ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

V № 4
1965

V ЛИТОВСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК
LIETUVOS MATEMATIKOS RINKINYS 4
1965

О ПОЛЮСАХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ. ВЕРОЯТНОСТИ ПОЯВЛЕНИЯ КОМБИНАЦИЙ

В. А. МАЛЫШЕВ

В книге Феллера [1] теория рекуррентных событий применяется к вычислению вероятностей появления серий успехов. В этом случае элементарными методами удается показать, что существует единственный наименьший полюс у соответствующей производящей функции, получить быстро сходящийся ряд для этого полюса и асимптотику Пуассона. В работе Бизли [2] выписывается производящая функция для вероятностей первого появления произвольной комбинации на бернуллиевской схеме с двумя состояниями. Отметим, что феллеровская теория рекуррентных событий позволяет получать в знаменателе этой производящей функции многочлены степени N (N – длина комбинации), в то время как прямое применение матричного метода исследования цепей Маркова дает степень многочлена, равную 2^N.

Вопрос о вычислении наименьшего корня (по модулю) многочлена возникает и в других вероятностных задачах. Ниже приведено необходимое и достаточное условие существования единственного такого корня у знаменателя рациональных производящих функций, которые могут встретиться в вероятностных задачах. Метод косвенный, основанный на изучении с помощью некоторого вероятностного условия диофантовой динамической системы на m-мерном торе (прямыми методами локализации корней (см., например, [3], [4]) пользоваться трудно из-за сложности коэффициентов многочленов).

Затем рассматривается задача о появлении комбинаций на марковской цепи. Для знаменателя производящей функции вероятностей первого появления любой комбинации получен ряд для наименьшего корня в общем случае и конечные формулы для асимптотики этого корня по Пуассону.

1. Полюса с наименьшим модулем у рациональных производящих функций

В дальнейшем

$$F(s)=\frac{U(s)}{V(s)}=\sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n \tag{1}$$

будет рациональной функцией с действительными коэффициентами.

Если $f_n \geqslant 0$, то существует положительный корень многочлена $V(s)$, не превосходящий по модулю никакого другого корня этого многочлена.

Действительно, рассмотрим окружность сходимости $|s|=r_0$ ряда (1). По теореме Адамара—Прингсгейма [5] пересечение этой окружности с положительной полуосью есть особая точка (полюс), она и является корнем многочлена $V(s)$, причем внутри этой окружности других корней у многочлена $V(s)$ нет. ($V(s)$ и $U(s)$ можно предполагать взаимно простыми).

Теорема 1. *Если $f_n \geqslant 0$, то на окружности $|s|=r_0$ не существует корней многочлена $V(s)$ кратности большей, чем кратность корня $s=r_0$.*

Доказательство. Разложение $F(s)$ на простейшие дроби имеет следующий вид:

$$F(s)=\sum_{k=0}^{a}\sum_{j_k=1}^{q_k}\frac{A_{kj_k}}{(s_k-s)^{j_k}}, \tag{2}$$

где s_k — корень кратности q_k многочлена $V(s)$.

При $|s|<s_k$ имеет место

$$\frac{1}{(s_k-s)^{j_k}}=\frac{1}{s_k^{j_k}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{s}{s_k}\right)^{j_k}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{s_k^{j_k+n}}\cdot\frac{j_k(j_k+1)\dots(j_k+n-1)}{n!}. \tag{3}$$

Каждому комплексному корню s_k соответствует комплексно-сопряженный корень $s_{k'}$ той же кратности. Нетрудно показать, что тогда

$$A_{kj_k}=\overline{A_{k'j_{k'}}}. \tag{4}$$

Объединяя сопряженные слагаемые в сумме (2) и пользуясь (3), получим

$$F(s)=\sum_n\sum_k\sum_{j_k=1}^{q_k}(2)\operatorname{Re}\left(\frac{A_{kj_k}}{s_k^{j_k}\cdot s_k^n}\right)\frac{(n+1)\dots(n+j_k-1)}{(j_k-1)!}s^n. \tag{5}$$

Двойка поставлена в скобках потому, что если $\operatorname{Im} s_k=0$, то она отсутствует.

