СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ингстер Ю. И.* О минимаксном непараметрическом обнаружении сигнала в гауссовском белом шуме. — Проблемы передачи информации, 1982, т. 18, № 2, с. 61–73.
2. *Ingster Yu. I.* Asymptotically minimax testing of nonparametric hypothesis. — Proceedings of the Fourth Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Vol. 1. Utrecht: VNU Sci. Press, 1987, p. 553–573.
3. *Ingster Yu. I.* Asymptotically minimax hypothesis testing for nonparametric alternatives. I, II, III. — Math. Methods Statist., 1993, v. 2, № 2, p. 85–114; № 3, p. 171–189; № 4, p. 249–268.
4. *Суслина И. А.* Минимаксное обнаружение сигнала для l_q-эллипсоидов с удаленным l_p-шаром. — Зап. науч. семин. ПОМИ, 1993, т. 207, с. 127–137.
5. *Ингстер Ю. И.* Минимаксное обнаружение сигнала при невырожденных функциях потерь и экстремальные выпуклые задачи. — Зап. науч. семин. ПОМИ, 1996, т. 228, с. 162–188.
6. *Суслина И. А.* Экстремальные задачи, возникающие при минимаксном обнаружении сигнала для l_q-эллипсоидов с удаленным l_p-шаром. — Зап. науч. семин. ПОМИ, 1996, т. 228, с. 312–332.
7. *Lepski O. V., Spokoiny V. G.* Minimax nonparametric hypothesis testing: the case of an inhomogeneous alternative. — Bernoulli, 1999, v. 5, № 2, p. 333–358.
8. *Spokoiny V. G.* Adaptive and spatially adaptive testing of nonparametric hypothesis. — Math. Methods Statist., 1998, v. 7, № 3, p. 245–273.
9. *Ingster Y. I., Suslina I. A.* Minimax nonparametric hypothesis testing for ellipsoids and Besov bodies. Report № 12. Berlin: Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, 1997, 88 p.
10. *Donoho D. L., Johnstone I. M., Kerkyacharian G., Picard D.* Wavelet shrinkage: asymptopia? — J. Roy. Statist. Soc., 1995, v. 57, № 2, p. 301–369.
11. *Triebel H.* Theory of Function Spaces. II. Basel: Birkhäuser, 1992, 370 p.
12. *Lepski O. V., Nemirovski A., Spokoiny V. G.* On estimation of non-smooth functionals. Technical Report № 297. Berlin: Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, 1996.
13. *Ибрагимов И. А., Немировский А. С., Хасьминский Р. З.* Некоторые задачи непараметрического оценивания в гауссовском белом шуме. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 3, с. 451–466.

Поступила в редакцию
16.III.1998

МАЛЫШЕВ В. А.*

МАКРОРАЗМЕРНОСТЬ — ИНВАРИАНТ ЛОКАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ

На множестве счетных графов с метками определяется марковский процесс. Переходы в нем — локальные преобразования графа. Определяется макроразмерность бесконечного графа и доказывается, что она является инвариантом такой динамики.

Ключевые слова и фразы: марковский процесс, макроразмерность графа, инвариант динамики.

* INRIA, France; e-mail: Vadim.Malyshev@inria.fr

1. Введение. Процессы с локальным взаимодействием на фиксированной решетке, графе или непрерывном пространстве принадлежат сейчас к центральным объектам теории вероятностей. Недавно было понято, что существует естественное обобщение процессов с локальным взаимодействием, где граф (пространство) более не фиксирован, а является случайным и локально меняется во времени. Такие процессы естественно возникают в информатике (стохастические грамматики), современной теоретической физике (квантовая гравитация) и биологии (эволюция молекул ДНК).

Общая математическая теория таких процессов только начала развиваться (см. [2], [3]). Понятие слабой сходимости оказалось важнейшим инструментом для изучения и даже определения таких процессов.

План статьи таков. Мы даем определения динамики на конечных, а затем и на счетных графах. Для счетных графов определяется их макроразмерность. Грубо говоря, макроразмерность графа равна d, если в N-окрестности любой вершины графа содержится примерно N^d его вершин.

Доказывается, что на любом конечном интервале времени макроразмерность графа является инвариантом динамики при следующих ограничениях: динамика должна быть локальной, локально ограниченной и локально обратимой. Заметим, однако, что в пределе $t \to \infty$ макроразмерность может меняться.

