s,$$

и каждого i введем набор пар функций

$$\{(m_1^{(i)},\hat m_1^{(i)}),\ \ldots,\ (m_{q_i}^{(i)},\hat m_{q_i}^{(i)})\},$$
$$m_l^{(i)},\ \hat m_l^{(i)}\in\mathfrak{M}^d,\quad l=1,2,\ldots,q_i,$$

таких, что

$$\tau_{T_i}m_l^{(i)}=\mu_j^i(p)\,|_{Y^{(i)}},\quad l=1,\ldots,q_i,$$
$$\tau_{T_{i+1}}\hat m_l^{(i)}=\mu_j^i(p)\,|_{Y^{(i+1)}}$$

при некоторых j и p, причем все пары $(m_l^{(i)}, \widehat{m}_l^{(i)})$, $l=1, \dots, q_i$, исчерпывают таким образом все $\mu_j^i(p)$. Здесь использовано обозначение

$$(\tau_t\, m)(x, t) = m(x),\ x \in \mathbf{Z}^\nu,\ t \in R^1,\ m \in \mathfrak{M}^d.$$

Для каждого набора $V=\{\mu(1), \dots, \mu(s)\}$ связок обозначим

$$\omega(V) = \prod_{i=0}^{k-1} \omega_{q_i}^{A_{i+1}} [(m_1^{(i)}, \widehat{m}_1^{(i)}), \dots, (m_{q_i}^{(i)}, \widehat{m}_{q_i}^{(i)})]. \tag{3.15}$$

Лемма 3.3. *Матричный элемент* $B_{m,m'}$, $m, m' \in \mathfrak{M}^d$, *оператора* B *равен:*

$$B_{m,m'} = \sum_V \omega(V), \tag{3.16}$$

где сумма берется по всем вполне регулярным наборам связок $V=\{\mu(1), \dots, \mu(s)\}$, $s=1, 2, \dots$, *таким, что*

$$m = \sum_{p=1}^{s} m^0(\mu(p)), \quad \tau_{T_k} m' = \sum_{p=1}^{s} m^k(\mu(p)). \tag{3.17}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$B_{m,m'} = \sum_{m_1, \dots, m_{k-1}} \prod_{i=0}^{k-1} (A_{i+1})_{m_i, m_{i+1}} =$$

$$= \sum_{m_1, \dots, m_{k-1}} \sum_{s_0, \dots, s_{k-1}} \sum_{\{(I_j^i, \widehat{I}_j^i)\ j=1, \dots, s_i\}} \tag{3.18}$$

$$\prod \omega_{s_i}^{A_{i+1}} [(m_i\big|_{I_j^i}, m_{i+1}\big|_{\widehat{I}_j^i}), \ j=1, \dots, s_i], \quad i=0, \dots, k-1.$$

Для каждого из наборов $\{(I_j^i, \widehat{I}_j^i), \ j=1, \dots, s_i\}$, $i=0, 1, \dots, k-1$, рассмотрим функции μ_j^i, определенные на $Y^{(i)} \cup Y^{(i+1)}$, такие, что

$$\mu_j^i\big|_{Y^{(i)}} = \tau_{T_i}(m_i\big|_{I_j^i}),$$

$$\mu_j^i\big|_{Y^{(i+1)}} = \tau_{T_{i+1}}(m_{i+1}\big|_{\widehat{I}_j^i}).$$

Максимальная совокупность этих функций такая, что их носители образуют связной набор множеств в Y, составляет связку. Таким образом, каждое слагаемое в (3.18) порождает вполне регулярный набор связок V, удовлетворяющий условиям (3.17), и равно $\omega(V)$. Очевидно, что все наборы V оказываются при этом исчерпанными, что и доказывает (3.16).