Полагая

$$A_{kj_k}=R_{kj_k}e^{i\psi_{kj_k}};\quad s_k=r_k\cdot e^{-i\varphi_k}, \tag{6}$$

имеем

$$F(s)=\sum_n\sum_k\sum_{j_k=1}^{q_k}(2)\operatorname{Re}\left(e^{i(\psi_{kj_k}+(j_k+n)\varphi_k)}\right)\times$$

$$\times\frac{(n+1)\dots(n+j_k-1)}{(j_k-1)!}\cdot s^n\cdot\frac{R_{kj_k}}{r_k^{j_k+n}}. \tag{7}$$

Предположим, что на окружности $|s|=r_0$ есть корни большей кратности, чем $s_0=r_0$. Асимптотическое поведение f_n будет определяться тогда именно этими корнями:

$$f_n\sim\sum_{k\in K}(2)\operatorname{Re}\left(e^{i(\psi_{kq_k}+(q_k+n)\varphi_k)}\right)\frac{(n+1)\dots(n+q'-1)}{(q'-1)!}\cdot\frac{R_{kq_k}}{r_0^{q'+n}} \tag{8}$$

— здесь K есть множество таких k, для которых $|s_k|=r_0$ и $q_k=q'=\max\limits_{k\in K}q_k$; пусть таких q_k ровно m.

Тогда замечаем, что преобразование T

$$T\{\psi_k:k\in K\}=\{\psi_k+\varphi_k:k\in K\} \tag{9}$$

задает динамическую систему на m-мерном торе.

Из того, что $f_n \geqslant 0$, следует, что

$$d_n = \sum_{k \in K} (2)\, R_{kq_k} \operatorname{Re}\left(e^{i\left(\psi_{kj_k} + (j_k+n)\varphi_k\right)}\right) \geqslant 0. \tag{10}$$

Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n(\varepsilon)$, что для $n > n(\varepsilon)$ будет $d_n > -\varepsilon$; действительно, допустим, что для бесконечного числа значений n и некоторого $\varepsilon > 0$ будет

$$d_n \leqslant -\varepsilon,$$

тогда для бесконечного числа значений n будет $f_n < 0$, что невозможно.

Докажем, что из (10) должно следовать, что $d_n \geqslant 0$. Пусть по крайней мере для одного n_0 будет

$$d_{n_0} < -\varepsilon < 0.$$

Отметим точку

$$a_{n_0} = \{\psi_{kq_0} + n_0 \varphi_k : k \in K\}$$

m-мерного тора. Если частоты φ_k несоизмеримы, то в силу эргодичности этой динамической системы T точка

$$\{\psi_{kq_0} + n\varphi_k : k \in K\}$$

для бесконечного числа значений n попадет в любую окрестность точки a_{n_0}. Тогда для бесконечного числа значений n будем иметь $d_n < -\delta < 0$ для некоторого $\delta > 0$, что противоречит формуле (10). Если частоты соизмеримы, то приходится воспользоваться теоремой Кронекера из теории многомерных диофантовых приближений (см. [6]), из которой следует, что точка a_n бесконечное число раз подойдет как угодно близко к той точке, в которой она уже была. Далее рассуждения аналогичны предыдущим. Убедившись теперь, что $d_n \geqslant 0$, применяем теорему Адамара—Прингсгейма (см. выше) и убеждаемся, что у рациональной функции

$$\sum_n \sum_{k \in K} (2) \operatorname{Re}\left(e^{i\left(\psi_{kq_k} + (q_k+n)\psi_k\right)}\right) \cdot \frac{R_{kq_k}}{r_k^{q'+n}} \cdot \frac{(n+1)\ \ldots\ (n+q'-1)}{(q'-1)!}\, s^n \tag{11}$$

должна быть особая точка $s = r_0$. Таким образом, приходим к тому, что среди наименьших по модулю корней наибольшей кратности должен быть положительный корень, что и дает доказательство теоремы.