2. Локальные подстановки. Мы будем рассматривать ненаправленные связные графы G с множеством вершин $V = V(G)$ (конечным или счетным) и множеством ребер $L = L(G)$. Всегда предполагается, что между двумя вершинами есть не более одного ребра, а каждая вершина имеет конечную степень (число инцидентных ей ребер). Обозначим GF_n множество всех конечных графов с этими свойствами, каждая вершина которых имеет степень не более n. Обозначим GC_n множество всех счетных графов с теми же свойствами.

Подграфом графа G называется подмножество $V_1 \subset V$ вершин вместе с некоторыми ребрами, соединяющими пары вершин из V_1 и принадлежащими L. *Регулярный подграф* $G(V_1)$ графа G есть подмножество $V_1 \subset V$ вершин вместе со *всеми* ребрами, соединяющими пары вершин из V_1 и принадлежащими L.

Множество V вершин является метрическим пространством с метрикой, определяемой расстоянием $d(x,y)$, $x,y \in V$, — минимумом длин путей, соединяющих эти вершины. При этом длины всех ребер предполагаются равными некоторой константе, полагаемой равной 1. Вершины, связанные ребром, называются соседями. Окрестностью (точнее, d-окрестностью) $O_d(v)$ вершины v в G называется регулярный подграф с множеством вершин, состоящим из самой v и всех вершин на расстоянии от v, не превышающем d. Положим $O_1(v) = O(v)$.

Спиновый граф (также спинграф, окрашенный граф, маркированный граф, спиновая система и т.д.) — пара $\alpha = (G, s)$, где $s = s(\cdot)$ есть функция $s\colon V \to S$, а S есть множество значений «спина», алфавит. Изоморфизм спиновых графов есть изоморфизм графов, уважающий спины. Пустой спиновый граф $\varnothing$ есть пустой граф без спинов. Допуская небольшую неточность языка, иногда будет удобно называть G спиновым графом и говорить об α как о графе.

Динамика спиновых графов есть случайная последовательность (где моменты времени $0 < \dots < t_k < t_{k+1} < \cdots$ также случайны) спиновых графов

$$\alpha_0 = (G_0, s_0), \quad \alpha_{t_1} = (G_{t_1}, s_{t_1}), \dots, \quad \alpha_{t_k} = (G_{t_k}, s_{t_k}), \dots, \tag{1}$$

определяемая ниже более точно. Спиновый граф α_{t_k} получается из $\alpha_{t_{k-1}}$ «простым» преобразованием из некоторого фиксированного класса преобразований.

Определение 1. Правило подстановки (продукция) $\mathrm{Sub} = (\Gamma, \Gamma', V_0, \varphi)$ определяется двумя «малыми» спиновыми графами Γ и Γ', подмножеством $V_0 \subset V = V(\Gamma)$ и отображением $\varphi\colon V_0 \to V' = V(\Gamma')$; при этом V_0 и Γ' могут быть пустыми. Преобразование (подстановка) $T = T(\mathrm{Sub}, \psi)$ спинграфа α, соответствующее данному правилу подстановки Sub и изоморфизму $\psi\colon \Gamma \to \Gamma_1$ на спиновый подграф Γ_1 спинграфа α, определяется следующим образом. Рассмотрим несвязное объединение α и Γ', удалим все ребра Γ_1, удалим все вершины $\psi(V) \setminus \psi(V_0)$ вместе со всеми инцидентными им ребрами, отождествим каждое $\psi(v) \in \psi(V_0)$ с $v' = \varphi(v) \in \Gamma'$. Функция s на $V(G) \setminus V(\Gamma_1)$ наследуется из α, а на $V(\Gamma')$ — из Γ'. Обозначим получившийся спинграф $T(\mathrm{Sub}, \psi)\alpha$.

Примеры подстановок: удаление ребра, добавление ребра в данной вершине с другой новой вершиной, соединение двух вершин ребром, изменение значения спина в одной вершине. При этом сама возможность такой подстановки зависит от некоторой окрестности места подстановки.

Определение 2. Грамматика на графах (или просто грамматика) определяется конечным множеством подстановок $\mathrm{Sub}_i = (\Gamma_i, \Gamma_i', V_{i,0}, \varphi_i)$, $i = 1, \ldots, r$. Она называется локальной, если для всех i графы Γ_i, соответствующие Sub_i, связны. Будем называть грамматику локально ограниченной, если при достаточно больших n множества GF_n и GC_n инвариантны относительно всех ее подстановок.