Введем теперь кластерные функции ω_s^B оператора B по формуле

$$\omega_s^B[(m_1, m_1'), \dots, (m_s, m_s')] =$$

$$= \sum_{V_1, \dots, V_s} \prod_{i=1}^{s} D(V_i)\, \omega(V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s), \tag{3.19}$$

где суммирование ведется по последовательностям $(V_1, \dots, V_s)$ из s регулярных и связных наборов $V_r = (\mu^r(1), \dots, \mu^r(q_r))$ связок, таким, что

$$m_r = \sum_{l=1}^{q_r} m^0(\mu^r(l)), \tag{3.20}$$

$$\tau_{T_k} m'_r = \sum_{l=1}^{q_r} m^k(\mu^r(l)),\quad r=1,\ \ldots,\ s.$$

При этом под $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_s$ понимается набор связок, получающийся объединением всех связок из наборов V_r. Величина $D(V)$ для связного набора $V=\{\mu(1),\ \ldots,\ \mu(s)\}$ связок определяется так. Пусть G — связной граф, вершинами которого служат связки $\mu(p)$, $p=1,\ \ldots,\ s$, а ребрами— пары $(\mu(p),\ \mu(p'))$, для которых $\tilde{\gamma}(p) \cap \tilde{\gamma}(p') \neq \varnothing$. Пусть $\mathfrak{A}_G$ — структура всех разбиений графа G на связные подграфы и $\mu_{\mathfrak{A}_G}$ — функция Мебиуса этой структуры. Тогда

$$D(V) = \mu_{\mathfrak{A}_G}(\mathbf{0},\ \mathbf{1}), \tag{3.21}$$

где $\mathbf{0}$ — наименьший, а $\mathbf{1}$ — наибольший элемент структуры $\mathfrak{A}_G$.

Лемма 3.4. *Функции ω_s^B являются кластерными функциями оператора B; для них справедлива оценка*

$$|\omega_s^B[(m_1,\ m'_1),\ \ldots,\ (m_s,\ m'_s)]| \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{i=1}^{k} M_i \prod_{j=1}^{s} (e\varkappa)^{|m_j|+|m'_j|}\, (C\lambda)^{d(\operatorname{supp} m_j \cup (\operatorname{supp} m'_j)^{(T_k)})}, \tag{3.22}$$

где C — константа, упомянутая в формулировке теоремы 3.2.

Доказательство. Кластерное разложение для $B_{m,m'}$ с функциями ω_s^B следует из (3.19), (3.16) и следующего равенства

$$\sum_{s} \sum_{\substack{(V_1,\ldots,V_s) \\ V_1\cup V_2\cup\ldots\cup V_s=V}} \prod_{i=1}^{s} D(V_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } V \text{ — вполне регулярный набор;} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{3.23}$$

которое вытекает из общих свойств функции Мебиуса (см., например, [5]).

Свойство 1) полной трансляционной инвариантности функций ω_s^B очевидно. Остается лишь вывести оценку (3.22). В силу (3.19) и (2.6) имеем

$$|\omega_s^B[(m_1,\ m'_1),\ \ldots,\ (m_s,\ m'_s)]| <$$
$$< \prod_{i=1}^{k} M_i \sum_{V_1,\ldots,V_s} \prod_{j=1}^{s} |D(V_j)| \prod_{q,l} \varkappa^{|\mu^q(l)|} \prod_{q,l,i,j} \lambda^{d(\operatorname{supp}(\mu_j^i)^q(\tilde{l}))},$$

где

$$V_q = \{\mu^q(1),\ \ldots,\ \mu^q(p_q)\},\quad q=1,\ \ldots,\ s,$$
$$\mu^q(l) = \{(\mu_j^i)^q(l),\ j=1,\ \ldots,\ j_i^q(l)\},$$
$$l=1,\ \ldots,\ p_q,\quad q=1,\ \ldots,\ s.$$

Далее, в силу связности наборов V_q и условия (3.20)

$$\sum_{i,j,l} d(\operatorname{supp}(\mu_j^i)^q(l)) \geqslant d(\operatorname{supp} m_q \cup (\operatorname{supp} m'_q))^{T_k'}. \tag{3.24}$$

Воспользовавшись далее оценкой из работы [5] (см. (1.13) и (2.1))

$$|D(V)| < (\bar{C})^{\sum_{l=1}^{p} d(\tilde{\gamma}(l))},\quad V=\{\mu(1),\ \ldots,\ \mu(p)\}, \tag{3.25}$$