Легко привести пример, когда в предположениях теоремы 1 на окружности сходимости ряда (1) лежат несколько корней многочлена $V(s)$. Имеет место, однако,

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 кроме, может быть, того, что $f_n \geqslant 0$ и при дополнительном условии, что $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ стремится к определенному пределу, на окружности сходимости ряда (1) отсутствуют корни многочлена $V(s)$ той же кратности, что и наименьший положительный корень.*

Доказательство. В обозначениях теоремы 1 имеем

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{1}{r_0} \sum\limits_{k \in K} (2) \operatorname{Re}\left(e^{i\left(\psi_{kq_k} + (q_k+n+1)\right)\varphi_k}\right) R_{kq_k}}{\sum\limits_{k \in K} (2) \operatorname{Re}\left(e^{i\left(\psi_{kq_k} + (q+n)\varphi_k\right)}\right) R_{kq_k}} + o(1). \tag{12}$$

Пусть сначала сумма в числителе правой части формулы (12) принимает два различных значения по крайней мере для двух значений n. Применяя теорему Кронекера аналогично тому как это делалось при доказательстве теоремы 1, можно убедиться в том, что как выражение

$$\frac{\frac{1}{r_0}\sum\limits_{k\in K}(2)\ \mathrm{Re}\left(e^{i\left(\psi_{kq_k}+(q_k+n+1)\varphi_k\right)}\right)R_{kq_k}}{\sum\limits_{k\in K}(2)\ \mathrm{Re}\left(e^{i\left(\psi_{kq_k}+(q_k+n)\varphi_k\right)}\right)R_{kq_k}}, \tag{13}$$

так и отношение $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ будет для бесконечного числа значений n как угодно близко к некоторым двум различным значениям, и, следовательно, $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ не может стремиться к определенному пределу.

Рассмотрим теперь случай, когда сумма в числителе правой части выражения (12) постоянна. Тогда, начиная с некоторого момента, имеют постоянный знак суммы

$$\sum_k{}'\,(2)\ \mathrm{Re}\left(e^{i\left(\varphi_{kq_k}+(q_k+n)\varphi_k\right)}\right)R_{kq_k}, \tag{14}$$

где суммирование производится по всем $k\in K$, кроме того, которое соответствует положительному корню (в предположении, что существуют корни неположительные, с наименьшим модулем и с кратностью не меньшей кратности наименьшего положительного корня). Применяя теорему Адамара—Прингсгейма к рациональной функции, полученной из разложения $F(s)$ на простейшие дроби опусканием членов, соответствующих наименьшему (по модулю) положительному корню, приходим к противоречию с этим предположением и получаем доказательство теоремы. Заметим, что эта теорема является обращением частного случая теоремы Пуанкаре (см. [7]).

2. Комбинации на однородной конечной цепи Маркова

Рассмотрим конечную однородную цепь Маркова x_n, $n=1, 2, \ldots$, где x_n принимает значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Мы скажем, что в n-ый момент появляется комбинация $\alpha=(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_N})$, если $x_{n-N+1}=\alpha_{i_1}, \ldots, x_n=\alpha_{i_N}$. Пусть u_n — вероятность того, что комбинация α появится в момент n, f_n — вероятность того, что комбинация α появится впервые в момент n, $\|q_{ij}\|$, $i, j=1, 2, \ldots, m$ — матрица вероятностей перехода в цепи x_n, $w_n\,(n\geqslant N)$ — вероятность того, что α появится в момент $n+N$, если она появилась в момент N, $a_k\,(k<N)$ — вероятность появления комбинации α в момент $N+k$, если α появилась в момент N. Вероятности a_k зависят от структуры допустимых сдвигсв ксмбинации (мы скажем, что l-сдвиг допустим для комбинации α), если

$$\alpha_{i_{1+l}}=\alpha_i\,,\ \ldots,\ \alpha_{i_N}=\alpha_{i1_{N-l}};$$

$$a_k=\varepsilon_k\,q_{i_{N-k}i_{N-k+1}}\ \cdots\ q_{i_{N-1}i_N}\,, \tag{15}$$

где ε_k равно 1 или 0 в зависимости от того, допустим k-сдвиг или нет.