Пусть заданы положительные интенсивности $\lambda_i = \lambda(\mathrm{Sub}_i), i = 1, \ldots, r$. Они определяют цепь Маркова с непрерывным временем на GF_n, называемую случайной грамматикой на графах: на данном интервале времени $(t, t + dt)$ каждое возможное преобразование $T(\mathrm{Sub}_i, \psi)$ производится с вероятностью $\lambda_i\, dt + o(dt)$. В [2] было доказано, что на множестве всех конечных спинграфов можно определить минимальную цепь Маркова (без взрыва) на всем интервале времени $[0, \infty)$.

3. Макроразмерность бесконечных графов. На бесконечный граф можно смотреть как с локальной (микро), так и с глобальной (макро) топологической точки зрения. С микро точки зрения бесконечный граф есть одномерный комплекс. Граф G можно представлять также как одномерный скелет некоторого комплекса $C(G)$ более высокой размерности. Есть, однако, много способов определить $C(G)$ для данного G. Например, можно рассматривать «симплициальное пополнение» одномерного комплекса G. Иначе говоря, симплициальный комплекс с вершинами $V(G)$, одномерными симплексами — ребрами. Подмножество $S \subset V(G)$, состоящее из трех вершин, будет симплексом, если любые его подмножества из двух элементов суть симплексы, и т.д. Поэтому с макро точки зрения можно по-разному определять размерность бесконечного графа. Мы дадим здесь одно из возможных определений. Положим для $x \in V(G)$

$$D_n(x) = \frac{\ln |O_n(x)|}{\ln n}, \qquad \overline{D}(x) = \limsup_{n\to\infty} D_n(x), \qquad \underline{D}(x) = \liminf_{n\to\infty} D_n(x). \tag{2}$$

Лемма 1 (см. [1]). *Для всех x, y*

$$\overline{D}(x) = \overline{D}(y) = \overline{D}, \qquad \underline{D}(x) = \underline{D}(y) = \underline{D}. \tag{3}$$

Доказательство легко следует из того, что

$$O_{n-a}(y) \leqslant O_n(x) \leqslant O_{n+a}(y), \quad a = d(x, y). \tag{4}$$

Если $\overline{D} = \underline{D} = D_S$, то D_S называется (масштабной) макроразмерностью графа G. Например, для деревьев D_S может принимать любое значение, не меньшее 1 (однако бинарное дерево имеет бесконечную макроразмерность). Для любой однородной решетки L в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$ макроразмерность $D_S(L) = d$.

4. Динамика. Пусть в момент $t = 0$ задан связный спинграф $\alpha(0) = (G = G(0), s(0)) \in GC_n$ для некоторого достаточно большого $n > 0$. Мы дадим точное определение динамики $\alpha(t) = (G(t), s(t))$ на малом временном интервале $(0, \varepsilon)$, подробнее см. [3].

Нам понадобятся следующие обозначения. Фиксируем вершину в $G(0)$ и обозначим ее 0. Пусть $O_N = O_N(0) = G^N(0)$ есть N-окрестность вершины 0 в α. Рассмотрим возрастающее семейство O_N конечных спинграфов

$$O_1 \subset \cdots \subset O_N \subset \cdots . \tag{5}$$

Пусть $\xi_\beta(t)$ — марковский процесс на множестве конечных спинграфов такой, что $\xi_\beta(0) = \beta$. Мы будем изучать предельное поведение семейства $\xi^N(t) = \xi_{O_N}(t)$ марковских процессов, заданных на некоторых вероятностных пространствах Ω^N при $N \to \infty$. Рассмотрим некоторый граф G и подмножество его вершин $V' \subset V = V(G)$. Определим внешнюю границу

$$\partial V' = \Big\{ v \in V \setminus V' \colon 0 < d(v, V') \leqslant 1 \Big\}. \tag{6}$$

Подмножество вершин V_1 связно, если регулярный подграф с этим множеством вершин связен. Для краткости обозначений мы будем в дальнейшем предполагать, что радиусы всех Г, входящих в определение подстановок фиксированной графовой грамматики, не превосходят 1.