где $\bar{C}$ — некоторая абсолютная константа, зависящая от размерности, получим, что

$$|\omega_s^B[(m_1, m_1'), \ldots, (m_s, m_s')]| \leqslant$$

$$\leqslant \Pi M_i' \prod_{j=1}^{s} \varkappa^{|m_j|+|m_j'|} (C\lambda)^{d(\operatorname{supp} m_j \cup (\operatorname{supp} m_j')^{(T_k)})} \times$$

$$\times \prod_{q=1}^{s} e^{-|m_q|} \sum_{\substack{\tilde{\tilde{\Gamma}}_q \subset V \\ \tilde{\tilde{\Gamma}}_q \cap V^0 = \operatorname{supp} m_q}} \left(\frac{\bar{C}}{C}\right)^{d(\tilde{\tilde{\Gamma}}_q)}.$$

Здесь константа $C = C_\nu$ выбрана так, что $\frac{\bar{C}}{C} \ll 1$ и

$$\sum_{\substack{S \subset Y \\ 0 \in S}} \left(\frac{\bar{C}}{C}\right)^{d(S)} = R < 1.$$

При этом

$$e^{-|m_q|} \sum_{\substack{\tilde{\tilde{\Gamma}}_q \subset Y \\ \tilde{\tilde{\Gamma}}_q \cap Y^0 = \operatorname{supp} m_q}} \left(\frac{\bar{C}}{C}\right)^{d(\tilde{\tilde{\Gamma}}_q)} \leqslant e^{-|m_q|} \operatorname{supp} m_q R < 1.$$

Отсюда и вытекает (3.22)

§ 4. Кластерное разложение для трансфер-матрицы в модели Изинга с непрерывным временем

Рассмотрим $(\nu+1)$-мерную модель Изинга с непрерывным временем. Это есть случайное поле на $\mathbf{Z}^\nu \times R^1$ со значениями ± 1 в каждой точке. Для его определения рассмотрим сначала для каждой фиксированной точки $x \in \mathbf{Z}^\nu$ стационарный марковский процесс $\xi_x(t)$ с двумя значениями ± 1. Этот процесс определяется стохастической полугруппой $\exp\{-tH_{0x}\}$, $H_{0x} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$. Для различных точек x процессы $\xi_x(t)$ взаимно независимы. Обозначим (Ω, Σ, μ_0) вероятностное пространство, на котором определены все $\xi_x(t)$. Заметим, что Ω можно отождествить с пространством всех функций $f(x, t)$ на $\mathbf{Z}^\nu \times R^1$ со значениями ± 1, которые кусочно постоянны по t при любом фиксированном $x \in \mathbf{Z}^\nu$.

Рассмотрим новую вероятностную меру $\mu_{\Lambda, T}$ на (Ω, Σ) с плотностью

$$\frac{d\mu_{\Lambda,T}}{d\mu_0} = Z_{\Lambda,T}^{-1} \exp\left(\beta \sum_{\substack{|x-x'|=1 \\ x, x' \in \Lambda}} \int_{-T} \xi_x(t)\, \xi_{x'}(t)\, dt\right),$$

где Λ — куб в $\mathbf{Z}^\nu$, $T > 0$.

Мы будем рассматривать здесь только случай достаточно малых β, $|\beta| \leqslant \beta_0(\lambda)$.

Теорема. 4.1. *При $\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^\nu$, $T \to \infty$ существует слабый предел мер (в смысле сходимости конечномерных распределений)*

$$\mu = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbf{Z}^\nu, T \to \infty} \mu_{\Lambda, T}.$$

Доказательство этой теоремы следует из полученного ниже кластерного разложения.