Обозначив тогда

$$U(s)=\frac{s^N\cdot p_{i_1}\cdot q_{i_1i_2}\cdots q_{i_{N-1}i_N}}{1-s};$$

$$W(s)=q_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot q_{i_{N-1} i_N} \sum_{n=1}^{\infty} q_{i_N i_1}^{(n)} s^{n+N-1} \tag{16}$$

из рекуррентного соотношения

$$U_n=f_1 w_{n-1}+\cdots+f_{n+N} w_N+f_{n-N+1} a_{N-1}+\cdots+f_n a_0, \tag{17}$$

получим

$$U(s)=F(s)\cdot W(s)+F(s)\ (a_{N-1} s^{N-1}+\cdots+a_0) \tag{18}$$

и

$$F(s)=\frac{U(s)}{W(s)+a_{N-1} s^{N-1}+\ldots+a_1 s+a_0}, \tag{19}$$

где $F(s)$ рациональна, т. к. $W(s)$ рациональна.

Теорема 3. *Пусть на конечной однородной цепи Маркова* x_n, $n=1, 2, \ldots$, $q_{ii}>0$ *для всех* i, *задана функция* $\varphi(x_{n-N+1}, \ldots, x_n)$, *принимающая* значение, 0 *на одном наборе с положительной вероятностью,* f_n — *вероятность того, что* $\varphi(x_{n-N+1}, \ldots, x_n)=0$, *а* $\varphi(x_{k-N+1}, \ldots x_k)=1$ *для* $k<n$.

Тогда $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ *стремится к определенному пределу, и следовательно,* $F(s)$ *имеет единственный полюс наименьшего модуля, превосходящий по кратности другие полюса с тем же модулем, если они существуют.*

Доказательство. Рассмотрим новую цепь Маркова, состояниями которой являются всевозможные наборы (упорядоченные) состояний длины N цепи x_n, вероятности которых в цепи x_n отличны от нуля, а матрица вероятностей перехода $\|\tilde{q}_{ij}\|$ получается очевидным образом из условия, что следующее состояние цепи есть набор, получаемый сдвигом на единицу в цепи x_n (схема Маркова — Брунса).

В полученной матрице вычеркнем те строки и столбцы, индексы которых соответствуют тем состояниям, на которых $\varphi=0$, и те, в которые нельзя попасть из состояния i, не проходя через состояние с $\varphi=0$. Полученную матрицу обозначим

$$A_i=\|_i a_{ij}\|, \quad A_i^n=\|_i a_{ij}^{(n)}\|.$$

Это есть неотрицательная примитивная матрица (см. [8]), т. к. некоторая ее степень в силу эргодичности цепи x_n есть положительная матрица. Следовательно, она имеет единственный максимальный положительный корень λ. Воспользовавшись формулой Перрона имеем

$${}_i a_{ij}^{(n)} \sim c_{ij} \lambda^n.$$

Заметив, что

$$f_n=\sum_{i, j, k} p_i \cdot {}_i a_{ij}^{(n-1)} \cdot q_{jk},$$

где суммирование производится по всем i, j (p_i — вероятность начального состояния i), таким, что $\varphi(i)=\varphi(j)=1$ и всем k таким, что $\varphi(k)=0$, получим, что $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ имеет предел.

В книге Феллера приводится асимптотика Пуассона для наименьшего по абсолютной величине полюса в случае серий на двоичной бернуллиевской схеме. Следующая теорема дает аналогичный результать в общем случае. Предварительно введем следующее обозначение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_{i_N i_1}^{(n)} s^{n+N-1}=\frac{P(s)}{(1-s)\,Q(s)}.$$

Теорема 4. *Пусть $F\alpha^N(s)$ — производящая функция для вероятностей появления комбинации $\alpha^N=(\alpha_1^N, \ldots, \alpha_N^N)$ длины N в первый раз в момент n на заданной однородной конечной эргодической цепи Маркова с переходной матрицей $\|q_{ij}\|$. Тогда для любой последовательности комбинаций $\alpha^1, \ldots, \alpha^N, \ldots$, вероятности которых отличны от нуля, наименьший по абсолютной величине корень многочлена*

$$V(s)=q_{i_1 i_2}\ldots q_{i_{N-1} i_N} P(s)+(1-s)\,Q(s)\,(a_{N-1}s^{N-1}+\cdots+1) \tag{20}$$