Фиксируем теперь N и t. Для траектории ω процесса $\xi^N(t)$ мы будем говорить, что вершина $v \in O_N$ была затронута на интервале времени $[0,t]$, если она принадлежит одному из графов $\psi(\Gamma)$ в последовательности преобразований, соответствующих данной траектории. Обозначим $Q(N,t;\omega)$ множество всех таких вершин в $G^N(0) = O_N$. Определим случайное поле $\eta^N(v)$ на $V(G(0))$: $\eta^N(v) = 1$, если $v \in Q(N,t;\omega)$, и $\eta^N(v) = 0$ в противном случае. Для любого конечного $T \subset V$ определим

$$\langle \eta_T^N \rangle = \left\langle \prod_{v\in T} \eta^N(v) \right\rangle. \tag{7}$$

Предельные корреляционные функции (их существование доказано в [3]) определяют, по теореме Колмогорова, вероятностную меру на $\{0,1\}^{V(G(0))}$ (т.е. некоторое случайное поле, обозначаемое $\eta(v)$) или на множестве всех подмножеств $V(G(0))$. Для каждого начального графа $\alpha = \alpha(0)$ введем случайное множество $E(\omega,t,\alpha) = \{v\colon \eta(v) = 1\}$.

Теорема 1. *Существует $t_0 > 0$ такое, что для любого начального спинграфа α и любого фиксированного t, $0 \leqslant t < t_0$, последовательность случайных полей $\eta^N(v)$ слабо сходится к случайному полю $\eta(v) = \eta(v;\alpha)$ на $V(\alpha)$ при $N \to \infty$, иначе говоря $\langle \eta_T^N \rangle \longrightarrow \langle \eta_T \rangle = \langle \prod_{v\in T} \eta(v) \rangle$. Кроме того, случайное множество $E(\omega,t,\alpha)$ состоит п.н. из счетного числа конечных связных компонент.*

Доказательство см. в [3].

Множества $E(\omega,t,\alpha)$ используются для построения динамики на множестве бесконечных спинграфов. При этом вершины из $V(G(0)) \setminus E$ интерпретируются как вершины, которые не были затронуты подстановками на интервале $[0,t]$, спины на них также сохраняются.

Рассмотрим вероятностное пространство $\Omega_1 = \{0,1\}^{G(0)}$, на котором определено случайное поле $\eta(v)$. Обозначим μ_1 вероятностную меру на Ω_1, соответствующую этому случайному полю. Для любого $\omega_1 \in \Omega_1$ пусть $B_k(\omega_1), k = 1,2,\ldots,$ — все связные компоненты $E(\omega_1,t,\alpha)$.

Для данного подграфа B спинграфа $G(0)$ рассмотрим условный процесс, начинающийся со спинграфа $B \cup \partial B$, точнее, рассмотрим процесс $\xi_{B\cup\partial B}(t)$ при условии, что все вершины из B затронуты, но вершины границы ∂B не затронуты. Обозначим этот процесс через $\zeta(t,B)$, и пусть μ_B — мера этого процесса. Траектории этого процесса на $[0,t]$ будем обозначать $\omega(B)$. Пусть $(\Omega_B, \Sigma_B, \mu_B)$ — его вероятностное пространство.

Для данного ω_1 пусть $B_k(\omega_1)$, $k = 1,2,\ldots,$ — все связные компоненты $E(\omega,t,\alpha)$. Предельное вероятностное пространство (на котором и будет определен предельный марковский процесс) для интервала $[0,t]$ есть множество Ω всех наборов

$$\omega = \Big(\omega_1, \omega(B_k(\omega_1)),\ k = 1,2,\ldots\Big). \tag{8}$$

Фиксируем связные подмножества $D_1,\ldots,D_n$ графа $G(0)$ и некоторые измеримые подмножества $U_i \subset \Omega_{D_i}$. Пусть $C(U_1,D_1;\ldots;U_n,D_n)$ — множество всех ω таких, что каждое D_i совпадает с одним из $B_k(\omega_1)$ и, более того, $\omega(B_k(\omega_1)) \in U_k$. Рассмотрим минимальную σ-алгебру Σ, порожденную всеми подмножествами $C(U_1,D_1;\ldots;U_n,D_n)$ множества Ω. Вероятностная мера μ однозначно определена следующими условиями: проекция μ на $\{0,1\}^V$ равна μ_1 и

$$\mu(C(U_1,D_1;\ldots;U_n,D_n)) = \mu_1(A(D_1,\ldots,D_n)) \prod_{i=1}^n \mu_{D_i}(U_i), \tag{9}$$

где $A(D_1,\ldots,D_n)$ — множество всех ω_1 таких, что D_i — связные компоненты $E(\omega_1,t,\alpha(0))$. Заметим, что для данного ω_1 условные распределения траекторий на $B_k(\omega_1)$ независимы для разных k.