Пусть для любого $A \subseteq \mathbf{Z}^\nu \times R^1$ Σ_A — минимальная σ-алгебра, по отношению к которой все $\xi_x(t)$ измеримы при $(x, t) \in A$. Физическое гильбертово пространство определяется так:

$$\mathscr{H} = L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu), \ \Sigma_0 = \Sigma_Y .$$

Стохастическая полугруппа $\mathscr{T}_t : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ (трансфер-матрица) определяется своими матричными элементами:

$$(\eta_1, \mathscr{T}_t \eta_2) = \langle \eta_1 \cdot (U_t \eta_2) \rangle , \tag{4.1}$$

где $\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_\mu$, $\eta_1, \eta_2 \in \mathscr{H}$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathscr{H}$, U_t — оператор сдвига вдоль вектора $(0, 0, \ldots, t) \in \mathbf{Z}^\nu \times R^1$. Из кластерного разложения следует, что $\mathscr{T}_t$ — сильно непрерывная полугруппа положительных самосопряженных операторов, причем $\|\mathscr{T}_t\| = 1$. Поэтому $\mathscr{T}_t = \exp\{-tH\}$, где H — положительный оператор.

Замечание 1. *Унитарная группа* $\exp\{itH\}$ *может быть отождествлена* (*см.* [*10*]) *с эволюцией ν-мерной квантовой спиновой модели Изинга с формальным гамильтонианом*

$$H_{\text{formal}} = 2\lambda \sum_{x \in \mathbf{Z}^\nu} \sigma_x^{(1)} + \beta \sum_{|x-x'|=1} \sigma_x^{(3)} \sigma_{x'}^{(3)}$$

($\sigma_x^{(i)}$ — матрицы Паули, $i = 1, 2, 3$) в пространстве $\hat{\mathscr{H}}$ *ГНС*-представления квазилокальной C^*-алгебры по основному состоянию.

Рассмотрим теперь специальный базис в пространстве $\mathscr{H}$. Впервые подобный базис появился в [6]. Пусть T_x, $x \in \mathbf{Z}^\nu$, есть множество всех $y \in \mathbf{Z}^\nu$, таких, что $y < x$ в смысле лексикографического порядка. Пусть P_x есть ортогональная проекция в $L_2(\Omega, \Sigma_0, \mu)$ на $L_2(\Omega, \Sigma_{T_x}, \mu)$. Положим

$$\hat{\xi}_x = \hat{\xi}_x(0) = \xi_x(0) - P_x \xi_x(0), \ f_x = \hat{\xi}_x / [1 - (P_x \hat{\xi}_x)^2]^{1/2},$$

$$f_I = f_{x_1} \cdot f_{x_2} \cdot \ \ldots \ \cdot f_{x_n}, \quad I = (x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbf{Z}^\nu,$$

$$f_\varnothing = 1, \ f_x(t) = U_t f_x, \ f_I(t) = \prod_{x \in I} f_x(t).$$

Теорема 4.2. *Система* $\{f_I\}$ *является полным ортонормированным базисом в* $\mathscr{H}$. *Кроме того,*

$$\langle f_I \rangle = 0, \ I \neq \varnothing, \ M(f_x / \Sigma_{T_x}) = 0, \tag{4.2}$$

$$M(f_x^2 / \Sigma_{T_x}) = 1.$$

Теорема 4.3. *Семиинварианты*

$$\omega(I, I'; t) \overset{\text{def}}{=} \langle f_{x_1}(0), \ldots, f_{x_n}(0), f_{x'_1}(t), \ldots, f_{x'_{n'}}(t) \rangle^C;$$

$$I = (x_1, \ldots, x_n), \ I' = (x'_1, \ldots, x'_{n'})$$

бесконечно дифференцируемы по t *при* $t \geqslant 0$.

Далее, если либо $I = \varnothing$, *либо* $I' = \varnothing$, *то*

$$\omega(I, I'; t) = 0. \tag{4.3}$$

Для $I, I' \neq \varnothing$ *имеет место кластерные оценки*

$$\left| \frac{d^k \omega(I, I'; t)}{dt^k} \right| \leqslant (C\beta)^{d(I \cup (I')^{(t^*)})}, \tag{4.4}$$

причем C зависит только от k и ν, $t^* = (-\ln\beta)^{-1}\lambda t$. Доказательства теорем 4.1—4.3 будут даны ниже.