— знаменателя производящей функции $F\alpha^N(s)$ при $N\to\infty$ асимптотически равен

$$s(N)\sim 1+\frac{q_{i_1 i_2}\cdots q_{i_{N-1} i_N} P(1)}{(1+a_1+\cdots+a_{N-1})\cdot Q(1)}.$$

Доказательство. Мы используем метод Ньютона в применении к уравнению

$$V(s)=0.$$

Мы докажем, что для любого случая (любой марковской цепи и любой комбинации) можно одним способом выбрать начальное приближением из него начинать процесс Ньютона. Мы воспользуемся так называемым модифицированным процессом Ньютона и условием его сходимости, полученным Канторовичем (см. [9]). Отметим, что аналогично можно получить быстро сходящийся ряд для корня при фиксированном N.

В качестве начального приближения выберем $s_0(N)=1$. Докажем, что условие сходимости модифицированного процесса Ньютона

$$\frac{|V(s_0)\cdot V''(s_0)|}{|V'(s_0)|^2}<\frac{1}{2},\ 1\leqslant s\leqslant 1-\frac{2V(s_0)}{V'(s_0)} \tag{21}$$

выполняется для любой эргодической цепи, начиная с некоторого N. Действительно, имеем:

$$V(1)=q_{i_1 i_2}\ \ldots\ q_{i_{N-1} i_N} P(1)=O(\beta^N),\quad \beta<1;$$

$$V'(1)=q_{i_1 i_2}\ \ldots\ q_{i_{N-1} i_N} P'(1)-Q(1)\ (a_{N-1}+a_{N-2}+\ldots+1)\sim\mathrm{const},$$

$$V''(s)=O(N).$$

Подставляя в (21), получаем искомый результат.

Модифицированный процесс Ньютона развертывается по формуле

$$s_n(N)=s_{n-1}-\frac{V\left(s_{n-1}(N)\right)}{V'\left(s_0(N)\right)}.$$

Тогда из равенств

$$s_1(N)=1+\frac{q_{i_1 i_2}\cdots q_{i_{N-1} i_N}\cdot P(1)}{(1+a_1+\ldots a_{N-1})\cdot Q(1)-q_{i_1 i_2}\ldots q_{i_{N-1} i_N} P'(1)},$$

$$s_{n+1}(N)=s_1+O\left(N\cdot\left(1-s_1(N)\right)^2\right)$$

следует доказательство теоремы.

Москва

Поступило в редакцию
5.V.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Москва, 1964.
2. M. Bizley, Patterns in repeated trials, Journal of the Institute of Actuaries, 88, No 3, 1962.
3. М. Пароди, Локализация характеристических чисел матриц и ее применения, Москва, 1960.
4. Н. Обрешков, Нули на полиномите, София, 1964.
5. С. Стоилов, Теория функций комплексного переменного, Москва, 1963.
6. Дж. Касселс, Введение в теорию дифантовых приближений, Москва, 1961.
7. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Москва, 1959.
8. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Москва, 1954.
9. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в линейных нормированных пространствах, Москва, 1959.

RACIONALINIŲ GENERUOJANČIŲ FUNKCIJŲ POLIŲ KLAUSIMU. KOMBINACIJŲ PASIRODYMO TIKIMYBĖS

V. A. MALYŠEVAS

(*Reziumė*)

Straipsnyje pateikiama racionalių generuojančių funkcijų, sutinkamų tikimybiniuose uždaviniuose, vardiklio minimalios šaknies egzistavimo būtina ir pakankama sąlyga. Be to, straipsnyje nagrinėjamos kombinacijų pasirodymo Markovo grandinėje uždavinys.

ON POLES OF RATIONAL GENERATING FUNCTIONS. PROBABILITIES OF THE APPEARANCE OF COMBINATIONS

V. MALYSHEV

(*Summary*)

Necessary and sufficient conditions of the existence of the minimal root of the denominator of a rational generating function are found in the paper. A problem on probabilities of the appearance of combinations in Markov chains is examined as well.