Точки вероятностного пространства (Ω,Σ,μ) являются, по определению, траекториями динамики на множестве бесконечных спинграфов. Последняя формула составляет кластерное свойство. Подобные представления, конечно, есть и для произвольного конечного N. В этом смысле бесконечная динамика есть предел конечных динамик при $N \to \infty$. Заметим, что интервал времени $(0, \varepsilon)$ не зависел от начального графа. Тогда, склеивая динамику на интервалах $(n\varepsilon, n\varepsilon + 1)$, мы получаем единственную динамику на всем интервале $[0, \infty)$. Все вышеизложенное может быть подытожено так.

Теорема 2. *Для любого конечного t динамика на множестве бесконечных спинграфов существует и является термодинамическим пределом счетных цепей Маркова. Более того, для $t < t_0$ она обладает кластерным свойством равномерно для всех начальных спинграфов.*

5. Динамика и метрика. Здесь мы выделяем некоторые классы динамики, в соответствии с тем, как она меняет метрику графа.

Связность. Далее мы будем предполагать, что динамика сохраняет связность, иначе говоря, если α связен, то $T(\mathrm{Sub}_i, \psi)\alpha$, для всевозможных i и ψ, также связен. Легко построить примеры локальной динамики, которая не сохраняет связности. Однако локальная динамика всегда сохраняет связность, если предположить неприводимость (или существенность всех состояний) на множестве конечных спинграфов.

Метрическая ограниченность.

Лемма 2. *Предположим, что грамматика локальна, локально ограничена и сохраняет связность. Пусть $G(0) \in GC_n$, где n достаточно велико. Тогда она метрически ограничена сверху, т.е. существует константа $C = C(n) > 0$ такая, что для каждого G и каждой пары вершин $x, y \in V(G)$*

$$d_{TG}(x, y) \leqslant d_G(x, y) + C \tag{10}$$

для всех преобразований $T = T(\mathrm{Sub}_i, \psi)$, где TG пишется вместо $T\alpha$.

Доказательство. Возьмем некоторое достаточно большое C и предположим, что существуют $G, T = T(\mathrm{Sub}_i, \psi)$ и $x, y \in V(G)$ такие, что $d_{TG}(x, y) > d_G(x, y) + C$. Можно считать при этом, что $x, y \in \partial\Gamma_1$. Возьмем некоторую $v \in \partial\Gamma_1 \subset V(G)$ и выберем N так, что $0 \ll n^N \ll C$. Тогда, применяя T к $O_N(v)$, мы увидим, что $T(O_N(v))$ будет несвязным, так как нет путей от x к y. Действительно, минимальный путь получается длиннее, чем число n^N вершин в $O_N(v)$.

Локальная обратимость. Важный класс динамик, сохраняющих связность, идет из физики. Рассмотрим счетную цепь Маркова с непрерывным временем, счетным пространством состояний X и интенсивностями переходов $\lambda_{ij}, i, j \in X$. Можно рассматривать X как множество вершин направленного графа, в котором ребро из i в j есть тогда и только тогда, когда вероятность λ_{ij} положительна. Цепь называется обратимой (мы не предполагаем возвратности), если из $\lambda_{ij} > 0$ следует $\lambda_{ji} > 0$, а также, для любого цикла $\Gamma = (i_1, i_2), \ldots, (i_n, i_1)$, мы имеем для $a_{ij} = \lambda_{ij}/\lambda_{ji}$

$$a(\Gamma) = a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_n i_1} = 1, \quad n \geqslant 2. \tag{11}$$

Здесь a_{ij} — функция на множестве ребер со значениями в группе $\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$, n — длина цикла. Обратимую цепь назовем локально обратимой, если при некотором $n_0 < \infty$ для любого конечного G соотношения (11) для всех n порождаются этими соотношениями для всех $n \leqslant n_0$. Приведем несколько известных примеров локальной обратимости:

1. Если все λ_{ij} положительны, то $n_0 = 3$;
2. Простые блуждания в $\mathbf{Z}^d$: $n_0 = 4$;
3. Динамика Глаубера для модели Изинга в конечном объеме: $n_0 = 4$.

6. Основной результат.