Теперь мы переходим к основным результатам этого параграфа.

Мультипликативное кластерное разложение для $\exp\{-tH\}$

Теорема 4.4. *Матричные элементы оператора* $\exp\{-tH\}$ *для I, $I' \neq \varnothing$ равны*

$$(f_I, \exp\{-tH\} f_{I'}) = \sum_{\substack{n, (I_1, \ldots, I_n) \\ (I_1', \ldots, I_n')}} \omega(I_1, I_1'; t) \ldots \omega(I_n, I_n'; t) \tag{4.5}$$

и равны 0, *если либо $I = \varnothing$, либо $I' = \varnothing$.*

Сумма в (4.5) идет по всем разбиениям

$$\bigcup_1^n I_i = I, \quad \bigcup_1^n I_i' = I'$$

на непустые множества I_k, I_k', $k = 1, 2, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство следует из (4.1) и из формулы, выражающей моменты через семиинварианты с учетом (4.3).

Аддитивное кластерное разложение для H

Теорема 4.5. *Матричные элементы H равны*

$$(f_I, Hf_{I'}) = -\sum_{I_1, I_1'} \omega'(I_1, I_1'), \tag{4.6}$$

где сумма по всем непустым $I_1 \subset I$, $I_1' \subset I'$, таким, что

$$I' \setminus I_1' = I \setminus I_1.$$

Кроме того,

$$\omega'(I_1, I_1') = \left.\frac{d\omega(I_1, I_1'; t)}{dt}\right|_{t=0}$$

удовлетворяет оценкам

$$|\omega'(I_1, I_1')| \leqslant (C\beta)^{d(I_1 \cup (I_1')^{(0)})}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Вычислим производную по t при $t = 0$ в обеих частях (4.5). Заметим далее, что

$$\omega(I, I'; 0) = \begin{cases} 1, & I = I' = \{x\}, \ x \in \mathbf{Z}^\nu, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.8}$$

Действительно, имеет место равенство (теорема 4.2)

$$\langle f_I f_{I'} \rangle = 0 \text{ при } I \neq I', \tag{4.9}$$

что также можно вывести из (4.2), если последовательно применять формулу

$$M\eta = M(M\eta \mid \Sigma_{T_x}).$$

Аналогично

$$\langle f_I^2 \rangle = 1. \tag{4.10}$$

С помощью формулы обращения Мебиуса мы получим из (4.9), что $\omega(I, I'; 0) = 0$, если $I \neq I'$. Первая часть (4.8) тогда следует из (4.2). Наконец, при $n = |I| > 2$ мы имеем

$$\omega(I, I; 0) = \sum_k S_{n,k}(-1)^k (k-1)! = 0,$$

где $S_{n,k}$ — число разбиений $\{1, 2, \ldots, n\}$ на k частей. Дифференцирование (4.5) с учетом (4.8) и приводит к (4.6).

Последнее утверждение теоремы 4.5 будет доказано ниже. Мы переходим к доказательству теорем 4.1—4.3. Оно основано на том кластерном разложении, которое мы сейчас получим.

Рассмотрим решетку $\mathbf{Z}_a^{\nu+1}=\{(x, t): x\in\mathbf{Z}^\nu,\ t=na,\ n — \text{целые}\}$, $a>0$, вложенную в $\mathbf{Z}^\nu\times R^1$. Для любого $\Gamma\subset\mathbf{Z}_a^{\nu+1}$ обозначим $\mu_0(\Gamma;\ 1)$ меру на траекториях $\xi_x(t)$, определяемую следующим образом. Для любого $x\in\mathbf{Z}^\nu$ рассмотрим максимальные интервалы Δ_i на оси R^1, концы которых принадлежат $\mathbf{Z}_a^{\nu+1}\setminus\Gamma$, но $\Delta_i\cap(\mathbf{Z}_a^{\nu+1}\setminus\Gamma)=\varnothing$. Для любого фиксированного Δ_i траектории $\xi_x(t)$, $t\in\Delta_i$ распределены так же, как и относительно μ_0. Однако для разных Δ_i эти индуцированные распределения взаимно независимы и для разных x.

Обозначим для набора $\{s_z,\ z\in\Gamma,\ 0\leqslant s_z\leqslant 1\}$

$$\mu_0(\Gamma;\ s_\Gamma)=\sum_{\Gamma'\subseteq\Gamma}\prod_{z\in\Gamma'}s_z\prod_{z\in\Gamma\setminus\Gamma'}(1-s_z)\,\mu_0(\Gamma';\ 1).$$

Если обозначить $\dfrac{\partial}{\partial s_\Gamma}=\prod\limits_{s\in\Gamma}\dfrac{\partial}{\partial s_z}$, то

$$\frac{\partial\mu_0(\Gamma;\ s_\Gamma)}{\partial s_\Gamma}=\sum_{\Gamma'\subseteq\Gamma}\mu_0(\Gamma';\ 1)(-1)^{|\Gamma-\Gamma'|}. \tag{4.11}$$

Будем обозначать далее $\delta=\delta_{\bar{x},\bar{x}',n}$ подмножества $\mathbf{Z}^\nu+R^1$ вида $\{(x, t): x=\bar{x},\ an<t<a(n+1)\}\cup\{(x', t'),\ x'=\bar{x},\ an<t'<a(n+1)\}$ для данных $\bar{x}$, $\bar{x}'$, n, $|\bar{x}-\bar{x}'|=1$. Положим

$$U_\delta=\beta\int\limits_{an}^{a(n+1)}\xi_{\bar{x}}(t)\,\xi_{\bar{x}'}(t)\,df,\quad k_\delta=e^{U_\delta}-1 \tag{4.12}$$

и для любого конечного набора $\Delta=\{\delta\}$

$$k_\Delta=\prod_{\delta\in\Delta}k_\delta.$$

Тогда для любой функции ψ, измеримой относительно σ-алгебры $\Sigma_{\Lambda\times[-T,T]}$, $\Lambda\subset\mathbf{Z}^\nu$, $|\Lambda|<\infty$,

$$Z_{\Lambda,T}\langle\psi\rangle_{\mu_{\Lambda,T}}=\sum_{\Delta:\tilde{\Delta}\subset\Lambda\times[-T,T]}\langle\psi k_\Delta\rangle, \tag{4.13}$$

где $\tilde{\Delta}$ есть объединение множеств δ, входящих в Δ.

Воспользуемся теперь формулой

$$\langle\cdot\rangle_{\mu_0}=\sum_{\Gamma\subset\Lambda\times[-T,T]}\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial s_\Gamma}\langle\cdot\rangle_{\mu_0(\Gamma;s_\Gamma)}\,ds_\Gamma \tag{4.14}$$

(см., например, [11, § 6, формула (2)]).

Объединяя (4.13) и (4.14), получим, что

$$Z_{\Lambda,T}\langle\psi\rangle_{\mu_{\Lambda,T}}=\sum_{\Gamma,\Delta}\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial s_\Gamma}\langle\psi\,k_\Delta\rangle_{\mu_0(\Gamma;s_\Gamma)}\,ds_\Gamma. \tag{4.15}$$

Выделим стандартным образом связную часть и пересуммируем. Пусть ψ измерима относительно Σ_Π, $\Pi \subset \mathbf{Z}^\nu \times R^1$. Назовем набор ($\Pi$, Δ, Γ) связным, если множество $\Pi \cup \tilde{\Delta} \cup \Gamma$ 1-связно. Тогда, обозначая

$$f_B = \left\langle \exp\left(\sum_{\delta \subset B} U_\delta\right)\right\rangle, \tag{4.16}$$

получим, что

$$Z_{\Lambda,T}\langle\psi\rangle_{\mu_{\Lambda,T}} = \sum_{\Gamma,\Delta}{}' k_{\Gamma,\Delta} f_{B(\Gamma,\Delta)}, \tag{4.17}$$

где $B(\Gamma, \Delta)$ — множество точек, находящихся на расстоянии, большем 1, от $\Pi \cup \tilde{\Delta} \cup \Gamma$, Σ' означает суммирование по Γ, Δ, таким, что набор (Π, Δ, Γ) связен.