Теорема 3. *Предположим, что грамматика локальна, локально ограничена и локально обратима. Тогда макроразмерность есть инвариант динамики.*

Доказательство. Пусть в момент $t = 0$ задан связный спинграф $\alpha(0) = (G = G(0), s(0)) \in GC_n$ для некоторого достаточно большого $n > 0$, имеющий макроразмерность d. Рассмотрим динамику $\alpha(t) = (G(t), s(t))$ на малом временном интервале $(0, \varepsilon)$. Достаточно доказать, что все $G(t)$ также имеют макроразмерность d.

Нам понадобятся следующие оценки.

Лемма 3. *Рассмотрим событие, состоящее в том, что кластер (связная компонента) D множества $E(\omega, \varepsilon, \alpha(0))$, содержащий заданную вершину, имеет размер m. Пусть $p(m)$ — вероятность этого события. Тогда $p(m) < C\delta^m$ для некоторого $\delta < 1$. Более того, $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.*

Это кластерная оценка, доказанная в [3].

Лемма 4. *Пусть D — кластер размера m и $p(k, m, D)$, $k > 1$, — вероятность того, что число вершин графа $\zeta(\varepsilon, D)$ становится больше, чем km. Тогда существуют константы $c > 0$ и $\delta_1 < 1$ такие, что $p(k, m, D) < c\delta_1^{km}$ равномерно по D. Кроме того, $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство. Рассмотрим одну разновидность процесса чистого роста, точнее, рассмотрим марковскую цепь на $\mathbf{Z}_+$ с интенсивностью λi скачков из i в $i+r$. Пусть $q(r, m, k, t)$ — вероятность того, что процесс, начинающийся с m частиц, будет иметь km частиц в момент t. Тогда

$$q(1,1,k,t) = \exp(-\lambda t)\,(1-\exp(-\lambda t))^{k-1}. \tag{12}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} q(1,m,k,t) &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=km} \prod_{i=1}^{m} \exp(-\lambda t)\,(1-\exp(-\lambda t))^{k_i-1} \\ &< 2^{km}(1-\exp(-\lambda t))^{m(k-1)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда для малых t

$$q(r,m,k,t) < 2^{km/r}(1-\exp(-\lambda t))^{m(\frac{k}{r}-1)} < C\beta^{km}, \tag{14}$$

где $\beta = \beta(t) \to 0$ при $t \to 0$. В то же время, см. [2],

$$p(k,m,D) \leqslant \sum_{j \geqslant k} q(r,m,j,t). \tag{15}$$

Рассмотрим множество $R(0) = V(G(0)) \setminus E(\omega, \varepsilon, \alpha(0))$ вершин, которые не были затронуты преобразованиями на интервале $(0, \varepsilon)$, положим $R_N(0) = R(0) \cap O_N(v_0)$, где v_0 — фиксированная вершина в $V(G(0))$. Пусть $v(\omega) \in R(0)$ — некоторая вершина на минимально возможном расстоянии $r(\omega)$ от 0. Допуская некоторую неточность обозначений, мы будем считать $v(\omega)$ и $R(0)$ принадлежащими $V(G(t))$ для всех $t \in (0, \varepsilon)$. Пусть $O_N(t) = O_N(t, \omega)$ — N-окрестность вершины $v(\omega)$ в $V(G(t))$.

Лемма 5. *Существует $C > 1$ такая, что п.н. существует $N_0 = N_0(\omega)$ такое, что для всех $N > N_0$ имеет место*

$$|O_{NC^{-1}}(\varepsilon, \omega)| \leqslant |O_N(0)| \leqslant |O_{NC}(\varepsilon, \omega)|. \tag{16}$$

Теперь легко закончить доказательство теоремы. Например,

$$D_S(G) = \lim \frac{\ln O_N(0)}{\ln N} = \lim \frac{\ln O_N(0)}{\ln(CN)} = \liminf \frac{\ln O_N(0)}{\ln(CN)} \leqslant \liminf \frac{\ln O_{NC}(\varepsilon)}{\ln(NC)}, \tag{17}$$

и поэтому $D_S(G) \leqslant \underline{D}_S(G(\varepsilon))$. Аналогично, $D_S(G) \geqslant \overline{D}_S(G(\varepsilon))$, и тогда $D_S(G) = D_S(G(\varepsilon))$.