Основная необходимая нам оценка имеет следующий вид.

Лемма 4.6. *Существуют константы C_1, C_2, C, такие, что для всех достаточно малых Δ и достаточно больших a имеет место оценка*

$$|k_{\Delta,\Gamma}| \leqslant (C\beta)^{|\tilde{\Delta}|}(C_1 e^{-C_2 a})^{|\Gamma - \tilde{\Delta}|}.$$

Доказательство этой леммы можно провести индукцией по числу точек в $\Gamma \setminus \bar{\Delta}$, $\bar{\Delta}$ — замыкание Δ, если воспользоваться формулой (4.11). Фиксируем $\varkappa$ и пусть $g_1 < g_2 < \ldots < g_m$ — все точки $\Gamma \setminus \bar{\Delta}$. Возьмем точку g_1 и точки $g_1 - a/3$, $g_1 + a/3$. Рассмотрим условные меры $\mu_0(\Gamma', 1, r)$ на траекториях вне отрезка $(g_1 - a/3, g_1 + a/3)$ при условии, что $\xi_x(g_1 - a/3) = r_-$, $\xi_x(g_1 + a/3) = r_+$; через r мы обозначаем набор (r_-, r_+), который может принимать четыре возможных значения.

Тогда

$$\sum_{\Gamma' \subset \Gamma} \mu_0(\Gamma', 1)(-1)^{|\Gamma - \Gamma'|} = \sum_{\Gamma' \subset \Gamma - \{g_1\}} \mu_0(\Gamma', 1, r) p_r,$$

где p_r — разность вероятностей набора r при двух условиях:

1) точка $g_1 \in \mathbf{Z}_a^{\nu+1}$ и 2) $g_1 \bar{\in} \mathbf{Z}_a^{\nu+1}$. Очевидно, что

$$|p_r| \leqslant C_1 e^{-C_2 a}.$$

Поступая далее по индукции, получим требуемую оценку.

Соотношение (4.17) можно преобразовать в уравнения Кирквуда—Зальцбурга и методом работы [7] получить из них экспоненциально-регулярное кластерное разложение. Заметим, что при этом гладкость по t каждого члена этого кластерного разложения окажется очевидной.

Мы получим доказательство теорем 4.1—4.3, если повторим доказательство кластерных оценок в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдулла-Заде Ф. Г., Минлос Р. А., Погосян С. К. Кластерные оценки для гиббсовских случайных полей и некоторые их применения. — В кн.: Многокомпонентные случайные системы. М.: Наука, 1978, с. 5—30.
2. Malyshev V. A., Minlos R. A. Invariant spaces of clustering operator. I — J. of Stat. Physics, 1979, 2, N 3; II — Commun. Math. Phys., 1981.
3. Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
4. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. N.—Y., Academic Press, 1979. V.III.
5. Малышев В. А. Одночастичные состояния и теория рассеяния марковских процессов. — В кн.: Взаимодействующие марковские процессы в биологии. Пущино, 1977, с. 176—196.

6. Минлос Р. А., Синай Я. Г. Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа. — Теорет. и матем. физика, 1970, 2, № 2, с. 230—243.
7. Малышев В. А. Кластерные разложения в решетчатых моделях статистической физики и квантовой теории поля. — УМН, 1980, **35**, № 2, с. 3—53.
8. Fisher M., Camp W. Behaviour of twopoint correlation functions at high temperatures. — Phys. Rev. Letters, 1971, **26**, p. 73—77.
9. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977.
10. Малышев В. А. Солитонные секторы в решетчатых моделях с непрерывным временем. — Функц. анализ и его прилож., 1979, **13**, вып. 1, с. 31—41.
11. Малышев В. А. Возмущения гиббсовских случайных полей. — В кн.: Многокомпонентные случайные системы. М.: Наука, 1978, с. 258—276.

Поступило 7.IX 1981