Доказательство леммы. Обозначим $d_t(x, y)$ расстояние между точками $x, y \in V(G(t))$ в $G(t)$. Возьмем произвольную точку $x \in R_N(0)$. Фиксируем некоторое достаточно большое C, и пусть $P(x, N) = P(x, N; C)$ — вероятность события $A(x, N)$, состоящего в том, что x не принадлежит $O_{NC}(t, \omega)$, т.е. $d_t(x, v(\omega)) > NC$. Тогда

$$P(x,N) < \beta_1^{NC}. \tag{18}$$

Действительно, сравним $d_0(0, x)$ и $d_t(v(\omega), x)$. Заметим сначала, что

$$\mathbf{P}\Big\{ |d_0(0,x) - d_t(v(\omega),x)| > B \Big\} < \mathrm{const}\,\beta^B \tag{19}$$

для некоторого малого β. Пусть Υ — некоторый путь между x и 0, лежащий в $O_N(0)$ и имеющий минимальную длину $l(\Upsilon) = d_0(0, x) \leqslant N$. Пусть $B(\Upsilon_0), \Upsilon_0 \subset \Upsilon$, —

событие, что только вершины Υ_0 не принадлежат $R(0)$. Пусть D_k — все кластеры, с которыми Υ имеет непустое пересечение. Тогда условная вероятность

$$\mathbf{P}\Big\{ |\cup_k D_k| > NC \mid \Upsilon_0 \Big\} < \beta^{\sum |D_k \setminus D_k \cap \Upsilon_0|} \tag{20}$$

для некоторого $\beta < 1$. Тогда

$$P(x,N) = \sum_{\Upsilon_0} \sum_{\{D_k\}} \mathbf{P}(\Upsilon_0)\,\mathbf{P}\Big\{ |\cup_k D_k| > NC \mid \Upsilon_0 \Big\} < \beta^{NC/2} = \beta_1^{NC}. \tag{21}$$

Заметим, что вероятность $P(N)$ того, что $|O_N(0)| \geqslant |O_{NC}(t,\omega)|$, ограничена сверху посредством

$$P(N) \leqslant \sum_x P(x,N) \leqslant C(\gamma) N^{d+\gamma} \beta_1^{NC} \tag{22}$$

для любого $\gamma > 0$ и некоторого $C(\gamma) > 0$. Второе неравенство леммы следует тогда из леммы Бореля–Кантелли. Для доказательства первого неравенства мы используем результат, двойственный лемме 2.

Лемма 6. *Предположим, что грамматика локальна, локально ограничена, локально обратима и что $G(0) \in GC_n$ для некоторого достаточно большого n. Тогда она метрически ограничена снизу, т.е. существует константа $C = C(n) > 0$ такая, что для любого G и любой пары вершин $x, y \in V(G)$*

$$d_{TG}(x,y) \geqslant d_G(x,y) - C \tag{23}$$

для произвольного преобразования $T = T(\mathrm{Sub}_i, \psi)$, где мы пишем TG вместо $T\alpha$.

Первое неравенство леммы 5 следует из последней леммы аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Novotny Th., Requardt M.* Dimension Theory of Graphs and Networks. Preprint. Göttingen: Göttingen University, 1997; http://xxx.lanl.org/hep-th/9707082.
2. *Малышев В. А.* Случайные графы и грамматики на графах. — Дискретн. матем., 1998, т. 10, в. 2, с. 31–44.
3. *Malyshev V. A.* Random infinite spin graph evolution. — On Dobrushin's Way. From Probability Theory to Statistical Physics. Ed. by R. Minlos et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000 (в печати).

Поступила в редакцию
16.XII.1999

МАНИА М., ТЕВЗАДЗЕ Р.***

СЕМИМАРТИНГАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КЛАССА ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ[1)]

Получены необходимые и достаточные условия на функцию $f = (f(t,x),\ t \geqslant 0,\ x \in \mathbf{R})$, для которой преобразованный процесс $f = f(t, \xi_t)$ будет семимартингалом (или процессом Ито) для любого диффузионного процесса ξ с измеримыми ограниченными коэффициентами и с гёльдеровой, равномерно невырожденной диффузией.

* Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии, ул. М. Алексидзе, 1, 380093 Тбилиси, Грузия; e-mail: mania@imath-srv.mi.acnet.ge
** Институт кибернетики, ул. Еули, 5, 380086 Тбилиси, Грузия.
1) Работа выполнена при поддержке Академии наук Грузии (гранты 1.10 и 1.26) и гранта INTAS-97-30204.